HERMANN MINKOWSKI

Espace et temps

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 499-517
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__499_0>

ESPACE ET TEMPS,

PAR HERMANN MINKOWSKI (¹).

CONFÉRENCE FAITE A LA 80ᵉ RÉUNION DES NATURALISTES ET MÉDECINS ALLEMANDS A COLOGNE LE 21 SEPTEMBRE 1908. PUBLIÉE PAR LES SOINS DE M. A. GUTZMER (²) (B.-G. TEUBNER, LEIPZIG, 1909).

TRADUIT PAR MM. A. HENNEQUIN ET J. MARTY,
Anciens Élèves de l'École Normale supérieure.

Messieurs! La conception de l'espace et du temps que je voudrais développer devant vous a grandi sur le sol de la Physique expérimen-

---

(¹) H. Minkowski, enlevé prématurément à la Science qu'il cultivait avec tant d'éclat, a été un collaborateur des *Annales de l'École Normale supérieure*. Nous avons tenu à rendre un dernier hommage à sa mémoire, en publiant une traduction de la belle conférence qu'il a faite l'année dernière sur *Espace et Temps*. (Note de la Rédaction.)

(²) La conférence sur *Espace et Temps* faite par Minkowski à Cologne est la dernière des créations de son génie. Il ne lui a malheureusement pas été donné de mener à bonne fin son hardi projet : construire une Mécanique où le temps vient se coordonner aux trois dimensions de l'espace. Le 12 janvier 1909, en pleine production, l'auteur a été ravi à la Science; un tragique destin a arraché, dans la force de l'âge, à l'affection des siens et de ses amis, un homme qu'on aimait, un savant qu'on estimait.

L'intérêt vif et éclairé qu'avait fait naître sa conférence avait causé à Minkowski le plus grand plaisir. Il désirait par une édition spéciale mettre son exposé à la portée d'un public plus étendu. C'est un douloureux et pieux devoir d'amitié pour la librairie B.-G. Teubner et pour le soussigné que de remplir, par cette publication, le dernier vœu du disparu.

A. GUTZMER.

tale. C'est ce qui fait sa force. La tendance en est radicale. Dès maintenant, l'espace indépendant du temps, le temps indépendant de l'espace ne sont plus que des ombres vaines; une sorte d'union des deux doit seule subsister encore.

I.

Je voudrais d'abord indiquer comment, à la rigueur, par des considérations de pure Mathématique, on aurait pu passer de la Mécanique actuellement admise aux idées nouvelles sur l'espace et le temps. Les équations de la Mécanique newtonienne présentent une double invariance; elles conservent leur forme, d'abord si l'on donne dans l'espace au trièdre fondamental des coordonnées une *position* quelconque; on peut modifier d'autre part son état de mouvement et lui imprimer n'importe quelle *translation uniforme;* l'origine du temps ne joue enfin aucun rôle. On considère, d'habitude, comme définitifs les axiomes de la Géométrie lorsqu'on se sent mûr pour les axiomes de la Mécanique, et ceci fait que les deux invariances sont bien rarement énoncées d'un seul trait. Chacune d'elles implique un certain groupe de transformations pour les équations différentielles. L'existence du premier groupe est tenue pour un caractère fondamental de l'espace. Le second groupe est de préférence traité avec quelque dédain; on ne peut décider à partir des phénomènes physiques si l'espace supposé au repos n'est pas en fin de compte en translation uniforme, mais c'est d'un cœur léger qu'on évite cette difficulté. Ainsi, les deux groupes à côté l'un de l'autre mènent deux existences absolument séparées. Leur caractère hétérogène a effrayé sans doute et détourné de les combiner. Or, c'est justement le groupe total résultant qui nous donne matière à penser.

Nous allons chercher à rendre les rapports sensibles par une représentation graphique. Soient x, y, z des coordonnées rectangulaires pour l'espace; t désignera le temps. Les objets de notre perception ne sont jamais que lieux et temps réunis; il n'est arrivé à personne de voir un lieu autrement qu'à un certain moment, d'observer un temps autrement qu'en un lieu. Cependant je respecte encore le dogme qu'espace et temps ont une signification indépendante. Je vais nommer un point de l'espace réuni à un point du temps, c'est-à-dire un système de valeurs x, y, z, t un *point de l'univers* (Weltpunkt). L'*univers* (Welt) sera l'ensemble de toutes les valeurs imaginables x, y, z, t. Rien ne m'empêche, d'une craie audacieuse, de jeter sur le Tableau les quatre axes de l'univers. Déjà la considération d'*un* axe constitué en réalité de molécules vibrantes, emporté par la terre dans son voyage dans l'infini, exige une abstraction assez grande. Celle un peu plus considérable liée au nombre 4 ne peut effrayer un mathématicien.

