ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Sur les vibrations longitudinales que produit, dans une barre élastique, la variation de ses températures

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 28 (1911), p. 377-388
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__377_0>

SUR

LES VIBRATIONS LONGITUDINALES

QUE PRODUIT,

DANS UNE BARRE ÉLASTIQUE,

LA VARIATION DE SES TEMPÉRATURES;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE. — I. Vibrations spontanées d'une barre à bouts fixes et imperméables à la chaleur, qui se met en équilibre thermique avec une atmosphère à température constante. — II. Vibrations spontanées d'une barre libre, se refroidissant par contact à ses extrémités et par rayonnement ou convection à sa surface latérale. — III. Cas d'un échauffement préalable instantané.

I. — Vibrations spontanées d'une barre à bouts fixes et imperméables à la chaleur, qui se met en équilibre thermique avec une atmosphère à température constante.

1. Deux jeunes docteurs ès sciences mathématiques, MM. Roy et Annycke, viennent d'étudier en détail, dans leurs thèses de doctorat [1], les deux problèmes de mouvement vibratoire probablement les plus simples que comprenne le domaine abordé en 1835 par Duhamel, au Tome V du *Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences* (*Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides*). Ce sont, respectivement,

---

[1] *Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides*, par M. Louis Roy (Gauthier-Villars, 1910). — *Contribution à l'étude thermomécanique des tiges et des plaques*, par M. Annycke (Gauthier-Villars, 1911).

les deux questions : 1° du mouvement longitudinal pris spontanément par une barre de longueur l, s'étendant, de $x=0$ à $x=l$, le long de l'axe des x, à bouts libres de toute pression sensible, mais en contact (par exemple) avec un liquide à la température zéro de l'atmosphère ambiante, quand cette barre, supposée portée initialement, sans vitesses visibles, à des températures données, se refroidit peu à peu, par rayonnement ou par convection à travers sa surface latérale et par contact à ses extrémités; 2° du mouvement analogue pris par la même barre, mais à bouts ($x=0$, $x=l$) imperméables à la chaleur et fixés dans les situations respectives *de leur état naturel à la température zéro*, lorsque cette barre, après avoir été portée de même, sans vitesses visibles, à des températures données $\theta=f(x)$, se refroidit par rayonnement ou convection dans l'atmosphère ambiante.

Tels sont les deux problèmes, traités, le premier par M. Roy, le second par M. Annycke, que je reprendrai ici pour en simplifier notablement les solutions, en montrant et utilisant d'intimes rapports que j'ai aperçus entre eux.

2. Désignons par ξ, à l'époque t, le petit déplacement, suivant les x, de la section matérielle σ de la barre dont l'abscisse d'état naturel, à la température zéro, était x; et soit, par suite, $\frac{d\xi}{dx}$ la dilatation linéaire des fibres longitudinales à travers σ, dilatation dont une partie, due à l'élévation θ de la température, est $D\theta$, si D désigne leur coefficient donné de dilatation thermique, et dont l'autre partie $\frac{d\xi}{dx}-D\theta$, seule *élastique*, égale le quotient de la tension qu'éprouve la barre à travers σ, par le produit $E\sigma$ de l'aire σ et du coefficient donné E d'élasticité des mêmes fibres, que nous supposons homogènes. Cette tension a donc pour formule $E\sigma\left(\frac{d\xi}{dx}-D\theta\right)$; et, si l'on appelle ρ la densité à l'état naturel, ou que $\rho\sigma\,dx$ exprime la masse d'un tronçon de barre et $\rho\sigma\,dx\,\frac{d^2\xi}{dt^2}$ sa force motrice, celle-ci égalera l'excédent,

$$E\sigma\left(\frac{d^2\xi}{dx^2}-D\frac{d\theta}{dx}\right)dx,$$

de la tension exercée à travers la seconde base, d'abscisse primitive $x + dx$, sur celle qu'éprouve la première, d'abscisse primitive x. L'équation indéfinie du mouvement sera ainsi, sous la forme la plus simple, où a désigne la vitesse $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ du son le long de la barre,

$$(1) \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dx^2} = -D\frac{d\theta}{dx}.$$

Quant à la température θ, dont la dérivée en x figure au second membre et qu'il faudra déterminer préalablement, l'équation indéfinie qui la régit est, à très peu près, celle de Fourier ou plutôt de Biot, bien connue, que j'écrirai

$$(2) \qquad \frac{1}{a}\frac{d\theta}{dt} + b\theta = c\frac{d^2\theta}{dx^2},$$

b et c désignant deux certaines constantes positives données.

