BACH

Du passage de Vénus sur le disque du Soleil en 1874, et du calcul de la parallaxe du Soleil

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 6 (1869), p. 289-346
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__289_0>

DU

PASSAGE DE VÉNUS SUR LE DISQUE DU SOLEIL

EN 1874

ET DU

CALCUL DE LA PARALLAXE DU SOLEIL,

PAR M. BACH,

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

1. Les passages des planètes inférieures sur le disque du Soleil se produisent quand ces astres, dans leurs conjonctions inférieures, viennent se placer entre la Terre et le Soleil. Si, à cette époque, la planète a une faible latitude, elle sera sensiblement en ligne droite avec la Terre et le Soleil, et l'observateur la verra se dessiner sur le disque solaire suivant une tache noire et ronde dont l'étendue n'est jamais assez considérable pour affaiblir d'une manière sensible l'éclat de l'astre du jour.

Le phénomène des passages a la plus grande analogie avec les éclipses de Soleil; la seule différence, c'est que la Lune est remplacée par la planète, dont le diamètre est beaucoup plus petit. Nous nous occuperons ici spécialement du prochain passage de Vénus, qui aura lieu le 8 décembre 1874. M. Airy a déduit des Tables de Vénus, perfectionnées par M. Le Verrier, les éléments nécessaires au calcul de ce passage. Ces éléments, rapportés au temps moyen de Greenwich, se trouvent dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 25 juillet 1861; nous les rappelons ici :

Conjonction en Æ temps moyen de Greenwich, 8 décembre.		$16^h\,59^m\,13^s,2$
Ascension droite de ☉ et de ♀		$255^\circ\,52'\,51'',6$
Déclinaison du ♀	—	$22^\circ\,35'\,7'',7$
Déclinaison du ☉	—	$22^\circ\,49'\,22'',4$
Mouvement horaire de ♀ en Æ	—	$93'',95$
Mouvement horaire de ♀ en déclinaison	+	$47'',73$
Mouvement horaire du ☉ en Æ	+	$164'',71$
Mouvement horaire du ☉ en déclinaison	—	$14'',80$
Demi-diamètre de ♀	—	$31'',41$
Demi-diamètre du ☉		$16'\,14'',98$
Parallaxe horizontale de ♀		$32'',44$
Parallaxe horizontale du ☉		$8'',71$

Aperçu général sur les passages de Vénus.

2. La longitude héliocentrique du nœud ascendant de Vénus étant de 75 degrés environ, il est évident que, si la Terre est en conjonction avec le nœud ascendant, la longitude géocentrique de ce point sera $180^\circ + 75^\circ = 255^\circ$. La longitude géocentrique du nœud descendant sera, dans les mêmes conditions, de 75 degrés; mais, à cause de l'inclinaison de l'orbite de la planète sur le plan de l'écliptique, les passages ne peuvent se produire que dans les conjonctions inférieures, voisines des nœuds; ils n'ont lieu par conséquent que dans les conjonctions pour lesquelles la longitude du Soleil est elle-même voisine de 255 ou de 75 degrés. Ces longitudes solaires répondent aux mois de décembre et de juin, qui sont en effet les seuls où l'on observe des passages de Vénus. Les passages au nœud ascendant auront lieu en décembre; les passages au nœud descendant auront lieu en juin.

Connaissant la durée de la révolution synodique de Vénus ou le temps que met la planète à revenir en conjonction avec le Soleil, durée qui est de 584 jours, il est facile de trouver toutes les conjonctions : on choisit celles qui se produisent dans le voisinage des nœuds, c'est-à-dire dans les mois de décembre et de juin, et, en les calculant avec soin, on reconnaîtra si la latitude géocentrique, à la conjonction, n'excède pas le demi-diamètre apparent du Soleil, et, dans ce cas, Vénus pourra passer sur le disque solaire.

Dans une révolution synodique de 584 jours, le Soleil parcourt sur l'écliptique une circonférence entière plus 216 degrés; ainsi, une conjonction ayant lieu en un certain point de l'écliptique, la première conjonction qui suivra aura lieu à 216 degrés plus loin; la seconde, à 432 degrés plus loin, etc., et la cinquième aura lieu à $216^\circ \times 5 = 360^\circ \times 3$ du point de départ, c'est-à-dire qu'elle répondra à la même longitude que la première. Dans l'intervalle de cinq conjonctions, il s'est écoulé $584^j \times 5 = 2920^j = 365^j \times 8$, c'est-à-dire 8 années de 365 jours. Supposons, d'après cela, qu'il y ait eu une conjonction inférieure, quand la planète était dans son nœud, à cette conjonction répondra un passage; 8 ans après, la conjonction aura lieu sensiblement dans les mêmes circonstances, avec cette différence, que la planète aura cette fois une latitude appréciable, mais qui sera encore assez petite pour que le passage se produise. Après une nouvelle période de 8 ans, la latitude de la planète à la conjonction aura encore augmenté, et cette augmentation sera alors suffisante pour empêcher le passage d'avoir lieu, de sorte qu'il n'y aura jamais trois passages de suite dans une période de 16 ans. Il s'écoule alors un intervalle de 105 ou de 121 ans, après lequel il y a un passage, puis un autre 8 ans plus tard. On trouve dans l'*Astronomie théorique et pratique* de Delambre, t. II, p. 473, une Table des passages de Vénus depuis l'an 900 de notre ère jusqu'à l'an 3000. Durant cette période de 21 siècles, il y a trente-cinq passages. Ceux du dernier siècle ont eu lieu le 5 juin 1761 et le 3 juin 1769; ceux du siècle actuel s'observeront le 8 décembre 1874 et le 6 décembre 1882.

3. Les passages de Vénus offrent une observation directe du nœud de la planète, ce qui est précieux pour le contrôle des Tables; mais ils ont une bien autre importance encore : on peut en effet les utiliser pour la détermination de la parallaxe du Soleil, de laquelle dépend l'évaluation de la distance de la Terre à cet astre, et, par suite, d'après la troisième loi de Keppler, de la distance de toutes les planètes au Soleil.

Keppler annonça le premier le passage de Vénus qui ait été observé, mais il l'avait simplement signalé comme un fait curieux resté inaperçu jusqu'à lui. C'est Halley qui, en faisant connaître aux astronomes les passages de 1761 et de 1769, montra, le premier, tous les avantages qu'ils pourraient en tirer pour la détermination de la parallaxe du Soleil; il indiqua même les lieux de la Terre les plus favorables pour ce genre d'observations. Malheureusement il se trompa dans ses calculs, et toute la partie numérique de son travail dut être reprise. Divers calculateurs se chargèrent de cette tâche : nous citerons entre autres Trébuchet, astronome français, qui releva le premier l'erreur commise par Halley.

Ces passages du dernier siècle sont fameux dans l'histoire de l'Astronomie; la plupart des Souverains et des Académies de l'Europe organisèrent des voyages dans des lieux éloignés et désignés d'avance où l'effet de la parallaxe sur les apparences du phénomène fût le plus considérable, et ces voyages, surtout en 1769, s'accomplirent à la satisfaction générale des astronomes du temps. La discussion des observations relatives à ce passage de 1769, reprise en 1835 par M. Encke, a donné pour la parallaxe du Soleil 8″,57. On regardait ce nombre, il y a quelques années, comme suffisamment exact, bien qu'on n'en connût pas d'une manière précise le degré d'approximation. Des considérations théoriques ont fait penser, dans ces derniers temps, qu'il était notablement trop petit; il serait en effet de 8″,95, d'après M. Le Verrier.

Lors de l'opposition de Mars, qui s'est produite, en 1862, dans des conditions exceptionnellement favorables, la combinaison d'observations simultanées faites à Pulkowa et au Cap a donné 8″,964; la combinaison d'observations faites à Greenwich et en Australie a donné 8″,932. La moyenne des deux résultats, 8″,95, coïncide avec le nombre adopté par M. Le Verrier, t. IV, p. 101, des *Annales de l'Observatoire*.

M. Pauwalki, astronome à Berlin, a, dans sa Thèse inaugurale, intitulée : *Neue Untersuchung des Venus-Durchganges von* 1769, *zur Bestimmung der Sonnen-Parallaxe,* discuté de nouveau les passages observés en 1769, et il trouve, en basant ses calculs sur les déterminations récentes des longitudes des lieux d'observation, 8″,86. C'est aussi ce que l'on trouve en admettant, comme cela résulte des éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière emploie $497^s,91$ pour parcourir la distance du Soleil à la Terre, et en adoptant d'ailleurs pour la vitesse de la lumière 298000 kilomètres par seconde, d'après Léon Foucault.

Il résulte de ce que nous venons de dire que, dans l'état actuel de la science, la parallaxe du Soleil n'est connue qu'à $\frac{1}{30}$ de sa valeur environ. Espérons que l'étude approfondie des passages de 1874 et 1882 permettra, en donnant gain de cause à la théorie, de resserrer considérablement les limites de l'erreur qui affecte un des éléments les plus importants, mais aussi un des plus délicats à connaître de l'Astronomie.

Calcul des passages par la méthode des projections.

4. Nous nous occuperons d'abord du passage relatif au centre de la Terre, qui se trouve indiqué dans les Éphémérides. Cela revient à négliger les effets de parallaxe, dont nous apprendrons plus tard à tenir compte.

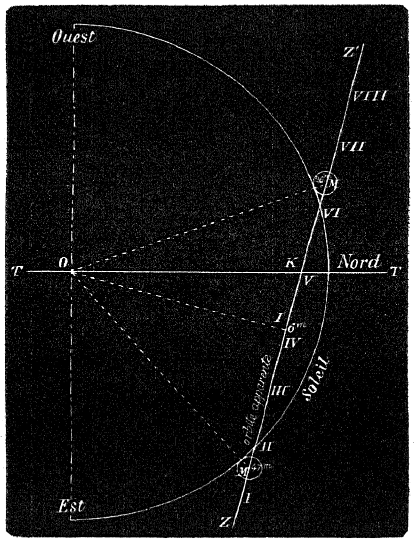
Le problème à résoudre est celui-ci : *Étant donnée l'heure de la conjonction en ascension droite de Vénus et du Soleil, les mouvements horaires des deux astres pour cette époque, déterminer l'heure de l'entrée et de la sortie de la planète, et la plus courte distance de son centre au centre du disque solaire.*

Préliminaires et procédé graphique. — Le Soleil et la planète se déplacent tous deux sur la sphère céleste; le mouvement du Soleil a lieu d'Occident en Orient, et celui de la planète qui est rétrograde dans le voisinage de la conjonction inférieure a lieu d'Orient en Occident. Cela posé, considérons un passage de décembre; à cette époque, le mouvement du Soleil en déclinaison est austral, mais, puisque la planète atteint alors son nœud ascendant, elle passe du Sud au Nord de l'écliptique; son mouvement en déclinaison est donc boréal, c'est-à-dire de sens inverse à celui du Soleil. En juin, c'est le mouvement du Soleil en déclinaison qui est boréal, et celui de la planète qui est austral.