Pour ne laisser de vide béant nulle part, nous voulons nous représenter en chaque lieu et à chaque instant quelque chose de perceptible. Afin de ne parler ni de matière ni d'électricité, j'emploierai pour ce quelque chose le mot substance. Nous porterons notre attention sur le point substantiel situé au point de l'univers x, y, z, t et nous nous supposerons en état de reconnaître, à tout autre moment, ce même point substantiel. A l'élément de temps dt correspondront les variations dx, dy, dz des coordonnées du point dans l'espace. Nous obtenons alors, comme image en quelque sorte de l'éternelle vie de notre point substantiel, une courbe dans l'univers, une *ligne de l'univers* (Weltlinie) dont les points se laissent uniformément représenter en fonction du paramètre t variant de $-\infty$ à $+\infty$. L'univers tout entier apparaît comme décomposé en pareilles courbes, et je voudrais vous dire tout de suite, par anticipation, qu'à mon avis les lois de la Physique s'expriment de la manière la plus parfaite par des correspondances entre les différentes lignes de l'univers.

Grâce aux notions de temps et d'espace, la multiplicité x, y, z dans $t = 0$ et ses deux côtés $t > 0$, $t < 0$ se séparent les uns des autres. Supposons fixe, pour plus de simplicité, l'origine des temps et de l'espace; le premier groupe de la Mécanique indique que nous pouvons imprimer aux axes des x, y, z une rotation quelconque autour de l'origine, et ceci correspond aux substitutions linéaires homogènes qui laissent invariante la forme

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Le second groupe, au contraire, nous montre que sans changer l'expression des lois de la Mécanique nous pouvons remplacer

$$x,\quad y,\quad z,\quad t \qquad \text{par} \qquad x - \alpha t,\quad y - \beta t,\quad z - \gamma t,\quad t,$$

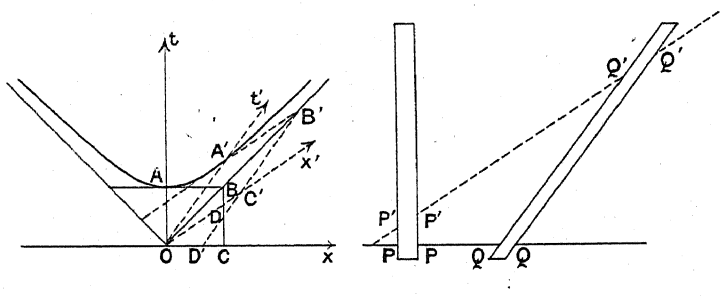
α, β, γ étant des constantes quelconques. On peut, en d'autres termes, donner à l'axe des temps une direction absolument arbitraire dans le demi-univers supérieur $t > 0$. Quel rapport a donc maintenant l'exigence de l'orthogonalité dans l'espace avec cette complète liberté de l'axe des temps vers le haut?

Pour mettre en évidence cette relation, prenons un paramètre positif c et considérons la surface

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Elle est constituée par deux nappes que sépare $t = 0$; c'est l'analogue d'un hyperboloïde à deux nappes. Considérons celle de ces nappes qui est située dans le domaine $t > 0$, et concevons les substitutions linéaires et homogènes de x, y, z, t en quatre nouvelles variables x', y', z', t' telles que l'expression ci-dessus reste invariante. De ces transformations, font évidemment partie les rotations de l'espace autour de l'origine. Nous aurons une idée parfaite des autres transformations en étudiant simplement celles qui laissent invariants y et z. Nous dessinons (*fig.* 1) la section de la nappe par le plan des xt,

Fig. 1.



c'est-à-dire la branche supérieure de l'hyperbole $c^2 t^2 - x^2 = 1$, avec ses asymptotes. Soit, de plus, un vecteur quelconque OA′ issu de l'origine ayant son extrémité sur cette branche; menons jusqu'en son intersection B′ avec l'asymptote de droite la tangente en A′ à l'hyperbole; complétons le parallélogramme OA′B′C′ et prolongeons enfin B′C′ jusqu'en D′, intersection avec l'axe des x. Prenons OC′ et OA′ comme axes de coordonnées parallèles x', t' avec des unités choisies de telle sorte que $OC' = 1$, $OA' = \frac{1}{c}$, et notre branche d'hyperbole conserve de nouveau l'équation $c^2 t'^2 - x'^2 = 1$, $t' > 0$; le passage de x, y, z, t à x', y, z, t' est une des transformations cherchées. Ajoutons aux transformations que nous venons ainsi de caractériser des translations arbitraires pour l'origine des espaces et des temps, et nous constituerons ainsi évidemment un groupe dépendant de c; je le désignerai par G_c.