3. Formons d'abord les autres relations, et les solutions simples correspondantes, pour la seconde des questions posées, celle de M. Annycke. On y a, comme conditions relatives aux deux extrémités,

$$(3) \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l) \qquad \frac{d\theta}{dx} = 0, \qquad \xi = 0.$$

Restent les conditions d'état initial, ou relatives à l'instant $t = 0$, dont l'une, dès à présent évidente, consiste à y annuler les vitesses $\frac{d\xi}{dt}$.

Quant aux autres, M. Annycke admet des températures primitives, $\theta_0 = f(x)$, produites, un peu antérieurement à l'instant $t = 0$, avec une lenteur suffisante pour que la barre, à extrémités fixes, y soit en équilibre mécanique ou soumise à une tension constante d'un bout à l'autre : d'où il suit que la dilatation élastique $\frac{d\xi_0}{dx} - D\theta_0$, ou $\frac{d}{dx}\left(\xi_0 - D\int_0^x \theta_0\, dx\right)$, s'y trouve indépendante de x. Donc la fonction $\xi_0 - D\int_0^x \theta_0\, dx$, nulle, d'après (3), pour $x = 0$, y est proportionnelle à x; et, encore d'après (3), elle égale $-D\int_0^l \theta_0\, dx$ pour $x = l$. En résumé, l'on aura

$$(4) \quad (\text{pour } t = 0) \qquad \theta = \theta_0 = f(x), \qquad \xi = D\left(\int_0^x \theta_0\, dx - \frac{x}{l}\int_0^l \theta_0\, dx\right).$$

Ces dernières formules, seules équations du problème où figurent des termes ne contenant pas θ, ξ ou leurs dérivées, montrent que, si l'on décompose la fonction $\theta_0 = f(x)$ en plusieurs parties, les expressions totales de θ et de ξ en x et en t seront les sommes pures et simples des expressions partielles qu'on aurait eues en réduisant successivement θ_0 à chacune de ces parties.

Déduisons d'abord de là que le problème se dédoublera en deux, correspondant, l'un, au cas où $f(x)$ se réduirait à la moyenne de ses valeurs effectives d'un bout à l'autre; le second, au cas où $f(x)$ serait partout l'excédent, sur cette moyenne, des valeurs données et deviendrait ainsi une fonction à valeur moyenne nulle.

Le premier cas est celui d'un échauffement initial θ_0 uniforme, où l'équation (2), complétée par les premières (3), conduit à prendre simplement $\theta = \theta_0 e^{-bat}$. Or alors les équations en ξ donnent $\xi = 0$, avec une tension de la barre, $-E\sigma D\theta$, uniforme aussi et graduellement évanouissante. Ainsi, le phénomène consiste en un simple refroidissement commun de la barre, avec décompression graduelle, sans aucun des mouvements longitudinaux qu'on se proposait d'étudier.

4. Il y a donc lieu de se borner au second cas, celui où la fonction θ_0, c'est-à-dire $f(x)$, est de valeur moyenne nulle. Et l'on a alors, comme conditions d'état initial,

$$(5)\quad (\text{pour } t=0)\quad \theta=\theta_0=f(x),\quad \frac{d\xi}{dt}=0,\quad \xi=D\int_0^x \theta_0\,dx,\quad \text{avec}\quad \int_0^l \theta_0\,dx=0.$$

Formons des solutions simples où θ soit le produit, CTX, d'une constante arbitraire C par une fonction, T, de t seul et une fonction, X, de l'abscisse x seule. La substitution de TX, dans l'équation (2) divisée par θ, montre que les deux quotients de T′ par T et de X″ par X doivent se réduire à deux constantes, $-\beta a$ et $-\alpha^2$ respectivement, reliées entre elles par la formule

$$(6)\qquad \beta = b + c\alpha^2.$$

L'on a donc $T' = -\beta a T$, $X'' = -\alpha^2 X$ (d'où aussi $T'' = -\beta a T' = \beta^2 a^2 T$, $X''' = -\alpha^2 X'$); et l'on pourra prendre (à des facteurs constants près), vu d'ailleurs les premières conditions (3),