Quant au mouvement de la planète en ascension droite, il est toujours rétrograde vers la conjonction inférieure. Or, il est permis de regarder le Soleil comme fixe, si l'on donne à la planète le mouvement relatif convenable. Le mouvement relatif de Vénus en ascension droite sera égal à la somme des mouvements des deux astres, et se comptera d'Orient en Occident. Le mouvement relatif en déclinaison sera aussi égal à la somme des mouvements : il sera boréal ou austral suivant qu'il s'agira d'un passage de décembre ou d'un passage de juin.

Regardons, d'après cela, le Soleil comme fixe, et imaginons menée la ligne qui va du centre de la Terre au centre du Soleil; prenons pour plan horizontal de projection le plan mené par le centre de la Terre perpendiculairement à cette droite, et pour plan vertical le méridien de la conjonction qui coupera le premier suivant la ligne de terre TT (*fig.* 1). Supposons ensuite que l'on mène, à la distance de la planète

Fig. 1.



à la Terre, un plan parallèle au plan horizontal de projection. La route apparente de la planète, pendant la durée du passage, sera, sans erreur appréciable, une droite située dans ce plan.

Le Soleil s'y projettera en perspective suivant un cercle, et dans l'épure que nous allons expliquer, nous projetterons en vraie grandeur sur le plan horizontal la perspective du Soleil et l'orbite relative.

Cela posé, décrivons un cercle de rayon arbitraire; nous le prendrons d'un décimètre, il représentera le disque solaire. La Terre, réduite à un point, est au centre de ce cercle; la ligne TT détermine le méridien de la conjonction.

Figurons actuellement sur le plan de projection l'orbite relative de la planète. Cette orbite étant sensiblement rectiligne, il suffira de deux conditions pour la déterminer, et nous allons supposer, dans ce qui va suivre, qu'il s'agisse du passage du 8 décembre 1874.

On trouve (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 25 juillet 1861) :

$$\begin{aligned} &D' \text{ Déclinaison } ♀ = 22^\circ 35' \ 7'',7 \text{ A},\\ &D \text{ Déclinaison } \odot = 22^\circ 49' 22'',4 \text{ A}. \end{aligned}$$

La différence des déclinaisons est $14' 14'',7$: cela veut dire qu'à l'instant de la conjonction Vénus est à $14' 14'',7$ au Nord du Soleil; ayant choisi sur la ligne TT la direction du Nord, on prendra, en allant dans ce sens, une longueur OK, répondant à $14' 14'',7$, distance des centres des deux astres.

Le demi-diamètre apparent du Soleil à la conjonction est $16' 14'',98$, et, puisque nous l'avons représenté par un décimètre, on calculera OK par la proportion

$$\frac{OK}{1^d} = \frac{14' 14'',7}{16' 14'',98} = \frac{854,7}{974,98} = 0,877.$$

Ainsi $OK = 0^d,877$.

Prenant OK égal à cette longueur, le point K ainsi obtenu sera un point de l'orbite relative de Vénus. Cette orbite sera complétement déterminée si l'on en connaît un second point, ou si l'on connaît l'angle qu'elle fait avec TT.

5. Nous avons

$$\text{Mouvement horaire } ♀ \left\{ \begin{array}{ll} \text{en ascension droite}\ldots & 93'',95 \text{ O},\\ \text{en déclinaison}\ldots\ldots\ldots & 47'',73 \text{ B}; \end{array} \right.$$

$$\text{Mouvement horaire } \odot \left\{ \begin{array}{ll} \text{en ascension droite}\ldots & 146'',71 \text{ E},\\ \text{en déclinaison}\ldots\ldots\ldots & 14'',80 \text{ A}. \end{array} \right.$$

De ces données résulte un mouvement relatif en ascension droite d'Orient en Occident, égal à la somme des mouvements. Désignons-le par h :

$$h = 93'',95 + 164'',71 = 258'',66 \text{ O}.$$

Quant au mouvement relatif en déclinaison, il sera boréal et égal à la somme des mouvements de la planète et du Soleil. Désignons-le par δ :

$$\delta = 47'',73 + 14'',80 = 62'',53 \text{ B}.$$

Chacune de ces quantités peut d'ailleurs être estimée en parties du rayon du cercle qui représente le disque solaire, c'est-à-dire en décimètres. Elles seront $\frac{h}{d}$ et $\frac{\delta}{d}$, d étant le demi-diamètre apparent du Soleil.

Veut-on connaître la position de la planète sur son orbite relative une heure après la conjonction, on remarquera d'abord qu'elle s'avance vers le Nord de la quantité $\frac{\delta}{d}$. Quant au chemin parcouru vers l'Ouest, il serait $\frac{h}{d}$, si la planète était à l'équateur; mais puisqu'elle a la déclinaison D′, le déplacement horaire parallèlement à l'équateur est $\frac{h}{d}\cos D'$. $\frac{\delta}{d}$ et $\frac{h}{d}\cos D'$ sont les coordonnées d'un second point de l'orbite; en le joignant avec le point K, on aura cette orbite.

Au lieu de déterminer un second point de l'orbite, on peut calculer l'angle α qu'elle fait avec la ligne de terre. Il sera donné par la formule

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{h\cos D'}{\delta}.$$

L'angle α (*fig.* 1, p. 294) est l'angle OKZ; il n'y a pas à se tromper sur le sens où il doit être compté, car la planète se dirige du Sud-Est au Nord-Ouest; elle abordera le disque solaire par la partie orientale, et l'abandonnera par la partie occidentale.

D'après les valeurs de D′, h et δ,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{258,66}{62,53}\cos 22^\circ 35' 7'',7,$$

$$\alpha = 75^\circ 19' 40''.$$

Faisant OKZ $= \alpha$, la ligne ZKZ′ sera l'orbite de Vénus. Il s'agit actuellement de trouver les positions qu'occupe la planète aux heures voisines de la conjonction.

Le chemin que parcourt la planète sur son orbite relative, dans une heure, s'obtient en divisant le mouvement horaire relatif en déclinaison par $\cos\alpha$; il a pour expression

$$\frac{\delta}{d\cos\alpha} = 0^{d},253.$$

6. Rien de plus facile que de trouver la position de Vénus à une certaine heure, à 16 heures par exemple, ce qui répond au 9 décembre, à 4 heures du matin. On compte le temps écoulé depuis 16 heures jusqu'à la conjonction; il est

$$16^{h}\,59^{m}\,13^{s},2 - 16^{h} = 59^{m}\,13^{s},2 = 3553^{s},2.$$

Le chemin parcouru dans ce temps est donné par la proportion

$$\frac{x}{0^{d},253} = \frac{3553,2}{3600},$$
$$x = 0^{d},250.$$

On prendra donc, à partir du point K sur la direction KZ, et en allant vers l'Est, une longueur égale à $0^{d},250$, et l'on marquera à l'extrémité le n° XVI ou mieux IV, en adoptant le temps civil. Portant ensuite dans les deux sens des longueurs égales à $0^{d},253$, c'est-à-dire au chemin parcouru dans une heure, on obtiendra les divisions

III, IV, V, VI,...,

qui indiquent les positions de la planète aux mêmes heures.

Ayant les positions d'heure en heure, on les aura, par des subdivisions, de quart d'heure en quart d'heure, de cinq minutes en cinq minutes, etc.

Pour connaître l'heure de l'entrée et celle de la sortie, on décrira du point O une circonférence avec un rayon égal à la somme des demi-diamètres apparents du Soleil et de la planète. Le demi-diamètre du Soleil, $16'14'',98$, est représenté par 1 décimètre; celui de Vénus, $31'',41$, sera représenté par $0^{d},032$; le rayon du cercle à décrire est donc $1^{d},032$. La circonférence de cercle coupe l'orbite en deux points M et M', qui répondent aux divisions marquées :

$$2^{h}\,47^{m} \quad \text{et} \quad 6^{h}\,26^{m}.$$

Pour connaître l'heure du milieu du phénomène, on regardera la division à laquelle répond le pied de la perpendiculaire menée du centre à l'orbite, ou bien l'on prendra la moyenne des heures d'entrée et de sortie; à cette heure répond la plus courte distance des centres qu'on obtiendra en mesurant la longueur l de la perpendiculaire, et en la convertissant en angle.

La *fig.* 1, p. 294, donne $l = 0^d,863$. On posera la proportion

$$\frac{x}{974'',98} = \frac{0,863}{1},$$

et il viendra pour la distance angulaire des centres

$$x = 13' \, 38''.$$

Résumé.

		Heure de Greenwich.	Heure de Paris.
Le 9 décembre, temps civil.	Entrée............	$1^h\ 47^m$ matin.	$1^h\ 56^m$
	Milieu du passage..	4 6 »	4 15
	Sortie...........	6 26 »	6 35

Plus courte distance des centres, 13′ 38″.

Le passage sera invisible à Paris et à Londres.

