

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. BELTRAMI

Théorie fondamentale des espaces de courbure constante.

Trad. par. J. Hoüel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 6 (1869), p. 347-375

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6_347_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE FONDAMENTALE
DES
ESPACES DE COURBURE CONSTANTE,

PAR M. E. BELTRAMI,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BOLOGNE.

Traduit de l'italien par M. J. HOÜEL.

(Extrait des *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2^e série, t. II, p. 232.)

Dans un Mémoire inséré au tome VII de la première série des *Annali di Matematica* (Rome, 1866), j'ai étudié les surfaces douées de la propriété d'avoir leurs lignes géodésiques représentées par des équations linéaires, et j'ai trouvé que cette propriété se vérifie pour les seules surfaces de courbure constante et pour certaines variables spéciales que l'analyse du problème a spontanément introduites.

Dans le présent Mémoire, j'expose les résultats beaucoup plus généraux auxquels m'a conduit le développement ultérieur de cette conception, combinée avec quelques principes tracés par Riemann dans son remarquable travail posthume : *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, publié récemment par M. Dedekind dans le treizième volume des *Mémoires de Göttingue*. J'espère que mes recherches pourront faciliter l'intelligence de quelques parties de cette profonde étude.

Certaines locutions, dont je fais, pour abrégé, un fréquent usage, ne paraîtront, je crois, ni forcées, ni obscures à celui qui s'attachera plus au fond qu'à la forme. Le lecteur attentif n'aura besoin d'aucun effort pour les entendre sans plus d'explications, en restant d'ailleurs complètement libre de ne leur attribuer qu'une signification purement analytique.

L'expression différentielle

$$(1) \quad ds = R \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}}{x},$$

où x, x_1, x_2, \dots, x_n sont $n + 1$ variables réelles liées par l'équation

$$(2) \quad x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2,$$

tandis que R et a sont constantes, peut être regardée comme représentant l'*élément linéaire*, ou la distance de deux points infiniment voisins, dans un *espace* de n dimensions, dont chaque *point* est défini par un système de valeurs des n *coordonnées* x_1, x_2, \dots, x_n . La forme de cette expression détermine la *nature* de cet espace.

En posant, pour abrégé,

$$\Omega = \sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2},$$

les *lignes géodésiques* de l'espace en question sont celles qui satisfont à l'équation

$$\delta \int \frac{\Omega}{x} = 0,$$

avec la condition $x \partial x + x_1 \partial x_1 + \dots + x_n \partial x_n = 0$. Au moyen des transformations ordinaires de la variation d'une intégrale, la première équation peut se développer ainsi :

$$\int \left\{ \delta x \left[\frac{\Omega}{x^2} + d \left(\frac{dx}{x\Omega} \right) \right] + \delta x_1 \cdot d \left(\frac{dx_1}{x\Omega} \right) + \dots + \delta x_n \cdot d \left(\frac{dx_n}{x\Omega} \right) \right\} = 0,$$

et, en ayant égard à la relation qui lie les variations $\partial x, \partial x_1, \dots, \partial x_n$, cette équation se décompose dans les suivantes :

$$\frac{\Omega}{x^2} + d \left(\frac{dx}{x\Omega} \right) = kx, \quad d \left(\frac{dx_1}{x\Omega} \right) = kx_1, \dots, \quad d \left(\frac{dx_n}{x\Omega} \right) = kx_n.$$

k étant un facteur qui reste à déterminer. Or, en multipliant ces équations respectivement par x, x_1, \dots, x_n , et faisant la somme, on a

$$d\left(\frac{x dx + x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n}{x \Omega}\right) = k(x^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2);$$

donc, en vertu de l'équation (2), $k = 0$, et, par suite,

$$(3) \quad d\left(\frac{dx}{x \Omega}\right) + \frac{\Omega}{x^2} = 0,$$

$$(4) \quad dx_1 = c_1 x \Omega, \quad dx_2 = c_2 x \Omega, \dots, \quad dx_n = c_n x \Omega,$$

c_1, c_2, \dots, c_n étant des constantes. Ces n dernières équations, étant élevées au carré et sommées, donnent

$$(5) \quad \Omega = -\frac{dx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

en faisant

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2}.$$

Cette valeur de Ω rend identique l'équation (3), dont il est, par conséquent, inutile de tenir compte; tandis que les équations (4), en éliminant $x \Omega$ et intégrant ensuite, donnent

$$x_1 = b_1 x_n + b'_1, \quad x_2 = b_2 x_n + b'_2, \dots, \quad x_{n-1} = b_{n-1} x_n + b'_{n-1}.$$

Donc les lignes géodésiques de l'espace considéré sont représentées par $n - 1$ équations linéaires entre les n coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , de même que cela a lieu dans le plan et dans l'espace ordinaire, lorsqu'on fait usage des coordonnées cartésiennes, et dans les surfaces de courbure constante, quand on emploie les variables u, v du Mémoire cité. Parmi les systèmes de lignes géodésiques, il faut noter en particulier ceux qui s'obtiennent en égalant toutes les coordonnées, à l'exception d'une seule, à autant de constantes. Par chaque point de l'espace passe une ligne géodésique de chacun de ces systèmes, auxquels appartiennent les axes coordonnés eux-mêmes des x_1 , des x_2, \dots , des x_n , pour chacun desquels les coordonnées restantes sont toutes nulles : nous les appellerons les *systèmes des $x_1, des x_2, \dots, des x_n$* .

Pour obtenir la longueur de l'arc géodésique ρ , compris entre deux points donnés, observons que, d'après l'équation (5), on a

$$d\rho = R \frac{\Omega}{x} = - \frac{R dx}{x \sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

d'où

$$c x = \frac{1}{\cosh \frac{\rho - \rho_0}{R}},$$

ρ_0 étant une constante arbitraire, et x désignant la fonction

$$\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}.$$

Si l'on représente par $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ les valeurs des coordonnées au point $\rho = 0$, c'est-à-dire à l'origine de l'arc, et par x^0 la valeur correspondante de la fonction x , il vient

$$(6) \quad c x^0 = \frac{1}{\cosh \frac{\rho_0}{R}},$$

d'où, en éliminant c ,

$$x = \frac{x^0 \cosh \frac{\rho_0}{R}}{\cosh \frac{\rho - \rho_0}{R}},$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$(7) \quad \frac{x^2 \sinh^2 \frac{\rho}{R}}{\cosh^2 \frac{\rho_0}{R}} = 2 x x_0 \cosh \frac{\rho}{R} - x^2 - x_0^2.$$

D'autre part, comme on a, par les équations précédentes,

$$x \Omega = \frac{x^2 d\rho}{R} = \frac{1}{c^2} \cdot d \operatorname{tanh} \frac{\rho - \rho_0}{R},$$

les équations (4) donnent

$$x_1 = a_1 + \frac{c_1}{c^2} \operatorname{tanh} \frac{\rho - \rho_0}{R}, \quad x_2 = a_2 + \frac{c_2}{c^2} \operatorname{tanh} \frac{\rho - \rho_0}{R}, \dots,$$

ou en introduisant, au lieu des constantes a_1, a_2, \dots , les quantités x_1^0, x_2^0, \dots ,

$$x_1 - x_1^0 = c_1 x x^0 \sinh \frac{\rho}{R}, \quad x_2 - x_2^0 = c_2 x x^0 \sinh \frac{\rho}{R}, \dots,$$

d'où, en élevant au carré et faisant la somme,

$$2(a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0) - x^2 - x^{0^2} = c^2 x^2 x^{0^2} \sinh^2 \frac{\rho}{R}.$$

Cette équation, en vertu des équations (6) et (7), donne finalement

$$(8) \quad \cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)(a^2 - x_1^{0^2} - x_2^{0^2} - \dots - x_n^{0^2})}},$$

et c'est là la formule générale qui fait connaître la longueur d'un arc géodésique en fonction des coordonnées de ses extrémités.