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} T = e^{-\beta a t}, \qquad X = \cos \alpha x, \qquad \alpha = \dfrac{i\pi}{l} \\ (i \text{ étant l'un quelconque des entiers } 1, 2, 3, \ldots). \end{array}\right.$$

Il résulte de là, pour correspondre à $\theta = CTX$, une forme de ξ, kTX', proportionnelle à TX' et vérifiant toutes les conditions, sauf les deux avant-dernières (5) d'état initial, c'est-à-dire vérifiant l'équation (1) et les conditions $\xi = 0$ relatives aux deux bouts $x = 0$, $x = l$. En effet, l'expression kTX' de ξ, outre qu'elle s'annule, comme X', pour $x = 0$ et $x = l$, change le premier membre de (1) en $k(\beta^2 + \alpha^2)\,TX'$ alors que le second membre est $-DCTX'$; il suffira donc de faire k égal au quotient de $-DC$ par la somme $\alpha^2 + \beta^2$. Enfin, l'on satisfera aux deux avant-dernières conditions (5), d'état initial, en ajoutant à cette solution particulière la solution générale de (1) *sans second membre*, spécifiée de manière à ne contenir x que par le facteur X' (en raison des conditions $\xi = 0$ aux deux bouts $x = 0$ et $x = l$). Il vient ainsi, avec deux constantes arbitraires A et B,

$$(8)\qquad \xi = -\frac{D}{\alpha^2 + \beta^2}\, CX'(e^{-\beta a t} + A \cos \alpha a t + B \sin \alpha a t).$$

L'annulation, pour $t = 0$, de la dérivée première de ξ en t, conduit à prendre B égal au rapport $\frac{\beta}{\alpha}$. Après quoi, θ_0 étant ici $CX = -\frac{CX''}{\alpha^2}$, l'avant-dernière condition (5) devient, après division par $-DC$,

$$\frac{X'(1 + A)}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^x X''\,dx = \frac{X'}{\alpha^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1 + A}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{A}{\beta^2} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

En définitive, si l'on appelle ϖ la fonction du temps t seul exprimée par la parenthèse de (8), qui est maintenant

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varpi &= e^{-\beta a t} + \frac{\beta}{\alpha}\sin \alpha a t + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cos \alpha a t \\ &= e^{-\beta a t} + \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha^2}\sin\left(\alpha a t + \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

la solution simple du problème de M. Annycke sera

$$(10)\qquad \theta = \mathrm{CXT}, \qquad \xi = -\mathrm{D}\frac{\mathrm{CX}'\varpi}{\alpha^2+\beta^2},$$

où α, β, X, T, ϖ auront les formes (7), (6) et (9).

5. Appelons Σ une somme de termes analogues, avec tout autant de coefficients C distincts, où i recevra successivement les diverses valeurs entières 1, 2, 3, 4, ...; et la solution générale sera celle de M. Annycke,

$$(11)\qquad \theta = \Sigma \mathrm{C} e^{-\beta a t}\cos\alpha x, \qquad \xi = \mathrm{D}\sum \frac{\mathrm{C}\alpha \sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\varpi,$$

à la condition de développer préalablement la fonction donnée $\theta_0 = f(x)$, de valeur moyenne nulle, en une série $\Sigma \mathrm{C}\cos\alpha x$ de termes proportionnels aux cosinus des multiples d'un même arc, par la formule trigonométrique usuelle d'Euler.

M. Annycke se donne, par exemple, θ_0 linéaire en x, ou proportionnel à la distance au milieu de la barre : ce qui suppose celle-ci chauffée sur une de ses moitiés et symétriquement refroidie sur l'autre. Il trouve ainsi

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad\left[\text{pour } \theta_0 = m\left(x-\dfrac{l}{2}\right)\right] \\ \mathrm{C} = -\dfrac{2m}{l}\dfrac{1-\cos i\pi}{\alpha^2} = \left\{\begin{array}{ll} \text{zéro} & (\text{pour } i \text{ pair}), \\ -\dfrac{4m}{l}\dfrac{1}{\alpha^2} & (\text{pour } i \text{ impair}); \end{array}\right. \end{array}\right.$$

et par suite, en bornant les séries aux termes où α, β, ϖ correspondent à des *valeurs impaires de i* :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta = -\dfrac{4m}{l}\sum e^{-\beta a t}\dfrac{\cos\alpha x}{\alpha^2}, \\ \xi = -\dfrac{4m}{l}\mathrm{D}\sum\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\left[\dfrac{e^{-\beta a t}}{\alpha} + \dfrac{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^3}\sin\left(\alpha a t + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\right]. \end{array}\right.$$

II. — Vibrations spontanées d'une barre libre, se refroidissant par contact à ses extrémités et par rayonnement ou convection à sa surface latérale.