7. *Procédé analytique.* — Les constructions qui précèdent peuvent facilement se traduire en formules. Nous avons (*fig.* 1, p. 294)

$$OK = D' - D,$$

$$\tang \alpha = \frac{h \cos D'}{\delta}.$$

Soit I le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur l'orbite; le triangle OKI donne

$$KI = (D' - D)\cos\alpha.$$

D'ailleurs (n^o 5) le chemin que décrit la planète dans une heure sur son orbite relative étant $\frac{\delta}{\cos\alpha}$, on aura le temps écoulé depuis le milieu du passage jusqu'à la conjonction, en divisant KI par le mouvement horaire; on obtient ainsi pour ce temps

$$\frac{D' - D}{\delta} \cos^2 \alpha.$$

Soit t l'heure de la conjonction en ascension droite pour un certain lieu, Greenwich par exemple, et t' celle du milieu du passage, cette heure sera évidemment donnée par la formule

$$t' = t - \frac{D' - D}{\delta} \cos^2 \alpha.$$

La plus courte distance des centres, ou la valeur de OI en angle, est

$$OI = (D' - D) \sin \alpha.$$

Cherchons actuellement l'heure de l'entrée et celle de la sortie. Appelons d' le demi-diamètre de Vénus, d étant celui du Soleil, et considérons Vénus à l'instant de l'entrée ou du premier contact extérieur; son centre étant alors en M, nous aurons

$$MI = (d + d') \cos \varphi,$$

l'angle φ étant donné par la formule

$$\sin \varphi = \frac{OI}{d + d'} = \frac{(D' - D) \sin \alpha}{d + d'}.$$

Le temps nécessaire pour parcourir MI est évidemment

$$\frac{MI \cos \alpha}{\delta} = \frac{(d + d') \cos \varphi \cos \alpha}{\delta},$$

d'où résulte qu'en désignant par t_1 l'heure de l'entrée, nous aurons

$$t_1 = t' - \frac{(d + d') \cos \varphi \cos \alpha}{\delta}.$$

Il n'est pas plus difficile de trouver l'heure de la sortie ou du dernier contact extérieur; en l'appelant t_2, on a

$$t_2 = t' + \frac{(d + d') \cos \varphi \cos \alpha}{\delta}.$$

Il est aisé de voir que les heures du premier et du dernier contact intérieur ont pour expression

$$t' - \frac{(d-d')\cos\varphi'\cos\alpha}{\delta},$$
$$t' + \frac{(d-d')\cos\varphi'\cos\alpha}{\delta},$$

φ' étant un angle auxiliaire donné par la formule

$$\sin\varphi' = \frac{(D'-D)\sin\alpha}{d-d'}.$$

8. *Application.* — Nous avons déjà trouvé

$$h = 258'',66 \text{ O},$$
$$\delta = 62'',53 \text{ B},$$
$$\alpha = 75^\circ\, 19'\, 40''.$$

Nous prendrons, pour appliquer les formules qui précèdent,

$$D' = -22^\circ\, 35'\, 7'',7,$$
$$D = -22^\circ\, 49'\, 22'',4.$$

Nous mettons le signe —, puisque les déclinaisons sont australes, et nous trouvons

$$D' - D = 14'\, 14'',7 = 854'',7,$$
$$\frac{D'-D}{\delta}\cos^2\alpha = 52^m\, 37^s,$$
$$t' = 16^h\, 59^m\, 13^s - (52^m\, 37^s) = 16^h\, 6^m\, 36^s.$$

Ainsi le milieu du passage qui répond à la plus courte distance des centres a lieu à $16^h\, 6^m\, 36^s$, et cette plus courte distance est

$$(D'-D)\sin\alpha = 826'',8 = 13'\, 46'',8.$$

Pour obtenir l'heure de l'entrée et de la sortie, on calculera l'angle φ :

$$\sin\varphi = \frac{(D'-D)\sin\alpha}{d+d'},$$
$$d + d' = 1006'',39,$$
$$\varphi = 55^\circ\, 14'\, 36''.$$

On trouvera ensuite

$$\frac{(d+d')\cos\varphi\cos\alpha}{\delta} = 2^h\,19^m\,26^s,$$

et, d'après cela,

Entrée (heure de Greenwich), à $16^h\,6^m\,36^s - (2^h\,19^m\,26^s) = 13^h\,47^m\,10^s$,
Sortie id. à $16^h\,6^m\,36^s + 2^h\,19^m\,26^s = 18^h\,26^m\,2^s$.

Les résultats fournis par la construction sont sensiblement d'accord avec ceux que donne le calcul.

Pour obtenir l'heure du premier et du dernier contact intérieurs, on calculera l'angle φ' :

$$\sin\varphi' = \frac{(D'-D)\sin\alpha}{d-d'},$$

$$d-d' = 943'',57,$$

$$\varphi' = 61^\circ\,11'\,48''.$$

On trouvera ainsi

$$\frac{(d-d')\cos\varphi'\cos\alpha}{\delta} = 1^h\,50^m\,29^s,$$

et, d'après cela,

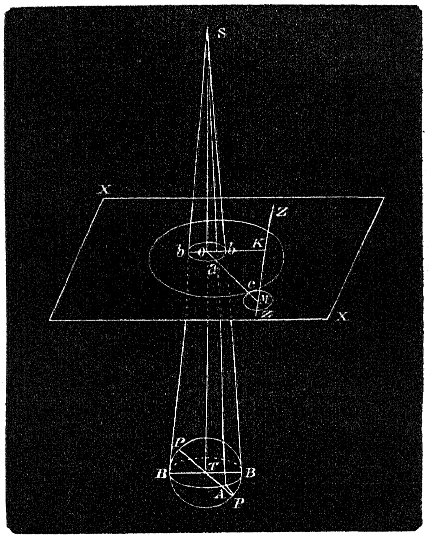
Premier contact intérieur, à $16^h\,6^m\,36^s - (1^h\,50^m\,29^s) = 14^h\,16^m\,7^s$,
Dernier contact intérieur, à $16^h\,6^m\,36^s + (1^h\,50^m\,29^s) = 17^h\,57^m\,5^s$.

9. Dans ce qui précède, nous avons négligé la parallaxe de la planète, ou, en d'autres termes, nous avons fait abstraction des dimensions de la Terre, l'observateur étant toujours supposé placé au centre. Nous allons maintenant y avoir égard, et nous résoudrons d'abord les deux problèmes qui vont suivre, dont on comprendra bientôt toute l'importance.

Déterminer le lieu de la Terre qui, le premier, observera l'entrée de la planète au coucher du Soleil, et celui qui, le dernier, en verra la sortie au lever de cet astre.

Soit (*fig.* 2, p. 302) T la Terre, S le centre du Soleil supposé immobile, XX le plan mené perpendiculairement à la ligne ST, qui joint les centres du Soleil et de la Terre. Ce plan contient la ligne droite ZZ', que la planète dans le voisinage de la conjonction décrit d'Orient en Occident en vertu de son mouvement relatif. Imaginons le cône ayant pour sommet le point S et circonscrit à la Terre, il la touche suivant le cercle BAB, que nous appellerons *cercle d'horizon*, et coupe le plan XX

Fig. 2.



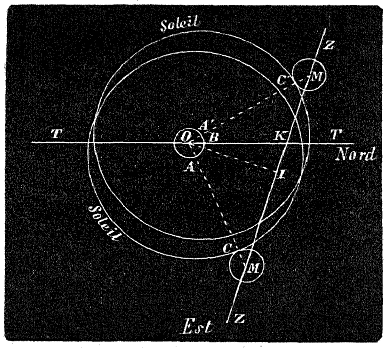
suivant le cercle *bab*, dont le rayon est vu de la Terre sous un angle égal à la différence des parallaxes de la planète et du Soleil. Vénus et la projection du Soleil sur le plan XX sont vues de la Terre sous leurs diamètres apparents. Cela posé, imaginons que la planète occupe une position M telle que l'on ait

$$\mathrm{OM} = \mathrm{O}a + ac + c\mathrm{M},$$

Oa étant la différence des parallaxes des deux astres, Oc le demi-diamètre apparent du Soleil, et cM le demi-diamètre apparent de la planète. Le cercle décrit du point a comme centre, et qui n'est autre que la projection du Soleil sur le plan XX pour l'observateur placé au point A de la Terre, sera tangent au disque de la planète, et de ce point A, qui s'obtient en prolongeant Sa, on verra un contact à l'horizon. Ce sera un contact au coucher, car aussitôt après, le point A, qui se déplace de l'Ouest à l'Est en vertu du mouvement diurne, entre dans l'hémisphère non éclairé, et l'on voit sans peine que le contact aura lieu à l'extrémité orientale du diamètre vertical du Soleil.

Faisons actuellement la figure en projection. Soit TT (*fig.* 3) la ligne de terre, et décrivons, du point O comme centre, un cercle avec un rayon égal à la différence des parallaxes de la planète et du Soleil.

Fig. 3.



Représentons cette différence par p, et imaginons d'ailleurs que l'orbite relative ZZ' ait été tracée comme il a été dit (nº 5).

Du point O comme centre avec le rayon $p+d+d'$ décrivons un arc de cercle qui coupe ZZ' au point M du côté de l'Orient. Joignons OM qui rencontre la circonférence O en A. Le cercle décrit du point A comme centre avec le rayon d et celui qui est décrit du point M comme centre avec le rayon d' seront tangents extérieurement : le premier représente le Soleil, le second la planète, et le point A déterminera le lieu qui verra le premier contact au coucher.

10. *Calcul de l'instant du premier contact au coucher.* — Le point K représentant la position de la planète à la conjonction, cherchons le temps qu'elle mettra pour parcourir la distance MK. Or, nous avons dans la *fig.* 3, comme dans la *fig.* 1, p. 294,

$$\mathrm{OI} = (\mathrm{D}' - \mathrm{D}) \sin \alpha.$$

Posons

$$\sin \gamma = \frac{\mathrm{D}' - \mathrm{D}}{p + d + d'} \sin \alpha,$$

et le triangle OMK donnera la proportion

$$\frac{\mathrm{MK}}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{p + d + d'}{\sin \alpha}.$$

Si l'on divise MK par le mouvement de la planète ou par $\frac{\delta}{\cos\alpha}$, nous aurons

$$\theta = \frac{(p+d+d')\sin(\alpha+\gamma)}{\delta\,\mathrm{tang}\,\alpha}.$$

Cette valeur de θ est le temps écoulé depuis l'instant où le passage commence jusqu'à celui de la conjonction, et l'heure de l'entrée sera $t-\theta$, t désignant, comme nous le savons, l'heure de la conjonction en ascension droite.