En supposant *réelles* les variables x, x_1, \dots, x_n et les constantes R, a , la limite de l'espace de n dimensions que nous considérons est l'espace de $n - 1$ dimensions donné par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2.$$

A l'intérieur de cette limite, c'est-à-dire pour

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < a^2,$$

le premier espace est *continu et simplement connexe*. De l'équation (8) il s'ensuit encore que les points appartenant à l'espace-limite sont tous à une distance *infinie*.

Dans tout le champ réel que nous venons de définir, la valeur de ds , donnée par l'équation (1), reste constamment positive pour tout système de valeurs des rapports

$$dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n.$$

Si l'on considère un second système d'accroissements $\partial x_1, \partial x_2, \dots, \partial x_n$, et que l'on pose

$$\partial s^2 = R^2 \frac{\partial x^2 + \partial x_1^2 + \dots + \partial x_n^2}{x^2},$$

l'expression

$$ds^2 \partial s^2 = R^4 \frac{(dx \partial x + dx_1 \partial x_1 + \dots + dx_n \partial x_n)^2}{x^4}$$

ne peut jamais devenir négative (en vertu d'une transformation bien connue dont elle est susceptible); par conséquent, la quantité

$$\frac{R^2(dx \delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n)}{x^2 ds \delta s}$$

ne peut jamais devenir plus grande que l'unité. On peut donc toujours assigner un angle réel θ , pour lequel on ait

$$(9) \quad dx \delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n = \frac{x^2 ds \delta s}{R^2} \cos \theta.$$

De cette possibilité résulte cette conséquence importante, que, en calculant au moyen de l'équation (1) les trois valeurs de ds qui correspondent aux trois systèmes suivants de valeurs des variables, considérés deux à deux,

$$\begin{aligned} & (x_1, \quad x_2, \quad \dots, x_n), \\ & (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n), \\ & (x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n), \end{aligned}$$

on trouve trois nombres propres à exprimer les longueurs des trois côtés d'un triangle rectiligne. Indiquons, en effet, par M , M' , M'' les trois systèmes de valeurs en question, et représentons ds par MM' , δs par MM'' . Les valeurs du système M'' peuvent se déduire de celles du système M' au moyen des accroissements respectifs

$$\delta x_1 - dx_1, \quad \delta x_2 - dx_2, \dots, \quad \delta x_n - dx_n,$$

attribués à ces dernières. Par suite, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second, on pourra poser

$$\begin{aligned} \overline{M'M''}^2 &= \frac{R^2}{x^2} [(\delta x - dx)^2 + (\delta x_1 - dx_1)^2 + \dots + (\delta x_n - dx_n)^2] \\ &= ds^2 + \delta s^2 - 2 \frac{R^2(dx \delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n)}{x^2}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MM''}^2 - 2 \overline{MM'} \cdot \overline{MM''} \cdot \cos \theta,$$

θ étant un angle réel. Cette équation démontre la propriété énoncée, et fait comprendre comment on peut assimiler tout système de valeurs des

variables x_1, x_2, \dots, x_n à un *point* défini par ses coordonnées. C'est dans le même ordre d'idées que l'on considère deux éléments linéaires $ds, \delta s$ comme *orthogonaux*, lorsqu'on a, pour ces éléments, $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire (9) lorsque les accroissements correspondants d, δ satisfont à la condition

$$(10) \quad dx \delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n = 0,$$

que l'on peut appeler, pour la commodité du langage, la *condition d'orthogonalité*.

Considérons, par exemple, l'espace de $n - 1$ dimensions $x_1 = 0$, et supposons que d'un de ses points partent deux éléments linéaires, l'un ds situé dans l'espace lui-même, l'autre δs dirigé suivant la ligne géodésique du système x_1 passant par ce point. Dans ce cas, on a

$$x_1 = 0, \quad dx_1 = 0, \quad \delta x_2 = \delta x_3 = \dots = \delta x_n = 0, \quad \delta x = 0,$$

et, par suite, la condition d'orthogonalité est satisfaite, c'est-à-dire que chaque ligne géodésique du système x_1 (ou, plus généralement, du système x_r) est orthogonale à l'espace $x_1 = 0$ (ou $x_r = 0$) au point où elle le rencontre. Donc, en particulier, à l'origine des coordonnées, les directions des n axes sont toutes orthogonales entre elles. On démontre avec la même facilité que l'axe des x_r est orthogonal à tous les espaces $x_r = \text{const}$. Les n lignes géodésiques menées d'un point arbitraire de l'espace dans les systèmes x_1, x_2, \dots, x_n sont perpendiculaires aux espaces de $n - 1$ dimensions $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, d'une manière analogue à ce qui a lieu dans le plan et dans l'espace ordinaire, quand on emploie les coordonnées rectangles. En appelant X_1, X_2, \dots, X_n les portions de ces lignes géodésiques comprises entre le point donné et les espaces auxquels elles sont respectivement perpendiculaires, on a

$$(11) \quad X_r = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{x^2 + x_r^2} + x_r}{\sqrt{x^2 + x_r^2} - x_r}.$$

Considérons le système complet des lignes géodésiques issues du point déterminé $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Il sera représenté par le système

suisant d'équations différentielles, dont la dernière est une conséquence des premières,

$$\frac{dx_1}{x_1 - x_1^0} = \frac{dx_2}{x_2 - x_2^0} = \dots = \frac{dx_n}{x_n - x_n^0} = \frac{dx}{x - \frac{z}{x}},$$

en posant, pour abrégé,

$$z = a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0.$$

La condition (10) donne, pour l'équation différentielle de l'espace de $n - 1$ dimensions orthogonal à toutes ces lignes géodésiques, la suivante :

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

d'où, en intégrant

$$(12) \quad \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} = C.$$

En comparant cette équation avec l'équation (8), on voit que l'espace qu'elle définit est aussi le lieu des points équidistants du point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$; et, en appelant ρ la distance constante, on a

$$C = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2} \cdot \cosh \frac{\rho}{R} = x^0 \cosh \frac{\rho}{R}.$$

Comme l'équation (12), d'après la manière dont elle a été obtenue, subsiste encore quand le point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ s'en va à l'infini, c'est-à-dire quand x^0 devient nul et ρ infini, on voit ainsi que, dans ce cas, le produit $x^0 \cosh \frac{\rho}{R}$ converge vers une limite finie, qui ne peut différer de celle du produit $\frac{1}{2} x^0 e^{\frac{\rho}{R}}$. En écrivant donc $\rho' - \rho$ au lieu de ρ , et faisant aller à l'infini le point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, tandis que ρ reste constant, on trouve, à la limite, l'équation

$$(13) \quad \frac{(a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0)}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} = k e^{-\frac{\rho}{R}},$$

où l'on a

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2,$$

et cette équation représente un système d'espaces de n dimensions qui peuvent être définis comme les *trajectoires orthogonales de toutes les lignes géodésiques qui convergent vers un même point à l'infini* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Les diverses trajectoires se distinguent entre elles par les valeurs du paramètre ρ , qui exprime la distance *constante* entre une quelconque d'entre elles et la trajectoire déterminée $\rho = 0$. La constante k est donnée quand on donne un point de cette dernière trajectoire.

