PAUL DIENES
VALÉRIE DIENES

Recherches nouvelles sur les singularités des fonctions analytiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 28 (1911), p. 389-457
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__389_0>

RECHERCHES NOUVELLES

SUR LES

SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

PAR PAUL ET VALÉRIE DIENES.

Introduction.

Le problème général dont nous nous occuperons dans la suite de ces recherches est de trouver des relations aussi générales que possible entre les propriétés des coefficients tayloriens et celles de la fonction complètement définie par ces coefficients numériques. Comme par les recherches de MM. Hadamard, Borel, Mittag-Leffler et Painlevé, pour ne mentionner ici que les chercheurs principaux, la représentation de la valeur de la fonction dans ses points réguliers, en partant de la série de Taylor, est en général effectuée et ainsi le problème général des points réguliers pour ainsi dire épuisé : le chemin à parcourir encore, ouvert justement par ces recherches, nous conduit à l'étude systématique et générale des singularités des fonctions analytiques.

Nous avons déjà commencé cette étude dans les deux derniers Chapitres de notre *Essai sur les singularités des fonctions analytiques* (paru dans le *Journal de Mathématiques*, 1909), et, pour rendre la lecture de ce qui va suivre indépendante de celle du premier essai, nous avons complété le texte par quelques redites insignifiantes.

Dans le premier Chapitre nous donnerons, sur les points critiques algébrico-logarithmiques situés au cercle de convergence, quelques théorèmes qui, ensemble, nous fourniront une vue assez complète sur la relation des coefficients tayloriens à la singularité étudiée; et remarquons dès le présent que nos résultats définitifs se rapporteront au cas le plus général où l'on ne fait aucune hypothèse sur la structure des coefficients.

Au deuxième Chapitre, à l'aide d'une représentation donnée par M. Mittag-Leffler, nous nous occuperons des points critiques algébrico-logarithmiques situés au sommet de l'étoile principale. Nous croyons que notre méthode, basée sur des recherches spéciales sur la croissance des fonctions entières, aura un intérêt plus large et ne s'épuisera pas à fournir les résultats généraux de ce Chapitre.

Enfin, les théorèmes généraux établis dans le troisième Chapitre feront voir quelles sont les relations précises qui subsistent entre une classe de représentations formée par M. Mittag-Leffler et par M. Painlevé et l'allure de la fonction dans un sommet de l'étoile. En particulier, le premier théorème donnera la solution complète d'un célèbre problème d'Abel, posé il y a presque un siècle et résolu partiellement par MM. Mittag-Leffler et Phragmèn.

Remarquons encore que les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences de Paris (*voir* les *Comptes rendus* des séances des 26 avril, 29 novembre 1909, 25 juillet 1910 et 13 février 1911).

CHAPITRE I.

DES POINTS CRITIQUES ALGÉBRICO-LOGARITMIQUES SITUÉS SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE ET SUR LE POLYGONE DE SOMMABILITÉ.

I.

1. Tout d'abord nous allons développer un calcul fondamental pour la suite, qui, d'une manière précise, nous donnera l'ordre de la croissance des s_n et de leurs moyennes arithmétiques formés pour la fonction

$$\frac{\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}.$$

Les s_n de la fonction

$$\log\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

sont

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n};$$

or, d'après l'égalité établie par Euler

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)=c, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_n}{\log n}=1. \tag{2}$$

Cherchons maintenant les s_n de la fonction

$$\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q.$$

On peut écrire que

$$\log\frac{1}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+R_n(x);$$

d'où, en développant le binome

$$\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q=\left(x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}\right)^q$$
$$+q\left(x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}\right)^{q-1}R_n(x)+\ldots+[R_n(x)]^n.$$

Les termes de la forme Cx^k, $k\leqq n$, se trouvent sans exception dans la première parenthèse; donc, les coefficients étant positifs, on a pour x positif et inférieur ou égal à 1

$$s_n^{(q)}(x)\leqq\left(x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}\right)^q,$$

d'où en particulier

$$s_n^{(q)}\leqq\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^q,$$

et d'après (1)

$$s_n^{(q)}\leqq(\log n+c')^q \qquad (c'>c)$$

ou enfin

$$\limsup_{n=\infty}\frac{s_n^{(q)}}{[\log n]^q}\leqq 1. \tag{3}$$

Cherchons maintenant la limite inférieure. On peut écrire

$$\log\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{\frac{n}{q}}}{\frac{n}{q}} + R_{\frac{n}{q}}(x),$$

où, à la rigueur, au lieu de $\frac{n}{q}$ il faut prendre sa partie entière. On en conclut comme auparavant que

$$s_n^{(q)}(x) \geqq \left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{\frac{n}{q}}}{\frac{n}{q}}\right)^q,$$

car il y a des termes de degré inférieur à n, qui sont négligés. En particulier

$$s_n^{(q)} \geqq \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\frac{n}{q}}\right)^q$$

ou encore

$$s_n^{(q)} \geqq \left(\log\frac{n}{q} + c'\right)^q = (\log n - \log q + c')^q;$$

d'où l'on conclut que

$$\liminf_{n=\infty} \frac{s_n^{(q)}}{[\log n]^q} \geqq 1.$$

Donc, d'après (3), on a pour la limite cherchée

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(q)}}{[\log n]^q} = 1.$$

2. Regardons les s_n de la fonction

$$\frac{\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho},$$

que nous désignerons par $s_n^{q,\rho}$. Nous avons vu que d'après (4)

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(q)}}{[\log n]^q} = 1,$$

et l'on sait que pour les s_n de la fonction $\frac{1}{(1-x)\rho}$ on a

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(\rho)}}{n^\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}.$$

A l'aide de ces deux limites nous allons calculer la croissance de $s_n^{q,\rho}$. Tout d'abord

(6) $$s_n^{q,\rho} \leqq s_n^{(q)} s_n^{(\rho)}.$$

En effet, on peut écrire

$$\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q \frac{1}{(1-x)^\rho} = [\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + R_n(x)] \times [\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n + R'_n(x)],$$

où les α et les β sont positifs. On en conclut à (6), et, grâce à (4) et à (5), nous avons

(7) $$\limsup_{n=\infty} \frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho [\log n]^q} \leqq \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}.$$

3. Pour trouver la limite inférieure soit k un nombre plus grand que 1, $\varepsilon(n)$ la partie entière de n, et enfin soient

$$\varepsilon\left(\frac{k-1}{k} n\right) = r,$$
$$\varepsilon\left(\frac{n}{k}\right) = s;$$

nous allons démontrer que

(8) $$s_n^{q,\rho} > s_r^{(q)} s_s^{(\rho)}.$$

La fonction envisagée peut s'écrire

$$\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q \frac{1}{(1-x)^\rho} = [\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r + R_r(x)] \times [\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_s x^s + R_s(x)].$$

La plus grande puissance de x qui se trouve dans le produit

$$[\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r][\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_s x^s]$$

est

$$r + s \leqq \frac{k-1}{k} n + \frac{n}{k} = n.$$

D'où il ressort en particulier pour $x = 1$ que

$$s_n^{q,\rho} > s_r^{(q)} s_s^{(\rho)}.$$

Mais, pour éliminer r, on peut écrire

$$r = \eta \frac{k}{k-1} n,$$

où η tend vers l'unité quand n devient infini, donc,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log r}{\log n} = 1, \tag{9}$$

et, pour éliminer s, écrivons

$$s = \frac{n}{k} + \eta,$$

où η est inférieur à l'unité, d'où

$$\lim_{n=\infty} \frac{s}{n} = \frac{1}{k}. \tag{10}$$

Les égalités, identiques d'ailleurs à (4) et à (5),

$$\lim_{r=\infty} \frac{s_r^{(q)}}{[\log r]^q} = 1$$

et

$$\lim_{s=\infty} \frac{s_s^{(\rho)}}{s^\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)},$$

se transforment donc, grâce à (9) et (10), en

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_r^{(q)}}{[\log n]^q} = 1$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_s^{(\rho)}}{n^\rho} = \frac{1}{k^\rho \Gamma(\rho+1)}.$$

Si l'on divise l'inégalité (8) par $(\log n)^q n^\rho$, on obtient

$$\liminf_{n=\infty} \frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho [\log n]^q} \geqq \frac{1}{k^\rho \Gamma(\rho+1)}. \tag{11}$$

Cette inégalité, combinée avec (7), nous montre que, pour n assez grand, le rapport

$$\Gamma(\rho+1) \frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho [\log n]^q}$$

est entre $\frac{1}{k^\rho}$ et 1. Mais k est aussi près de l'unité qu'on veut, d'où il est évident enfin que

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho[\log n]^q} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}. \tag{12}$$

4. On peut généraliser ce résultat pour les moyennes arithmétiques $\sigma_n^{(\alpha)}$, définies par les équations

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\alpha)} x^n,$$

et

$$\sigma_n^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha+1)\frac{S_n^{(\alpha)}}{n^\alpha}.$$

En effet, par définition, les $S_n^{(\alpha)}$ de la fonction

$$\frac{\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}$$

sont précisément les s_n de la fonction

$$\frac{\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^{\rho+\alpha}};$$

donc, d'après (12),

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(\alpha)}}{n^{\rho+\alpha}[\log n]^q} = \frac{1}{\Gamma(\rho+\alpha+1)}$$

et enfin

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n^{(\alpha)}}{n^\rho[\log n]^q} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\rho+\alpha+1)}, \tag{13}$$

formule générale que nous avons cherchée.

II.

5. Prenons maintenant la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dont le rayon de convergence soit l'unité. Supposons qu'au point 1 la fonction puisse s'écrire

$$(\mathrm{A}) \qquad f(x) = \mathrm{A}_q\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q + \mathrm{A}_{q-1}\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^{q-1} + \ldots + \mathrm{A}_1 \log\frac{1}{1-x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

où

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est d'ordre négatif (ou régulier) au point 1. Nous dirons que le point 1 est un point logarithmique d'ordre q de la fonction $f(x)$.

Supposons pour un moment que

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

On peut voir facilement que les b_n satisfont à la même condition. En effet, la fonction

$$\mathrm{A}_q\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q + \ldots + \mathrm{A}_1 \log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

est d'ordre zéro ([1]) donc, d'après un théorème fondamental de M. Hadamard ([2]),

$$|c_n| < n^{-1+\varepsilon},$$

ε étant arbitrairement petit, c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0,$$

d'où l'on conclut que réellement

$$\lim_{n=\infty} b_n = \lim_{n=\infty} [a_n - c_n] = 0.$$

Mais nous avons démontré ([3]) que, si les coefficients tendent vers

---

([1]) J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892.

([2]) *Id.*, p. 71.

([3]) *Voir* notre *Essai*, déjà cité, *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. V, 1909, p. 362.

zéro, la série de Taylor converge en chaque point d'ordre négatif du cercle, ce qui revient à dire que la limite

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty} s'_n = \lim_{n=\infty}[b_0 + b_1 + \ldots + b_n] = f_1(1)$$

existe.

Nous savons d'autre part que les $s_n^{(i)}$ de la fonction

$$\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^i$$

croissent exactement comme $[\log n]^i$ et que les s_n de $f(x)$ sont donnés par l'équation

$$s_n = A_q s_n^{(q)} + A_{q-1} s_n^{(q-1)} + \ldots + A_1 s_n^{(1)} + s'_n.$$

En divisant par $(\log n)^q$ on obtient

$$(15)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{s_n}{[\log n]^q} = A_q.$$

Inversement, si la limite (15) existe, la fonction

$$f(x) - A_q\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q = f_1(x)$$

ne devient pas infinie d'ordre q, c'est-à-dire

$$\lim_{x=1}\frac{f_1(x)}{\left[\log\frac{1}{1-x}\right]^q} = 0,$$

si, à l'intérieur du cercle, sans toucher la circonférence, on s'approche du point 1.

En effet, les s'_n de $f_1(x)$ sont égaux, quant à leur croissance, à celle de

$$s_n - A_q[\log n]^q,$$

par suite

$$\lim_{n=\infty}\frac{s'_n}{[\log n]^q} = 0,$$

donc, d'après un théorème de Cesàro [1],

$$\lim_{x=1} \frac{\dfrac{f_1(x)}{1-x}}{\dfrac{\left[\log \dfrac{1}{1-x}\right]^q}{1-x}} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

La relation (15) montre donc que, *dans le cas où les coefficients tendent vers* 0, *les* s_n *décèlent déjà les points critiques logarithmiques d'ordre quelconque et permettent de déterminer la partie dominante de la singularité.*

6. Si les coefficients, au lieu de tendre vers 0, satisfont à la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^k} = 0, \tag{16}$$

ce sont les moyennes arithmétiques d'ordre k (k étant un nombre positif quelconque), qui ont une relation très simple à la singularité étudiée.

En effet, on voit, comme auparavant, que les b_n satisfont aussi à la condition (16), et nous avons démontré [2] que, dans ce cas, les moyennes arithmétiques d'ordre k ont déjà une limite pour $n = \infty$ en chaque point d'ordre négatif du cercle de convergence. Donc les moyennes arithmétiques $\sigma_n'^{(k)}$ formées pour la fonction $f_1(x)$ au point 1 donnent pour limite zéro, si on les divise par $[\log n]^q$.

D'autre part, les moyennes arithmétiques d'ordre k, $\sigma_n^{i,k}$ de la fonction

$$\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^i$$

ont, d'après (13), pour ordre de croissance le nombre i, et les moyennes arithmétiques d'ordre k, $\sigma_n^{(k)}$, de la fonction $f(x)$ se forment des moyennes $\sigma_n^{i,k}$, $\sigma_n'^{(k)}$ d'une manière linéaire. En effet, la formation des moyennes arithmétiques est une opération distributive (c'est-à-dire

---

(1) *Voir* par exemple Borel, *Série à termes positifs*, p. 66, Paris, Gauthier-Villars, 1902.
(2) *Loc. cit.*, p. 364.

linéaire dans les coefficients), d'où

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n^{(k)}}{[\log n]^q} = A_q. \tag{17}$$

Inversement, si cette limite existe, les moyennes arithmétiques d'ordre k de la fonction

$$f_1(x) = f(x) - A_q \left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q$$

divisées par $[\log n]^q$ tendent vers zéro. Ceci montre que

$$\lim_{x=1} \frac{f_1(x)}{\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q} = 0.$$

Donc, *si les coefficients satisfont à la condition* (16), *les moyennes arithmétiques d'ordre k décèlent les points critiques logarithmiques d'ordre quelconque et permettent de déterminer la partie dominante de la singularité.*

7. Soit maintenant le point 1 un point critique algébrico-logarithmique de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

c'est-à-dire supposons qu'on puisse écrire

$$f(x) = \frac{P_q\left[\log \frac{1}{1-x}\right]}{(1-x)^\rho} + \frac{P_{q_1}\left[\log \frac{1}{1-x}\right]}{(1-x)^{\rho_1}} + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{B}$$

où $P_i[z]$ est un polynome de degré i en z, A_q étant le coefficient de z^q; ρ, ρ_i sont des nombres positifs en nombre fini ($\rho < \rho_i$) et la fonction

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

est déjà d'ordre négatif au point 1.