11. *Coordonnées géographiques du point* A. — Revenons à la *fig.* 2, p. 302, et considérons le point A de la Terre déterminé en prolongeant Sα. BAB sera, sans erreur appréciable, un grand cercle de la sphère terrestre, et l'arc PA du triangle sphérique PAB sera le complément de la latitude. On connaît, dans ce triangle, le côté BP, qui est égal à la déclinaison du Soleil, et le côté BA, qui, d'après la *fig.* 3, p. 303, est égal à $180° - \alpha - \gamma$. Nous aurons donc, en désignant par λ la latitude du point A,

$$\cos \mathrm{PA} = \sin\lambda = \cos \mathrm{D} \cos(180° - \alpha - \gamma).$$

Pour trouver la longitude de ce point, nous ferons observer que l'on connaît (n° **10**) l'heure de l'entrée. On convertira le temps moyen en temps vrai (*), et l'on en déduira l'angle horaire du Soleil à l'instant du premier contact, ou l'angle du méridien de Greenwich avec celui de la conjonction : nous désignerons cet angle par Q. Le triangle PAB (*fig.* 2, p. 302) donne

$$\mathrm{tang}(180° - \alpha - \gamma) = \sin \mathrm{D}\, \mathrm{tang}\, \mathrm{P}.$$

L'angle horaire φ se compte de l'Est à l'Ouest, à partir de Greenwich, et le méridien du point A fait avec le méridien de la conjonction l'angle P, en allant vers l'Est; donc finalement la longitude du point A sera P — Q, augmenté, s'il est nécessaire, de 360 degrés. Il ne faut pas perdre de vue que l'on compte ici les heures de 0 à 24 ou les angles horaires de 0 à 360.

En faisant une construction analogue sur la partie occidentale de la

(*) *Voyez* n° **22**.

fig. 3, p. 303, on trouvera en A′ le lieu de la Terre qui verra le dernier contact au lever, et ce contact aura lieu à l'extrémité occidentale du diamètre vertical du Soleil. Le temps écoulé depuis la conjonction jusqu'au dernier contact extérieur est donné par la formule

$$\theta' = \frac{(p + d + d')\sin(\alpha - \gamma)}{\delta \tang \alpha}.$$

La latitude du point A′ sera donnée par l'équation

$$\sin\lambda' = \cos D \cos(\alpha - \gamma).$$

Il reste à trouver la *longitude* de ce point.

De l'heure du dernier contact, on conclut l'angle horaire du Soleil, que nous désignerons par Q′. Le méridien de la conjonction sera dès lors à Q′ degrés à l'Est de Greenwich. Si maintenant on désigne par P′ l'angle du méridien de A′ avec le méridien de la conjonction, nous aurons

$$\tang(\alpha - \gamma) = \sin D \tang P',$$

et le point A′, qui voit le dernier contact au lever, sera à 360 — P′ — Q′ degrés à l'Est de Greenwich.

Le temps écoulé depuis l'entrée au coucher jusqu'à la sortie au lever est

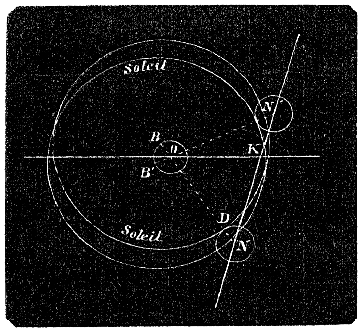
$$T = \frac{(p + d + d')[(\sin\alpha + \gamma) - \sin(\alpha - \gamma)]}{\delta \tang \alpha} = \frac{2(p + d + d')\sin\gamma \cos\alpha}{\delta \tang \alpha}.$$

Ce sera évidemment la plus longue durée du phénomène.

12. *Trouver le lieu qui, le dernier, verra l'entrée au lever, et celui qui, le premier, verra la sortie au coucher.*

Du point O comme centre avec le rayon $d + d' - p$, décrivons un cercle qui rencontre l'orbite relative en deux points N et N′ (*fig.* 4, p. 306). Joignons NO, qui rencontre le cercle d'horizon en B; de ce point, avec le rayon d, décrivons une circonférence, elle représente le disque solaire; décrivons-en une seconde du point N avec le rayon d', elle représente la planète entamant le disque solaire en D. Le point B est celui qui, le dernier, verra l'entrée au lever, et l'impression aura lieu à l'extrémité orientale du diamètre vertical du Soleil. A vrai dire, l'entrée est invisible, puisqu'elle se fait au-dessous du centre du disque solaire, à l'instant où ce centre atteint l'horizon du point B.

Fig. 4.



On trouvera de la même manière la position du point B', qui verra la sortie au coucher.

En désignant par θ_1 le temps écoulé depuis l'arrivée de la planète au point N jusqu'à la conjonction, on trouvera sans peine

$$\theta_1 = \frac{(d + d' - p)(\sin\alpha + \gamma_1)}{\delta \tan g\alpha},$$

l'angle γ_1 étant donné par la formule

$$\sin\gamma_1 = \frac{(D' - D)\sin\alpha}{d + d' - p}.$$

Le temps θ'_1 écoulé depuis la conjonction jusqu'à l'arrivée en N' est

$$\theta'_1 = \frac{(d + d' - p)\sin(\alpha - \gamma_1)}{\delta \tan g\alpha},$$

et la durée totale est

$$T_1 = \frac{2(d + d' - p)\cos\alpha\sin\gamma_1}{\delta \tan g\alpha}.$$

Cette valeur T_1 est la durée minimum du passage.

Les coordonnées géographiques des points B et B' se trouveront comme il a été dit au n° **11**.

On pourrait, au lieu des contacts extérieurs, considérer les contacts intérieurs, soit au coucher, soit au lever; nous nous dispenserons d'écrire ici les formules relatives à ce cas.

13. *Application au passage de* 1874. — Les données à joindre à celles qui ont déjà été employées dans les calculs précédents sont

$$\text{Parallaxe } ♀ = 32'',44,$$
$$\text{Parallaxe } \odot = 8'',71;$$

d'où

$$p = 23'',73.$$

Heure de l'entrée au coucher. — Nous avons (n° 10)

$$\sin\gamma = \frac{(D' - D)\sin\alpha}{p + d + d'},$$
$$d + d' + p = 1030'',12,$$
$$\gamma = 53^\circ\, 23'\, 3'',$$
$$\theta = \frac{(p + d + d')\sin(\alpha + \gamma)}{\delta \tang\alpha} = 3^h\, 21^m\, 56^s.$$

L'entrée au coucher aura lieu à

$$16^h\, 59^m\, 13^s - 3^h\, 21^m\, 56^s = 13^h\, 37^m\, 17^s, \text{ temps de Greenwich.}$$

Heure de la sortie au lever.

$$\theta' = \frac{(p + d + d')\sin(\alpha - \gamma)}{\delta \tang\alpha} = 1^h\, 36^m\, 43^s;$$

la sortie aura lieu à

$$16^h\, 59^m\, 13^s + 1^h\, 36^m\, 43^s = 18^h\, 35^m\, 56^s.$$

La plus longue durée du passage, depuis le premier contact au coucher jusqu'au dernier contact au lever, est donc de

$$4^h\, 58^m\, 40^s;$$

elle excède de $19^m\, 48^s$ la durée pour le centre de la Terre.

Latitude du lieu qui voit l'entrée au coucher. — Nous avons (n° 11)

$$\sin\lambda = \cos D \cos(180^\circ - \alpha - \gamma).$$

La déclinaison du Soleil à l'entrée est

$$D = 22^\circ 48' 31''.$$

On trouve

$$\lambda = 35^\circ 12' 17''.$$

λ se nomme la *latitude corrigée*, l la *latitude effective*. Pour trouver l, *voyez* n° **22** :

$$l = 35^\circ 23' \text{ B}.$$

Longitude du lieu qui voit l'entrée au coucher. — Heure de l'entrée en temps moyen de Greenwich

$$13^h 37^m 17^s,$$

et en temps vrai

$$13^h 44^m 55^s.$$

Nous avons alors pour l'angle horaire à l'entrée

$$Q = 206^\circ 13' 45'' \quad \text{et} \quad 360^\circ - Q = 153^\circ 46' 15''.$$

L'angle P (n° **11**) est donné par la formule

$$\operatorname{tang} P = \frac{\operatorname{tang}(180^\circ - \alpha - \gamma)}{\sin D},$$

$$P = 72^\circ 44' 23''.$$

Donc le lieu qui voit l'entrée au coucher sera à

$$153^\circ 46' 15'' + 72^\circ 44' 23'' = 226^\circ 30' 32'',$$

à l'Est de Greenwich, ou encore à

$$133^\circ 29' 28'' \text{ de longitude Ouest.}$$

Latitude du lieu qui voit la sortie au lever.

$$\sin \lambda' = \cos D \cos(\alpha - \gamma),$$
$$D = 22^\circ 49' 43'',$$
$$\lambda' = 58^\circ 44' 46'',$$
$$l' = 58^\circ 55' \text{ B}.$$

Longitude du lieu qui voit la sortie au lever. — Heure de la sortie.

$$18^h\,35^m\,56^s,\ \text{temps moyen},$$
$$18^h\,43^m\,28^s,\ \text{temps vrai},$$
$$Q' = 280^\circ\,52', \quad 360^\circ - Q' = 79^\circ\,8',$$
$$\operatorname{tang} P' = \frac{\operatorname{tang}(\alpha - \gamma)}{\sin D},$$
$$P' = 46^\circ\,4'\,47''.$$

La longitude est donnée par la formule

$$360^\circ - Q' - P' = 33^\circ\,3'\,13''\ \mathrm{E}.$$

Heure de l'entrée au lever.

$$\sin\gamma_1 = \frac{(D' - D)\sin\alpha}{d + d' - p},$$
$$d + d' - p = 982'',66,$$
$$\gamma_1 = 57^\circ\,17'\,25'',$$
$$\theta_1 = \frac{(d + d' - p)\sin(\alpha + \gamma_1)}{\delta \operatorname{tang}\alpha} = 3^h\,1^m\,40^s.$$

L'entrée au lever a lieu à

$$16^h\,59^m\,13^s - 3^h\,1^m\,40^s = 13^h\,57^m\,33^s.$$

Heure de la sortie au coucher.

$$\theta'_1 = \frac{(d + d' - p)\sin(\alpha - \gamma_1)}{\delta \operatorname{tang}\alpha} = 1^h\,16^m\,26^s.$$

La sortie au coucher a lieu à

$$16^h\,59^m\,13^s\,16^m\,26^s = 18^h\,15^m\,39^s.$$

Latitude du lieu qui voit l'entrée au lever.

$$\cos(90^\circ + \lambda_1) = \cos(\alpha + \gamma_1)\cos D,$$
$$D = 22^\circ\,48'\,37'';$$
$$90^\circ + \lambda_1 = 128^\circ\,37'\,12'',$$
$$\lambda_1 = 38^\circ\,37'\,12'',$$
$$l_1 = 38^\circ\,48'\ \mathrm{A}.$$

Longitude du lieu qui voit l'entrée au lever.