Nous démontrerons tout à l'heure que la nature de l'espace considéré jusqu'ici est telle, que, si l'on en limite une portion quelconque et qu'on la transporte dans une position différente de celle qu'elle occupait d'abord, on peut toujours obtenir sa *superposition* avec une autre portion correspondante du même espace. Pour concevoir comment cela peut avoir lieu, imaginons, disséminés dans cette partie de l'espace, un nombre ∞^n de points infiniment voisins les uns des autres et réunis deux à deux par les petits arcs géodésiques qui en mesurent les distances mutuelles. Cela posé, la *superponibilité* dont il s'agit consiste en ce que, en toute autre partie de l'espace considéré, on peut disséminer des points *appartenant* à cet espace, et qui ont entre eux les mêmes distances mutuelles et la même disposition qu'avaient ceux de la portion imaginée; de telle sorte que le réseau $n^{\text{up}}\text{le}$, formé par les lignes qui joignent les points contigus de cette portion, peut être complètement identifié avec le réseau analogue de l'autre portion, sans que les liaisons des points doivent être en aucun lieu rompues ou redoublées. Les altérations que le premier réseau doit subir pour s'identifier avec le second ne peuvent d'ailleurs devenir *apparentes* que lorsqu'on les considère l'un et l'autre *par rapport à un espace ayant plus de n dimensions*; tant qu'il n'en est pas ainsi, les deux réseaux présentent le caractère de l'*égalité* par *coïncidence* ou par *symétrie*. Cette dernière observation se rattache à une ingénieuse réflexion de Moëbius (*Barycentrischer Calcul*, p. 184).

Supposons d'abord l'espace rapporté à un nouveau système d'axes géodésiques, des y_1, y_2, \dots, y_n , ayant même origine que les premiers et, comme ceux-ci, orthogonaux entre eux. Comme toutes les lignes géodésiques sont représentées par des équations linéaires, il est clair que les substitutions, pour passer des variables x aux variables y , doivent être *linéaires*; mais il est facile de se convaincre, en outre, que leur

forme doit être celle que nous avons appelée *orthogonale*. En effet, la forme (8) montre que la distance de l'origine à un point quelconque (x_1, x_2, \dots, x_n) ne dépend que de la fonction $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. On aura donc

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2, \\ dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 &= dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{x^2} = \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2}{y^2}.$$

Cette identité de forme des deux éléments montre bien que deux réseaux dont les sommets correspondants seraient liés par les équations

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \dots, \quad x_n = y_n$$

seraient parfaitement superposables. Or il est clair que le second de ces réseaux ne serait autre chose que le premier, qu'on aurait fait tourner autour de l'origine en même temps que les axes primitifs jusqu'à ce que ceux-ci prissent la direction des nouveaux. Il est donc prouvé que la superponibilité dont nous parlions a lieu effectivement quand le déplacement se réduit à une simple rotation autour de l'origine. De plus, comme on pourrait poser plus généralement

$$x_1 = \pm y_1, \quad x_2 = \pm y_2, \dots, \quad x_n = \pm y_n,$$

avec la faculté de combiner les signes d'une manière quelconque, il est clair que, outre l'égalité par *coïncidence*, il y a plusieurs espèces d'égalité par *symétrie*.

Puisqu'un changement d'axes, l'origine restant fixe, n'altère pas la forme de l'élément linéaire, il reste maintenant à rechercher l'effet d'un changement d'origine. Et puisque, en prenant dans l'espace un point quelconque, on peut déjà supposer l'axe des x_1 dirigé vers ce point, il est donc permis de prendre la nouvelle origine sur cet axe au point $x_1 = a_1$. La nouvelle transformation à effectuer consiste donc à conserver l'axe des x_1 et les systèmes coordonnés précédents des x_2, x_3, \dots, x_n , et à substituer au système des lignes géodésiques perpendiculaires à l'espace $x_1 = 0$ celui des lignes géodésiques perpendicu-

lares à l'espace $x_1 = a_1$, parmi lesquelles se trouve l'axe primitif des x_1 . Appelons les nouvelles coordonnées y_1, y_2, \dots, y_n , et soit b une constante qui joue par rapport à celles-ci le même rôle que la constante a par rapport aux x . Nous désignerons pareillement par Y_1, Y_2, \dots, Y_n les lignes géodésiques analogues à X_1, X_2, \dots, X_n , et l'on aura évidemment, comme dans la formule (11),

$$Y_r = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{y^2 + y_r^2} + y_r}{\sqrt{y^2 + y_r^2} - y_r}.$$

Cela posé, observons que, en laissant invariables les systèmes primitifs des x_2, x_3, \dots, x_n , on a d'abord pour ces systèmes $X_r = Y_r$, et, par suite,

$$(14) \quad \frac{x_r}{x} = \pm \frac{y_r}{y}, \quad \text{pour } r = 2, 3, \dots, n.$$

En élevant au carré et sommant d'abord ces équations, puis leurs différentielles, on a les deux formules

$$(15) \quad \begin{cases} (a^2 - x_1^2)y^2 = (b^2 - y_1^2)x^2, \\ \frac{\Omega^2}{x^2} + \left(d\frac{a}{x}\right)^2 - \left(d\frac{x_1}{x}\right)^2 = \frac{\Theta^2}{y^2} + \left(d\frac{b}{y}\right)^2 - d\left(\frac{y_1}{y}\right)^2, \end{cases}$$

où l'on a fait $\Theta^2 = dy^2 + dy_1^2 + \dots + dy_n^2$. En second lieu, si l'on considère, sur l'axe des x_1 , les portions X_1^0, Y_1^0 interceptées entre les deux origines et le point où l'axe lui-même est coupé par l'espace $x_1 = a_1$, on a

$$X_1^0 = \frac{R}{2} \log \frac{a + x_1}{a - x_1}, \quad Y_1^0 = \frac{R}{2} \log \frac{b + y_1}{b - y_1},$$

tandis que la distance entre les deux origines a pour valeur

$$\frac{R}{2} \log \frac{a + a_1}{a - a_1}.$$

Il est donc clair qu'il faut poser

$$X_1^0 = Y_1^0 + \frac{R}{2} \log \frac{a + a_1}{a - a_1},$$

c'est-à-dire.

$$\frac{(a+x_1)(a-a_1)}{(a-x_1)(a+a_1)} = \frac{b+y_1}{b-y_1},$$

d'où

$$(16) \quad y_1 = \frac{ab(x_1 - a_1)}{a^2 - a_1 x_1}, \quad x_1 = \frac{a(a y_1 + a_1 b)}{ab + a_1 y_1}.$$