Supposons de nouveau pour un moment que

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

ce qui entraîne $\rho < 1$. On a

$$s_n = s_n^{q,\rho} + s_n^{q_1,\rho_1} + \ldots + s'_n \tag{18}$$

et, d'après (12),

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{q,\rho}}{n^\rho [\log n]^q} = \frac{A_q}{\Gamma(\rho+1)}, \tag{19}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{q_i,\rho_i}}{n^\rho [\log n]^q} = 0 \tag{20}$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{s'_n}{n^\rho [\log n]^q} = 0. \tag{21}$$

En effet, on peut considérer les termes du polynome P_q séparément et appliquer ainsi la relation fondamentale (12). On trouve tout de suite que la croissance des s_n du premier terme surpasse celle de tous les autres, ce qui nous donne (19); de même que la même remarque appliquée aux autres polynomes démontre immédiatement l'équation (20); enfin, notre théorème déjà cité sur les singularités d'ordre négatif nous assure que $\lim\limits_{n=\infty} s'_n$ existe et, *a fortiori*, la limite (21).

L'égalité (18) jointe aux dernières donne visiblement

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^\rho [\log n]^q} = \frac{A_q}{\Gamma(\rho+1)}. \tag{22}$$

Inversement, il est facile à voir que, si cette limite existe, il en résulte que

$$\lim_{x=1} \frac{f(x) - \dfrac{A_q\left[\log \dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}}{\dfrac{\left[\log \dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}} = 0.$$

Donc, la partie dominante de la fonction est bien

$$\frac{A_q\left[\log \dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}.$$

Si les coefficients tendent vers o, les s_n nous décèlent déjà les points *critiques algébrico-logarithmiques et permettent de déterminer la partie dominante de la singularité.*

8. Supposons, cette fois, que les coefficients, au lieu de tendre vers o, satisfassent à la condition (16). Pour ne pas allonger outre mesure la démonstration, nous n'allons examiner que le cas où ρ est entier, c'est-à-dire où le point 1 est un pôle logarithmique de la fonction envisagée; d'autant plus que, dans la suite, nous établirons une proposition générale sur les points critiques algébrico-logarithmiques, où ρ pourra être quelconque et où nous ne ferons aucune hypothèse sur les a_n.

Sous les conditions indiquées les moyennes arithmétiques d'ordre k, $\sigma_n'^{(k)}$, formées pour la fonction $f_1(x)$ au point 1 tendent déjà vers une limite bien déterminée. Mais, par définition,

$$\sigma_n^{(k)} = \frac{\Gamma_{(k+1)} S_n^{(k)}}{n^k},$$

où, en général, les $S_n^{(k)}$ des constantes a_n sont déterminées par l'équation

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n,$$

de sorte que

$$S_n^{(k)} = S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \ldots + S_n^{(k-1)}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(k-i)}}{n^k} = 0 \qquad (i \text{ entier}),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n^{(k-i)}}{n^i} = 0,$$

dès que la limite de $\sigma_n^{(k)}$ existe pour $n = \infty$.

On voit donc en particulier que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n'^{(k-\rho)}}{n^\rho} = 0$$

et *a fortiori*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n'^{(k-\rho)}}{n^\rho [\log n]^q} = 0. \tag{23}$$

Formons maintenant les $\sigma_n^{(k-\rho)}$ de la fonction donnée par la formule (B). D'après (13), les $\sigma_{n,q,\rho}^{(k-\rho)}$ des fonctions

$$A_q \frac{\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}, \qquad A_{q-i} \frac{\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^{q_i}}{(1-x)^{\rho_i}}$$

satisfont aux égalités

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_{n,q,\rho}^{(k-\rho)}}{n^\rho [\log n]^q} = \frac{\Gamma(k-\rho+1)}{\Gamma(k+1)} A_q$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_{n,q_i,\rho_i}^{(k-\rho)}}{n^\rho [\log n]^q} = 0.$$

En combinant ces deux résultats avec l'équation (23), on trouve que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n^{(k-\rho)}}{n^\rho [\log n]^q} = \frac{\Gamma(k-\rho+1)}{\Gamma(k+1)} A_q. \tag{24}$$

9. Inversement, l'existence de la dernière limite a pour conséquence que la partie dominante de la fonction est bien

$$A_q \frac{\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}.$$

En effet, les moyennes arithmétiques d'ordre $k-\rho$ de la fonction

$$f_1(x) = f(x) - A_q \frac{\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}$$

sont

$$\sigma_n'^{(k-\rho)} = \sigma_n^{(k-\rho)} - A_q \sigma_{n,q,\rho}^{(k-\rho)}.$$

Donc, en divisant par $n^\rho [\log n]^q$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n'^{(k-\rho)}}{n^\rho [\log n]^q} = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\sigma_n^{(k-\rho)}}{n^\rho [\log n]^q} - A_q \frac{\sigma_{n,q,\rho}^{(k-\rho)}}{n^\rho [\log n]^q} \right] = 0.$$

C'est-à-dire, d'après la constitution des moyennes arithmétiques,

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n'^{(k-\rho)}}{n^k [\log n]^q} = 0.$$

D'autre part, on a

$$\frac{f_1(x)}{\dfrac{A_q\left[\log\dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}} = \frac{\dfrac{f_1(x)}{(1-x)^{k-\rho+1}}}{\dfrac{A_q\left[\log\dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^{k+1}}} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n'^{(k-\rho)} x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n},$$

où

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_n}{n^k[\log n]^q} = \frac{A_q}{\Gamma(k+1)}.$$

Par suite, d'après le théorème de Cesàro déjà cité,

$$\lim_{x=1} \frac{f_1(x)}{\dfrac{A_q\left[\log\dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}} = \lim_{n=\infty} \frac{S_n'^{(k-\rho)}}{C_n} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

De ce que l'on vient de lire, il ressort que *si les coefficients satisfont à la condition* (16), *les moyennes arithmétiques d'ordre* $(k-\rho)$ *décèlent déjà les pôles logarithmiques et permettent de déterminer la partie dominante de la singularité.*

III.

10. Nos résultats obtenus jusqu'ici supposent essentiellement que la croissance des coefficients tayloriens soit finie (16). Dans ce qui va suivre *nous ne ferons aucune hypothèse sur les coefficients*, de sorte que toutes les propositions que nous allons établir s'appliqueront à une série de Taylor quelconque.

Tout d'abord, à l'aide de la sommation exponentielle simple et généralisée de M. Borel [1], nous allons étudier les points critiques algébrico-logarithmiques situés sur le cercle de convergence, ou, plus généralement, sur le polygone de sommabilité. Pour cela, nous avons à calculer, au point 1, les sommes exponentielles $B^{q,\rho}(a, 1)$ de la fonc-

---

[1] *Voir* par exemple Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Chap. III, Paris, Gauthier-Villars, 1901.

tion

$$\frac{\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^{q}}{(1-x)^{\rho}}.$$

Commençons par le cas le plus simple $\rho = 0$, $q = 1$, où un calcul élémentaire basé sur la forme d'intégrale des sommes exponentielles nous conduit déjà au résultat voulu.

Les coefficients de la fonction en question étant $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$ la somme cherchée se calcule par une intégrale (¹)

$$B^{(1)}(a, 1) = \int_0^a e^{-a}\left[a + \frac{a^2}{2.2!} + \dots\right] da.$$

Comme nous n'examinons que la croissance de $B^{(1)}(a, 1)$, au lieu d'effectuer cette intégration, il suffit de calculer la somme exponentielle de la fonction

$$\frac{1}{x}\log\frac{1}{1-x} = \log\frac{1}{1-x} + \frac{1-x}{x}\log\frac{1}{1-x}.$$

En effet, comme on voit facilement, le second terme du second membre est d'ordre -1, de sorte que sa somme exponentielle tend vers la limite 0 de la fonction

$$\lim_{x=1}\frac{x-1}{x}\log\frac{1}{1-x} = 0,$$

d'après notre théorème sur les points singuliers d'ordre négatif(²).

Mais la somme exponentielle $B'(a, 1)$ de

$$\frac{1}{x}\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

est

$$B'(a, 1) = \int_0^a e^{-a}\left[\frac{a}{2!} + \frac{a^2}{3!} + \frac{a^3}{4!} + \dots\right] da = \int_0^a e^{-a}\frac{e^a - 1}{a}\, da = \int_0^a \frac{1-e^{-a}}{a}\, da.$$

Cette intégrale se calcule facilement. En effet, d'après le développe-

(¹) BOREL, *Loc. cit.*, p. 98.
(²) DIENES, *Loc. cit.*, p. 366.

ment en série de la fonction sous le signe $\int$,

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-a}}{a}\,da = \text{const.}, \qquad \lim_{a=\infty}\int_1^a \frac{e^{-a}}{a}\,da = \text{const.},$$

de sorte que

$$\lim_{a=\infty}\frac{B^{(1)}(a,1)}{\log a} = 1. \tag{25}$$

11. Passons maintenant au cas général. Par définition, les sommes exponentielles de notre fonction sont

$$B^{q,\rho}(a,1) = e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{q,\rho}\frac{a^n}{n!},$$

où a tend vers l'infini.

La croissance de $B^{q,\rho}(a,1)$ est égale à celle de la fonction

$$\frac{e^{-a}}{\Gamma(\rho+1)}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\rho}[\log n]^q\frac{a^n}{n!}.$$

En effet, d'après un théorème de Cesàro, étendu par nous aux fonctions entières (¹),

$$\lim_{x=\infty}\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \lim_{n=\infty}\frac{a_n}{b_n}, \tag{26}$$

si la dernière limite existe, et si les b_n sont positifs. Mais, d'après (12),

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_n^{q,\rho}}{\frac{1}{\Gamma(\rho+1)}n^{\rho}[\log n]^q} = 1,$$

ce qui justifie la remarque précédente.

Dans notre *Essai* (²), nous avons démontré que, pour p positif quel-

(¹) *Id.*, p. 366.
(²) *Id.*, p. 400.

conque et pour $k > 1$,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\frac{a}{k}} n^p \frac{a^n}{n!}}{e^a} = 0$$

et

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=ka}^{\infty} n^p \frac{a^n}{n!}}{e^a} = 0,$$

de sorte qu'en prenant $p > \rho$, on voit que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=\frac{a}{k}}^{ka} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}} = 1.$$

D'autre part,

$$\frac{a^\rho}{k^\rho}\left[\log\frac{a}{k}\right]^q \sum_{n=\frac{a}{k}}^{ka} \frac{a^n}{n!} < \sum_{n=\frac{a}{k}}^{ka} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!} < k^\rho a^\rho [\log ka]^q \sum_{n=\frac{a}{k}}^{ka} \frac{a^n}{n!},$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}}{e^a a^\rho [\log a]^q} \leqq k^\rho$$

et

$$\liminf_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}}{e^a a^\rho [\log a]^q} \geqq \frac{1}{k^\rho},$$

car

$$\lim_{a=\infty} \frac{[\log a \pm \log k]^q}{[\log a]^q} = 1,$$

d'où, k étant aussi voisin de l'unité que l'on veut,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\rho [\log n]^q \frac{a^n}{n!}}{e^a a^\rho [\log a]^q} = 1.$$

On entrevoit donc facilement que

$$\lim_{a=\infty} \frac{B^{q,\rho}(a, 1)}{a^\rho[\log a]^q} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}. \tag{27}$$

12. Pour ne pas interrompre la marche des raisonnements ultérieurs, calculons ici les sommes exponentielles généralisées d'ordre r de la fonction

$$\frac{\left[\log \frac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}$$

au point 1.

Par définition, cette somme s'écrit

$$B_r^{q,\rho}(a, 1) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}^{q,\rho} \frac{a^{rn}}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Mais la relation (12) montre que sa croissance est égale à celle de

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} [rn]^\rho[\log rn]^q \frac{a^{rn}}{n!}}{\Gamma(\rho+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Posons $a^r = b$, et prenons $\log n$ au lieu de $\log n + \log r$; nous aurons à examiner la croissance de

$$\frac{r^\rho \sum_{n=1}^{\infty} n^\rho[\log n]^q \frac{b^n}{n!}}{\Gamma(\rho+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}},$$

de sorte que

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_r^{q,\rho}(a, 1)}{b^\rho[\log b]^\rho} = \frac{r^\rho}{\Gamma(\rho+1)}$$

ou bien, en remplaçant b par a^r,

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_r^{q,\rho}(a, 1)}{a^{r\rho}[\log a]^q} = \frac{r^{\rho+q}}{\Gamma(\rho+1)}. \tag{28}$$

13. Ces calculs effectués, établissons notre théorème général sur les points critiques algébrico-logarithmiques situés sur le polygone de sommabilité.

Soit donnée la fonction mise sous la forme

$$\text{(C)}\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{P_q\left[\log \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\rho}} + f_1(x),$$

où x_0 est un point singulier situé sur un côté (et non à un sommet) du polygone de sommabilité, $P_q(z)$ un polygone en z de degré q, A_q étant le coefficient de z^q, et $f_1(x)$ est d'ordre $\rho' < \rho$ au point x_0.

D'après la dernière hypothèse selon la définition générale de l'ordre (¹)

$$f_1(x) = f_2(x) + f_3(x),$$

où $f_2(x)$ est régulière à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$ et d'ordre $\rho' + \varepsilon < \rho$ sur la circonférence; $f_3(x)$ est régulier au point x_0. Par suite, les sommes exponentielles de $f_3(x)$ formées en x_0 tendent vers $f_3(x_0)$ et, divisées par une quantité qui tend vers l'infini, deviennent o.

D'autre part, les $s_n^{(2)}(x_0)$, formées pour la fonction $f_2(x)$ au point x_0, satisfont à la condition

$$(29)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(2)}(x_0)}{n^{\rho}} = 0.$$

En effet,

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n z^n;$$

exprimons maintenant que son ordre sur le cercle de rayon 1 (au plan de z) est $\rho' + \varepsilon < \rho$. On aura

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log|b_n x_0^n|}{\log n} = \rho' + \varepsilon - 1 < \rho - 1.$$

Donc, pour n assez grand,

$$|b_n x_0^n| < n^{\rho-1-\varepsilon'},$$

(¹) P. Dienes, *Loc. cit.*, p. 370.