Faisons maintenant croître c indéfiniment; $\frac{1}{c}$ tendra vers 0 et la figure montre tout de suite que la branche d'hyperbole se rapproche de plus en plus de l'axe des x, tandis que l'angle des asymptotes augmente et tend vers deux droits. La transformation considérée, à la limite, devient une transformation telle que l'axe des t' a une direction arbitraire vers le haut, l'axe des x' étant aussi voisin qu'on veut de l'axe des x. De là, résulte évidemment que le groupe limite de G_c pour $c = \infty$, c'est-à-dire le groupe G_∞, donne précisément le groupe total appartenant à la Mécanique newtonienne. En raison de ce fait, et comme, mathématiquement, G_c est plus facile à comprendre que G_∞, un mathématicien, laissant à sa fantaisie libre cours, aurait bien pu avoir l'idée que les phénomènes physiques présentent une invariance, en définitive, non par rapport au groupe G_∞, mais plutôt pour un groupe G_c où c a une valeur déterminée, finie, cette valeur mesurée avec les unités ordinaires étant simplement *extrêmement grande*. Une telle idée eût été un beau triomphe pour la Mathématique pure. Mais, bien que la Mathématique ne fasse preuve ici que d'esprit d'escalier, il lui reste pourtant une satisfaction : grâce à ses bons antécédents et à l'acuité exercée de ses sens, elle a pu sur-le-champ voir les profondes conséquences d'une telle réforme dans notre conception de la nature.

Je vais faire remarquer tout de suite de quelle valeur de c il s'agit en définitive; c n'est autre chose que la vitesse de propagation de la lumière dans l'espace vide, ou bien pour ne parler ni de vide, ni d'espace, nous pouvons considérer cette grandeur comme le rapport des unités de masse électrique dans les deux systèmes électrostatique et électromagnétique.

Une invariance des lois naturelles, par rapport au groupe G_c en question, peut s'expliquer comme il suit :

Par des approximations successives et de plus en plus précises, on peut trouver, pour l'ensemble des phénomènes naturels, un système de comparaison x, y, z et t, espace et temps, au moyen desquels ces phénomènes se représentent par des lois définies. Ce système de comparaison, par contre, n'est pas du tout déterminé par les phénomènes d'une manière unique. — *On peut modifier le système de comparaison conformément aux transformations du groupe* G_c, *arbitrairement, sans que l'expression des lois naturelles subisse la moindre modification.*

On peut, par exemple, en se reportant à la figure que nous venons de tracer, nommer t' le temps; mais alors nécessairement l'espace sera défini par l'ensemble des trois paramètres x', y, z, si bien que les lois physiques avec x', y, z, t' s'exprimeront de la même manière qu'avec x, y, z, t. Il suit de là que dans l'univers nous n'aurons plus maintenant *un* espace, mais bien une infinité, de la même manière qu'il existe dans un espace à trois dimensions une infinité de plans. La Géométrie à trois dimensions devient un Chapitre de la Physique à quatre dimensions. Vous reconnaissez pourquoi au début je disais : l'espace indépendant du temps, le temps indépendant de l'espace ne sont plus que des ombres vaines ; il ne subsiste que l'univers.

II.

Une question maintenant se pose. Quelles sont les raisons qui nous obligent à adopter la nouvelle conception de l'espace et du temps ? — N'est-elle jamais en contradiction avec les apparences? procure-t-elle enfin quelque avantage pour la description des phénomènes?

Avant d'entrer dans le sujet, faisons ici une remarque importante. Si nous supposons espace et temps individualisés d'une manière quelconque, à un point substantiel en repos correspond comme ligne de l'univers une parallèle à l'axe des t, à un point qui se meut d'un mouvement uniforme correspond une droite inclinée sur l'axe des t, à un point substantiel qui se meut d'une manière non uniforme correspond une courbe gauche quelconque dans l'univers. Considérons alors en un point de l'univers arbitraire x, y, z, t la ligne de l'univers que parcourt ce point. Si la tangente est parallèle à l'un des vecteurs OA′ que nous avons considérés plus haut, nous pouvons prendre OA′ comme nouvel axe des temps, et grâce à notre concept d'espace et temps la substance placée au point de l'univers dont il s'agit semble en repos. Introduisons maintenant l'axiome fondamental suivant :

La substance qui se trouve en un point quelconque de l'univers peut, par un choix convenable de l'espace et du temps, être toujours considérée comme au repos.

L'axiome signifie qu'en chaque point de l'univers l'expression

$$c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

est toujours positive, ou ce qui revient au même que la vitesse v est toujours plus petite que c. c est ainsi une limite supérieure pour la vitesse de tout point substantiel et c'est en cela justement que consiste sa vraie signification. A première vue, sous cette seconde forme, l'axiome a quelque chose d'un peu choquant. Mais il y a lieu de penser qu'une Mécanique modifiée va maintenant se constituer, dans laquelle figurera la racine carrée de cette forme quadratique différentielle, et le cas d'une vitesse supérieure à celle de la lumière ne jouera plus qu'un rôle analogue à celui des figures à coordonnées imaginaires dans la Géométrie.