6. Passons maintenant au problème traité par M. Roy, où les deux extrémités $x = 0$, $x = l$ de la barre sont libres de toute pression sensible et maintenues à la température zéro. Nous y appellerons θ' les températures et ξ' les petits déplacements. Le mouvement, produit à partir de l'état naturel à zéro par de simples variations de température, sans pressions ni tractions extérieures, aura laissé immobile le centre de gravité; en sorte que, si $\mathrm{D}f(x)$ y désigne les déplacements initiaux ξ'_0, la fonction $f(x)$ aura sa valeur moyenne nulle, comme l'était celle de θ_0 dans le problème de M. Annycke (n° 4).

D'ailleurs, M. Roy suppose ces déplacements ξ'_0 purement thermiques, ou dus aux dilatations linéaires $\mathrm{D}\theta'_0$ des fibres par la chaleur et, par conséquent, égaux à $\mathrm{D}\int_0^x \theta'_0\,dx + \text{const.}$ Enfin, il admet, comme M. Annycke, que la production des températures initiales θ'_0, un peu antérieure à l'époque $t = 0$, ait été assez lente pour ne pas se trouver accompagnée de vitesses perceptibles.

Les conditions d'état initial seront donc exprimées par la troisième ligne de formules du tableau suivant, où j'ai réuni toutes les équations du problème (dont les autres sont évidentes) :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}\dfrac{d\theta'}{dt} + b\theta' = c\dfrac{d^2\theta'}{dx^2}, \qquad \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi'}{dt^2} - \dfrac{d^2\xi'}{dx^2} = -\mathrm{D}\dfrac{d\theta'}{dx}; \\ \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l) \qquad \theta' = 0, \qquad \dfrac{d\xi'}{dx} = 0; \\ (\text{pour } t = 0) \qquad \theta' = \theta'_0 = f'(x), \qquad \dfrac{d\xi'}{dt} = 0, \qquad \xi' = \mathrm{D}f(x). \end{array}\right.$$

Or on y satisfait en prenant simplement pour θ' et ξ' les dérivées premières en x des fonctions θ et ξ du problème précédent, où $f(x)$ serait la même fonction donnée, à valeur moyenne nulle, que dans le problème actuel. Effectivement, les équations (2), (1), (5), différentiées en x, deviennent immédiatement la première et la troisième lignes du tableau (14); et, de plus, les deux premières équations (3), relatives à θ, sont les premières, $\theta' = 0$, de la seconde ligne du même tableau. Quant aux deux autres de cette seconde ligne, revenant à annuler la dérivée seconde de ξ en x aux deux bouts de la barre, elles résultent de ce que l'équation (1) s'y réduit à son second terme, en raison des dernières (3), différentiées deux fois en t, et des premières (3). Ainsi, la dérivée en x des fonctions θ et ξ de M. Annycke résout le problème de M. Roy.

Inversement, la dérivée en x des deux fonctions θ' et ξ' de M. Roy résout un second problème de M. Annycke, pourvu que θ'_0 soit une fonction continue même aux deux bouts $x = 0$, $x = l$, ou n'ait pas sa dérivée en x, $f''(x)$, infinie pour $x = 0$ et $x = l$; ce qui rendrait illusoires nos raisonnements. Car, si l'on dérive en x la première et la troisième lignes du tableau (14), il vient les lignes analogues du tableau suivant, expression du problème particulier de M. Annycke où $f''(x)$ exprimerait les températures initiales et où θ'', ξ'' désigneraient les deux fonctions inconnues :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}\dfrac{d\theta''}{dt} + b\theta'' = c\dfrac{d^2\theta''}{dx^2}, \qquad \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi''}{dt^2} - \dfrac{d^2\xi''}{dx^2} = -\mathrm{D}\dfrac{d\theta''}{dx} \\ \qquad (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = l) \quad \dfrac{d\theta''}{dx} = 0, \qquad \xi'' = 0; \\ (\text{pour } t = 0) \quad \theta'' = \theta''_0 = f''(x), \qquad \dfrac{d\xi''}{dt} = 0, \qquad \xi'' = \mathrm{D} f'(x). \end{array}\right.$$

Et quant aux quatre relations de la seconde ligne, les deux dernières, $\xi'' = 0$, ne sont autres que les deux relations analogues du tableau (14), tandis que les deux premières sont ce à quoi se réduit, aux deux bouts de la barre, la première équation (14), à cause de l'annulation qu'y éprouvent constamment, d'après la seconde ligne de (14), non seulement θ', mais aussi sa dérivée en t.