ε' arbitrairement petit. Ce qui montre immédiatement que, pour n assez grand,

$$|s_n^{(2)}(x_0)| = |b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_n x_0^n| < n^{\rho - \varepsilon'},$$

comme il fallait démontrer.

Formons les sommes

$$B^{(2)}(a, x_0) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(2)}(x_0) \frac{a^n}{n!}}{e^a};$$

on a

$$|B^{(2)}(a, x_0)| < \frac{P(a) + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\rho-\varepsilon'} \frac{a^n}{n!}}{e^a},$$

$P(a)$ étant un polynome.

Mais nous avons démontré ailleurs (¹) que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\rho-\varepsilon'} \frac{a^n}{n!}}{a^\rho e^a} = \lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\rho-\varepsilon'} \frac{a^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\rho} \frac{a^n}{n!}} = 0,$$

d'où enfin

$$\lim_{a=\infty} \frac{B^{(2)}(a, x_0)}{a^\rho} = 0.$$

Les sommes exponentielles de la fonction envisagée sont

$$B(a, x_0) = A_q B^{q,\rho}(a, x_0) + B^{(2)}(a, x_0) + B^{(3)}(a, x_0);$$

donc, d'après (27) et (29),

$$(30) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{B(a, x_0)}{a^\rho [\log a]^q} = \frac{A_q}{\Gamma(\rho + 1)}.$$

C'est la relation générale cherchée entre les points critiques algébrico-logarithmiques situés sur le polygone de sommabilité d'une part, et les coefficients tayloriens qui figurent dans $B(a, x_0)$, *de l'autre.*

On voit sans difficulté que la formule (C) contient, comme cas particulier, les pôles, les points critiques logarithmiques, les pôles loga-

(¹) *Id.*, p. 402.

rithmiques, les points critiques algébriques et les points critiques algébrico-logarithmiques, sans qu'elle soit épuisée par les singularités énumérées. Nous remarquons que, tout en satisfaisant aux conditions indiquées, le point x_0 peut être situé même sur une ligne singulière. Au fond, il ne s'agit que de la partie dominante de la singularité, c'est-à-dire de la partie qui montre de quelle manière la fonction devient infinie au point envisagé.

14. Le théorème général démontré précédemment est valable pour une série de Taylor quelconque définissant une fonction analytique, mais il a le défaut de ne s'appliquer qu'aux points singuliers situés sur le cercle de convergence ou sur le polygone de sommabilité; par contre, il a une remarquable simplicité, grâce à l'idée ingénieuse de M. Borel d'employer pour fonction sommatrice la fonction exponentielle, e^x. Il ne nous reste que de chercher à étendre le champ où peuvent être situés les points singuliers de la nature indiquée, pour qu'ils puissent être atteints par une méthode analogue à la précédente et dans la généralité et dans la simplicité. Une pareille généralisation nous est fournie immédiatement par la sommation exponentielle généralisée de M. Borel (¹) où l'on prend pour fonction sommatrice e^{a^r} au lieu de e^a, c'est-à-dire où la fonction $f(x)$ est représentée, dans un domaine assez étendu, par la formule

$$f(x) = \lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} s_{rn}(x_0)\frac{a^{rn}}{n!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!}}.$$

Soit x_0 un point singulier de la fonction envisagée où elle s'écrit sous la forme (C). Faisons une supposition analogue à celle qui exige que le point singulier envisagé ne coïncide pas avec un sommet du polygone de sommabilité, c'est-à-dire supposons que x_0 ne soit exclu du domaine de sommabilité exponentielle d'ordre r que par l'effet de la singularité à ce point. Plus précisément, supposons que le domaine

(¹) BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 129, Paris, Gauthier-Villars, 1901.

de sommabilité d'ordre r de $f_3(x)$ contienne déjà x_0 à son intérieur. Dans des cas pareils nous dirons que x_0 est atteint par cette sommation.

Dans ces conditions, à l'aide (28), on peut refaire le raisonnement précédent qui nous a conduit à la relation (30), et l'on obtient ainsi l'égalité

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_r(a, x_0)}{a^{r\rho}[\log a]^q} = \frac{r^{\rho+q}}{\Gamma(\rho+1)} A_q, \tag{31}$$

qui est la généralisation de (30) avec lequel elle coïncide d'ailleurs pour $r = 1$.

On voit par la dernière formule que les sommes exponentielles généralisées $B_r(a, x_0)$, *formées en un point singulier atteint par la méthode, sont en relation simple avec la structure de la singularité dont elles permettent de déterminer la partie dominante.*

Dans la notation introduite par M. Borel (¹), nous pouvons exprimer le résultat comme il suit.

Si la croissance de la fonction est

$$\rho + q\frac{1}{\omega},$$

celle des sommes exponentielles généralisées d'ordre r *est* r *fois plus grand :* en effet,

$$\left[\rho + q\frac{1}{\omega}\right] r = \rho r + q\frac{1}{\omega} r,$$

et le second membre de la dernière égalité est le symbole de la croissance de

$$a^{r\rho}[r\log a]^q,$$

pour $a = \infty$.

15. On sait que la portée des sommes exponentielles généralisées peut bien surpasser celle des sommes exponentielles simples. Par exemple, si l'ensemble des points singuliers de la fonction n'a d'autres points limites que l'infini, ou, s'il ne contient qu'un nombre fini de points, les points qui peuvent être atteints par la méthode, comme

(¹) *Voir* Borel, *Leçons sur la théorie de la croissance*, Chap. I, Paris, Gauthier-Villars, 1910.

l'a montré M. Borel, sont aussi près d'un point quelconque du plan complexe que l'on veut. D'autre part, la relation (31), quoique plus compliquée que (30), ne laisse pas beaucoup à désirer en ce qui concerne la simplicité.

Ce que nous avons à faire encore dans cette direction, c'est de nous affranchir le plus complètement possible des restrictions relatives à la situation de la singularité étudiée. Comme, pour étudier un point singulier, nous avons besoin d'une représentation de la fonction dans des points réguliers tendant vers le point en question, et comme toutes ces représentations se font par des fonctions entières (ou polynomes), c'est-à-dire par des fonctions uniformes, il est impossible aujourd'hui qu'on puisse soumettre à ces recherches le plan complexe entier.

Une autre exigence, la simplicité des résultats, rend nécessaire un choix définitif entre les représentations connues, surtout si l'on veut examiner des singularités moins simples. Dans le Chapitre suivant nous allons montrer qu'il y a bien une méthode qui satisfait à toutes ces exigences, la méthode de sommation de M. Mittag-Leffler ayant beaucoup d'analogie avec la sommation exponentielle de M. Borel.

CHAPITRE II.

DES POINTS CRITIQUES ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUES SITUÉS AUX SOMMETS DE L'ÉTOILE.

IV.

16. Depuis les travaux devenus si vite classiques de M. Mittag-Leffler sur la représentation des fonctions analytiques, la voie est ouverte à des recherches plus générales et plus méthodiques relatives aux singularités. Il y avait cependant à craindre que les séries de polynomes ou de fonctions entières dont on se sert dans ces représentations ne fournissent un moyen par trop compliqué pour pouvoir engendrer des relations simples et générales. Dans notre *Essai sur les*

singularités (1) nous avons réussi à montrer que la méthode spéciale de représentation, donnée par M. Mittag-Leffler dans sa cinquième Note (2), ce que nous pouvons appeler, à cause de sa grande analogie avec la sommation exponentielle, la méthode de sommation générale (M), permet d'établir, dans le cas des pôles et sans aucune hypothèse accessoire, une relation de la nature indiquée.

Le but de ce Chapitre est d'étendre ce résultat relatif aux pôles à des singularités plus compliquées, comme les points critiques logarithmiques, pôles logarithmiques et points critiques algébrico-logarithmiques. Nous commencerons par les points critiques logarithmiques.

17. Supposons que la fonction puisse s'écrire sous la forme

$$(\mathrm{A})\qquad f(x)=\mathrm{A}_q\left[\log\frac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]^q+\mathrm{A}_{q-1}\left[\log\frac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]^{q-1}+\ldots+f_1(x),$$

où l'ordre de $f_1(x)$ au point x_0 est négatif.

Prenons la représentation de M. Mittag-Leffler, citée tout à l'heure, qui consiste dans le théorème d'après lequel, x étant l'affixe d'un point à l'intérieur de l'étoile, on a

$$f(x)=\lim_{a=\infty}\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)\,c_n\,a^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,a^n},$$

où la fonction sommatrice

$$\varphi(a)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,a^n$$

est une fonction entière d'ordre infini, à coefficients positifs, satisfaisante aux deux conditions suivantes :

1° $\varphi(a)$ a pour limite zéro quand x tend vers l'infini, le long d'un vecteur quelconque, autre que l'axe réel positif;

(1) *Journal de Mathématiques*, 1909.

(2) MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction monogène*, 5e Note (*Acta Mathematica*, t. XXIX, 1905, p. 173).

2° ω étant positif,

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{\varphi(\omega x)}{\varphi(\omega)} = 0,$$

d'une manière uniforme, tant que x appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel compris entre $x = 1$ et $+\infty$.

Nous avons démontré (1) que la fonction entière étudiée par M. Lindelöf (2)

$$L_\beta(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}, \qquad \beta > 1,$$

satisfait à toutes les conditions énumérées de sorte qu'elle peut nous servir comme fonction sommatrice.

D'après (12),

$$s_n(x_0) = A_q[\log n]^q + A_{q-1}[\log n]^{q-1} + \ldots + \varepsilon(n) + s'_n(x_0),$$

où

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon(n)}{[\log n]^q} = 0.$$

On a par suite pour les sommes générales (M) formées en x_0

$$M(a, x_0) = \frac{A_q \sum_{n=0}^{\infty} [\log n]^q \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n} + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(n) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n} + \sum_{n=0}^{\infty} s'_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}. \tag{32}$$

18. Démontrons tout d'abord que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [\log n]^q \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{a^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = 1. \tag{33}$$

Comme

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\log(n+\beta)}{\log n}\right]^q = 1,$$

(1) *Loc. cit.*, p. 394.

(2) E. Lindelöf, *Le calcul des résidus*. Paris, Gauthier-Villars, 1905, p. 121

on a, d'après le théorème de Cesàro déjà cité,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [\log n]^q \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} [\log(n+\beta)]^q \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = 1.$$

On peut donc prendre au numérateur du rapport envisagé, au lieu de $[\log n]^q$, la quantité $[\log(n+\beta)]^q$, de sorte qu'il nous reste à démontrer que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n-q}}}{a^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = 1,$$

ce qui est évident si l'on fait la remarque suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n-q}} = \mathfrak{P}_{q-1}(a) + a^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta+q)]^n},$$

où $\mathfrak{P}_{q-1}(a)$ est un polynome en a de degré $(q-1)$ et, d'après le même théorème de Cesàro,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta+q)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\log(n+\beta)}{\log(n+\beta+q)} \right]^n = 1.$$

Une conséquence du dernier résultat est que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [\log n]^i \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{a^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = 0,$$

si $i < q$, de sorte que les q premiers termes de (32) divisés par a^q donnent pour limite le coefficient A_q.

19. Passons aux deux derniers termes. On a

$$\lim_{a=\infty} \frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(n) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}\right|}{a^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}$$

$$\leqq \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon(n)| \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=1}^{\infty} [\log n]^q \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \lim_{n=\infty} \frac{|\varepsilon(n)|}{[\log n]^q} = 0.$$

Enfin, on peut poser

$$f_1(x) = f_2(x) + f_3(x),$$

où $f_2(x)$ est régulier à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$ et est d'ordre négatif sur le cercle, de sorte que

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(2)}(x_0) = f_2(x_0),$$

et, *a fortiori*,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(2)}(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = f_2(x_0); \tag{34}$$

d'autre part, $f_3(x)$ est régulier en x_0, et ce point est situé à l'intérieur de l'étoile de $f_3(x)$, de sorte que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(3)}(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = f_3(x_0), \tag{35}$$

c'est-à-dire, en combinant les deux dernières égalités, *les sommes générales* (M) *formées en un sommet d'ordre négatif de l'étoile convergent nécessairement et représentent la valeur limite de la fonction.*

Remarquons qu'on peut prendre pour fonction sommatrice une fonction entière quelconque satisfaisant aux conditions énumérées précédemment, sans que le dernier résultat cesse d'être valable.

Si l'on divise donc les sommes générales, formées en un sommet d'ordre négatif, par a^q, le rapport tendra vers zéro. Par suite, en tenant compte dans l'évaluation du second membre de (32) de tous ces résultats partiels, on a

$$\lim_{a=\infty} \frac{M(a, x_0)}{a^q} = A_q. \tag{36}$$

Les sommes générales $M(a, x_0)$ *formées en un point critique logarithmique d'ordre* q *croissent comme* a^q, *et la limite* (36) *nous fournit précisément le coefficient principal de manière que la partie dominante de la singularité est complètement déterminée par les sommes considérées.*

Ce résultat s'interprète encore comme il suit.

D'après le théorème de M. Mittag-Leffler, les fonctions entières $M(a, x)$, pour $a = \infty$, s'approchent indéfiniment de la valeur de la fonction au point x, si x est à l'intérieur de l'étoile. Si nous remplaçons x par l'affixe x_0 d'un sommet (qui est nécessairement un point singulier de la fonction), en général, la suite

$$\lim_{a=\infty} M(a, x_0) \tag{37}$$

n'aura pas de limite. Mais le problème général se pose : y a-t-il quelque relation simple entre la suite (37) et la structure de la singularité en x_0?

A cet égard, nous avons obtenu jusqu'ici deux résultats qui méritent d'être signalés.

Si le sommet est un point singulier d'ordre négatif, la fonction a une limite quand on s'approche de ce point du côté de l'origine et les sommes générales $M(a, x_0)$ représentent cette limite.

Si le sommet est un point critique logarithmique d'ordre q, les sommes deviennent infinies, et leur degré d'infinitude, tout en dépassant considérablement celui de la fonction, est caractéristique pour la singularité.

On voit déjà, et l'on verra encore dans la suite, comme le choix de la fonction sommatrice est important si l'on veut aboutir à des formules simples.