La vraie raison pour laquelle on a eu l'idée de l'*adoption du groupe* G_c est que les équations différentielles pour la propagation en espace vide des ondes lumineuses possèdent ce groupe de transformations (1). Mais, d'autre part, la notion de corps solide n'a de sens que dans une Mécanique avec le groupe G_∞. Si l'on a donc une optique avec le groupe G_c et si l'on suppose d'un autre côté qu'il existe des corps solides, il est facile de voir que pour les deux nappes hyperboloïdiques correspondant à G_c et G_∞ une seule direction t pourrait être dessinée ; cela aurait alors pour conséquence que, dans un laboratoire, avec des appareils d'optique solides convenablement appropriés, on pourrait observer des modifications en donnant des orientations différentes par rapport à la direction de translation de la Terre. Toutes les recherches dirigées dans ce sens, particulièrement une célèbre expérience d'interférences de Michelson, n'ont eu que des résultats négatifs. Pour ob-

(1) Une application importante de ce fait se trouve déjà chez W. Voigt, *Göttinger Nachr.*, 1887, p. 41.

tenir une explication de ce fait, M. A. Lorentz a émis une hypothèse dont le succès tient précisément à l'invariance de l'optique relativement au groupe G_c. D'après Lorentz, chaque corps en mouvement doit, dans la direction du mouvement, présenter une contraction dont la valeur pour une vitesse v est égale à $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Cette hypothèse a une apparence extraordinairement fantastique. Car cette contraction n'est pas à considérer comme une conséquence de la résistance de l'éther, mais bien comme une espèce de présent d'en haut, comme un phénomène accompagnant nécessairement le phénomène du mouvement.

Je veux maintenant montrer sur nos figures que l'hypothèse de Lorentz est absolument équivalente avec notre conception nouvelle de l'espace et du temps; elle devient d'ailleurs bien plus facile à comprendre. Faisons abstraction de y et z par raison de simplicité et représentons-nous un univers à une seule dimension spatiale; deux bandes, l'une verticale comme l'axe des t, l'autre inclinée sur l'axe des t (voir *fig.* 1), seront les images du mouvement de deux corps, l'un immobile et l'autre en translation uniforme, et qui occupent la même étendue dans l'espace. Si OA′ est parallèle à la seconde bande, nous pouvons prendre t' comme temps, x' comme coordonnée dans l'espace, et le second corps reste au repos, tandis que le premier se meut uniformément.

Imaginons maintenant que le premier corps, supposé au repos, ait pour longueur l, c'est-à-dire que la largeur PP de la première bande comptée dans la direction de Ox soit égale à lOC, OC étant l'unité de longueur sur l'axe des x; imaginons, d'autre part, que le second corps, *supposé de même au repos*, ait aussi la longueur l; cela veut dire que la largeur de la seconde bande, mesurée *parallèlement à* Ox', $Q'Q' = l OC'$. Nous avons alors dans ces deux corps les images de deux électrons *égaux* au sens de Lorentz, l'un au repos l'autre en translation uniforme. Laissons fixes les coordonnées primitives x, t; alors comme étendue du second électron nous devons prendre la largeur de la bande correspondante mesurée *parallèlement à l'axe des* x, c'est-à-dire QQ. Or il est visible que, $Q'Q'$ étant égal à lOC′, $QQ = l OD'$. Un calcul facile nous donne, en tenant compte du fait que $\frac{dx}{dt}$ pour la seconde bande est égal à v,

$$OD' = OC\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

donc aussi

$$PP : QQ = 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Et c'est là le sens de l'hypothèse de Lorentz relative à la contraction des électrons dans leur mouvement. Supposons, d'autre part, le second électron au repos, c'est-à-dire adoptons comme système de comparaison x', t'; la longueur du premier sera alors la largeur P′P′ de la bande correspondante mesurée parallèlement à OC′, et nous trouverons le premier électron raccourci par rapport au second exactement dans le même rapport que plus haut. Car on voit sur la figure que

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP.$$

Lorentz nommait la réunion de x et de t *temps local* (Ortzeit) de l'électron en mouvement uniforme, et l'interprétation physique de cette notion lui permettait de rendre plus claire l'hypothèse de la contraction. On doit cependant à A. Einstein (1) d'avoir le premier reconnu d'une manière précise que le temps du premier électron est aussi bon que celui du second, c'est-à-dire qu'on doit traiter de la même manière t et t'. Par là, cessait d'exister le temps comme notion déterminée d'une seule façon par les phénomènes. Ni Einstein, ni Lorentz, par contre, n'ébranlèrent la notion d'espace, pour la raison peut-être que la transformation spéciale où le plan $x't'$ reste confondu avec xt admet une interprétation possible en supposant que l'axe des x de l'espace conserve sa première position. Aussi bien, passer de façon analogue par-dessus le concept d'espace ne pouvait être que le fait d'une culture mathématique audacieuse. Ce pas en avant était indispensable pour comprendre vraiment la signification du groupe G_c, mais le mot *postulat de relativité* me semble à présent un peu terne pour indiquer cette invariance relativement au groupe G_c. Le postulat prend un sens plus large : les phénomènes ne nous révèlent qu'un

(1) A. Einstein, *Ann. der Physik*, t. XVII, 1905, p. 891; *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, t. IV, 1907, p. 411.