Heure moyenne de l'entrée.... $13^h\,57^m\,33^s$,
Heure vraie.................. $14^h\ 5^m\,11^s$,

$$\text{Angle horaire } Q_1 = 211^\circ 17' 45'', \quad 360^\circ - Q_1 = 148^\circ 42' 15'',$$

$$\operatorname{tang} P_1 = \frac{\operatorname{tang}(\alpha_1 + \gamma_1)}{\sin D},$$

$$P_1 = 109^\circ 37' 54''.$$

Le point désigné par B dans la *fig.* 4, p. 306, est à l'Ouest du méridien de la conjonction ; on prendra dès lors pour la longitude de ce point

$$360^\circ - Q_1 - P_1 = 39^\circ 4' 21'' \text{ E}.$$

Latitude du lieu qui voit la sortie au coucher.

$$D = 22^\circ 49' 41'',$$
$$\lambda'_1 = 61^\circ 12' 30'',$$
$$l'_1 = 61^\circ 22' \text{ A}.$$

Longitude du lieu qui voit la sortie au coucher.

Heure moyenne de la sortie... $18^h\,15^m\,39^s$,
Heure vraie.................. $18^h\,23^m\,12^s$,

$$\text{Angle horaire } Q'_1 = 275^\circ 48', \quad 360^\circ - Q'_1 = 84^\circ 12',$$

$$P'_1 = 139^\circ 59' 39''.$$

La longitude du point B′ (*fig.* 4) sera

$$360^\circ - Q'_1 + P'_1 = 224^\circ 11' 39'' \text{ E},$$

ou 135° 48′ 21″ Ouest de Greenwich.

14. *Récapitulation des résultats précédents en rapportant au méridien de Paris pour le 8 décembre.*

Paris est à 2° 20′ 15″ à l'Est de Greenwich.
La différence des heures est $9^m\,21^s$.

Heure de l'entrée au coucher : $13^h 47^m$.

Coordonnées du point A (*fig.* 3)...	Latitude....	35° 23′ B,
	Longitude..	135° 50′ O.

Heure de la sortie au lever : $18^h 45^m$.

Coordonnées du point A′ (*fig.* 3)...	Latitude....	58° 55′ B,
	Longitude..	30° 43′ E.

Heure de l'entrée au lever : $14^h 7^m$.

Coordonnées du point B (*fig.* 4)...	Latitude....	38° 48′ A,
	Longitude..	36° 44′ E.

Heure de la sortie au coucher : $18^h 25^m$.

Coordonnées du point B′ (*fig* 4)...	Latitude....	61° 22′ A,
	Longitude..	138° 9′ O.

Si l'on compare les positions géographiques des deux lieux de la Terre qui voient l'entrée au coucher et l'entrée au lever, on trouve qu'ils sont à peu près diamétralement opposés ; il en est de même des deux points qui voient la sortie au lever et la sortie au coucher.

15. *Trouver le lieu d'où l'on peut apercevoir l'entrée vers le coucher du Soleil et la sortie vers le lever, le milieu du passage ayant lieu au méridien.*

Pour déterminer un pareil point approximativement, nous ferons observer que le milieu du passage doit s'y produire quand le Soleil arrive au méridien inférieur. Or, le milieu du passage pour le centre de la Terre a lieu à $16^h 15^m$, temps moyen de Paris (n° 6), et puisque, pour le point cherché, il doit être alors minuit ou 12 heures, ce point sera à $4^h 15^m$ à l'Ouest de Paris, soit 64 degrés environ de longitude Ouest.

Il est vers le pôle austral, et par conséquent au Sud par rapport au Soleil. Vénus y sera relevée par l'effet de la parallaxe. La durée du passage sera diminuée, quoique restant toujours supérieure à $4^h 18^m$ (n° **14**).

Cherchons donc le point pour lequel l'arc de parallèle nocturne répond à une durée de $4^h 18^m$, et nous serons certains que l'observateur placé sur ce parallèle verra l'entrée un peu avant le coucher du Soleil, et la sortie un peu après le lever.

Désignant par λ la latitude cherchée, par $\mathcal{A}\!H$ l'angle horaire du Soleil à l'horizon et par D la déclinaison de l'astre, nous avons la formule

$$\tang\lambda = \frac{\cos(180^\circ - \mathcal{A}\!H)}{\tang D},$$

dans laquelle

$$180^\circ - \mathcal{A}\!H = \frac{4^h\,18^m}{2}\cdot 15 = \frac{64^\circ\,30'}{2} = 32^\circ\,15',$$

$$D = 22^\circ\,49'.$$

On trouve ainsi

$$\lambda = 63^\circ\,31',$$

et pour la latitude vraie

$$l = 63^\circ\,40'.$$

Les coordonnées géographiques que nous venons d'obtenir répondent à une île située bien au Sud du cap Horn, et désignée sous le nom d'*Ile Louis-Philippe*.

Il ne serait pas plus difficile d'assigner un lieu avancé vers le Nord et aussi éloigné que possible du précédent, d'où l'on pourra observer l'entrée au lever du Soleil et la sortie au coucher. Ce lieu est situé au cœur de la Sibérie par 116 degrés de longitude Est et 63 degrés de latitude Nord, sur la rivière *Vilyui*, affluent de gauche de la *Lena*. Il est à 20 lieues environ à l'Ouest de *Verkhnevilyuisk*.

16. Nous expliquerons bientôt comment on arrive à prédire, par le calcul, les différentes circonstances que présente le passage de Vénus pour un lieu déterminé de la Terre; mais ce que l'on doit se proposer avant tout, c'est d'assigner les lieux d'où l'on pourra faire avantageusement les observations pour arriver à la connaissance de la parallaxe du Soleil. Nous atteindrons ce but très-simplement, et d'une manière suffisamment exacte, en opérant comme il suit.

On se servira d'un globe terrestre que l'on disposera de façon que l'inclinaison de l'axe du monde sur l'horizon soit égale à la déclinaison du Soleil; elle est ici $22^\circ\,49'$ A.

On amènera Paris sous le méridien fixe, en même temps que l'index du cercle des heures sur 12 heures, puis on fera tourner le globe, de l'Ouest à l'Est, de l'angle horaire répondant à $13^h 47^m$, heure du commencement au coucher.

Dans cette première position du globe, le Soleil se couche en même temps pour tous les points de l'horizon oriental, et se lève en même temps pour tous ceux de l'horizon occidental, tandis que les lieux situés sous le méridien fixe auront midi. L'horizon fixe du globe détermine ainsi tous les lieux qui voient l'entrée de Vénus au coucher, et aussi, à peu de chose près, ceux qui voient l'entrée au lever. Les premiers sont situés sur l'horizon oriental, les seconds sur l'horizon occidental. A la vérité, tous les lieux qui sont à l'horizon oriental ne voient pas l'entrée en même temps (à $13^h 47^m$); cela n'arrive rigoureusement que pour le point situé à $135° 49'$ de longitude Ouest et à $35° 23'$ de latitude boréale (n° 14). Pour tous les autres, le passage commencera un peu plus tard.

Tous les lieux qui sont à l'horizon oriental verront à peine le commencement, et du reste ils ne verront rien du passage. Les lieux situés à l'horizon occidental verront l'entrée et la continuation du phénomène. Ceux qui sont dans l'hémisphère éclairé verront le phénomène totalement ou partiellement, d'autant plus ou d'autant moins qu'ils seront plus rapprochés ou plus éloignés de l'horizon occidental.

Ayant ramené Paris sous le méridien fixe, et l'index sur 12 heures, on fera de nouveau tourner le globe de l'Ouest à l'Est d'un angle répondant à $18^h 45^m$, heure de la sortie au lever. Dans cette seconde position, le globe indiquera tous les lieux de l'horizon oriental qui verront la fin au coucher, et ceux de l'horizon occidental qui verront la fin au lever.

17. Connaissant ces deux grands cercles de l'horizon, il sera facile de connaître aussi les lieux où la parallaxe modifiera de la manière la plus sensible les circonstances du passage tel qu'il serait observé du centre de la Terre. Ainsi, dans la première position, la Nouvelle-Calédonie est près du méridien fixe, et le Soleil presque au zénith : on apercevra de cette station l'entrée à peu près telle qu'on la verrait du centre de la Terre.

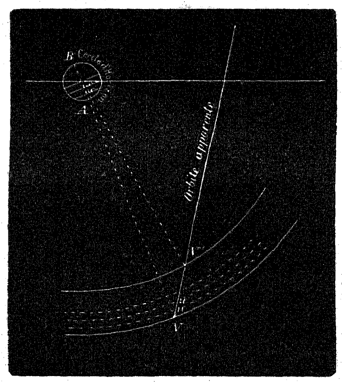
Dans la seconde position, la Calédonie est encore au-dessus de l'horizon oriental, mais elle en est très-rapprochée, le Soleil n'y est pas encore couché; on y verra donc aussi la fin du passage, et par conséquent toute la durée. L'effet de la parallaxe est nul à l'entrée, mais il est considérable à la sortie, et la durée du passage sera par là même diminuée, parce que, la latitude de Vénus étant boréale, les lieux situés au sud de la droite qui passe par le Soleil supposé fixe verront Vénus relevée ou plus éloignée du centre de l'astre.

Pondichéry, Calcutta et les différentes villes situées sur le golfe du Bengale verront l'entrée au lever et la sortie vers le passage au méridien. On y apercevra donc le phénomène pendant toute la durée. Ces lieux étant d'ailleurs au nord du Soleil, Vénus y sera abaissée par la parallaxe ou rapprochée du centre de l'astre; la durée sera par là même augmentée.

Le passage de 1874 ne pourra pas être observé dans nos contrées. L'Europe orientale verra seule la fin au lever; on pourra l'observer de Naples, de Bude, de Vilna, de Moscou, de Kasan.

18. Les lieux A et B (*fig.* 5), qui voient, le premier, le commencement au coucher, le second, le commencement au lever, sont à très-peu

Fig. 5.