7. Les formules (11) donneront donc, dans le problème de M. Roy,

$$(16)\qquad \theta' = -\Sigma C\alpha e^{-\beta a t}\sin\alpha x, \qquad \xi' = \mathrm{D}\sum \frac{C\alpha^2\cos\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\,\mathfrak{T},$$

quand les températures initiales θ'_0 y seront $-\Sigma C\alpha\sin\alpha x$, en série trigonométrique de sinus procédant suivant tous les multiples d'un même arc. Par exemple, dans le cas particulièrement intéressant, traité en détail par M. Roy, où ces températures initiales θ'_0 se réduisent à une constante m, dérivée en x de l'expression (12) de θ_0, il résulte des formules (13), où ne figurent que les multiples impairs de l'arc en question :

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}\theta' &= \frac{4m}{l}\sum e^{-\beta at}\frac{\sin\alpha x}{\alpha},\\ \xi' &= -\frac{4m}{l}\mathrm{D}\sum\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\left[e^{-\beta at}+\frac{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2}\sin\left(\alpha at+\operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Mais celles-ci (17) ne pourraient plus être différentiées en x, pour fournir la solution du problème de M. Annycke dans lequel on aurait, comme température initiale θ''_0 ou $f''(x)$, zéro, dérivée de m en x; car, ici, l'équation $\theta' = \theta'_0 = m$, de la troisième ligne du tableau (14), n'est compatible avec les deux premières, $\theta' = 0$, de la seconde ligne, que si les températures initiales sont exprimées par *m dans l'intervalle seulement*, compris entre les deux limites $x = 0$, $x = l$, et non à ces limites mêmes. D'où il suit que cette fonction θ'_0 a sa dérivée infinie aux deux limites, ou ne peut y être différentiée; ce qui rend alors illusoires les formules (15). Aussi, la série Σ figurant dans θ'' cesse-t-elle d'être convergente à l'instant $t = 0$, où elle se réduit à $\Sigma\cos\alpha x$.

8. Il est intéressant de comparer, comme l'ont fait MM. Roy et Annycke dans le cas (17) d'une dilatation initiale uniforme, le mouvement d'origine calorifique à celui d'origine purement mécanique qu'amèneraient, à la température constante zéro, des déplacements initiaux tout pareils $\xi'_0 = \mathrm{D}f(x) = \mathrm{D}\Sigma\mathrm{C}\cos\alpha x$.

Les équations en ξ' du tableau (14), prises avec θ' nul, donnent alors

$$\xi' = \mathrm{D}\Sigma\mathrm{C}\cos\alpha x\cos\alpha at.$$

Or, si l'on considère à part, dans la dernière expression (9) de ϖ, le terme périodique, on voit que le déplacement d'origine calorifique, donné par la seconde (16), admet pour sa partie vibratoire, ou abstraction faite de termes exponentiels qui s'évanouissent graduellement sans alternatives, la formule suivante :

$$(18)\quad \text{Partie vibratoire de } \xi' = \mathrm{D}\sum\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\mathrm{C}\cos\alpha x\sin\left(\alpha at+\operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Les harmoniques y sont de mêmes périodes que dans le mouvement d'origine mécanique, avec amplitudes respectivement plus petites, ou réduites à la fraction de leurs valeurs qu'exprime le rapport

$$r = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

variable d'un harmonique à l'autre. En éliminant β de ce rapport r par la formule (6), on voit qu'il satisfait à la relation

$$\text{(19)} \qquad \frac{1}{r^2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{\alpha} + c\alpha\right)^2},$$