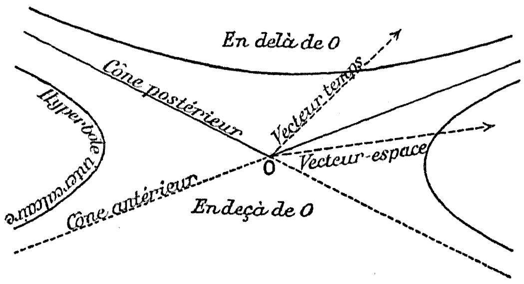
univers à quatre dimensions dans l'espace et le temps, tandis que leur projection dans le temps ou dans l'espace peut être représentée encore avec une certaine liberté ; pour cette raison je donnerai plutôt à cette affirmation le nom de *Postulat de l'univers absolu* ou plus brièvement *Postulat de l'univers* (Weltpostulat).

III.

Le postulat de l'univers permet de traiter les quatre paramètres x, y, z, t d'une façon identique. Les formes sous lesquelles se présentent les lois physiques y gagnent en clarté ; nous le verrons dans la suite. Avant tout, la notion d'*accélération* apparaît avec un relief tout particulier.

Je vais user d'un langage géométrique, qui se présente de lui-même

Fig. 2.



si l'on fait implicitement abstraction de z dans le système x, y, z. Je suppose un point quelconque de l'univers O pris pour origine.

Le cône de sommet O

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

se compose de deux nappes, l'une pour laquelle les valeurs de t sont < 0, l'autre, pour laquelle les valeurs de t sont > 0. La première, *cône antérieur* (Vorkegel) *de sommet* O, se compose, dirons-nous, de tous les points de l'univers qui envoient de la lumière en O, la deuxième, *cône postérieur* (Nachkegel) *de sommet* O, de tous les points qui reçoivent de la lumière de O. Le domaine limité par le cône antérieur seul s'appellera *en deçà de* O (diesseits von O), celui limité par le cône postérieur seul, *en delà de* O (jenseits von O). En delà de O se trouve la nappe de l'hyperboloïde déjà considérée

$$F = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \qquad (t > 0).$$

Le domaine *extérieur* (zwischen) *aux cônes* est rempli par les hyperboloïdes à une nappe

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = k^2,$$

la constante k^2 prenant toutes les valeurs positives. Les hyperboles de centre O situées sur ces hyperboloïdes vont jouer un rôle important. Les branches séparées de ces hyperboles seront désignées brièvement du nom d'*hyperboles intercalaires* (Zwischenhyperbeln) *de centre* O. Une telle branche d'hyperbole considérée comme ligne de l'univers pour un point substantiel représenterait un mouvement dans lequel la vitesse pour $t = -\infty$ et $t = +\infty$ tend asymptotiquement vers la vitesse de la lumière.

Par analogie avec la notion de vecteur dans l'espace, nommons encore *vecteur* un segment dirigé dans la multiplicité des x, y, z, t; nous avons alors à distinguer entre les *vecteurs temps* (Zeitartigen Vektoren) dirigés de O vers la nappe $+F = 1$, $t > 0$ et les *vecteurs espace* (Raumartigen) dirigés de O vers $-F = 1$. L'axe des temps peut être parallèle à tout vecteur de la première espèce. Tout point de l'univers extérieur au cône antérieur et au cône postérieur de sommet O, par un choix convenable du système de comparaison, pourra être considéré comme *simultané* avec O, mais aussi bien comme *antérieur* ou *postérieur*. Tout point de l'univers en deçà de O lui sera toujours nécessairement antérieur, tout point en delà de O postérieur. Le passage à la limite pour $c = \infty$ correspond à un aplatissement complet de la portion en forme de coin extérieure aux cônes, sur la multiplicité plane $t = 0$. Dans les figures dessinées on a pris soin de représenter ces cônes avec des ouvertures différentes.

Décomposons un vecteur quelconque d'origine O d'extrémité (x, y, z, t) en ses quatre *composantes* x, y, z, t. Si deux vecteurs ont pour direction celle d'un rayon vecteur OR joignant O au point R de l'une des surfaces $\mp F = 1$ et celle d'une tangente RS à cette surface au point R, nous dirons que ces deux vecteurs sont *normaux* entre eux. D'après cela

$$c^2 t t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0$$

est la condition pour que les vecteurs de composantes x, y, z, t et x_1, y_1, z_1, t_1 soient normaux l'un à l'autre.

Pour les intensités des vecteurs des différentes directions, les unités doivent être fixées par cette condition qu'un vecteur espace allant de O vers $-F = 1$ ait toujours l'intensité 1, et un vecteur temps qui joint O à $+F = 1$, $t > 0$ toujours l'intensité $\frac{1}{c}$.