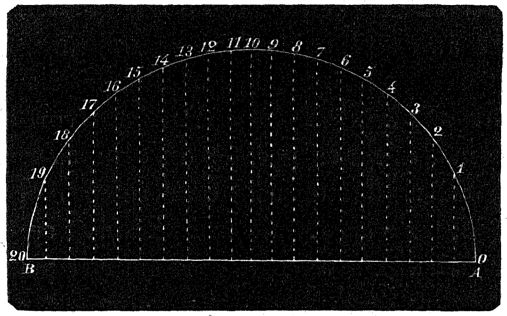


près sur un même diamètre, passant par Vénus. Soit alors t le temps écoulé depuis l'entrée au coucher jusqu'à l'entrée au lever, exprimé en minutes; ici $t = 20$ (nº 14). On partagera AB en t parties égales; puis on mènera, par les points de division $x, x', \ldots,$ des cordes perpendiculaires à AB. Les cercles perpendiculaires à cette ligne, et ayant ces cordes pour diamètres, auront tous les points de leur circonférence sensiblement à la même distance de Vénus. D'après cela, si des points A, x, x',..., comme centres, avec les rayons AV, xu, $x'u'$,..., égaux à $d+d'$, on décrit des arcs de cercle coupant l'orbite apparente en V, u, u',..., il arrivera qu'au point A, on verra l'entrée au coucher quand le centre de la planète est en V. Sur le parallèle passant par x, on verra l'entrée quand le centre de la planète est en u. Sur le parallèle passant par x', on verra l'entrée quand la planète est en u', et ainsi de suite (*).

Le point A, qui le premier voit l'entrée au lever, et le point B, qui le premier voit l'entrée au coucher, sont sensiblement les pôles des cercles passant par les points x, x',.... Il y aura également un autre système de cercles ayant pour pôles le point A', qui le dernier voit la sortie au lever, et le point B', qui le premier voit la sortie au coucher. Si ces points A et B, A' et B' ont été marqués sur un globe terrestre, ce qui est facile, puisqu'on en a déterminé (n° 13) les coordonnées géographiques, on pourra trouver immédiatement, pour un lieu donné du globe, l'heure de l'entrée et celle de la sortie.

19. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de faire cette détermination pour Calcutta. On tracera sur une feuille de papier (*fig.* 6) un

Fig. 6.



cercle ayant même rayon que le globe, et l'on en divisera le diamètre en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans t (ici $t=20$). Par les points de division on mènera des perpendiculaires à ce diamètre

(*) La dénomination de *parallèles* se rapporte ici aux cercles perpendiculaires à la droite AB.

jusqu'à leur rencontre avec la circonférence, ce qui donnera les divisions

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 19,\ 20,$$

o et 20 étant aux deux extrémités du diamètre.

Cela posé, ayant marqué sur le globe le point A dont nous avons déterminé les coordonnées géographiques, on y placera l'une des pointes d'un compas sphérique, l'autre étant arrêtée sur Calcutta. On reviendra ensuite au cercle, et l'une des pointes du compas étant au o, on verra à quelle division s'arrête l'autre : on trouvera que c'est à la treizième : le retard de l'entrée à Calcutta sur l'entrée au point A est donc 13 minutes. Le phénomène commencera pour Calcutta à

$$13^h\,46^m\,38^s + 13^m = 13^h\,59^m\,38^s. \quad (\textit{Voyez } n^o\ 14.)$$

La différence des méridiens de Calcutta et de Paris est $5^h\,44^m$. Le passage commencera donc à

$$13^h\,59^m\,38^s + 5^h\,44^m = 19^h\,43^m\,38^s.$$

Nous verrons un peu plus loin que ce résultat présente l'approximation désirable.

On trouvera de la même manière l'heure de la sortie.

20. La différence entre l'heure du dernier contact au lever et celle du dernier contact au coucher étant de 20 minutes, comme plus haut (n° **14**), on pourra se servir du même cercle qu'au numéro précédent. Ayant donc marqué sur le globe le point A' qui voit le dernier contact au lever, on placera l'une des pointes du compas en A', l'autre étant arrêtée sur Calcutta; revenant ensuite au cercle, et plaçant une des pointes sur le o, l'autre s'arrêtera à la division 4, ce qui veut dire que le passage finit à Calcutta 4 minutes plus tôt que pour le point A'. On aura donc pour l'heure de la fin

$$18^h\,45^m\,17^s - 4^m = 18^h\,41^m\,17^s, \text{ temps de Paris,}$$

ou

$$18^h\,41^m\,17^s + 5^h\,44^m = 24^h\,25^m\,17^s, \text{ temps de Calcutta.}$$

Le passage commence en cette ville le 9 décembre à $7^h\,44^m$ et finit à midi 25 minutes.

21. Ce procédé nous fournit, comme nous l'avons dit plus haut, un moyen fort simple de déterminer différents points habitables du globe d'où l'on pourra observer commodément et avec un effet de parallaxe sensible le premier contact extérieur et intérieur, ou bien encore le dernier contact intérieur et extérieur. Nous avons dressé de ces lieux le tableau suivant, auquel il serait aisé de donner plus d'étendue :

Premier contact extérieur.

Localités.	Heure de Paris.	Heure pour le centre de la Terre.	Différence.
Iles Sandwich.... .	$13^h 48^m$	»	$+ 8^m$
Iles Marquises.....	$13^h 50^m$	$13^h 56^m$	$+ 6^m$
Réunion..........	$14^h 6^m$	»	$- 10^m$

Dernier contact extérieur.

Localités.	Heure de Paris.	Heure pour le centre de la Terre.	Différence.
Calcutta.	$18^h 41^m$	»	$- 6^m$
Sidney............	$18^h 29^m$	$18^h 35^m$	$+ 6^m$
Moscou...........	$18^h 45^m$	»	$- 10^m$

Les lieux qui, dans le tableau précédent, sont sous le titre : *Premier contact extérieur*, auront un effet de parallaxe sensible à l'entrée. Les îles Sandwich et les îles Marquises ne verront pas la sortie; à la Réunion, l'effet de la parallaxe sera presque nul à la sortie. Les lieux désignés sous le titre : *Dernier contact extérieur*, auront, au contraire, un effet de parallaxe sensible à la sortie. Pour Calcutta et Sidney, il ne sera que de 3 minutes à l'entrée; Moscou ne verra pas le commencement du phénomène.

Il est des lieux d'où l'on peut observer l'entrée au coucher et la sortie au lever, ou bien l'entrée au lever et la sortie au coucher, ce qui permettra d'y faire, d'une manière avantageuse, l'observation complète du passage.

Ainsi, à l'île Louis-Philippe, l'entrée aura lieu à $14^h 2^m$, et la sortie à $18^h 26^m$, tandis que, pour le centre de la Terre, l'entrée est à $13^h 56^m$, et la sortie à $18^h 35^m$; la durée du passage est inférieure de 15 minutes à celle qui est relative au centre de la Terre.

Pour le point de la Russie asiatique, l'entrée a lieu à $13^h 54^m$, et la sortie à $18^h 44^m$; la durée du passage excède de 11 minutes celle qui est relative au centre de la Terre.

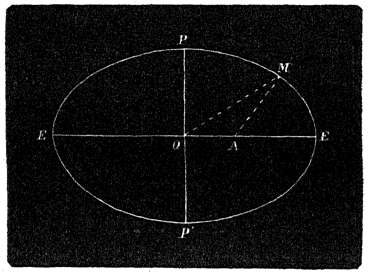
Passage pour un lieu déterminé de la Terre.

22. Avant d'aborder cette question, nous allons traiter quelques problèmes dont la solution est indispensable à connaître.

Connaissant la latitude d'un lieu ou la hauteur du pôle en ce lieu, trouver la latitude corrigée.

La Terre étant un ellipsoïde aplati aux pôles et renflé à l'équateur, les normales aux différents points ne passent pas par le centre. On nomme *latitude corrigée* l'angle que fait avec l'équateur le rayon terrestre mené par le lieu que l'on considère; ainsi, dans la *fig.* 7,

Fig. 7.



$MAE = l$ est la latitude, $MOE = \lambda$ est la latitude corrigée. Prenant pour unité le demi-diamètre équatorial de l'ellipse méridienne, désignant par e l'excentricité, par x et y les coordonnées d'un point de cette ellipse, nous aurons

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} l = \frac{y}{x}\frac{1}{1-e^2},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\lambda = (1-e^2)\operatorname{tang} l.$$

On introduit d'ordinaire dans cette formule l'aplatissement.

Désignons-le par a, il viendra

$$a = 1 - \sqrt{1-e^2} \quad \text{ou} \quad e^2 = 2a - a^2,$$

et, en négligeant le carré de l'aplatissement,

$$e^2 = 2a.$$

Prenant pour l'aplatissement $\frac{1}{300}$, on aura

$$\text{tang}\,\lambda = 0,99333\,\text{tang}\,l.$$

Pour Paris,

$$l = 48^\circ\,50'\,13'', \quad \lambda = 48^\circ\,38'\,40''.$$

Pour Calcutta,

$$l = 23^\circ\,33'\,11'', \quad \lambda = 23^\circ\,24'\,45''.$$

On passera de la longitude corrigée à la longitude vraie par la formule

$$\text{tang}\,l = \frac{\text{tang}\,\lambda}{0,99333} = 1,00670\,\text{tang}\,\lambda.$$

Connaissant la parallaxe horizontale équatoriale d'un astre, en trouver la parallaxe horizontale pour une latitude donnée.

La parallaxe équatoriale d'un astre est l'angle sous lequel on voit de cet astre, supposé à l'horizon, le demi-diamètre de l'équateur. Désignant par π cette parallaxe, par 1 le demi-diamètre équatorial et par R la distance de l'astre à la Terre, on a

$$\sin\pi = \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad \pi = \frac{1}{R\sin 1''}.$$

La *parallaxe*, pour un point donné de la Terre, est l'angle sous lequel on voit, de l'astre supposé à l'horizon du point, le rayon terrestre passant par ce dernier. Or on peut, sans erreur appréciable, regarder ce rayon comme perpendiculaire au plan tangent. En désignant alors par p la parallaxe horizontale pour le lieu dont la latitude corrigée est λ, et par r le rayon, il vient

$$\sin p = \frac{r}{R} \quad \text{ou} \quad p = r\pi.$$

Il reste à trouver r. Or les coordonnées du point sont

$$r\cos\lambda \quad \text{et} \quad r\sin\lambda.$$

Il vient donc

$$r^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2\cos^2\lambda} = \frac{1 - 2a}{1 - 2a\cos^2\lambda},$$

et, en négligeant le carré de l'aplatissement,

$$r = 1 - a \sin^2 \lambda;$$

d'où

$$p = \pi(1 - a \sin^2 \lambda).$$

Exemple. — *Sachant que la parallaxe horizontale équatoriale de Vénus est 32″,44, trouver la parallaxe horizontale pour Calcutta.*

Nous avons trouvé plus haut

$$\lambda = 23° 24' 45'';$$

on trouvera

$$1 - a \sin^2 \lambda = 0,99947,$$

d'où

$$p = 32'',44 \times 0,99947 = 32'',42.$$

Étant donnée l'heure moyenne d'un lieu, trouver l'heure vraie et l'angle horaire.