Ces deux formules donnent lieu aux relations

$$(17) \quad a^2 - x_1^2 = \frac{a^2(a^2 - a_1^2)(b^2 - y_1^2)}{(ab + a_1 y_1)^2}, \quad b^2 - y_1^2 = \frac{b^2(a^2 - a_1^2)(a^2 - x_1^2)}{(a^2 - a_1 x_1)^2},$$

lesquelles, combinées convenablement avec la première des équations (15), conduisent aux deux suivantes :

$$\frac{a}{x} \sqrt{a^2 - x_1^2} = a \frac{b}{y} + a_1 \frac{y_1}{y},$$

$$\frac{x_1}{x} \sqrt{a^2 - x_1^2} = a_1 \frac{b}{y} + a \frac{y_1}{y};$$

d'où

$$\left(d \frac{a}{x}\right)^2 - \left(d \frac{x_1}{x}\right)^2 = \left(d \frac{b}{y}\right)^2 - \left(d \frac{y_1}{y}\right)^2.$$

En vertu de cette dernière équation, la seconde des équations (15) donne

$$\frac{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x^2} = \frac{dy^2 + dy_1^2 + \dots + dy_n^2}{y^2},$$

d'où il s'ensuit que l'expression de l'élément linéaire conserve encore la même forme lorsqu'on change l'origine, et, en conséquence, par un raisonnement analogue à celui de tout à l'heure, que la superponibilité a lieu dans tous les cas, puisqu'il suffirait maintenant d'employer une nouvelle substitution orthogonale pour rendre les nouveaux axes complètement indépendants des premiers.

Les équations (14), (15, première), (17) donnent

$$x_r = \pm \frac{a y_r \sqrt{a^2 - a_1^2}}{ab + a_1 y_1}, \quad \text{pour } r = 2, 3, \dots, n;$$

de là et de l'équation (16, seconde), on conclut que la transformation d'axes la plus générale a lieu au moyen de *substitutions homographiques*.

En faisant abstraction de cette transformation des coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n en d'autres de la même espèce, il y a d'autres transformations qui donnent à l'élément une forme remarquable. Cette transformation, que l'on peut appeler *polaire*, s'obtient en posant premièrement

$$x_1 = r\lambda_1, \quad x_2 = r\lambda_2, \dots, \quad x_n = r\lambda_n,$$

avec la condition $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 1$. On tire de là

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = dr^2 + r^2 d\Lambda^2,$$

en faisant $d\Lambda^2 = d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + \dots + d\lambda_n^2$; par suite,

$$ds^2 = \left(\frac{R a dr}{a^2 - r^2} \right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2 - r^2} d\Lambda^2.$$

Mais, en appelant ρ la distance géodésique de l'origine ou pôle au point (x_1, x_2, \dots, x_n) , on a

$$\frac{R a dr}{a^2 - r^2} = d\rho, \quad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = \sinh^2 \frac{\rho}{R};$$

donc

$$(18) \quad ds^2 = d\rho^2 + \left(R \sinh \frac{\rho}{R} \right)^2 d\Lambda^2,$$

forme qui justifie la dénomination de *polaire*, puisque les variables ρ et λ qui définissent la direction de ce rayon.

De cette forme on passe facilement à une autre, que l'on pourrait appeler *stéréographique*, et qui s'obtient en posant

$$\xi_r = 2R \operatorname{tanh} \frac{\rho}{2R} \cdot \lambda_r,$$

ρ et λ , ayant les mêmes significations que tout à l'heure. De là on tire

$$\lambda_r d\rho + R \sinh \frac{\rho}{R} \cdot d\lambda_r = d\xi_r \cdot \cosh^2 \frac{\rho}{2R},$$

$$\cosh^2 \frac{\rho}{2R} = \frac{1}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{4R^2}},$$

et, par suite, en élevant au carré et sommant les équations qui résultent de l'avant-dernière, en y faisant $r = 1, 2, \dots, n$, et ayant égard à la dernière et à l'équation (18),

$$(19) \quad ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi_n^2}}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{4R^2}}.$$

Cette forme a été donnée sans démonstration par Riemann, dans le Mémoire posthume cité (II, § 4).

Riemann a indiqué un autre système de coordonnées, dont il tire la mesure de la courbure d'un espace donné autour d'un point (II, § 2). Ces coordonnées sont, à certains égards, analogues aux coordonnées orthogonales cartésiennes, puisqu'elles se déduisent des coordonnées polaires en faisant

$$z_1 = \rho \lambda_1, \quad z_2 = \rho \lambda_2, \dots, \quad z_n = \rho \lambda_n.$$

On tire de là

$$d\lambda_r = \frac{\rho dz_r - z_r d\rho}{\rho^2},$$

et, par suite, élevant au carré et sommant,

$$d\Lambda^2 = \frac{(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2)(dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2) - (z_1 dz_1 + z_2 dz_2 + \dots + z_n dz_n)^2}{\rho^4},$$

ou bien

$$d\Lambda^2 = \frac{\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^4},$$

le signe Σ comprenant toutes les combinaisons binaires des indices. On a aussi

$$d\rho^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2 - \frac{\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^2},$$

d'où, en substituant dans (18), on tire finalement

$$(20) \quad ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2 + \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{R}{\rho} \sinh \frac{\rho}{R} \right)^2 - 1 \right] \Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2,$$

ou

$$(20') \quad ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2 + \frac{1}{3R^2} \left(1 + \frac{2\rho^2}{15R^2} + \dots \right) \Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2,$$

où l'on a $\rho^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$, la série convergente entre parenthèses procédant suivant les puissances de $\frac{\rho}{R}$. Pour de très-petites valeurs de ρ , on peut prendre simplement

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2 + \frac{1}{3R^2} \Sigma (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2.$$

Or, en considérant un élément de surface passant par l'origine, on peut faire en sorte (par un choix convenable des axes z_1, z_2, \dots , ou x_1, x_2, \dots) que cet élément coïncide avec celui de la surface $z_3 = 0, z_4 = 0, \dots, z_n = 0$, à laquelle correspond, dans le voisinage de l'origine, l'élément linéaire

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{1}{3R^2} (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2;$$

et, puisque l'aire du triangle infinitésimal qui a pour sommets les points $(0, 0), (z_1, z_2), (dz_1, dz_2)$, dont le second est infiniment voisin de l'origine, est égale à $\frac{1}{2}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)$, on en conclut que $\Sigma (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$ est égal à quatre fois le carré de l'aire du triangle infinitésimal qui a pour sommets les points $(0, 0, \dots, 0), (z_1, z_2, \dots, z_n), (dz_1, dz_2, \dots, dz_n)$, dont le second est infiniment voisin de l'origine. Si donc on divise la somme des termes du quatrième ordre dans l'équation (20') par le carré de l'aire du triangle infinitésimal en question, on a pour quotient $\frac{4}{3R^2}$; et puisque, selon la définition de Riemann, ce quotient, multiplié par $-\frac{3}{4}$, exprime la mesure de la courbure dans le sens de l'élément de surface que nous considérons, on voit que, dans l'espace dont il s'agit, cette mesure est constante et $= -\frac{1}{R^2}$ dans toutes les directions autour de chaque point (*). C'est pour cela que cet espace

(*) Pour apercevoir la coïncidence de la définition de Riemann avec celle de Gauss, rappelons-nous que, d'après Gauss, la mesure de la courbure de la surface définie par l'élément

$$ds^2 = d\rho^2 + m^2 d\theta^2$$

est exprimée par $-\frac{1}{m} \frac{d^2 m}{d\rho^2}$, m étant en général une fonction de ρ et de θ . Si la variable ρ

peut être convenablement désigné sous le nom d'*espace de courbure constante*.