Imaginons maintenant en un point de l'univers $P(x, y, z, t)$ la ligne de l'univers d'un point substantiel qui y passe; à l'élément de vecteur temps dx, dy, dz, dt le long de la ligne correspond l'expression

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}.$$

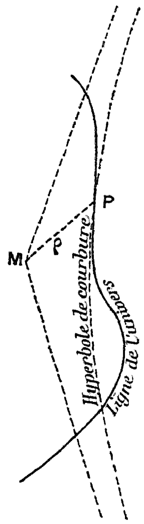
L'intégrale $\int d\tau = \tau$ de cette quantité prise sur la ligne de l'univers, à partir d'une origine quelconque P_0 jusqu'à une extrémité variable P, s'appellera le *temps propre* (Eigenzeit) du point substantiel en P. Sur la ligne de l'univers considérons x, y, z, t, c'est-à-dire les composantes du vecteur OP, comme fonctions du temps propre τ; désignons par $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$ leurs dérivées premières par rapport à τ, par $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ leurs dérivées secondes par rapport à τ, et nommons les vecteurs correspondants, la dérivée du vecteur OP par rapport à τ le *vecteur vitesse en* P et la dérivée du vecteur vitesse par rapport à τ le *vecteur accélération en* P. On a les relations

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2,$$
$$c^2\dot{t}\,\ddot{t} - \dot{x}\,\ddot{x} - \dot{y}\,\ddot{y} - \dot{z}\,\ddot{z} = 0;$$

en d'autres termes, le vecteur vitesse est le vecteur temps ayant pour direction celle de la ligne de l'univers en P, pour intensité 1, et le vecteur accélération en P est normal au vecteur vitesse, par conséquent est toujours un vecteur espace.

D'autre part, il existe une branche d'hyperbole déterminée ayant en commun avec la ligne de l'univers en P trois points infiniment voisins; ses asymptotes seront les génératrices d'un cône antérieur et d'un cône postérieur (voir *fig.* 3). Nous appellerons cette branche d'hyperbole l'*hyperbole de courbure* (Krümmungshyperbel) *en* P. Si

Fig. 3.



M est le centre de cette hyperbole, nous avons ainsi l'hyperbole intercalaire de centre M. Soit ρ l'intensité du vecteur MP; *le vecteur accélération n'est autre que le vecteur de direction* MP *d'intensité* $\frac{c^2}{\rho}$.

Si $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$, sont tous les quatre nuls, l'hyperbole de courbure se réduit à la tangente en P à la ligne de l'univers, et il faut faire $\rho = \infty$.

IV.

Afin de démontrer que l'hypothèse du groupe G_c ne conduit à aucune contradiction pour les lois physiques, il est indispensable de passer en revue toute la Physique bâtie en prenant pour base l'existence de ce groupe. Dans une certaine mesure, cette revision a été réalisée avec succès pour les questions de thermodynamique et de rayonnement [1],

---

[1] M. Planck, *Zur Dynamik bewegter Systeme* (*Berliner Berichte*, 1907, p. 54) (et aussi *Ann. d. Phys.*, t. XXVI, 1908, p. 1).

pour les phénomènes électromagnétiques, et enfin pour la Mécanique avec maintien de la notion de masse [1].

Dans ce dernier domaine, la première question qui se pose est la suivante : Si une force de composantes X, Y, Z suivant les axes de l'espace agit en un point P de l'univers $P(x, y, z, t)$ où le vecteur vitesse est $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, que devient cette force dans une transformation quelconque du système de comparaison?

Nous avons actuellement des données sûres relativement à la force pondéro-motrice dans un champ électromagnétique, dans des cas où le groupe G_c doit être forcément admis. Ces données conduisent à la règle simple : *Par un changement du système de comparaison, la force donnée se transforme dans les nouveaux axes de coordonnées de l'espace en une force, telle que le vecteur de composantes*

$$\dot{t}X, \quad \dot{t}Y, \quad \dot{t}Z, \quad \dot{t}T,$$

où

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}}Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}}Z\right)$$

est le quotient par c^2 du travail de la force au point de l'univers, demeure invariant. Ce vecteur est toujours normal au vecteur vitesse en P. Un tel vecteur force correspondant à une force en P s'appellera *vecteur force motrice* (bewegender Kraftvektor) *en* P.

Faisons maintenant décrire la ligne de l'univers passant en P par un point substantiel de *masse mécanique constante m*. Le produit par *m* du vecteur vitesse en P sera dit le *vecteur impulsion en* P; le produit par *m* du vecteur accélération en P sera *le vecteur force cinématique* (Kraftvektor der Bewegung) *en* P. D'après ces définitions, la loi qui exprime comment s'effectue le mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force motrice donnée s'énonce [2] :

Le vecteur force cinématique est égal au vecteur force motrice.

Cette proposition exprime en même temps les quatre équations relatives aux composantes suivant les quatre axes ; on peut considérer

---

(1) H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern* (*Göttinger Nachr.*, 1908, p. 53).