20. Nous traiterons encore brièvement le cas des pôles logarithmiques où la fonction a la forme

$$f(x)=\frac{\mathrm{P}_q\left[\log\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^\rho}+\frac{\mathrm{P}_{q_1}\left[\log\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^{\rho-1}}+\ldots+f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant déjà d'ordre négatif en x_0. La dernière hypothèse entraîne que les sommes générales (M) tendent vers une limite, c'est-à-dire

$$\lim_{a=\infty}\mathrm{M}^{(1)}(a, x_0)=f_1(x_0).$$

Reste à examiner les sommes générales relatives à la fonction

$$\frac{\left[\log\dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}\qquad(\rho \text{ entier}).$$

D'après le théorème de Cesàro, la croissance de $\mathrm{M}^{q,\rho}(a, x_0)$ est égale à celle de

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)\ldots(n+1)\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n-q}}}{\displaystyle\rho!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}},$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathfrak{L}_q(a)+\dfrac{d^\rho}{da^\rho}[a^{\rho+q}\mathrm{L}_{\beta+q}(a)]}{\rho!\,\mathrm{L}_\beta(a)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho}{da^\rho}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+\rho+q}}{[\log(n+\beta+q)]^n}\right\}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\rho+q)\ldots(n+q+1)a^{n+q}}{[\log(n+\beta+q)]^n}\\&=\sum_{m=q}^{\infty}\frac{(m+\rho)\ldots(m+1)a^m}{[\log(m+\beta)]^{m-q}}.\end{aligned}$$

Mais l'ordre de croissance de

$$\frac{d^\rho}{da^\rho}[a^{\rho+q}L_{\beta+q}(a)]$$

est égal à celui de

$$a^{\rho+q}\frac{d^\rho}{da^\rho}[L_{\beta+q}(a)],$$

comme on s'en assure aisément après avoir effectué la différentiation et remarqué que

$$\lim_{a=\infty}\frac{\dfrac{d^i}{da^i}L_\beta(a)}{\dfrac{d^\rho}{da^\rho}L_\beta(a)}=0,$$

si $\rho > i$. On obtient ainsi que la croissance cherchée est égale à celle de $a^{\rho+q}f_\rho(a)$, où on a posé

$$\frac{\dfrac{d^\rho}{da^\rho}L_{\beta+q}(a)}{L_{\beta+q}(a)}=f_\rho(a).$$

Mais $M(a, x_0)$ est une expression linéaire en $M^{i,k}(a, x_0)$, où i varie de 0 jusqu'à la plus grande puissance de $\log\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}$ qui se présente dans les polynomes P_{q_i}, et k prend toutes les valeurs entre 0 et ρ; et, d'après la dernière formule

$$\lim_{a=\infty}\frac{M^{i,k}(a, x_0)}{M^{q,\rho}(a, x_0)}=0,$$

si $k<\rho$ ou si $k=0$, mais $i<q$.

Nous avons enfin la relation

$$\lim_{a=\infty}\frac{M(a, x_0)}{a^{\rho+q}f_\rho(a)}=\frac{A_q}{\rho!}. \tag{38}$$

Les sommes générales $M(a, x_0)$ *formées dans un pôle logarithmique d'ordre* (q, ρ) *croissent comme* $a^{\rho+q}f_\rho(a)$ *et la limite* (38) *nous fournit précisément le coefficient principal, de manière que la partie dominante de la singularité en question est complètement déterminée par ses sommes.*

Comme nous avons montré ailleurs (¹) que dans les sommes générales (M) les pôles se manifestent par la croissance de $a^\rho f_\rho(a)$ et comme on vient de voir que les points critiques logarithmiques se trahissent par la croissance a^q, il est évident que, en combinant ces deux sortes de singularités, l'ordre de croissance des sommes générales est la somme des ordres relatifs aux deux singularités séparées.

Pour que la croissance des sommes considérées soit déterminée d'une façon complète, il ne nous reste que calculer la croissance de $f_\rho(a)$. C'est ce que nous allons faire dans le cas plus général des points critiques algébriques.

V.

21. Abordons maintenant l'étude des points critiques algébriques situés aux sommets de l'étoile. A cet effet nous allons étudier soigneusement la fonction sommatrice choisie.

Posons

$$\mathrm{L}(a) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^m}{[\log m]^m}$$

et

$$\mathrm{L}_r(a) = \sum_{m=2}^{\infty} m^r \frac{a^m}{[\log m]^m}.$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\mathrm{L}_r(a)}{e^{ra}\,\mathrm{L}(a)} = \frac{1}{e^r}. \tag{39}$$

Le nombre a étant fixé, cherchons tout d'abord l'indice n du terme maximum dans $\mathrm{L}(a)$. On obtient pour n l'équation

$$\log a = \log\log n + \frac{1}{\log n} \tag{40}$$

ou bien

$$a = \log n\, e^{\frac{1}{\log n}},$$

ce qui nous donne

$$n = f(a),$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 397.

fonction continue de a dont les propriétés fondamentales sont, pour a suffisamment grand, que

1° $$\lim_{a=\infty} f(a) = \infty,$$

2° $$f'(a) > 0.$$

En ce qui concerne l'indice n_1 du terme maximum dans $L_r(a)$, on peut démontrer que

(41) $$\frac{n}{k} < n_1 < kn,$$

pour n (donc pour a) suffisamment grand et si $k > 1$.

En effet, l'équation pour n_1 est

$$\log a = \log\log n_1 + \frac{1}{\log n_1} - \frac{r}{n_1} = \varphi(n_1),$$

et l'on voit facilement que pour x positif et assez grand

$$\varphi'(x) > 0;$$

donc, pour x assez grand, les inégalités

$$\varphi(x_1) < \varphi(x) < \varphi(x_2)$$

entraînent

$$x_1 < x < x_2.$$

Démontrons donc que

$$\varphi\left(\frac{n}{k}\right) < \varphi(n_1) < \varphi(kn).$$

Examinons par exemple la dernière inégalité. Il faut montrer que

$$\varphi(n_1) = \log a = \log\log n + \frac{1}{\log n} < \log\log(kn) + \frac{1}{\log(kn)} - \frac{r}{kn},$$

pour a (c'est-à-dire pour n) assez grand; cela revient à dire que

$$\log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) - \frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log(kn)} - \frac{r}{kn} > 0.$$

Mais on voit facilement que

(42) $$\lim_{n=\infty} \log^2 n \left[\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(kn)}\right] = \log k$$

et que

(43) $$\lim_{n=\infty} \log n \log\left[1 + \frac{\log k}{\log n}\right] = \log k.$$

Donc notre inégalité à démontrer aura la forme

$$\frac{1}{\log n}\left[\log k + \varepsilon(n) - \frac{\log k + \eta(n)}{\log n} - \frac{r \log n}{kn}\right] > 0,$$

et en cette forme elle est évidente, car

$$\lim_{n=\infty}\left[\log k + \varepsilon(n) - \frac{\log k + \eta(n)}{\log n} - \frac{r \log n}{kn}\right] = \log k > 0.$$

22. Remarque préliminaire. La condition

$$\lim_{n=\infty} g(n) = \alpha$$

entraîne

$$\lim_{a=\infty} g[f(a)] = \alpha,$$

si

$$\lim_{a=\infty} f(a) = \infty,$$

et si

$$f'(a) > 0,$$

pour a suffisamment grand.

23. Introduisons la notation suivante. Soient

$$A(a) = \sum_{m=2}^{\frac{n}{k}-1} \frac{a^m}{[\log m]^m}, \qquad C(a) = \sum_{m=\frac{n}{k}}^{kn} \frac{a^m}{[\log m]^m}, \qquad B(a) = \sum_{m=kn+1}^{\infty} \frac{a^m}{[\log m]^m}$$

et

$$A_r(a) = \sum_{m=2}^{\frac{n}{k}-1} m^r \frac{a^m}{[\log m]^m}, \qquad C_r(a) = \sum_{m=\frac{n}{k}}^{kn} m^r \frac{a^m}{[\log m]^m},$$

$$B_r(a) = \sum_{m=kn+1}^{\infty} m^r \frac{a^m}{[\log m]^m}.$$

On a

$$A(a) + \left(\frac{n}{k}\right)^r C(a) + (kn)^r B(a) < L_r(a) < \left(\frac{n}{k}\right)^r A(a) + (kn)^r C(a) + B_r(a),$$

c'est-à-dire

$$(44)\qquad \frac{A(a)}{e^{ra}L(a)}+\frac{\left(\frac{n}{k}\right)^r}{e^{ra}}\frac{C(a)}{L(a)}+\frac{(kn)^r}{e^{ra}}\frac{B(a)}{L(a)}$$

$$<\frac{L_r(a)}{e^{ra}L(a)}<\frac{\left(\frac{n}{k}\right)^r A(a)}{e^{ra}L(a)}+\frac{(kn)^r}{e^{ra}}\frac{C(a)}{L(a)}+\frac{B_r(a)}{e^{ra}L(a)},$$

où $n=f(a)$.

Nous démontrerons tout d'abord que

$$(45)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{n}{n^{e^{\frac{1}{\log n}}}}=\frac{1}{e};$$

d'où, grâce à la remarque paragraphe 22,

$$(46)\qquad \lim_{a=\infty}\frac{[f(a)]^r}{e^{ra}}=\frac{1}{e^r}.$$

On peut écrire en effet

$$\frac{n}{n^{e^{\frac{1}{\log n}}}}=e^{\log n-e^{\frac{1}{\log n}}\log n}=e^{\log n\left[1-e^{\frac{1}{\log n}}\right]},$$

et d'après l'Hospital

$$\lim_{n=\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{\log n}}}{\frac{1}{\log n}}=\lim_{n=\infty}\frac{-e^{\frac{1}{\log n}}\left(\frac{1}{\log n}\right)'}{\left(\frac{1}{\log n}\right)'}=\lim -e^{\frac{1}{\log n}}=-1.$$

C. Q. F. D.

24. Nous allons voir que dans (44) les premiers et les derniers termes tendent vers o pour $a=\infty$. C'est-à-dire démontrons que

$$(47)\qquad \lim_{a=\infty}\frac{A(a)}{L(a)}=0,$$

et que

$$(48)\qquad \lim_{a=\infty}\frac{B_r(a)}{L(a)}=0,$$

dont un cas particulier ($r=0$) est l'égalité

$$(49)\qquad \lim_{a=\infty}\frac{B(a)}{L(a)}=0.$$

Soit M (a) le terme maximum de la série L(a). Pour établir (47) il suffit évidemment de démontrer que

$$(47a) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{\mathrm{A}(a)}{\mathrm{M}(a)} = 0,$$

car, les coefficients de L(a) étant positifs, M$(a) <$ L(a).

Pour établir ($47\,a$) nous allons montrer que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{A}\left(\log n\, e^{\frac{1}{\log n}}\right)}{\mathrm{M}\left(\log n\, e^{\frac{1}{\log n}}\right)} = \lim_{n=\infty} \mathrm{D}(n) = 0,$$

d'où l'on pourra conclure, d'après la remarque du paragraphe 22, que

$$\lim_{a=\infty} \mathrm{D}[f(a)] = \lim_{a=\infty} \frac{\mathrm{A}(a)}{\mathrm{M}(a)} = 0.$$

25. Examinons donc D(n). Il est plus petit que le dernier terme multiplié par le nombre des termes étant donné que le dernier terme est le plus grand; c'est-à-dire

$$\mathrm{D}(n) < \frac{n}{k} \frac{[\log n]^{\frac{n}{k}} e^{\frac{n}{k \log n}}}{\left[\log \frac{n}{k}\right]^{\frac{n}{k}}} \frac{1}{e^{\frac{n}{\log n}}},$$

car le terme maximum de L(a) est

$$\frac{a^n}{[\log n]^n} = \frac{[\log n]^n e^{\frac{n}{\log n}}}{[\log n]^n} = e^{\frac{n}{\log n}}.$$

On a donc

$$\mathrm{D}(n) < e^{\frac{n}{k}\log\log n + \frac{n}{k \log n} - \frac{n}{k}\log\log\frac{n}{k} - \frac{n}{\log n} + \log\frac{n}{k}}.$$

Le troisième terme de l'exposant peut se mettre sous la forme

$$-\frac{n}{k}\log(\log n - \log k) = -\frac{n}{k}\left[\log\log n + \log\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right)\right],$$

qui détruit donc le premier terme de l'exposant. D'autre part,

$$\lim_{n=\infty} \log n \log\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right) = -\log k,$$

de sorte que

$$\log\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right) = \frac{-\log k}{\log n} + \frac{\varepsilon(n)}{\log n},$$

où

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

On peut donc écrire

$$D(n) < e^{\frac{n}{\log n}\left[\frac{1}{k} + \frac{\log k}{k} - 1 - \varepsilon'(n)\right]},$$

et l'on voit facilement que, pour $k > 1$,

$$(50) \qquad \frac{1}{k} + \frac{\log k}{k} - 1 < 0,$$

ce qui montre que le coefficient de $\frac{n}{\log n}$ est négatif, pour n assez grand, d'où le résultat

$$\lim_{n=\infty} D(n) = 0.$$

Pour démontrer l'inégalité (50) il suffit de vérifier l'inégalité

$$\varphi(k) \equiv 1 + \log k - k < 0 \qquad (k > 1),$$

ce qui est évident si l'on remarque que

$$\varphi'(k) = \frac{1}{k} - 1 < 0;$$

donc $\varphi(k)$ décroît constamment pour les valeurs considérées de k et que $\varphi(1) = 0$.

26. Nous allons démontrer (48) d'une manière analogue.

Tout d'abord

$$\lim_{n=\infty} \frac{kn}{[\log(kn)]^{\frac{\log(kn)}{r}}} = 0;$$

on peut donc prendre n assez grand pour que

$$\frac{(kn)^r}{[\log(kn)]^{\log(kn)}} < 1,$$

d'où l'on obtient l'inégalité

$$(51) \qquad B_r(a) < \frac{a^{kn}}{[\log(kn)]^{kn-\log(kn)}} + \frac{a^{kn+1}}{[\log(kn+1)]^{kn+1-\log(kn+1)}} + \ldots$$

Établissons encore que, pour n assez grand, le maximum de

$$\frac{a^x}{(\log x)^{x-\log x}},$$

en fonction de a ou de n, est atteint pour $x < kn$ [où $n = f(a)$].

L'argument x, qui donne à l'expression une valeur maximum, satisfait à l'équation

$$\log a = \log\log x + \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x}[1 + \log\log x] = h(x).$$

On voit facilement que

$$h'(x) > 0,$$

pour $x > e$; donc, si nous démontrons que $h(kn) > \log a$, il est établi que l'argument x, qui rend maximum notre expression, est moindre que kn.