Proposons-nous de calculer, pour le 9 décembre 1874, l'heure vraie de Calcutta quand il est dans cette ville $7^h 43^m$ du matin, temps moyen.

Si l'on compte 9 décembre $7^h 43^m$, temps civil, les Astronomes comptent 8 décembre $19^h 43^m$, et, puisque la différence des méridiens de Paris et de Calcutta est de $5^h 44^m$, il est à l'instant considéré $13^h 59^m$ à Paris. L'équation du temps le 8 décembre 1874 à midi, temps moyen de Paris, est $7^m 50^s,85$; elle diminue en 24 heures de $26^s,69$ et en $13^h 59^m$, soit $13^s,98$, de

$$26^s,69 \times \frac{13,98}{24} = 15^s,13.$$

L'heure vraie de Paris sera par conséquent

$$13^h 59^m + 7^m 50^s,85 - 15^s,13 = 14^h 6^m 35^s,72;$$

celle de Calcutta sera

$$19^h 50^m 35^s,72,$$

et l'angle horaire

$$H = 297° 38' 56''.$$

Trouver à un instant donné la déclinaison du Soleil.

Le tableau de M. Airy nous apprend qu'à la conjonction, soit à

$17^h\,8^m\,34^s,2$, temps moyen de Paris, la déclinaison du Soleil est

$$22^\circ\,49'\,22'',4\ \text{A}.$$

Cherchons quelle sera la déclinaison de l'astre quand il est $19^h\,43^m$ à Calcutta, ou $13^h\,59^m$ à Paris. De $13^h\,59^m$ à $17^h\,8^m\,34^s$, il s'est écoulé $3^h\,9^m\,34^s,2$, ou $3^h,1595$, et, puisqu'à l'époque considérée la déclinaison diminue de 11 secondes par heure, cette diminution sera

$$11'' \times 3,1595 = 34'',75.$$

La déclinaison du Soleil à l'instant considéré est donc

$$22^\circ\,49'\,22'',4 - 34'',75 = 22^\circ\,48'\,47'',65.$$

23. *Calculer pour un instant donné les coordonnées du centre de la planète.*

Les Tables de la planète donnent le mouvement de l'astre en ascension droite et en déclinaison, et les mouvements relatifs peuvent être réduits à la forme

$$\begin{aligned}\text{Mouvement en } \text{Æ} &= \text{A} = ht + \eta t^2\,\text{O},\\ \text{Mouvement en } \text{D}^{\text{on}} &= \Delta = \delta t + \gamma t^2\,\text{B},\end{aligned}$$

t désignant le temps écoulé à partir de la conjonction.

Considérons le triangle sphérique dont les côtés sont $90 + \text{D}'$ et $90 + \text{D}' - \Delta$; ils comprennent entre eux l'angle A, et le troisième côté de ce triangle sera l'arc parcouru par la planète sur son orbite relative pendant le temps t; en le désignant par a, on aura

$$\cos a = \sin \text{D}' \sin(\text{D}' - \Delta) + \cos \text{D}' \cos(\text{D}' - \Delta) \cos \text{A},$$

ou bien, en remarquant que a, A et Δ sont très-petits,

$$1 - \frac{a^2}{2} = \cos\Delta - \cos \text{D}' \cos(\text{D}' - \Delta)\frac{\text{A}^2}{2};$$

mais

$$\cos \text{D}' \cos(\text{D}' - \Delta) = \frac{1}{2}\cos(2\,\text{D}' - \Delta) + \cos\Delta.$$

Remplaçant $\cos\Delta$ par $1 - \dfrac{\Delta^2}{2}$, et négligeant les termes d'un ordre supérieur au second, on arrive, après une réduction facile, à

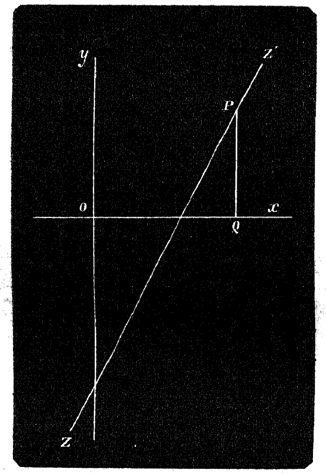
$$a^2 = \Delta^2 + A^2 \cos^2\left(D - \frac{\Delta}{2}\right).$$

a est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont

$$\Delta \quad \text{et} \quad A \cos\left(D' - \frac{\Delta}{2}\right).$$

Prenant alors pour axe des x la trace du méridien de la conjonction (*fig.* 8), et pour axe des y la perpendiculaire à cette ligne menée par

Fig. 8.



le centre de la planète à la conjonction, nous aurons pour les coordonnées de l'astre

$$OQ = x = D' - D + \Delta,$$

$$PQ = y = A \cos\left(D' - \frac{\Delta}{2}\right).$$

On trouve immédiatement

$$x = D' - D + \delta t + \gamma t^2.$$

Quant à la valeur de y, on a

$$y = A \cos D' + A \sin D' \frac{\Delta}{2}.$$

Remplaçant A et Δ par leurs valeurs et supprimant les puissances de t supérieures à la seconde, il vient finalement

$$y = \cos D' \left[ht + t^2 \left(\eta + \frac{\delta}{2} \sin h \operatorname{tang} D' \right) \right],$$

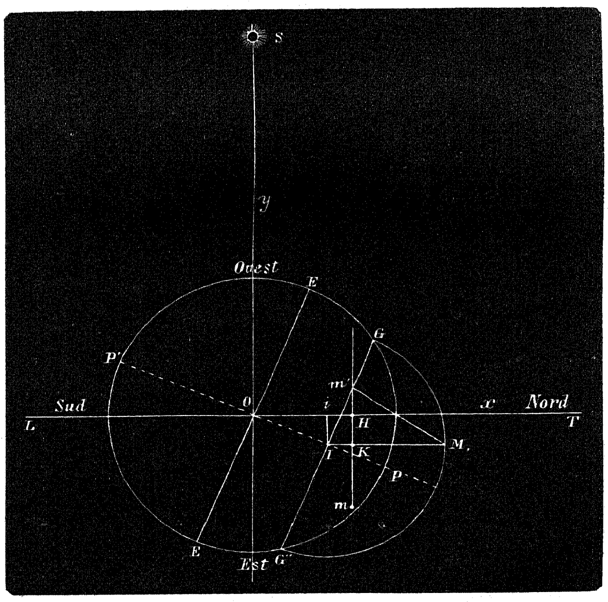
valeur que, dans un grand nombre de cas, on peut réduire à $ht \cos D'$.

Dans ces formules, t est négatif avant la conjonction, positif après la conjonction; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le Nord, la partie positive de l'axe des y vers l'Ouest, et enfin on considère les positions de la planète telles qu'elles se présentent dans le passage de 1874.

24. *Trouver, pour un instant donné, la projection d'un point de la Terre dont on connaît la longitude et la latitude.*

Soient H l'angle horaire du Soleil pour ce point et pour cet instant, l la latitude et π la parallaxe horizontale équatoriale de la planète; on calculera la latitude corrigée λ, et ensuite la parallaxe horizontale p relative à cette latitude.

Fig. 9.



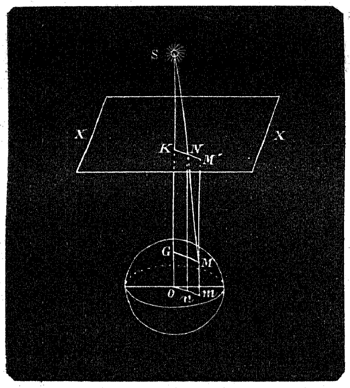
Cela posé, décrivons du centre O (*fig.* 9) un cercle avec le rayon p, D étant la déclinaison du Soleil; la ligne des pôles PP′ fera avec la trace du méridien de la conjonction ou avec la ligne de terre l'angle D. Soit m' la projection verticale du point M dont on connaît les coordonnées géographiques; soit aussi G′G″ la projection verticale du parallèle de ce point: le point M sera rabattu en M_1. Prenons $\mu m = m'M_1$, le point m sera la projection horizontale de M, et, en désignant par x_1, y_1 les coordonnées de ce point m, nous aurons

$$x_1 = O\mu = Oi + IK = p \sin\lambda \cos D + p \cos\lambda \sin D \cos H,$$
$$y_1 = m\mu = m'M_1 = -p \cos\lambda \sin H.$$

Ces coordonnées x_1, y_1 feront connaître la projection du point M, projection qui sera aussi celle du point où l'observateur placé en M reporterait le centre du Soleil si l'astre était situé à l'infini.

Le Soleil ayant une parallaxe de 9 minutes environ, il faudra, si l'on veut en tenir compte, faire une correction. Soient M (*fig.* 10) la position de l'observateur, XX le plan contenant la ligne qui représente l'orbite relative, et S la position du Soleil.

Fig. 10.



L'observateur qui reporte la position du Soleil en M′ quand l'astre est supposé à l'infini, la reporte actuellement en N, intersection de MS avec le plan XX. Ce point N est projeté en n, et lorsqu'on aura à considérer la distance des centres de la planète et du Soleil, ce n'est pas en m qu'on devra placer le centre du Soleil, mais en n. Rien de plus facile d'ailleurs que de passer des premières coordonnées aux secondes.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point m; x', y' celles du point n; nous aurons

$$\frac{x'}{x_1} = \frac{y'}{y_1} = \frac{\mathrm{SK}}{\mathrm{SG}} = \frac{\mathrm{R} - \rho}{\mathrm{R} - z} = \frac{1 - \frac{\rho}{\mathrm{R}}}{1 - \frac{z}{\mathrm{R}}},$$

en désignant par R la distance du Soleil à la Terre, par ρ la distance de la planète et par z la hauteur du point M au-dessus du plan de projection. Si l'on désigne par p' la parallaxe du Soleil, et si l'on néglige $\frac{z}{\mathrm{R}}$ qui est inférieur à $\frac{1}{24000}$, nous pourrons écrire

$$\frac{x'}{x_1} = \frac{y'}{y_1} = 1 - \frac{p'}{p} = \frac{p - p'}{p}.$$

Donc les valeurs de x' et de y' sont les mêmes que celles de x_1 et de y_1, à la condition de désigner par p, non plus la parallaxe de la planète, mais bien la différence des parallaxes de la planète et du Soleil.