(2) H. Minkowski, *loc. cit.*, p. 107. — *Voir* aussi M. Planck, *Verh. d. Physik. Ges.*, t. IV, 1906, p. 136.

la quatrième de ces équations comme une conséquence des trois premières, puisque les deux vecteurs cités sont normaux au vecteur vitesse.

D'après la signification indiquée de T, cette quatrième équation exprime sans aucun doute le théorème de l'énergie. On définit l'*énergie cinétique* d'un point matériel *le produit par c^2 de la composante du vecteur impulsion suivant l'axe des t*. Son expression est

$$mc^2\frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

c'est-à-dire, après suppression de la constante additive mc^2, l'expression $\frac{1}{2}mv^2$ de la Mécanique newtonienne, en négligeant les grandeurs de l'ordre de $\frac{1}{c^2}$. Ainsi apparaît d'une façon évidente *la dépendance qui lie l'énergie au système de comparaison*. Mais, d'autre part, puisqu'on peut prendre pour direction de l'axe du temps celle d'un vecteur temps arbitraire, le théorème de l'énergie exprimé pour tous les systèmes de comparaison possibles donnera le système complet des équations du mouvement. Quand on fait le passage à la limite discuté pour $c = \infty$, cette remarque conserve encore son importance pour l'axiomatisation de la Mécanique newtonienne, et c'est dans ce sens que M. J.-R. Schütz (¹) l'a utilisée.

On peut d'abord choisir le rapport de l'unité de longueur à l'unité de temps, de façon que la limite naturelle de la vitesse devienne $c = 1$. Introduit-on, en outre, $\sqrt{-1}\,t = s$ à la place de t, l'expression différentielle

$$d\tau^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - ds^2$$

prend une forme symétrique en x, y, z, s et cette symétrie se conserve dans chaque loi qui n'est pas en contradiction avec le postulat de l'univers. On peut ainsi revêtir ce postulat d'une forme mathématique très

(¹) J.-R. Schütz, *Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie* (*Göttinger Nachr.*, 1897, p. 110).

expressive à l'aide de la formule quelque peu mystérieuse

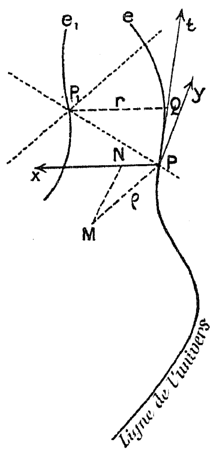
$$3 \,.\, 10^5 \,\text{km} = \sqrt{-1} \,\text{sec}.$$

V.

Les avantages résultant du postulat de l'univers ne peuvent être établis d'une manière plus convaincante qu'en indiquant l'action due *à une charge ponctuelle animée d'un mouvement quelconque*, d'après la théorie de Maxwell.

Considérons la ligne d'univers d'un tel électron ponctuel de charge e, et introduisons le temps propre τ à partir d'une origine quelconque. Pour avoir le champ produit par l'électron en un point de l'univers quelconque P_1, construisons le cône antérieur relatif à P (*fig.* 4). Il

Fig. 4.



rencontre la ligne de l'univers illimitée de l'électron, car la direction de cette ligne est en tout point celle d'un vecteur temps, et il la rencontre visiblement en un seul point. Nous menons en P la tangente à la ligne de l'univers et abaissons de P_1 la normale P_1Q sur cette tangente. Soit r la mesure de P_1Q ; d'après la définition d'un cône antérieur, $\frac{r}{c}$ sera la mesure de PQ. *Le vecteur de direction* PQ *d'intensité*

$\frac{e}{r}$ *fournit par ses composantes suivant les axes x, y, z le potentiel vectoriel multiplié par c et par sa composante suivant l'axe des t le potentiel scalaire du champ produit en* P_1 *par e.* Cet énoncé comprend les lois élémentaires énoncées par A. Liénard et E. Wiechert (¹).

De cette construction du champ produit par l'électron, il ressort ensuite que la distinction du champ en force électrique et magnétique est essentiellement relative et dépend de l'axe du temps choisi; le plus clair sera de considérer simultanément les deux forces, comme l'on fait en Mécanique dans le cas d'un torseur, bien que l'analogie qui se présente ne soit pas parfaite.