Une quatrième transformation, très-importante, est celle que l'on obtient en introduisant n nouvelles variables indépendantes $\eta, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$, et posant

$$\frac{R x}{a - x_n} = \eta, \quad \frac{R x_1}{a - x_n} = \eta_1, \quad \dots, \quad \frac{R x_{n-1}}{a - x_n} = \eta_{n-1}.$$

On en tire immédiatement

$$(21) \quad ds = R \frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + \dots + d\eta_{n-1}^2}}{\eta},$$

d'où l'on conclut que la formule (1) représente encore l'élément linéaire d'un espace de courbure constante, lorsque les $n + 1$ variables x, x_1, \dots, x_n sont indépendantes entre elles et ne sont plus liées en aucune façon par la relation (2), si ce n'est que, dans ce cas, le nombre des dimensions de l'espace est $n + 1$, et que la propriété des lignes géodésiques d'être représentées par des équations linéaires ne subsiste plus (*). Mais

est la longueur d'un arc géodésique issu d'un point de la surface où celle-ci ait une courbure ordinaire, la fonction m est de la forme $m = \rho(1 + m'\rho^2)$, m' étant une fonction qui, pour $\rho = 0$, n'est ni nulle ni infinie (Voyez les *Annali di Matematica*, 2^e série, t. I, p. 358), et par suite la mesure de la courbure au point $\rho = 0$ est $-6m'_0$. Cela posé, les coordonnées de Riemann

$$z_1 = \rho \cos \theta, \quad z_2 = \rho \sin \theta$$

donnent à l'élément considéré tout à l'heure la forme

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{4(m^2 - \rho^2)}{\rho^4} \left(\frac{z_1 dz_2 - z_2 dz_1}{2} \right)^2,$$

et, par suite, la mesure de la courbure au point $\rho = 0$ est, d'après Riemann,

$$-\frac{3}{4} \lim \frac{4(m^2 - \rho^2)}{\rho^4}.$$

Or

$$\lim \frac{m^2 - \rho^2}{\rho^4} \text{ (pour } \rho = 0) = 2m'_0;$$

donc les deux expressions coïncident.

Il est clair que m'_0 , c'est-à-dire $(m')_{\rho=0}$ doit être une quantité indépendante de θ .

(*) La forme (21) a été indiquée, pour le cas de deux dimensions seulement, par M. Liouville dans ses Notes sur l'ouvrage de Monge, p. 600.

une conséquence assez remarquable qui se déduit de l'expression (21), c'est que l'espace de $n - 1$ dimensions $\eta = \text{const.}$ a sa courbure *nulle* en tous ses points, puisque son élément linéaire est de la forme

$$ds = \text{const.} \times \sqrt{dn_1^2 + dn_2^2 + \dots + dn_{n-1}^2}.$$

En effet, si l'on a égard à la formule de Riemann (19), on voit immédiatement que l'élément ne peut se réduire à la racine carrée de la somme des carrés d'autant de différentielles exactes qu'il y a de dimensions, à moins que l'on n'ait $\frac{1}{R} = 0$. L'espace $\eta = \text{const.}$ est donc un de ceux que Riemann appelle *espaces plans* (II, § 1), et dans lesquels rentrent le plan et l'espace ordinaire, définis par les formules

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Maintenant l'équation $\eta = \text{const.}$ admet, après ce que nous venons de dire, une interprétation très-simple. Le point à l'infini sur l'axe des x_n a pour coordonnées

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad x_n = a,$$

et partant l'équation (13) devient, pour ce point,

$$\frac{a - x_n}{x} = k' e^{-\frac{\rho}{R}},$$

en posant $k' = \frac{k}{a}$. Donc

$$\eta = \frac{R}{k'} e^{\frac{\rho}{R}},$$

et, par conséquent, l'équation $\eta = \text{const.}$ équivaut à cette autre $\rho = \text{const.}$; d'où l'on conclut (puisque la direction de l'axe des x_n est arbitraire) que l'espace de $n - 1$ dimensions $\eta = \text{const.}$ n'est autre chose que l'une des trajectoires orthogonales de toutes les lignes géodésiques convergentes vers un même point à l'infini, c'est-à-dire d'un système de lignes géodésiques *parallèles* entre elles. Réciproquement, chacune de ces trajectoires orthogonales a en tous ses points une courbure nulle, et, par suite, deux quelconques d'entre elles (appartenant

au moins au même système) sont superposables l'une à l'autre de toutes les manières possibles.

En introduisant dans l'équation (21) la variable ρ au lieu de η , on a l'autre forme équivalente

$$(21') \quad ds^2 = d\rho^2 + h^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} (dn_1^2 + dn_2^2 + \dots + dn_{n-1}^2).$$

On a déjà vu que l'ensemble de $n - 1$ équations linéaires entre les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n représente une ligne géodésique. Voyons ce que représente, plus généralement, l'ensemble de $n - m$ équations linéaires.

En supposant qu'on ait déduit de ces équations les expressions de $n - m$ coordonnées en fonction des m restantes, il est évident que le nombre des paramètres indépendants contenus dans un tel système est $(m + 1)(n - m)$. Imaginons maintenant que toutes les n coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n soient exprimées linéairement en fonction de m variables u_1, u_2, \dots, u_m . Ces expressions comprennent à elles toutes $(m + 1)n$ paramètres; mais, si l'on assujettit ces paramètres à vérifier l'identité

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2 + h^2$$

(h restant indéterminé), il est clair que l'on ajoute ainsi $\frac{m(m+1)}{2} + m$ conditions, en sorte que le nombre des paramètres indépendants qui restent sera $(m + 1)n - \frac{m(m+1)}{2} - m$. Or ce nombre surpasse de $\frac{m(m-1)}{2}$ le nombre $(m + 1)(n - m)$; donc les relations supposées entre les x et les u , avec la condition indiquée, sont telles, qu'elles peuvent toujours tenir lieu, sans aucune restriction, du système donné de $n - m$ équations. Cela posé, de ces relations, en posant

$$u^2 + u_1^2 + \dots + u_m^2 = a^2 - h^2 = a'^2,$$

on tire

$$dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = du^2 + du_1^2 + \dots + du_m^2,$$

$$x^2 = u^2;$$

donc

$$ds = R \frac{\sqrt{du^2 + du_1^2 + \dots + du_m^2}}{u},$$

avec la condition

$$u^2 + u_1^2 + \dots + u_m^2 = a'^2.$$

Conséquemment, le lieu des points représentés par l'ensemble des $n - m$ équations linéaires entre les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n est un espace de m dimensions dont la courbure est partout constante et égale à celle de l'espace primitif.

Ainsi, par exemple, $n - 2$ équations linéaires représentent une *surface* de courbure constante $\left(= -\frac{1}{R^2} \right)$, que l'on désignera convenablement sous le nom de *surface du premier ordre*; $n - 3$ équations représentent un *espace à trois dimensions* de courbure constante $\left(= -\frac{1}{R^2} \right)$, etc.

Une ligne géodésique réelle est déterminée sans ambiguïté par *deux* points de l'espace; dans l'hypothèse admise jusqu'ici, cette propriété ne peut souffrir aucune exception.

Une surface du premier ordre est déterminée sans ambiguïté par *trois* points de l'espace. Elle contient entièrement la ligne géodésique qui passe par deux de ses points réels, en sorte que, si deux surfaces réelles du premier ordre ont deux points réels communs, elles ont également en commun toute la ligne géodésique déterminée par ces deux points.