Démontrons par suite que

$$h(kn) > \log a = \log\log n + \frac{1}{\log n},$$

c'est-à-dire que

$$\log\log(kn) + \frac{1}{\log(kn)} - \frac{1}{kn}[1 + \log\log(kn)] > \log\log n + \frac{1}{\log n},$$

ou bien que

$$\log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) + \frac{1}{\log n}\left[1 - \frac{1}{1 + \dfrac{\log k}{\log n}}\right] - \frac{1}{kn}[1 + \log\log(kn)] > 0.$$

Mais nous avons vu que

$$\lim_{n=\infty} \log n \log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) = \log k,$$

et l'on vérifie aisément que

$$\lim_{n=\infty} \log n \left[1 - \frac{1}{1 + \dfrac{\log k}{\log n}}\right] = \log k,$$

ce qui démontre notre inégalité.

27. On voit par ces calculs que dans le second membre de (51) c'est le premier terme qui est le plus grand. Prenons donc, au lieu des pre-

miers termes de ce second membre jusqu'à l'indice $e^{(\log n)^2}$, le premier terme multiplié par $e^{(\log n)^2}$, supérieur à leur nombre.

La somme des termes d'indice plus grand ou égal à $e^{(\log n)^2}$, tend déjà vers zéro pour $a = \infty$. En effet, soit $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple ; l'inégalité

$$\frac{a}{[\log \nu]^{1-\frac{\log \nu}{\nu}}} < \frac{a}{[\log \nu]^{1-\varepsilon}}$$

est vérifiée dès que $\nu \geqq e^4$. D'autre part,

$$[\log(\nu + m)]^{(\nu+m)\left[1-\frac{\log(\nu+m)}{\nu+m}\right]} > [\log \nu]^{(\nu+m)(1-\varepsilon)}.$$

D'où il résulte qu'en désignant par c_i les termes du second membre de (51),

$$c_{\nu+m} < \left[\frac{a}{(\log \nu)^{1-\varepsilon}}\right]^{\nu} \left[\frac{a}{(\log \nu)^{1-\varepsilon}}\right]^{m},$$

de sorte que m ne se trouve plus qu'à l'exposant.

Remplaçons ν par $e^{(\log n)^2}$. On a

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}} = \lim_{n=\infty} \frac{\log n \, e^{\frac{1}{\log n}}}{\log n} \frac{(\log n)^{2\varepsilon}}{\log n} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} S_{e^{(\log n)^2}} &= c_\nu + c_{\nu+1} + \ldots + c_{\nu+m} + \ldots \\ &< \left[\frac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}}\right]^{e^{(\log n)^2}} \left[1 + \frac{a}{(\log n)^{2(1+\varepsilon)}} + \ldots\right] \\ &< \left[\frac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}}\right]^{e^{(\log n)^2}} \frac{1}{1 - \dfrac{a}{(\log n)^{2(1-\varepsilon)}}}, \end{aligned}$$

ce qui démontre enfin que

$$\lim_{n=\infty} S_{e^{(\log n)^2}} = 0.$$

28. Remplaçons donc l'inégalité (51) par

$$B_r(a) < e^{(\log n)^2} \frac{a^{kn}}{[\log(kn)]^{kn-\log(kn)}} + S_{e^{(\log n)^2}},$$

et remarquons que pour établir l'égalité

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_r(a)}{L(a)} = \lim_{n=\infty} \frac{B_r\left(\log n \, e^{\frac{1}{\log n}}\right)}{L\left(\log n \, e^{\frac{1}{\log n}}\right)} = 0,$$

il suffit de montrer que

$$\lim_{n=\infty} e^{(\log n)^2} \frac{a^{kn}}{[\log(kn)]^{kn-\log(kn)} e^{\frac{n}{\log n}}} = 0,$$

si l'on y considère a comme fonction de n :

$$a = \log n \, e^{\frac{1}{\log n}},$$

ou, ce qui revient au même, que

$$\lim_{n=\infty} e^{(\log n)^2 + kn \log\log n + \frac{kn}{\log n} - [kn - \log(kn)] \log\log(kn) - \frac{n}{\log n}} = 0.$$

Le troisième terme de l'exposant s'écrit encore

$$-kn \log\log n - kn \log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) + \log(kn) \log\log(kn),$$

dont le premier terme détruit le deuxième terme de l'exposant.

Nous savons, d'autre part, que

$$\lim_{n=\infty} \log n \log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) = \log k.$$

Donc l'ordre de grandeur de l'exposant est $\frac{n}{\log n}$ et l'exposant total se met sous la forme

$$\frac{n}{\log n}[k - k \log k - 1 + \varepsilon(n)],$$

où [1]

$$k - k \log k - 1 < 0,$$

d'où l'on conclut que (48) et (49) sont vrais.

Enfin les égalités (47) et (49) nous montrent que

$$\lim_{a=\infty} \frac{C(a)}{L(a)} = \lim_{a=\infty} \frac{L(a) - A(a) - B(a)}{L(a)} = 1.$$

Reprenons maintenant, après ces calculs préliminaires, nos inégalités fondamentales (44). Les résultats acquis, joints à (46), donnent

---

(1) DIENES, *Loc. cit.*, p. 401.

immédiatement

$$\liminf_{a=\infty} \frac{L_r(a)}{e^{ra}L(a)} \geqq \frac{1}{e^r k^r},$$

$$\limsup_{a=\infty} \frac{L_r(a)}{e^{ra}L(a)} \leqq \frac{k^r}{e^r}.$$

Mais les deux inégalités dernières sont valables pour k quelconque supérieur à l'unité; donc

$$\lim_{a=\infty} \frac{L_r(a)}{e^{ra}L(a)} = \frac{1}{e^r},$$

ce qu'il fallait établir.

VI.

29. Soit x_0 un sommet de l'étoile et supposons qu'au voisinage de x_0

$$f(x) = \frac{B_r}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^r} + f_1(x),$$

où l'ordre de $f_1(x)$ en x_0 est inférieure à r. Par exemple, si x_0 est un pôle ou un point critique algébrique de la fonction.

D'après la dernière hypothèse

$$f_1(x) = f_2(x) + f_3(x),$$

où $f_2(x)$ est régulière à l'intérieur du cercle de rayon $|x_0|$, son ordre sur le cercle entier étant moindre que r et $f_0(x)$ est holomorphe sur la droite $(0, x_0)$ extrémités comprises.

On a donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{f_2}}{n^r} = 0.$$

Écrivons le théorème de M. Mittag-Leffler pour la fonction

$$f_3(x) = f(x) - \frac{B_r}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^r} - f_2(x).$$

On obtient

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (s_n - B_r B_n^{(r+1)} - s_n^{f_2}) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = f_3(x_0);$$

par suite, ces sommes, divisées par e^{ar}, tendent vers zéro.

D'autre part,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{f_2} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n} \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} \leqq \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |s_n^{f_2}| \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \lim_{n=\infty} \frac{|s_n^{f_2}|}{n^r} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{f_2} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ra} \mathrm{L}(a)} = 0$$

et

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n^{(r+1)} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{B}_n^{(r+1)}}{n^r} = \frac{1}{\Gamma(r+1)},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n^{(r+1)} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ra} \mathrm{L}(a)} = \frac{1}{e^r \Gamma(r+1)}.$$

En tenant compte des égalités obtenues, on arrive à l'équation

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ar} \mathrm{L}(a)} = \frac{\mathrm{B}_r}{e^r \Gamma(r+1)}.$$

Mais, pour β quelconque,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\mathrm{L}(a)}{\mathrm{L}_\beta(a)} = 1,$$

à cause de la limite

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\log(n+\beta)}{\log n} \right]^n = 1.$$

Donc enfin

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ar} \mathrm{L}_\beta(a)} = \frac{\mathrm{B}_r}{e^r \Gamma(r+1)},$$

ou encore

$$(52)\qquad \lim_{a=\infty} \frac{M(a, x_0)}{e^{ar}} = \frac{B_r}{e^r\Gamma(r+1)}.$$

Un point critique algébrique d'ordre r apparaît dans les sommes générales (M), *formées par la fonction sommatrice* $L_\beta(a)$ *comme un infini d'ordre* r ω (selon la notation introduite par M. Borel), *c'est-à-dire comme la r-ième puissance de* e^a.

Si l'on remarque que ce sont les fonctions entières $M(a, x)$ qui, pour $a = \infty$, représentent la fonction envisagée, on peut interpréter le dernier résultat de la manière suivante.

La suite numérique

$$\lim_{a=\infty} M(a, x_0),$$

formée en un point critique algébrique à un sommet de l'étoile, est en relation simple avec la singularité envisagée, en décèle le degré, le coefficient principal et en détermine ainsi la partie dominante.

Remarquons enfin que, malgré les calculs un peu longs qui nous ont amené au résultat final, la simplicité de la formule définitive est tout à fait remarquable, grâce au choix convenable de la fonction sommatrice.

30. Étendons encore le résultat dernièrement obtenu aux points critiques à la fois algébrique et logarithmique où la fonction s'écrit

$$(53)\qquad f(x) = \frac{P_q\left[\log\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^q} + f_1(x),$$

l'ordre de $f_1(x)$ au point x_0 étant inférieur à ρ. Calculons à cet effet les sommes générales $M(a, 1)$ relatives à la fonction

$$\frac{\left[\log\dfrac{1}{1-x}\right]^q}{(1-x)^\rho}.$$

Comme les s_n de cette fonction sont comparables à $(\log n)^q\, n^\rho \dfrac{1}{\Gamma(\rho+1)}$, la croissance des sommes considérées est égale à celle de

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^q n^\rho \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\displaystyle\Gamma(\rho+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}.$$

Mais le théorème de Cesàro, déjà cité, permet de prendre $\beta = 0$, car

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\log(n+\beta)}{\log n}\right]^n = 1.$$

Cherchons donc l'ordre de croissance de la fonction

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^q n^\rho \frac{a^n}{(\log n)^n}}{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}} = \frac{P_{q-1}(a)}{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}} + \frac{\displaystyle a^q\sum_{n=0}^{\infty}(n+q)^\rho\frac{a^n}{[\log(n+q)]^n}}{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}}.$$

D'après la remarque précédente on peut prendre n^ρ et $(\log n)^n$ au lieu de $(n+q)^\rho$ et $[\log(n+q)]^n$ sans changer la croissance de la fonction, de sorte qu'il suffit d'examiner le rapport

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^\rho \frac{a^n}{(\log n)^n}}{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{(\log n)^n}},$$

ce que nous avons achevé précédemment. On peut donc conclure, grâce à la relation (39), que

$$\frac{M(a, 1)}{a^q e^{\rho a}} = \frac{1}{e^r \Gamma(\rho+1)}. \tag{54}$$

31. On démontre maintenant, comme auparavant, que la croissance des sommes générales $M_1(a, x_0)$, formées pour la fonction $f_1(x)$, est inférieure à celle de $M(a, x_0)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{a=\infty}\frac{M_1(a, x_0)}{a^q e^{\rho a}} = 0,$$

et l'on obtient ainsi, sans aucune difficulté, la relation générale

$$\lim_{a=\infty} \frac{M(a, x_0)}{a^q e^{\rho a}} = \frac{A_q}{e^\rho \Gamma(\rho+1)}. \tag{55}$$

Un point critique algébrico-logarithmique de degré (q, ρ), ou avec la notation de M. Borel, *d'ordre* $q\frac{1}{\omega} + \rho$, *se trahit dans les sommes générales* $M(a, x_0)$ *comme un infini d'ordre* ω *fois plus grand :*

$$\left(q\frac{1}{\omega} + \rho\right)\omega = q + \rho\omega.$$

Nous voyons que la fonction sommatrice choisie permet de trouver des relations dont la simplicité s'approche de celles obtenues par l'emploi de la fonction exponentielle elle-même. L'écart, cependant, entre l'ordre de croissance de la fonction et celui des sommes, qui n'empêche nullement une correspondance précise, est considérable. On pourrait donc se proposer de trouver une autre fonction sommatrice qui donnerait des relations plus satisfaisantes à cet égard. C'est ce qui va nous occuper dans le paragraphe suivant.

VII.

32. Pour mettre au jour davantage le caractère de l'influence de la fonction sommatrice sur la relation des fonctions représentatrices à la fonction représentée, nous allons étudier brièvement la représentation proposée par M. Mittag-Leffler [1], qui est effectuée par la fonction sommatrice,

$$N(a) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{e^{m(\log m)\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

dont la croissance ne surpasse pas beaucoup celle de e^a, car, si l'on prend $\alpha = 1$ (qui n'est pas d'ailleurs permis), le coefficient

$$\frac{1}{e^{m \log m}} = \frac{1}{m^m}$$

est comparable à $\frac{1}{m!}$.

[1] MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques* (*Atti del Congresso di Roma*, 1909, p. 84).

L'indice du terme maximum est lié à la valeur fixée de a par l'équation

$$\log a = (\log n)^\alpha + \frac{\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}}. \tag{56}$$

On démontre facilement que l'indice n_1 du terme maximum de la série

$$N_r(a) = \sum_{m=1}^{\infty} m^r \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha - r\log m}},$$

est, pour n ou a assez grand, entre $\frac{n}{k}$ et kn, k étant un nombre supérieur à 1. La marche du raisonnement est identique à celle que nous avons suivie dans le paragraphe V.

Faisons voir sommairement que, comme au cas de la fonction $L_\beta(a)$, le commencement et la fin de la série n'influent pas sur l'ordre de grandeur de la fonction, ou, plus précisément, que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{m=1}^{\frac{n}{k}} m^r \frac{a^m}{e^{m(\log n)^\alpha}}}{N(a)} = 0, \tag{57}$$

et

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{m=kn}^{\infty} m^r \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{N(a)} = 0, \tag{58}$$

de sorte que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{m=\frac{n}{k}}^{m=kn} m^r \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{N_r(a)} = 1, \tag{59}$$

où n est une fonction de a définie par l'équation (56).