Je vais maintenant parler de *l'action pondéro-motrice exercée par une charge ponctuelle animée d'un mouvement quelconque sur une autre charge ponctuelle aussi en mouvement.*

Imaginons par le point de l'univers P_1 la ligne de l'univers d'un deuxième électron ponctuel de charge e_1. Nous déterminons P, Q, r comme précédemment; construisons ensuite le centre de l'hyperbole de courbure en P, enfin abaissons la normale MN de M sur la parallèle à QP_1 passant par le point P. Nous fixons alors un système de comparaison d'origine P de la façon suivante : l'axe des t suivant PQ, l'axe des x suivant QP_1, l'axe des y suivant MN; l'axe des z est déterminé comme normal aux axes t, x, y. Soit $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$ le vecteur accélération en P, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$ le vecteur vitesse en P_1. *Le vecteur force motrice exercé par le premier électron e en mouvement quelconque sur le deuxième électron en* P_1 *aura pour expression*

$$-ee_1\left(\dot{t}_1-\frac{\dot{x}_1}{c}\right)K,$$

les composantes K_x, K_y, K_z, K_t *du vecteur* K *étant liées par les relations*

$$CK_t-K_x=\frac{1}{r^2},\qquad K_y=\frac{\ddot{y}}{C^2r},\qquad K_z=0;$$

(¹) A. Liénard, *Champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque* (*L'Éclairage électrique*, t. XVI, 1898, p. 5, 53, 106). — Wiechert, *Electrodynamische Elementargesetze* (*Arch. néerl.*, 2ᵉ série, t. V, 1900, p. 549).

le vecteur K *est en outre normal au vecteur vitesse en* P_1, *dépendant par cette seule circonstance de ce dernier vecteur vitesse.*

Si l'on compare avec cette proposition les énoncés connus [1] de la loi élémentaire relative à l'action pondéro-motrice de charges ponctuelles en mouvement l'une sur l'autre, on ne peut s'empêcher d'observer que les rapports qui entrent en considération ici dévoilent l'entière simplicité de leur mécanisme intime dans les quatre dimensions, mais n'admettent dans un espace à trois dimensions fixé au préalable qu'une projection très confuse.

Dans la Mécanique réformée conformément au postulat de l'univers, on voit disparaître d'elles-mêmes les discordances qui troublaient l'harmonie entre la Mécanique newtonienne et l'Électrodynamique. Je veux encore dire un mot de la façon dont se comporte la loi de l'attraction newtonienne par rapport à ce postulat. J'admets que, si deux points matériels m, m_1 décrivent leurs lignes de l'univers, m exerce sur m_1 une force motrice donnée précisément par la même expression que dans le cas des électrons, avec cette différence que $-ee_1$ est remplacé par $+mm_1$. Considérons maintenant le cas particulier où le vecteur accélération de m est constamment nul; nous pouvons alors prendre t de telle sorte que m soit considéré comme étant au repos, m_1 étant seul en mouvement sous l'action du vecteur force motrice provenant de m. Modifions maintenant ce dernier vecteur par l'introduction du facteur $\dot{t}_1^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ qui jusqu'aux grandeurs de l'ordre $\frac{1}{c^2}$ se réduit à 1. Alors, on voit [2] que, pour les positions x_1, y_1, z_1 de m_1 et leur marche dans le temps, on retomberait précisément sur les lois de Képler; seulement à la place des temps t_1 interviendraient les temps propres τ_1. A partir de cette simple remarque on peut constater que la loi d'attraction proposée qui est liée à la nouvelle Mécanique n'est pas moins bien appropriée pour l'explication des observations astronomiques que la loi d'attraction newtonienne liée à la Mécanique newtonienne.

---

(1) K. Schwarzschild, *Göttinger Nachr.*, 1903, p. 132. — H.-A. Lorentz, *Enzykl. d. math. Wissensch.*, art. V, 14, p. 199.

(2) H. Minkowski, *loc. cit.*, p. 110.

Les équations fondamentales pour les phénomènes électromagnétiques dans les corps pondérables se rattachent entièrement au postulat de l'univers. Il n'est pas même nécessaire, ainsi que je le montrerai ailleurs [1], d'abandonner les conséquences que Lorentz a tirées de ces équations en se basant sur les conceptions de la théorie des électrons.

Le postulat de relativité, admis sans exception, pourra, je crois, devenir pour l'univers le noyau d'une représentation électromagnétique qui, trouvée d'abord par Lorentz, développée par Einstein, peu à peu maintenant apparaît en pleine lumière. Le développement des conséquences mathématiques conduira à des vérifications expérimentales suffisantes, et par là même ceux qu'effraie ou que chagrine l'idée de changer quelque chose aux vieilles conceptions habituelles pourront se réconcilier avec lui, à la pensée d'une harmonie préétablie entre la Mathématique pure et la Physique.

---

(1) Nous devons à l'obligeance de M. le Dr Born, un élève de Minkowski, les renseignements suivants : Minkowski n'a pas eu le temps de rédiger ses recherches sur le problème ici indiqué ; on a cependant trouvé dans ses papiers un assez grand nombre de Notes qui permettront probablement d'exposer une partie de ses idées. Dans d'autres directions, la théorie de Minkowski est appliquée et développée dans des travaux qui paraîtront prochainement. La Mécanique au sens du postulat de l'univers est étudiée par Philippe Frank (*Wiener Berichte*), la théorie des corps solides et celle de l'électron solide par Max Born (*Ann. der Phys.*).

(Note des traducteurs.)