Un triangle géodésique est toujours situé sur une surface déterminée du premier ordre, laquelle est encore déterminée lorsque le triangle est infinitésimal. C'est pourquoi, si l'on prolonge suivant des lignes géodésiques tous les éléments linéaires contenus dans un même élément de surface, les lignes géodésiques ainsi obtenues ont toutes pour lieu géométrique une surface déterminée du premier ordre.

Quand deux surfaces du premier ordre se coupent le long d'une ligne, nécessairement géodésique, leur angle est partout constant, c'est-à-dire qu'en menant par un point de leur intersection deux éléments linéaires normaux à cette intersection, l'un dans la première surface, l'autre dans la seconde, la distance infinitésimale de leurs extrémités est constante s'ils sont eux-mêmes de longueurs constantes. En effet (*), en supposant l'axe x , dirigé suivant la commune intersection des deux

(*) La démonstration suivante, qu'on aurait pu, à la rigueur, omettre, a été insérée à cause des formules auxquelles elle conduit.

surfaces, les équations de celles-ci peuvent évidemment se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} (x_2 = m_2 x_n, \quad x_3 = m_3 x_n, \dots, \quad x_{n-1} = m_{n-1} x_n), \\ (x_2 = m'_2 x_n, \quad x_3 = m'_3 x_n, \dots, \quad x_{n-1} = m'_{n-1} x_n), \end{aligned}$$

les quantités m, m' étant des paramètres constants. Ces deux surfaces sont coupées par l'espace $x_1 = a_1$ suivant deux lignes géodésiques qui, d'après une remarque précédente, sont orthogonales à l'axe x_1 . Les deux points qui ont pour coordonnées

$$\begin{aligned} (x_1 = a_1, \quad x_2 = m_2 x_n, \dots, \quad x_{n-1} = m_{n-1} x_n, \quad x_n = x_n), \\ (x_1 = a_1, \quad x_2 = m'_2 x'_n, \dots, \quad x_{n-1} = m'_{n-1} x'_n, \quad x_n = x'_n) \end{aligned}$$

sont situés respectivement sur la première et sur la seconde surface, et précisément sur les deux lignes géodésiques dont il s'agit, et leur distance ρ^* est donnée (8) par la formule

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - a_1^2 - M x_n x'_n}{\sqrt{(a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2)(a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2)}},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} m^2 = 1 + m_2^2 + \dots + m_{n-1}^2, \quad m'^2 = 1 + m_2'^2 + \dots + m_{n-1}'^2, \\ M = 1 + m_2 m'_2 + \dots + m_{n-1} m'_{n-1}. \end{aligned}$$

De là, en appelant σ, σ' les longueurs des deux lignes géodésiques comprises entre le point commun $x_1 = a_1$ et les deux points considérés, on tire

$$\cosh \frac{\sigma}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2}}, \quad \cosh \frac{\sigma'}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2}},$$

et, par suite,

$$\sinh \frac{\sigma}{R} = \frac{m x_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2}}, \quad \sinh \frac{\sigma'}{R} = \frac{m' x'_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2}},$$

valeurs qui montrent que

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \cosh \frac{\sigma}{R} \cosh \frac{\sigma'}{R} - \frac{M}{mm'} \sinh \frac{\sigma}{R} \sinh \frac{\sigma'}{R}.$$

Comme, dans cette formule, il ne reste plus trace du point a_1 pris sur l'axe x_1 , on voit qu'en menant par un point quelconque de cet axe, dans les deux surfaces, les lignes géodésiques de longueurs σ , σ' , la distance géodésique de leurs extrémités est toujours constante. Et, puisque cette propriété subsiste pour des longueurs quelconques σ , σ' , elle subsiste nécessairement pour des longueurs infinitésimales, d'où découle le théorème énoncé.

En se rappelant que, en vertu de ce qui a été démontré plus haut (p. 352), les triangles infinitésimaux sont assujettis aux relations ordinaires de la trigonométrie plane, on reconnaît immédiatement, en rendant infiniment petites les longueurs ρ , σ , σ' , que $\frac{M}{mm'}$ est le cosinus de l'angle que font les premiers éléments des deux lignes géodésiques σ , σ' , c'est-à-dire de l'angle des deux surfaces. D'autre part, il est facile de voir que le triangle actuellement considéré peut être un triangle géodésique entièrement arbitraire; donc, entre les côtés a , b , c et les angles opposés A, B, C d'un triangle géodésique situé dans l'espace considéré, on a la relation

$$(22) \quad \cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cosh \frac{c}{R} - \sinh \frac{b}{R} \sinh \frac{c}{R} \cos A,$$

en même temps que ses analogues, relation qui ne diffère de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique que par le changement de R en $R\sqrt{-1}$ (R étant le rayon de la sphère), les côtés et les angles restant les mêmes. Cela concorde pleinement avec un fait déjà signalé par Minding (*Journal de Crelle*, t. XX), et démontré par Codazzi (*Annales de Tortolini*, 1857), si l'on se rappelle que le triangle géodésique considéré est situé entièrement sur une surface du premier ordre, c'est-à-dire de courbure constante négative, par rapport à laquelle il est également géodésique dans le sens ordinaire. Si l'on suppose l'angle C droit, les deux formules qui se déduisent de la formule (22) par la permutation des éléments donnent, moyennant une combinaison convenable,

$$(23) \quad \tanh \frac{a}{R} = \tanh \frac{c}{R} \cos B.$$

Si l'on imagine maintenant que le sommet de l'angle A aille en s'éloi-

quant indéfiniment sur le côté b de l'angle droit, tandis que le côté a reste invariable de position et de grandeur, l'hypoténuse c croîtra jusqu'à l'infini, et à cette limite les équations (22), (23) donneront

$$\cos A = 1, \quad \operatorname{tanh} \frac{a}{R} = \cos B.$$

La première formule fait voir que $A = 0$, c'est-à-dire que les deux côtés b , c se rapprochent asymptotiquement, lorsque le sommet de l'angle A est à l'infini; la seconde fait voir que la limite de l'angle B n'est pas l'angle droit, comme dans le plan, mais un angle moindre que 90 degrés, dont la grandeur dépend de la distance a , au moyen de la formule

$$(24) \quad \operatorname{tang} \frac{B}{2} = e^{-\frac{a}{R}},$$

équivalente à la précédente. Si l'on appelle *parallèles* deux lignes géodésiques convergentes vers un même point à l'infini, comme nous l'avons déjà fait, on voit, par conséquent, que par un point on peut mener *deux* lignes géodésiques distinctes, parallèles à une ligne géodésique donnée; que ces deux parallèles sont également inclinées de part et d'autre sur la ligne géodésique menée du même point normalement à la ligne donnée, et que leur inclinaison B sur la normale est liée à la longueur a de cette même normale par la relation (24). Ce résultat s'accorde pleinement avec celui qui forme la base de la *Géométrie non euclidienne*, dont les principes, déjà familiers à Gauss, ont été exposés de main de maître par Lobatchefsky, dans ses *Études géométriques sur la Théorie des Parallèles* (traduites par Hoüel, 1866), sous forme synthétique. La possibilité de sa construction au moyen de la synthèse ordinaire (en la limitant à l'espace de trois dimensions) dépend, en premier lieu, de ce que, comme on l'a démontré, dans les espaces de courbure constante (positive ou négative), toute figure *peut* être changée arbitrairement de position sans subir aucune altération dans la grandeur et dans la disposition mutuelle de ses éléments contigus, *possibilité* d'où dépend l'*existence des figures égales*, et, par suite, la *validité du principe de superposition*. En second lieu, dans les espaces de courbure constante *négative*, les lignes géodésiques sont caractérisées, comme la