33. Démontrons l'égalité (57). On a

$$\frac{\sum_{m=1}^{\frac{n}{k}} m^r \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{N(a)} < \frac{\frac{n}{k}\left(\frac{n}{k}\right)^r \frac{a^{\frac{n}{k}}}{e^{\frac{n}{k}\left(\log\frac{n}{k}\right)^\alpha}}}{e^{\frac{n\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}}}}$$

$$= e^{(r+1)\log\frac{n}{k} + \frac{n}{k}(\log n)^\alpha + \frac{n\alpha}{k(\log n)^{1-\alpha}} - \frac{n}{k}\left(\log\frac{n}{k}\right)^\alpha - \frac{n\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}}},$$

où, au numérateur, nous avons mis le terme maximum (le dernier) multiplié par le nombre des termes; au dénominateur il y a le terme maximum seul, et, si pour un moment $[\alpha]$ est la partie entière de α, on a pris $\frac{n}{k}\left(\log\frac{n}{k}\right)^\alpha$ au lieu de

$$\left[\frac{n}{k}\right]\left(\log\left[\frac{n}{k}\right]\right)^\alpha > \frac{n}{k}\left(\log\frac{n}{k}\right)^\alpha + \theta\left(\log\left[\frac{n}{k}\right]\right)^\alpha \qquad (0 < \theta < 1).$$

Mais nous savons que

$$\lim_{n=\infty}[(\log n)^\alpha - (\log n + c)^\alpha](\log n)^{1-\alpha} = -\alpha c,$$

d'où il résulte que les deuxième et quatrième termes de l'exposant, ensemble, donne un terme de l'ordre de

$$\frac{n}{k}\,\frac{\alpha\log k}{(\log n)^{1-\alpha}}.$$

L'exposant est donc de la forme

$$\frac{\alpha n}{(\log n)^{1-\alpha}}\left[\frac{\log k}{k} + \frac{1}{k} - 1 + \varepsilon(n)\right],$$

où

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon(n) = 0,$$

et, comme nous l'avons vu,

$$\frac{\log k}{k} + \frac{1}{k} - 1 < 0;$$

par conséquent, (57) est démontré.

Pour établir (58), montrons tout d'abord que la somme des termes dont l'indice surpasse $kn + n^2$ tend vers zéro avec $\frac{1}{a}$. Cette somme est inférieure à

$$\frac{a^{kn+n^2}}{e^{(kn+n^2)[\log(kn+n^2)]^\alpha}}\left[1 + \frac{a}{e^{\log(kn+n^2)}} + \left(\frac{a}{e^{\log(kn+n^2)}}\right)^2 + \ldots\right]$$
$$= \left(\frac{a}{e^{[\log(kn+n^2)]^\alpha}}\right)^{kn+n^2}\frac{1}{1 - \dfrac{a}{e^{[\log(nk+n^2)]^\alpha}}},$$

où la raison de la progression géométrique, du moins pour n ou a

assez grand, est plus petit que l'unité, car

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{e^{[\log(kn+n^2)]^\alpha}} = 0,$$

comme on voit facilement en remplaçant a par sa valeur en n. Ce qui démontre aussi que la somme envisagée tend vraiment vers zéro.

34. Regardons les termes dont l'indice est entre kn et $kn + n^2$. Le premier étant le plus grand, la somme de ces termes est plus petite que

$$n^2 \frac{a^{kn}}{e^{kn[\log(kn)]^\alpha}}.$$

Divisons par le terme maximum de $\mathrm{N}(a)$ et montrons que le rapport ainsi obtenu tend vers zéro, c'est-à-dire que

$$\lim_{n=\infty} e^{kn(\log n)^\alpha + \frac{kn\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}} - kn[\log(kn)]^\alpha - \frac{n\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}} + 2\log n} = 0.$$

Le premier et le troisième terme de l'exposant donnent une somme de l'ordre de

$$\frac{-\alpha kn \log k}{(\log n)^{1-\alpha}},$$

de sorte que le coefficient du terme de rang maximum

$$\frac{n\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}},$$

est

$$k - \log k - 1 < 0,$$

ce qui démontre enfin (58) qui, combiné avec (57), donne immédiatement l'égalité fondamentale (59).

35. La fonction $f(x)$ soit maintenant représentée à l'aide de la fonction sommatrice $\mathrm{N}(a)$, c'est-à-dire par la formule

$$f(x) = \lim_{a=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} s_m(x) \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{\mathrm{N}(a)},$$

qui est valable en chaque point intérieur à l'étoile, et soit x_0 un point critique algébrico-logarithmique en un sommet de l'étoile, de sorte que

$$f(x) = \frac{P_q\left[\log \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}\right]}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^\rho} + f_1(x),$$

où l'ordre de $f_1(x)$ au point x_0 est inférieur à ρ, d'où il résulte, comme auparavant, que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} s_m^{(1)}(x_0)\dfrac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{\sum_{m=1}^{\infty} m^\rho \dfrac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}} = 0.$$

D'autre part, d'après la relation fondamentale (12),

$$s_m(x_0) = \frac{A_q}{\Gamma(\rho+1)} m^\rho (\log m)^q + s_m^{(1)}(x_0) + \varepsilon_m,$$

où

$$\lim_{m=\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^\rho(\log m)^q} = 0,$$

de sorte que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \dfrac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{\sum_{m=1}^{\infty} m^\rho(\log m)^q \dfrac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}} = 0.$$

36. Pour obtenir l'ordre de croissance des sommes

$$M_1(a, x_0) = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} s_m(x_0) \dfrac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{N(a)},$$

formées en un point critique algébrico-logarithmique, il suffit donc de déterminer, pour $a=\infty$, l'ordre de croissance de l'expression

$$\frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^\rho(\log m)^q \dfrac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{\Gamma(\rho+1)N(a)},$$

c'est-à-dire celui de l'expression

$$\frac{\displaystyle\sum_{m=\frac{n}{k}}^{m=kn} m^\rho (\log m)^q \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{\Gamma(\rho+1)\,\mathrm{N}(a)}.$$

Mais on a

$$\frac{\left(\dfrac{n}{k}\right)^\rho \left(\log\dfrac{n}{k}\right)^q \displaystyle\sum_{m=\frac{n}{k}}^{m=kn} \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{\mathrm{N}(a)} < \frac{\displaystyle\sum_{m=\frac{n}{k}}^{m=hn} m^\rho (\log m)^q \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{\mathrm{N}(a)}$$

$$< \frac{(kn)^\rho (\log n + \log k)^q \displaystyle\sum_{m=\frac{n}{k}}^{m=kn} \frac{a^m}{e^{m(\log m)^\alpha}}}{\mathrm{N}(a)};$$

d'autre part,

$$\lim_{a=\infty} \frac{n}{e^{(\log a)^{\frac{1}{\alpha}}}} = \lim_{n=\infty} \frac{e^{\log n}}{e^{\left[(\log n)^\alpha + \frac{\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}} = e,$$

ce qu'on vérifie sans difficulté à l'aide de la formule

$$\lim_{n=\infty} \left(\log n - \left[(\log n)^\alpha + \frac{\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 1.$$

La même formule nous montre encore que

$$\lim_{a=\infty} \frac{\log n}{[\log a]^{\frac{1}{\alpha}}} = \lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\left[(\log n)^\alpha + \dfrac{\alpha}{(\log n)^{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}} = 1.$$

On obtient ainsi les inégalités

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\mathrm{M}_1(a)}{e^{\rho(\log a)^{\frac{1}{\alpha}}} (\log a)^{\frac{q}{\alpha}}} \leq \frac{\mathrm{A}_q k^\rho e^\rho}{\Gamma(\rho+1)}$$

et

$$\liminf_{a=\infty} \frac{\mathrm{M}_1(a)}{e^{\rho(\log a)^{\frac{1}{\alpha}}} (\log a)^{\frac{q}{\alpha}}} \geq \frac{\mathrm{A}_q e^\rho}{k^\rho \Gamma(\rho+1)},$$

ou bien, k étant arbitrairement près de l'unité,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\mathrm{M}_1(a)}{e^{\rho(\log a)^{\frac{1}{\alpha}}}(\log a)^{\frac{q}{\alpha}}} = \frac{e^\rho}{\Gamma(\rho+1)}\mathrm{A}_q. \tag{60}$$

C'est la relation générale entre la singularité étudiée et les sommes générales $\mathrm{M}_1(a, x_0)$, *formée par la fonction sommatrice* $\mathrm{N}(a)$.

Le dernier théorème nous montre que, si la fonction devient infinie d'une manière logarithmique, il en est de même des sommes $\mathrm{M}_1(a, x_0)$, comme dans le cas de la sommation exponentielle. Pour $\alpha = 1$ on obtiendrait une correspondance exacte même pour les points critiques algébriques, et on peut prendre α aussi voisin de l'unité qu'on veut, ce qui revient à dire que, dans le cas de la sommation par $\mathrm{N}(a)$, l'écart entre l'ordre de croissance des sommes générales et celui de la fonction peut être diminué indéfiniment.

Plus exactement, dans la notation déjà employée de M. Borel, *si la croissance de la fonction est* $\rho + q\frac{1}{\omega}$, *celle des sommes est* $\omega\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\omega}$ *fois plus grande.*

En effet,

$$\left(\rho + q\frac{1}{\omega}\right)\omega\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\omega} = \rho\omega\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\omega} + q\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\omega},$$

dont le second membre désigne justement la croissance de

$$e^{\rho(\log a)^{\frac{1}{\alpha}}}(\log a)^{\frac{q}{\alpha}}.$$

Il serait désirable de décider s'il existe ou non une fonction sommatrice (représentant la fonction dans toute l'étoile), telle que la croissance des sommes générales (M) formées par cette fonction reproduise exactement la croissance de la fonction envisagée, du moins dans les points critiques algébrico-logarithmiques.

37. En résumé, pour les fonctions sommatrices que nous avons utilisées au cours de ce Mémoire, il y a une règle très simple qui permet de trouver immédiatement le facteur dont le produit avec l'ordre de la singularité, $\rho + q\frac{1}{\omega}$, donne la croissance des sommes engendrées par la fonction sommatrice en question.

La règle proposée est la suivante. Soit donnée la fonction sommatrice par la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{c_n},$$

et soit

$$\sqrt[n]{c_n} = \varphi(n).$$

Si l'ordre de $\varphi(n)$ est α, le facteur cherché est $\frac{1}{\alpha}$, c'est-à-dire l'ordre des sommes correspondantes est

$$\left(\rho + q\frac{1}{\omega}\right)\frac{1}{\alpha}.$$

En effet, au cas de la sommation exponentielle simple, $c_n = n!$, de sorte que l'ordre de $\sqrt[n]{c_n}$ est l'unité. La croissance de la fonction coïncide avec celle des sommes exponentielles, comme on a vu au paragraphe III (30).

Si la fonction sommatrice est

$$e^{a^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{rn}}{n!},$$

on a

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{r}\right)!} \sim cn^{\frac{1}{r}};$$

donc le facteur doit être le nombre r, qui se vérifie sans difficulté, étant donné que le symbole

$$\left(\rho + q\frac{1}{\omega}\right)r = \rho r + q\frac{1}{\omega}r$$

représente bien la fonction

$$a^{\rho r}(r \log a)^q.$$

Regardons la fonction $L(a)$. On a

$$\sqrt[n]{c_n} = \log(n+\beta) \sim \log n \equiv \frac{1}{\omega},$$

et nous avons constaté vraiment que le facteur en question fut bien ω.

Enfin, pour $N(a)$,

$$\sqrt[n]{c_n} = e^{(\log n)^\alpha} \equiv \omega\alpha\frac{1}{\omega};$$

par suite, d'après la règle générale ([1]),

$$\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\alpha},$$

on a

$$\frac{1}{\omega\alpha\frac{1}{\omega}} = \frac{1}{\alpha\frac{1}{\omega}}\,\frac{1}{\omega} = \omega\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{\omega};$$

ce que nous avons établi, il y a un moment.

La même règle s'applique à une classe assez étendue des fonctions entières sommatrices où la méthode, développée pour l'étude des fonctions $L(a)$ et $N(a)$, rend de grands services en justifiant ainsi, plus qu'il n'était jusqu'ici, l'idée de M. Borel d'après laquelle, si les coefficients décroissent assez régulièrement, c'est le seul terme maximum de la série qui détermine l'ordre de grandeur de la fonction entière. Mais, à présent, nous ne nous engageons pas dans cette direction qui nous conduirait à la théorie particulière de la croissance des fonctions entières.

CHAPITRE III.

SUR LA RELATION GÉNÉRALE DE LA SUITE DES FONCTIONS REPRÉSENTATRICES AUX SINGULARITÉS DE LA FONCTION REPRÉSENTÉE.

VIII.

38. Les résultats des deux Chapitres précédents ont fait voir qu'il y a une relation étroite entre les valeurs prises, en un sommet x_0 de l'étoile, par la suite des fonctions représentatrices $M(a, x_0)$ et l'allure de la fonction en x_0, si du moins la singularité à ce point est de caractère algébrico-logarithmique. On pourrait dire que la force représentatrice des fonctions $M(a, x)$ ne s'épuise pas dans la représentation de

([1]) Borel, *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 24, Paris, Gauthier-Villars, 1910, p. 24.

la fonction à l'intérieur de l'étoile; mais dans beaucoup de cas, comme on vient de le voir, les mêmes fonctions $M(a, x)$ représentent aussi, pour ainsi dire, les singularités algébrico-logarithmiques aux sommets de l'étoile.

La question se pose donc de *trouver des représentations aptes à nous fournir des relations générales et simples entre les propriétés limites de la suite numérique*

$$\lim_{a=\infty} M(a, x_0)$$

et l'allure de la fonction au point x_0, et celà indépendamment du caractère spécial de la singularité à ce point

Expliquons-nous. Si l'on ne spécialise pas la nature de la singularité au point x_0, c'est-à-dire si l'on n'indique pas qu'il s'agit d'un pôle, point essentiel ou point critique algébrico-logarithmique ou d'autres singularités bien définies, dont le nombre est d'ailleurs très limité, l'allure de la fonction *peut avoir des sens* différents, comme il suit. Cette expression peut signifier que la fonction a une valeur bien déterminée si on s'approche de ce point sur une ligne ou à l'intérieur d'un domaine angulaire, ou bien que la fonction reste bornée dans le domaine envisagé, ou, enfin, que la fonction n'y est pas bornée; et l'on sait qu'en beaucoup de questions d'analyse ce sont justement ces distinctions-ci qui jouent le rôle prépondérant. Nous sommes d'ailleurs bien loin d'épuiser par cette énumération les allures générales possibles de la fonction au voisinage d'un point. Même dans la suite de ce Chapitre, nous rencontrerons une allure bien différente, notamment celle qui consiste à avoir, dans une direction déterminée, une infinité de points singuliers au voisinage du point.