et qu'il varie, par suite, avec α, dans les mêmes sens que la somme $\frac{b}{\alpha} + c\alpha$, décroissant en conséquence, à partir de l'unité, quand on y fait grandir α à partir de zéro, s'abaissant ainsi jusqu'à un certain minimum, qui est atteint lorsque $\alpha = \sqrt{\frac{b}{c}}$, et croissant ensuite pour tendre asymptotiquement vers la même limite 1, quand grandissent à l'infini α ou le numéro d'ordre de l'harmonique. Pour les harmoniques d'ordre peu ou modérément élevé, et, par suite, propres à jouer un rôle notable dans le mouvement vibratoire total et dans le son qui en résulte, l'amplitude de ces harmoniques sera sensible, comparable à ce qu'elle est dans le mouvement d'origine mécanique, pourvu que les valeurs (7) de α y soient assez petites : ce qui arrivera si la longueur l de la barre est assez grande.

III. — Cas d'un échauffement préalable instantané.

9. Tant M. Roy que M. Annycke ont supposé, dans leurs problèmes respectifs, l'état initial θ'_0 ou θ_0 des températures produit, un peu antérieurement à l'époque $t = 0$, avec une lenteur suffisante pour s'accompagner ou de leurs dilatations normales statiques $D\theta'_0$, ou des *pressions statiques* corrélatives, sans vitesses appréciables. Or on pourrait le concevoir, au contraire, produit très rapidement à l'époque même $t = 0$, assez pour n'avoir pas encore amené, à cette époque, les dilatations thermiques, ni, par conséquent, de déplacements ξ' ou ξ per-

ceptibles, non plus que de vitesses $\frac{d(\xi' \text{ ou } \xi)}{dt}$. Alors les conditions d'état initial, au lieu de se trouver exprimées par la troisième ligne du tableau (14) ou par les formules (5), seraient

$$(20) \quad (\text{pour } t=0) \quad \theta'=f'(x) \text{ ou } \theta=f(x), \qquad \frac{d(\xi' \text{ ou } \xi)}{dt}=0, \quad (\xi' \text{ ou } \xi)=0.$$

Il est clair, par les raisons exposées au n° 6, que θ', ξ' égaleraient encore les dérivées respectives en x de θ et de ξ; et que, de plus, les dérivées en x de θ' et ξ' vérifieraient encore les mêmes équations que θ et ξ, avec $f''(x)$ à la place de $f(x)$. Mais il faudrait, dans (8), déterminer les deux constantes A et B de manière à annuler, pour $t=0$, outre la dérivée de la parenthèse fonction de t, cette parenthèse elle-même. Il viendrait donc toujours $B=\frac{\beta}{\alpha}$ et, de plus, $A=-1$. Ainsi, la fonction ϖ donnée par (9) serait remplacée, dans toutes les solutions simples, par celle-ci,

$$(21) \qquad \begin{aligned} \varpi_1 &= e^{-\beta a t} - \cos\alpha a t + \frac{\beta}{\alpha}\sin\alpha a t \\ &= e^{-\beta a t} - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}\cos\left(\alpha a t + \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

10. A cela près, les formules (11), (13), (16), (17) des intégrales subsisteraient; et, par exemple, dans le cas de la tige à bouts libres refroidis par contact, la partie vibratoire des déplacements ξ' serait, au lieu de (18),

$$(22) \qquad -D\sum \frac{C\alpha\cos\alpha x}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\left(\alpha a t + \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Les amplitudes, pour les harmoniques de même période comparées de part et d'autre, sont ici les produits respectifs, par $\frac{\alpha}{\beta}$, de ce qu'elles étaient dans le mouvement vibratoire avec déplacements thermiques initiaux. Or, vu (6), ce rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est l'inverse de la somme $\frac{b}{\alpha}+c\alpha$ déjà considérée au n° 8. Il est évanouissant tant pour $\alpha=0$ que pour α infini, c'est-à-dire, tout à la fois, et dans les barres très longues, et même, pour les harmoniques d'un ordre très élevé, dans les barres de longueur modérée. Mais il peut devenir notable pour les valeurs de α intermédiaires, surtout pour celle, $\sqrt{\frac{b}{c}}$, qui lui fait atteindre son maximum $\frac{1}{2\sqrt{bc}}$.

En résumé, les vibrations simples exprimées par (22), ou comprises dans le mouvement spontané total, seront d'autant moins sensibles que l'étaient davantage les vibrations de même période exprimées par (18); et *vice versa* (1).

---

(1) Le présent Mémoire vient d'être résumé dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CLIII, 14 et 21 août 1911, p. 409 et 452.