droite euclidienne, par la propriété d'être déterminées sans ambiguïté par *deux* de leurs points seulement, de sorte que l'*axiome de la droite* a lieu pour ces lignes. Et pareillement, les surfaces du premier ordre sont caractérisées, comme le plan euclidien, par la propriété d'être déterminées par *trois* de leurs points seulement, de sorte que pour ces surfaces a lieu l'*axiome du plan*. En outre, les relations des lignes géodésiques avec les surfaces du premier ordre et de celles-ci entre elles sont les mêmes que celles des droites avec les plans et des plans entre eux, puisqu'une de ces surfaces contient une ligne géodésique tout entière dès qu'elle en contient deux points, et que deux de ces surfaces se coupent suivant une ligne géodésique (et sous un angle constant), si elles se rencontrent en un seul point. De cette correspondance, il s'ensuit que, si l'on admet les axiomes fondamentaux de la géométrie ordinaire, en excluant le postulat des parallèles, les théorèmes que l'on obtient sont identiques avec ceux de la géométrie de l'espace de courbure constante négative, puisque cette dernière géométrie a les mêmes bases que la première, à l'exception du postulat en question. Les théorèmes de cette géométrie subsistent pour toute valeur de la courbure, laquelle est le *paramètre* de la géométrie non euclidienne (que je proposerais d'appeler *pseudosphérique*), et c'est *seulement par des mesures* prises dans l'espace objectif que l'on peut reconnaître que la valeur particulière de la courbure de celui-ci est *zéro*, c'est-à-dire qu'on a pour cet espace $R = \infty$; de même que c'est *seulement par des mesures* que l'on peut assigner la courbure d'une sphère donnée, laquelle est le *paramètre* de la géométrie sphérique.

Effectivement, on peut vérifier que la théorie de Lobatchefsky coïncide, sauf les dénominations, avec la géométrie de l'espace à trois dimensions de courbure constante négative. Ceux qui désireraient voir le développement de cette correspondance en pourront trouver ailleurs une exposition plus détaillée (*). Ici, pour ne pas faire une trop longue digression, je me bornerai à quelques indications sommaires.

(*) Voyez le Mémoire précédent (*Essai d'une interprétation de la Géométrie non euclidienne*), où les particularités développées pour le cas de deux dimensions peuvent aisément se répéter pour celui de trois dimensions, surtout si l'on tient compte du présent écrit, et si l'on a recours à une sphère auxiliaire.

La planimétrie non euclidienne n'est autre chose que la géométrie des surfaces de courbure constante négative. Les circonférences de cette planimétrie correspondent aux lignes qui coupent orthogonalement tous les rayons géodésiques issus d'un même point de la surface, ou aux circonférences géodésiques. Le périmètre y est donné en fonction du rayon géodésique r par la formule

$$\pi R \left(e^{\frac{r}{R}} - e^{-\frac{r}{R}} \right),$$

comme Gauss l'avait déjà énoncé. Par trois points de la surface, on ne peut pas toujours faire passer une circonférence géodésique ayant son centre en un point réel. Les *horicycles* ou *courbes-limites* de Lobatchefsky ne sont autre chose que les circonférences géodésiques dont le centre est à l'infini, c'est-à-dire dont les rayons forment un système de lignes géodésiques parallèles. En faisant, dans l'équation (21'), $n = 2$, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + k'^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} d\eta^2,$$

expression de l'élément linéaire de la surface de courbure constante négative, rapportée à un système d'horicycles concentriques et à leurs rayons. La forme de cette expression montre que, moyennant une flexion convenable de la surface, les horicycles peuvent devenir les parallèles de la surface de révolution dont le méridien est la courbe des tangentes de longueur constante $= R$.

La stéréométrie non euclidienne n'est autre chose que la géométrie des espaces à trois dimensions de courbure constante négative. Nous avons déjà dit à quoi correspondent, dans cette géométrie, les droites et les plans. Aux surfaces sphériques correspondent les surfaces qui coupent orthogonalement tous les rayons géodésiques issus d'un même point, c'est-à-dire les sphères géodésiques. Là aussi il peut se faire que par trois points, et à plus forte raison par quatre, on ne puisse pas faire passer une sphère géodésique ayant son centre en un point réel. Les *horisphères* ou *surfaces-limites* de Lobatchefsky (*) ne sont autre chose que les sphères géodésiques dont le centre est à l'infini, c'est-à-dire

(*) Ou les surfaces F de J. Bolyai.

dont les rayons forment un système de lignes géodésiques parallèles de l'espace de courbure constante négative. En faisant, dans l'équation (21), $n = 3$, il vient

$$(25) \quad ds = R \frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + d\eta_2^2}}{\eta},$$

où l'on a

$$\frac{Rx}{a - x_3} = \eta, \quad \frac{Rx_1}{a - x_3} = \eta_1, \quad \frac{Rx_2}{a - x_3} = \eta_2,$$

et réciproquement

$$x_1 = \frac{2aR\eta_1}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2}, \quad x_2 = \frac{2aR\eta_2}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2}, \quad x_3 = \frac{a(\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - R^2)}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2}.$$

La formule (25) représente l'élément linéaire de l'espace non euclidien rapporté à un système d'horisphères concentriques et au système de leurs rayons. La forme de cet élément montre que toute horisphère, étant représentée par $\eta = \text{const.}$, est une surface de courbure *nulle* (c'est-à-dire superposable au plan euclidien par voie de simple flexion sans extension), puisque son élément linéaire est de la forme

$$ds = \text{const.} \times \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2};$$

et que les variables η_1, η_2 sont les coordonnées *cartésiennes rectangulaires* de ses points. Une surface du premier ordre,

$$lx_1 + mx_2 + nx_3 + p = 0,$$

est représentée, au moyen des coordonnées η, η_1, η_2 , par l'équation

$$2aR(l\eta_1 + m\eta_2) + (an + p)(\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) = (an - p)R^2,$$

et, par suite, elle coupe l'horisphère (pour laquelle $\eta = \text{const.}$) suivant une ligne qui devient un cercle dans le développement plan de cette surface. Celui-ci se réduit à une droite seulement, lorsque $p = -an$, c'est-à-dire quand l'équation de la surface du premier ordre est de la forme

$$lx_1 + mx_2 + n(x_3 - a) = 0,$$

ce qui arrive lorsqu'elle est une surface diamétrale de l'horisphère, ou

qu'elle passe par le centre (à l'infini) de cette horisphère. Dans ce cas, la ligne d'intersection est évidemment un horicycle de cette surface diamétrale, tandis que, par rapport à l'horisphère, elle est telle qu'elle se convertit en une droite quand l'horisphère est étendue sur un plan. De là résulte que le triangle tracé sur une horisphère par trois surfaces diamétrales est au fond un triangle géodésique situé sur une surface de courbure nulle; par conséquent, il satisfait à toutes les relations de la trigonométrie plane ordinaire, puisqu'il est également applicable sur un triangle rectiligne.