Remarquons dès maintenant qu'un célèbre problème d'Abel, posé il y a presque un siècle et pas encore résolu, est un cas très particulier du problème qui nous occupe. Abel n'a cherché que la limite de la fonction en un point du cercle de convergence où la série de Taylor diverge. Mais on voit immédiatement qu'on ne peut pas résoudre ce problème sans avoir examiné le cas où la fonction n'a pas de limites, si du moins l'on se propose d'établir des conditions à la fois nécessaires et suffisantes.

39. Nous allons démontrer que les représentations de M. Mittag-

Leffler[1] étendues à une étoile curviligne quelconque par la méthode de M. Painlevé[2] permettent de résoudre complètement le problème, qui nous paraît assez important.

Voici les propriétés principales de ces représentations. La fonction $f(x)$, définie par une série de Taylor, est représentée, dans un domaine $A^{(\alpha)}$ dont la limite pour $\alpha = 0$ est l'étoile principale curviligne ou non, par une suite (ou série) de polynomes

$$f(x) = \lim_{\nu = \infty} S_\nu(x, \alpha) = \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x, \alpha). \tag{61}$$

La relation de cette série à la série de Taylor primitive, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, est donnée par les égalités suivantes :

1°

$$x = g(t), \tag{62}$$

ce qui est la définition de la courbe génératrice l; g est holomorphe pour $0 \leqq t \leqq 1$, mais n'est pas nécessairement réel quand t varie de 0 à 1; on a encore

$$g(0) = 0, \qquad g(1) = 1;$$

2° Soit

$$f[g(t)] = f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n t^n; \tag{63}$$

3° Prenons une suite de représentations conformes

$$v = \varphi(u, \alpha), \tag{64}$$

qui transforment le cercle $|u| < R$, $R > 1$, en une surface finie et simplement connexe, et supposons remplies les conditions suivantes : les points $u = 0$ et $v = 0$, de même que les points $u = 1$ et $v = 1$, se correspondent; la courbe fermée $\varphi(e^{i\theta}, \alpha_k)$ est intérieure à la courbe

(1) MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène*, 3e et 4e Notes (*Acta Mathematica*, t. XXIV et XXVI).

(2) PAINLEVÉ, *Note sur le développement des fonctions analytiques*, parue dans les *Leçons* de M. BOREL, *sur les fonctions de variables réelles*, Paris, Gauthier-Villars, 1905.

$\varphi(e^{i\theta}, \alpha_e)$ si $\alpha_k < \alpha_e$, excepté le point 1 où elles se touchent, et enfin, $\lim\limits_{\alpha=0} \varphi(e^{i\theta}, \alpha)$ est le segment $(0, 1)$.

Effectuons maintenant le développement

$$(65)\quad f_1[t\varphi(u,\alpha)] = f_1(0) + \lim_{\nu=\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu!}(D_{\varphi}^{(\mu)} a'_1 t + D_{\varphi^2}^{(\mu)} a'_2 t^2 + \ldots + D_{\varphi^\mu}^{(\mu)} a'_\mu t^\mu) u^\mu,$$

où l'on a posé

$$\left[\frac{d^\nu(\varphi)^\mu}{du^\nu}\right]_{u=0} = D_{\varphi^\mu}^{(\nu)}.$$

M. Mittag-Leffler démontre que, moyennant certaines restrictions sur la fonction $\varphi(u, \alpha)$, on peut poser au second membre $u = 1$ sans troubler la convergence, et c'est ainsi qu'on obtient pour la fonction $f_1(t)$ un développement de l'espèce indiquée (61).

4° Mais les a'_i sont des combinaisons linéaires et homogènes des $a_k (k \leqq i)$, déterminées par $g(t)$. La méthode de M. Painlevé consiste à passer d'une série (65) formée pour $f_1(t)$ à une série (61) formée pour $f(x)$ à l'aide de la substitution des a'_i par leur expression en a_k. On a ainsi

$$(66)\qquad f[x\varphi(u,\alpha)] = \lim_{\nu=\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} G_\mu(z, \alpha) u^\mu,$$

où G_μ est linéaire, homogène en $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ et de degré μ en z. Enfin, c'est en posant $u = 1$, ce qui entraîne $z = x$, qu'on obtient (61) pour le cas général de l'étoile curviligne.

40. Ces préliminaires indiqués, nous abordons l'étude de la question soulevée au commencement de ce Chapitre.

Dans la plupart des représentations ou des classes de représentations proposées la fonction $v = \varphi(u, \alpha)$ est holomorphe pour $u = 1$. Supposons-le pour le moment afin d'examiner ensuite un cas intéressant où cette condition n'est plus remplie.

Pour simplifier l'énoncé de nos résultats, nous introduisons les expressions : *voisinage angulaire et circulaire* de x_0 vers l^{x_0} où x_0 est un sommet de l'étoile et la courbe l^{x_0} est l'homothétique de l par rapport à O tourné autour de O. Traçons au point x_0 un angle d'ouverture inférieure à π et symétrique à la tangente de la courbe l^{x_0} en ce point et ne considérons que la partie de l'angle la plus proche de x_0. Ce domaine angulaire arbitrairement petit, frontière comprise, forme le voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}. Si, au lieu d'un angle, on trace un cercle passant par x_0 et ayant pour diamètre arbitrairement petit un segment de la tangente à la courbe l^{x_0} au point x_0, ce cercle, y compris la circonférence, forme le voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}.

Cela posé, démontrons le théorème suivant :

Si, pour α assez petit, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(x, \alpha) = f(x)$$

converge pour x_0, la fonction $f(x)$ est continue et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}, c'est-à-dire qu'elle tend vers une valeur bien déterminée, si l'on s'approche de x_0 en ce voisinage. C'est la généralisation directe du célèbre théorème d'Abel, et, si l'étoile est rectiligne, *on a pour l'étoile le théorème d'Abel sans aucune modification*.

En effet, dans ce cas, la série de Taylor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(x_0, \alpha)\, u^\nu \tag{67}$$

converge pour $u = 1$, α étant assez petit; donc, la fonction de u représentée par cette série est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1, et, d'après le théorème d'Abel, elle est continue dans le voisinage angulaire de 1 vers le rayon $(0, 1)$. Mais à ce domaine de la variable u correspond un domaine $D_\alpha^{x_0}$ de la variable x définie par l'équation

$$x = x_0\, \varphi(u, \alpha),$$

quand u parcourt la circonférence de rayon 1; et au voisinage angulaire de 1 vers le rayon $(0, 1)$ correspond le voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}, ce qui démontre la proposition.

Remarquons que la simplicité extrême de la démonstration vient du fait que φ est supposé holomorphe en 1, ce qui, grâce aux propriétés des représentations conformes, entraîne immédiatement la correspondance indiquée des deux voisinages.

Inversement, si $f(x)$ est continu et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage de x_0 vers l^{x_0}, les moyennes arithmétiques $\sigma(x_0, \alpha)$ des $S_n(x_0, \alpha)$ convergent pour α assez petit et représentent la valeur limite $f(x_0)$.

En effet, d'après nos hypothèses et à cause des conditions imposées à φ, on peut prendre α assez petit pour que $f(x)$ soit holomorphe dans le domaine $D_\alpha^{x_0}$. Mais cela revient à dire que la fonction de u,

$$(67) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(x_0, \alpha) u^\nu,$$

est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1 et qu'elle est continue sur le cercle entier, tout en ayant le point 1 pour point singulier.

Mais, si l'on a une série de Taylor

$$f(u) = \sum b_n u^n$$

qui représente une fonction continue à chaque point de son cercle de convergence, pour chemin d'intégration dans la formule de Cauchy

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)\, du}{u^{n+1}},$$

on peut prendre le cercle de convergence. En effet, $f(u)$, par conséquent sa partie réelle et sa partie imaginaire, y sont continues, donc intégrables. Il est aisé à montrer qu'en ce cas, en posant

$$u = e^{i\theta}, \qquad f(e^{i\theta}) = f_1(\theta) + i f_2(\theta),$$

on retrouve les mêmes formules pour les coefficients de f_1 et de f_2 respectivement, comme si l'on développait les fonctions $f_1(\theta)$ et $f_2(\theta)$ dans leur série de Fourier. Donc, en fin de compte, on obtient deux séries de Fourier dont les deux fonctions génératrices sont continues.

D'après un théorème de M. Fejér [1] il peut arriver qu'une telle série de Fourier ne converge pas pour une valeur de θ, mais les moyennes arithmétiques des s_n convergent nécessairement et *uniformément* pour les valeurs de θ entre 0 et 1, limites comprises.

Appliquons ces remarques à la série (67) au point $u = 1$; on obtient

[1] FEJÉR, *Über die Fourierschen Reihen* (*Math. Annalen*, t. LVIII).

précisément que, pour α assez petit, la limite des $\sigma_n(x_0, \alpha)$ pour $n = \infty$ existe et représente $f(x_0)$, comme il fallait le démontrer.

41. Si la fonction envisagée n'a pas de limite pour $x = x_0$ au voisinage angulaire de x_0 vers l^{x_0}, il est très important de décider si elle reste bornée ou non. A cet égard nous démontrerons le théorème suivant :

Si, pour α assez petit, la série représentatrice (61) *reste bornée pour x_0, la fonction représentée $f(x)$ est bornée et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage angulaire du point vers l^{x_0};* et inversement, *si la fonction est bornée et, x_0 excepté, holormorphe au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}, la suite*

$$|\sigma_n(x_0, \alpha)| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

est bornée pour α assez petit.

Le raisonnement précédent s'applique aussi dans le cas présent. En effet, on voit facilement que, si $S_n(x_0, \alpha)$ est borné pour $n = \infty$, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (S_\nu - S_{\nu-1}) u^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x_0, \alpha) u^\nu \tag{67}$$

est convergente dans le cercle de rayon 1, et la fonction holomorphe représentée par elle reste bornée si l'on s'approche du point 1 à l'intérieur du voisinage angulaire de 1 vers le rayon (0, 1). La suite du raisonnement est identique au raisonnement précédent, et nous sommes amenés ainsi à la première partie du théorème.

Explicitons un peu le calcul qui nous montre que, si les s_n sont bornés, la fonction l'est aussi dans le voisinage indiqué.

On a

$$\frac{f(u)}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n u^n,$$

de sorte que

$$|f(u)| < A \frac{|1-u|}{1-|u|},$$

où A est un nombre supérieur à la limite supérieure des s_n.

Posons

$$|1-u|=a, \qquad u=\rho e^{i\varphi}, \qquad \frac{a}{1-\rho}=y,$$

et soit ψ l'angle entre les segments $(1, u)$ et $(1, 0)$. Il est évident que

$$a^2=(1-\rho\cos\varphi)^2+\rho^2\sin^2\varphi=1+\rho^2-2\rho\cos\varphi$$

et que

$$\frac{1-\rho\cos\varphi}{a}=\cos\psi.$$

De ces deux identités, on obtient

$$a^2-(1-\rho)^2=2a\cos\psi-2(1-\rho),$$

c'est-à-dire

$$y(a-2\cos\psi)=-\rho-1,$$

qui s'écrit encore

$$y=\frac{1+\rho}{2\cos\psi-a}.$$

Donc, si le chemin suivi pour atteindre 1 est tel que

$$-\psi_0<\psi<\psi_0<\frac{\pi}{2},$$

on obtient que

$$\limsup_{\rho=1} y \leqq \frac{1}{\cos\psi_0},$$

ce qui entraîne

$$|f(x)|\leqq\frac{A}{\cos\psi_0} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Inversement, supposons que la fonction envisagée soit bornée et, x_0 excepté, holomorphe au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}, ce qui revient à dire qu'il y a un domaine $D_\alpha^{x_0}$ où la fonction est holomorphe, de même que sur sa frontière, excepté le point x_0, et où l'on a encore

$$|f(x)|<A;$$

et démontrons que les modules des moyennes arithmétiques $|\sigma_n(x_0,\alpha)|$ sont bornés.

D'après les hypothèses, la série de Taylor (67) représente pour α assez petit une fonction de u holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1 qui correspond au domaine $D_\alpha^{x_0}$ et sur le cercle entier, excepté le point 1 où elle est bornée si l'on s'approche de ce point à l'intérieur ou sur la frontière du cercle.

Pour avoir une fonction bien déterminée sur la circonférence, posons pour valeur de la fonction au point 1 une des limites, $\lim_{\rho=1} f(\rho)$, qu'on obtient par exemple en passant par les valeurs $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu, \ldots$. La partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de l'argument θ ainsi obtenue sont les limites des fonctions $\varphi_\nu(\theta)$ et $\psi_\nu(\theta)$ pour $\nu = \infty$ où

$$f(\rho_\nu e^{i\theta}) = \varphi_\nu(\theta) + i\psi_\nu(\theta).$$

Les deux fonctions limites $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ sont donc intégrables au sens de M. Lebesgue (1). Par suite, la formule fondamentale de Cauchy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)\,du}{u^{n+1}}$$

se décompose en deux formules qui se confondent avec les formules de Fourier et qui nous donnent les coefficients des développements de Φ et Ψ respectivement en série de Fourier.

Mais en général, si une fonction $f(\theta)$ est développable en série de Fourier, les intégrales étant prises au sens de M. Lebesgue, on voit par un calcul élémentaire que les moyennes arithmétiques des s_n sont déterminées par l'équation

$$\sigma_n(\theta) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos[n(x-\theta)]}{1-\cos(x-\theta)} f(x)\,dx.$$

Il en résulte que

$$|\sigma_n(0)| \leqq \frac{A}{2n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$|\sigma_n(0)| \leqq A;$$

car on voit facilement que

$$\int_0^{1} \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\,dx = 2n\pi.$$

42. Il reste encore à étudier le cas où la fonction devient infinie au point considéré. A cet effet, faisons tout d'abord la remarque suivante :

(1) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit holomorphe, x_0 excepté, au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}, est que, pour α assez petit, on ait

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(x_0, \alpha)|} = 1.$$

Il est évident que

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(x_0, \alpha)|} \geqq 1,$$

car x_0 est un point singulier de la fonction étudiée, et le cercle de rayon plus grand que 1 dans le plan de u correspond à un domaine qui contient x_0 à son intérieur.

Supposons donc que, pour α assez petit, la limite supérieure en question soit égale à 1. On en conclut immédiatement que la même fonction, considérée comme fonction de x, est holomorphe à l'intérieur du domaine correspondant $D_\alpha^{x_0}$ et, *a fortiori*, au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}.

Inversement, si la fonction, le point x_0 excepté, est holomorphe au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}, en prenant α suffisamment petit, on peut y tracer un domaine $D_\alpha^{x_0}$ à l'intérieur duquel la fonction soit holomorphe. On en conclut que, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, la série de Taylor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(x_0, \alpha)\, u^\nu$$

représente la fonction $f(x)$ à l'intérieur de $D_\alpha^{x_0}$, c'est-à-dire à l'intérieur du cercle de rayon 1 dans le plan de u, ce qui revient à dire que, pour α assez petit,

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(x_0, \alpha)|} = 1.$$

Notre remarque est donc vérifiée.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction devienne infinie (ne reste pas bornée) *et, x_0 excepté, soit holomorphe au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} est que, pour α assez petit,*

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(x_0, \alpha)|} = 1,$$

et que, quelque petit que soit α,

$$\limsup_{\nu=\infty} |\sigma_\nu(x_0, \alpha)| = \infty.$$

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. On voit par nos développements antérieurs que, d'après les hypothèses faites et α étant suffisamment petit, la série de Taylor

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(x_0, \alpha)\, u^\nu$$

représente une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1; la première condition est donc remplie pour α assez petit, grâce à la remarque faite il y a un instant.

Mais il est évident que les moyennes arithmétiques des $S_n(x_0, \alpha)$ deviennent infinies avec ν; en effet, dans le cas contraire, d'après le théorème du paragraphe précédent, aussi la fonction envisagée serait bornée au voisinage circulaire de x_0 vers l^x; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Démontrons maintenant que les deux conditions sont suffisantes.

La première étant satisfaite, la fonction de u

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(x_0, \alpha)\, u^\nu$$

est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1; par conséquent la même fonction, considérée comme fonction de x, est, x_0 excepté, holomorphe dans le domaine $D_\alpha^{x_0}$ et *a fortiori*, x_0 excepté, au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}.

D'autre part, la seconde condition remplie, la fonction ne peut rester bornée au voisinage envisagé. En effet, si pour α quelconque elle restait bornée, grâce à l'holomorphie établie, on pourrait prendre α assez petit pour que le théorème du paragraphe précédent soit applicable, et d'après ce théorème la suite $|\sigma_n(x_0, \alpha)|$ serait bornée, ce qui est contraire à notre hypothèse. Par conséquent la fonction ne reste pas bornée, ce qui était à démontrer.

L'hypothèse que la fonction soit holomorphe au voisinage considéré est nécessaire pour écarter l'effet des autres singularités possibles. On pourrait dire que la fonction devient infinie exclusivement à cause de la singularité au point x_0.

43. Reste encore à examiner le cas où

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(x_0, \alpha)|} > 1.$$

A cet égard, nous allons esquisser rapidement la démonstration du théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ ait une infinité de points singuliers au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} est que, quelque petit que soit α,

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|G_\nu(x_0, \alpha)|} > 1.$$

Supposons que nous ayons une infinité de points singuliers au voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}. Par définition, le point x_0 reste en dehors de $A^{(\alpha)}$ pour α quelconque, de sorte que la série de Taylor (67) doit avoir un rayon de convergence inférieur à 1 pour α quelconque, car dans le cas contraire $f(x)$ serait holomorphe, x_0 excepté, dans $D_\alpha^{x_0}$ et *a fortiori* dans le voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0}. La condition indiquée est donc bien nécessaire.

Inversement, si, pour α quelconque, la condition proposée est remplie, c'est que le rayon de convergence de la série (67) est moindre que l'unité. Il y a des points singuliers à l'intérieur de $D_\alpha^{x_0}$, quelque petit que soit α; et comme, par hypothèse, il n'y en a pas sur la ligne l^{x_0} (x_0 excepté), le voisinage circulaire de x_0 vers l^x doit en contenir une infinité.

Avec ce théorème, nous avons le premier critère général, à ce qu'il nous semble, pour établir, en partant de la série de Taylor, l'existence d'une infinité de points singuliers au voisinage d'un point.

44. Il n'est pas sans intérêt d'examiner un cas particulier où la fonction $\varphi(u, \alpha)$ n'est plus holomorphe pour $u = 1$. La difficulté principale qui s'introduit ainsi réside dans le fait qu'au voisinage circulaire de $u = 1$ vers le rayon $(0, 1)$ ne correspond pas un voisinage circulaire du point x_0 vers l^{x_0}, car dans la représentation proposée les angles ne

se conservent plus. Dans chaque cas particulier un calcul spécial est nécessaire pour regarder la correspondance des voisinages. Mais, d'autre part, nous allons voir qu'on peut choisir φ de manière qu'on obtienne aussi des conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour les deux premiers théorèmes où la fonction est supposée continue, respectivement bornée dans un voisinage du point x_0.

Prenons pour φ la fonction proposée par M. Mittag-Leffler dans sa troisième Note,

$$v = \frac{u}{\mathrm{H}} e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\frac{du}{u}},$$

et regardons la correspondance des deux voisinages.

Quand u parcourt la circonférence de rayon 1, $x_0 v$ décrit une figure cordiforme $\mathrm{B}_\alpha^{x_0}$ étudiée par M. Mittag-Leffler. Pour arriver à notre but, aux propriétés de cette figure établies par lui nous devons ajouter la remarque suivante :

Traçons au point $u = 1$ un angle $\varphi < \pi$ qui ait pour bissectrice le segment $(1, 0)$, et ne considérons que sa partie la plus proche de 1. A ce domaine angulaire correspond dans le plan de v un domaine ayant un contour tel que ses deux tangentes nécessairement distinctes au point $v = 1$ forment un angle intérieur $\beta = \alpha\varphi$ qui aussi a pour bissectrice le segment $(1, 0)$.

En effet, soit donnée la représentation conforme identique à la précédente

$$v = e^{\int_1^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\frac{du}{u}} \qquad (0 < \alpha \leqq 1).$$

Au point $u = 1$ la dérivée $v(u)$ devient infinie, de sorte que le théorème sur les représentations conformes d'après lequel les angles se conservent ne s'applique pas au point 1 aux courbes qui passent par ce point.

Mais on voit facilement que l'argument de la dérivée tend vers une valeur bien déterminée si l'on s'approche de ce point le long d'une droite. Soit β l'angle entre la droite et le segment $(1, 0)$. *L'argument de $v'(u)$ tend vers $(1 - \alpha)\beta$.*

En effet,

$$v'(u) = v(u)\left[\frac{1+u}{1-u}\right]^{1-\alpha}\frac{1}{u};$$

on sait que

$$\lim_{u=1} v(u) = 1,$$

et l'on voit facilement que

$$\frac{(1+u)^{1-\alpha}}{u}$$

tend vers $2^{1-\alpha}$ si l'on s'achemine vers 1 sur la droite choisie. Par suite, la valeur de l'argument de $v'(u)$ à la limite est déterminée par celle de $(1-u)^{\alpha-1}$.

Soit r la valeur absolue de $1-u$; son argument sera évidemment $-\beta$, de manière que

$$(1-u)^{\alpha-1} = r^{\alpha-1}e^{i\beta(1-\alpha)},$$

ce qui justifie la remarque que nous venons de faire.

Il en ressort qu'*on obtient l'argument limite correspondant de* $v(u)$ *en ajoutant à celui de* u *l'argument* $\beta(1-\alpha)$.

En effet, dire que l'argument ω de la dérivée existe sur la droite envisagée équivaut à affirmer que l'argument de l'expression

$$\frac{v_1-v}{u_1-u} = \frac{r_1}{r}e^{i(\gamma_2'-\gamma_1')}$$

tend vers cette même valeur ω. Donc, si les limites de γ_1' et γ_2' sont respectivement γ_1 et γ_2, nous avons

$$\gamma_2-\gamma_1=\omega,$$

c'est-à-dire

$$\gamma_2=\gamma_1+\omega.$$

Dans notre cas

$$\gamma_1=\pi-\beta, \qquad \omega=(1-\alpha)\beta$$

par suite

$$\gamma_2=\pi-\beta+(1-\alpha)\beta=\pi-\alpha\beta.$$

Ou bien, si l'on s'approche de 1 le long de la droite symétrique à l'autre par rapport à l'axe des x, on doit remplacer β par $-\beta$, et

$$\gamma_2=\pi+\alpha\beta.$$

Donc, si l'on délimite au plan de u un domaine angulaire d'une ouverture totale 2β, on a au plan de v un domaine correspondant, dont les deux tangentes au point 1 forment un angle intérieur $2\alpha\beta$, ce qu'il fallait démontrer.

45. Cela posé, par des considérations toutes pareilles à celles que nous avons rencontrées précédemment, on obtient les résultats suivants.

Introduisons l'expression *voisinage angulaire de* l^{x_0} pour désigner la partie la plus proche de x_0 d'un angle arbitrairement petit, ayant pour sommet x_0, et pour bissectrice la tangente de la courbe l^{x_0} au point x_0; et soit

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathrm{H}_\nu(x,\alpha)$$

la représentation envisagée.

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction, holomorphe au voisinage angulaire de l^{x_0}, *ait une limite bien déterminée (respectivement* soit bornée) *quand on s'approche de* x_0 *dans ce voisinage, est que,* α *étant suffisamment petit, les moyennes arithmétiques des*

$$\mathrm{S}_\nu(x_0,\alpha)=\mathrm{H}_0(x_0,\alpha)+\ldots+\mathrm{H}_\nu(x_0,\alpha)$$

aient une limite (respectivement soient bornées en valeur absolue), *pour* $n=\infty$; *et dans ce cas la limite trouvée est égale à la valeur limite,* $f(x_0)$.

Dans les autres théorèmes, pour obtenir les théorèmes nouveaux correspondants, il ne faut que remplacer le voisinage circulaire de x_0 vers l^{x_0} par le voisinage angulaire de l^{x_0}. Par exemple, le dernier s'énonce ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction ait une infinité de points singuliers en x_0 *au voisinage angulaire de* l^{x_0}, *c'est-à-dire dans la direction de la tangente à* l^{x_0} *à ce point, est que, pour* α *quelconque,*

$$\limsup_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{|\mathrm{H}_\nu(x_0,\alpha)|}>1.$$

Remarquons que, si la fonction est continue dans les voisinages considérés, la série de polynomes converge *uniformément* à ces voisinages, grâce au théorème indiqué de M. Fejér, et ce résultat s'obtient sans aucun calcul pour toute représentation de la classe envisagée ([1]).

46. Une question importante se pose. L'emploi des étoiles curvilignes donne une très grande souplesse aux développements indiqués en ce qui concerne le domaine où la fonction peut être représentée par eux; dans quelle mesure ces développements sont-ils utilisables pour l'étude générale de l'allure de la fonction au voisinage d'un point singulier quelconque?

Au fond, la question se réduit à la suivante. Quels sont les points singuliers qui, par un choix convenable de la courbe génératrice $g(t)$, deviennent des sommets de l'étoile curviligne déterminée par la fonction étudiée et par $g(t)$?

Pour répondre à cette question du moins partiellement, faisons, concernant les points singuliers, une distinction qui ne nous paraît pas artificielle. Soit x_0 un point quelconque du plan complexe. De deux choses l'une: ou bien il y a un chemin par lequel le prolongement analytique permet de nous approcher de ce point, ou bien il n'y en a pas. Dans le dernier cas, la fonction n'étant pas définie au voisinage de ce point, nous n'avons rien à dire; le point x_0 est en dehors du domaine d'existence de la fonction étudiée. Dans le premier, si nous supposons que x_0 est un point singulier, le seul cas qui nous intéresse à ce moment, on peut s'approcher de ce point et cela de deux manières bien différentes : il peut arriver qu'en s'approchant de x_0 sur le chemin envisagé, les rayons des cercles de convergence successifs tendent vers o; le point singulier x_0 ne peut pas être atteint directement; ou bien on peut arriver à ce point par un nombre fini de cercles, de sorte que x_0 est sur la circonférence du dernier cercle; le point singulier en

(1) Indépendamment de nous, M. M. Riesz est arrivé depuis, pour la représentation toute particulière de M. Mittag-Leffler dans le cas où la fonction est continue en x_0, à se débarrasser des moyennes arithmétiques [*Sur un problème d'Abel* (*Rendiconti di Palermo*, 1910)]. Nous devons remarquer cependant que la simplification, obtenue par M. Riesz à l'aide de calculs assez compliqués, n'est guère sensible dans le problème général des singularités qui demanderait plutôt de trouver des relations nouvelles liant les coefficients, c'est-à-dire la représentation, aux propriétés de la fonction. D'ailleurs, en modifiant légèrement le raisonnement indiqué par M. Riesz, on peut arriver à supprimer les moyennes arithmétiques aussi dans les autres théorèmes si toutefois on se place dans le cas de la représentation particulière de M. Mittag-Leffler.

question peut être atteint directement. Il se manifeste par l'impossibilité de pousser plus loin le prolongement analytique dans la direction de x_0.

On peut voir facilement que les points singuliers de la dernière catégorie peuvent devenir des sommets de l'étoile, si l'on choisit convenablement la courbe génératrice; par conséquent ils peuvent être étudiés par la méthode de ce Chapitre. *Chaque point singulier, en tant qu'il peut être atteint directement, est à la portée de notre méthode.*

Mais on peut aller plus loin. Les seuls points singuliers qui échappent réellement aux moyens indiqués sont ceux qui ont une infinité de points singuliers dans chaque direction pour chaque branche de la fonction, ou, plus précisément, les points singuliers x_0 tels que, si l'on s'approche d'eux par un chemin *possible* quelconque l^{x_0}, il y ait une infinité de points singuliers au voisinage angulaire de l^{x_0}.

Remarquons enfin que tous nos résultats s'étendent assez facilement aux fonctions analytiques quelconques de n variables complexes moyennant la construction de l'étoile correspondante effectuée par M. Painlevé (*loc. cit.*, p. 105). Au fond, il ne faut que définir convenablement les différents voisinages des points singuliers pour arriver à des résultats presque identiques à ceux obtenus pour les fonctions d'une seule variable. Pour ces définitions nous renvoyons à notre Note sur la série des polynomes et les singularités des fonctions analytiques (*Comptes rendus*, 13 février 1911).

L'essentiel du mécanisme de ces développements qui nous a permis d'arriver aux résultats simples et généraux de ce Chapitre est la suite de représentations conformes $v = \varphi(u, \alpha)$. Et en effet, la même méthode réussit dans la plupart des cas où la série représentatrice est formée par un tel mécanisme. C'est le cas par exemple pour les séries de M. Faber (*Mathem. Annalen*, 1903 et 1907), qui se laissent traiter de cette façon sans aucune difficulté.