Ainsi toutes les conceptions de la géométrie non euclidienne trouvent une correspondance parfaite dans la géométrie de l'espace de courbure constante négative. Il faut seulement observer que, tandis que les conceptions de la planimétrie reçoivent une interprétation vraie et propre, puisqu'elles sont *constructibles* sur une surface *réelle*, celles, au contraire, qui embrassent trois dimensions ne sont susceptibles que d'une représentation analytique, puisque l'espace dans lequel une telle représentation pourrait se réaliser est différent de celui auquel on applique généralement le nom d'*espace*. Du moins, l'expérience ne semble pouvoir être mise d'accord avec les résultats de cette géométrie plus générale, que si l'on suppose la constante R infiniment grande, c'est-à-dire la courbure de l'espace nulle; ce qui pourrait toutefois n'être dû qu'à la petitesse des triangles que nous pouvons mesurer, ou à la petitesse de la portion d'espace à laquelle s'étendent nos observations, de même que cela arrive pour les mesures prises sur une petite portion de la surface terrestre, et dont la précision ne suffit pas pour mettre en évidence la sphéricité du globe.

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que des espaces de n dimensions dont la courbure est constante, mais *négative*; la raison en est que nous avons principalement en vue le rapprochement des conceptions qui s'y rapportent avec celles de la géométrie non euclidienne, relativement à laquelle l'hypothèse opposée offre moins d'intérêt. Néanmoins nous en dirons ici quelques mots.

L'élément linéaire

$$(26) \quad ds = R \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dx^2}}{x},$$

dans lequel

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

appartient à un espace de n dimensions dont la courbure est partout constante et $= \frac{1}{R^2}$. Cet élément se tire de (1), en changeant R, a, x en $R\sqrt{-1}, a\sqrt{-1}, x\sqrt{-1}$, et toutes les propriétés et les équations fondées sur de pures transformations analytiques de l'élément (1) subsistent évidemment, avec les changements indiqués, pour cet autre élément. Par exemple, la formule (8) se change dans la suivante :

$$(27) \quad \cos \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 + x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \dots + x_n x_n^0}{\sqrt{a^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{a^2 + x_1^0{}^2 + \dots + x_n^0{}^2}},$$

formule qui donne pour ρ une valeur réelle, quelles que soient les valeurs réelles de $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Il est clair que, pour ces espaces, le théorème de la superponibilité de deux portions d'espace quelconque subsiste intégralement.

Si, dans l'expression (26), on suppose réelles les variables x, x_1, \dots, x_n et les constantes R, a , les valeurs admissibles pour les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n n'ont aucune limite, et peuvent varier de $-\infty$ à $+\infty$. Pour toutes les valeurs réelles de ces coordonnées, l'espace est *continu et simplement connexe*, mais *non infini* (Riemann, III, § 2); car, si l'on fait dans (27)

$$x_1^0 = \lambda_1 \tau, \quad x_2^0 = \lambda_2 \tau, \dots, \quad x_n^0 = \lambda_n \tau,$$

avec $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 1$, on a, pour $\tau = \infty$,

$$\cos \frac{\rho}{R} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}{\sqrt{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}},$$

formule qui donne pour ρ une valeur finie et déterminée. Les lignes géodésiques continuent à être représentées par des équations linéaires; mais, vu l'admissibilité des valeurs infinies pour les coordonnées, le principe que deux points déterminent sans ambiguïté une ligne géodésique *cesse d'être vrai sans restriction*. Soient, en effet,

$$x_1 = b_1 x_n + b'_1, \quad x_2 = b_2 x_n + b'_2, \dots$$

les équations d'une ligne géodésique. Tant que l'un au moins des points

par lesquels elle doit passer a ses coordonnées finies, les coefficients peuvent être tous déterminés sans ambiguïté; mais si les points ont tous les deux des coordonnées infinies, il faudra mettre les équations sous la forme

$$\frac{x_1}{x_n} = b_1 + \frac{b'_1}{x_n}, \quad \frac{x_2}{x_n} = b_2 + \frac{b'_2}{x_n}, \dots,$$

et substituer aux premiers membres les valeurs-limites vers lesquelles ils convergent en ces deux points. Si ces limites sont égales entre elles, les valeurs des seconds coefficients restent indéterminées, et la ligne géodésique ne peut être unique et définie. Si les limites sont différentes, les coordonnées de la ligne géodésique sont infinies en tous ses points.

Les considérations qui nous ont conduits à l'équation (13) ne sont pas applicables aux espaces de courbure constante positive, puisqu'il n'y a pas dans ceux-ci de points à l'infini. Donc les figures représentées par cette équation n'ont pas de correspondantes dans ces nouveaux espaces, de même que les lignes géodésiques réciproquement *parallèles* n'en ont pas non plus.

On voit que la géométrie des espaces de courbure constante positive [que l'on peut appeler convenablement *géométrie sphérique* dans le sens le plus large, puisque, comme le montre l'équation (22), les triangles géodésiques y sont soumis aux lois de la trigonométrie sphérique] diffère très-notablement de la *géométrie pseudosphérique*, bien qu'elle admette en commun avec celle-ci l'existence des figures égales. Du reste, la géométrie pseudosphérique conduit spontanément à la considération des espaces de courbure positive. En effet, en posant, dans (26),

$$\frac{a}{x} = y, \quad \frac{x_1}{x} = y_1, \dots, \quad \frac{x_n}{x} = y_n,$$

on trouve

$$ds = R \sqrt{dy^2 + dy_1^2 + \dots + dy_n^2},$$

avec la condition

$$y^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1,$$

résultat qui, mis en regard de l'équation (18), dans laquelle on ferait

de concours idéal de toutes les lignes géodésiques normales à la ligne $v = 0$.

Appelons η l'arc de la ligne géodésique $v = 0$ compris entre l'origine et la normale ξ ; sa valeur est donnée par l'équation

$$\eta = \frac{R}{2} \log \frac{a + u}{a - u}.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$u = a \operatorname{tanh} \frac{\eta}{R}, \quad v = \frac{a \operatorname{tanh} \frac{\xi}{R}}{\cosh \frac{\eta}{R}},$$

d'où

$$v^2 = a^2 - u^2 - v^2 = \frac{a^2}{\cosh^2 \frac{\xi}{R} \cosh^2 \frac{\eta}{R}}.$$

En passant ainsi des variables u, v aux variables ξ, η , l'expression (1) devient

$$(14) \quad ds^2 = d\xi^2 + \cosh^2 \frac{\xi}{R} d\eta^2,$$

expression qui convient à une surface de révolution.

En désignant par r_0 le rayon du parallèle minimum de cette surface, lequel correspond évidemment à $\xi = 0$, et par r celui du parallèle ξ , on a

$$r = r_0 \cosh \frac{\xi}{R}, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{dr}{d\xi} = \frac{r_0}{R} \sinh \frac{\xi}{R}.$$

Donc la zone de surface pseudosphérique qui peut être réellement transformée en surface de révolution est définie par la condition

$$\left(\frac{r_0}{R} \sinh \frac{\xi}{R} \right)^2 < 1,$$

c'est-à-dire qu'elle est renfermée entre deux circonférences géodésiques équidistantes de la ligne géodésique $\xi = 0$, laquelle se dispose suivant le parallèle minimum. La largeur de cette zone dépend du rayon que l'on veut assigner au parallèle minimum, et est d'autant plus