25. *Trouver à un instant donné, et pour un lieu donné, la distance angulaire des centres de la planète et du Soleil.*

La distance S des centres est donnée par la formule

$$\mathrm{S}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Cette valeur de S exprimée en secondes fait connaître l'angle sous lequel on verra les centres des deux astres du point m projection de M. Mais, puisque la distance Mm est négligeable devant celle de la planète à la Terre, la formule précédente donnera avec une exactitude suffisante l'angle cherché. Il serait du reste facile de faire la correction relative à ce changement de distances.

Application des formules précédentes au calcul du passage pour Calcutta.

26. Nous allons montrer, sur un exemple, comment on peut calculer les différentes circonstances du passage en un lieu donné. Nous ne choisirons ni Paris, ni aucun lieu du voisinage, car le passage de 1874 sera invisible dans nos contrées. Prenons donc un lieu de la Terre facilement accessible, d'où l'on pourra observer l'entrée et la sortie. Nous avons choisi Calcutta, qui remplit toutes les conditions désirables (nos 19 et 20).

Nous avons trouvé (mêmes numéros) des valeurs approchées pour l'heure de l'entrée et celle de la sortie; nous considérerons ces valeurs comme fournissant une première approximation, et nous nous en servirons pour continuer le calcul.

L'*entrée* a lieu vers $19^h 43^m$, temps de Calcutta. Cherchons, pour ce temps, les coordonnées de la planète et du Soleil, ainsi que la distance angulaire des deux astres.

La conjonction ayant lieu à $22^h 52^m 34^s,2$, heure de Calcutta, si t désigne le temps compté à partir de la conjonction,

$$t = -3^h 9^m 34^s,2 = -3^h 1595,$$

et les formules du nº 23 donnent

$$x = 657'',14,$$
$$y = 754'',58.$$

Pour trouver x' et y', on prendra (nº 22)

$$D = 22^\circ 48' 47'',65,$$
$$H = 297^\circ 38' 56''.$$

On prendra d'ailleurs

$$p = 32'',42 - 8'',71 = 23'',71$$

avec

$$\lambda = 23^\circ 24' 45'';$$

On arrivera, avec ces données et par les formules du nº 24, à

$$x' = 12'',60,$$
$$y' = 19'',27.$$

La distance des centres est donnée par la formule

$$S = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} = \frac{x-x'}{\cos\psi},$$

en posant

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \tang\psi.$$

Les valeurs de $x-x'$ et de $y-y'$ sont

$$x-x' = 644'',54, \quad y-y' = -773'',85.$$

On en déduit

$$180-\psi = 50^{\circ}\,12'\,32'',$$

$$S = 1007'',45;$$

mais

$$\delta+\delta' = 1006'',39.$$

Cette dernière valeur, comparée à celle de S, montre que le passage n'est pas encore commencé. La différence des valeurs de S et de $\delta+\delta'$ est $1'',04$.

Cherchons actuellement x, y, x', y' pour $19^{h}44^{m}$. En désignant les corrections à faire sur x et y par dx et par dy, nous aurons

$$dx = \delta\,dt,$$

$$dy = h\cos D'\,dt,$$

$$dt = \frac{1}{60},$$

et, par suite,

$$dx = 1'',04, \quad dy = 3'',98.$$

Les nouvelles coordonnées de la planète seront donc

$$x = 658'',18, \quad y = -750'',60.$$

Les nouvelles valeurs de x' et de y' se calculeront à l'aide des formules différentielles

$$dx' = -p\frac{\pi}{12}\sin H\cos\lambda\sin D\,dt = 0'',04,$$

$$dy' = p\frac{\pi}{12}\cos H\cos\lambda\,dt = -0'',05;$$

et dès lors

$$x' = 12'',64, \quad y' = 19'',32.$$

Formons

$$x - x' = 645'',64, \quad y - y' = -769'',82,$$

et

$$180^\circ - \psi = 50^\circ\, 1'.$$

Calculant S avec ces nouveaux éléments, nous trouvons

$$S = 1004'',63.$$

Cette valeur, rapprochée de $1006'',39$, donne pour différence $1'',76$. On voit d'ailleurs qu'à $19^h\,44^m$ le passage est déjà commencé.

27. Rien de plus facile actuellement que de calculer, à une seconde près, l'heure du commencement. Formons à cet effet la différence des valeurs de S : elle est $2'',82$. C'est la quantité dont varie la distance des centres en une minute. Mais à $19^h\,43^m$, la distance des centres est $1007'',45$; elle doit donc diminuer encore de $1'',04$ pour que le premier contact extérieur commence, et, divisant $1,04$ par $2,82$, nous aurons la fraction de minute à ajouter à $19^h\,43^m$. Faisant la division et convertissant en secondes, nous trouvons 23 secondes.

Ainsi le passage commence à Calcutta, le 8 décembre, à

$$19^h\,43^m\,23^s,$$

ou en temps civil, le 9 décembre, à

$$7^h\,43^m\,23^s \text{ matin.}$$

28. On déterminera le point du disque solaire le premier impressionné par la planète en donnant la distance angulaire de ce point à l'extrémité supérieure du diamètre vertical; cet angle est celui que fait la droite menée par les centres du Soleil et de la planète (en projection) avec la projection de la verticale qui passe par le lieu considéré. L'entrée ayant lieu le matin, le point m (*fig.* 11), projection du lieu, est à l'Ouest du méridien de la conjonction, et les choses sont disposées comme dans ladite figure.

En désignant l'angle ZMP, qui est l'angle cherché, par V, on aura

$$V = 180 - \psi + \varphi.$$

L'angle $\psi = m\mathrm{LX}$; il est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{y - y'}{x - x'}.$$

L'angle $\varphi = m\mathrm{OX}$; il est donné par

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y'}{x'}.$$

Les valeurs de x, y, x', y' sont, bien entendu, relatives à l'entrée. On trouvera dès lors

$$180 - \varphi = 50^\circ 8',$$

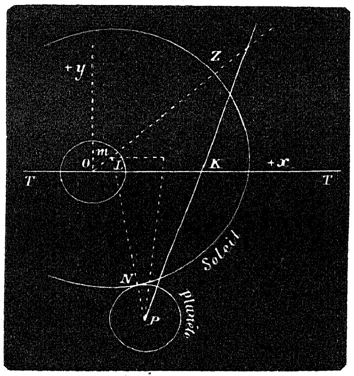
$$\varphi = 56^\circ 45',$$

d'où

$$\mathrm{V} = 106^\circ 53'.$$

Ainsi la *première impression du disque* a lieu à $106^\circ 53'$ à l'Orient de l'extrémité supérieure du diamètre vertical du disque solaire. L'an-

Fig. 11.



gle $\mathrm{Z}m\mathrm{P}$ se nomme *l'angle au zénith*; on appelle *angle au pôle* l'angle que fait $m\mathrm{P}$ avec la ligne de terre, projection du méridien de la conjonction, c'est l'angle φ; l'angle au pôle est donc $56^\circ 45'$.

29. L'heure de la sortie estimée en temps de Calcutta a été trouvée (n° **20**) de $0^h 25^m$. Calculons donc, pour le 9 décembre à $0^h 25^m$, les coordonnées du Soleil et de la planète, ainsi que la distance des centres. La conjonction a lieu à

$$22^h 52^m 34^s,2,$$

et par conséquent

$$t = 24^h\,25^m - 22^h\,52^m\,34^s,2 = 1^h,5405,$$

et l'on trouve

$$x = 951'',03, \quad y = 367'',92.$$

On a aussi

$$\text{Heure vraie} = 0^h\,32^m\,23^s,3,$$
$$H = 8^\circ\,5'\,49'',$$
$$D = 22^\circ\,49'\,39'',$$

et, avec ces données,

$$x' = 17'',04, \quad y' = -3'',06,$$

d'où

$$x - x' = 933'',99, \quad y - y' = 370'',98,$$
$$\psi = 21^\circ\,39'\,40'',$$
$$S = 1004'',96.$$

Cette valeur de S, comparée avec 1006,96, montre que le passage n'est pas encore terminé; la différence est $1'',43$.

Les résultats pour $0^h,26^m$ sont

$$x = 952'',07, \qquad y = 371'',88,$$
$$x' = 17'',03, \qquad y' = -3'',17,$$
$$x - x' = 935'',04, \quad y - y' = 375'',05,$$
$$\psi = 21^\circ\,51'\,20'',$$
$$S = 107'',45.$$

La différence des deux valeurs de S est $2'',49$, et, en divisant,

$$1006,39 - 1004,96 = 1,43.$$

Par cette différence, on trouve, en convertissant en secondes, 35 secondes. Ainsi le passage finit pour Calcutta, le 9 décembre, à

midi $25^m\,35^s$.

On trouvera, en opérant comme plus haut, que la dernière impression a lieu à $32^\circ\,25'$ à l'Occident de l'extrémité supérieure du diamètre du disque solaire, et la *durée totale du passage* pour Calcutta est

$4^h\,42^m\,12^s$.

Les résultats obtenus (n^{os} 27 et 29) pour l'heure de l'entrée et celle de la sortie fournissent un contrôle de l'exactitude de la méthode indiquée aux n^{os} 19 et 20.

Il est très-important aussi, comme nous le verrons dans un instant, de considérer les contacts intérieurs; néanmoins nous ne rapporterons pas ici les calculs à exécuter, on les conduirait absolument de la même façon que ceux qui ont été exposés plus haut; contentons-nous de dire qu'il faudra changer $\delta + \delta'$ en $\delta - \delta'$.

On trouve *pour Calcutta :*

Heure du premier contact intérieur... $20^h\,10^m\,50^s$,
Heure du dernier contact intérieur. . $23^h\,58^m\,27^s$.

30. Les quantités $\delta + \delta'$ et $\delta - \delta'$, qui expriment la somme ou la différence des diamètres apparents, sont relatives au centre de la Terre; mais, à cause de la grande distance de Vénus à la Terre, qui, dans les conjonctions inférieures, vaut environ 7000 rayons terrestres, la position de l'observateur à la surface de notre globe ne saurait avoir une influence appréciable sur ces quantités.

Il n'y a donc pas, comme dans les éclipses de Soleil, à faire de correction à cet égard; il n'y aura pas non plus à tenir compte ici de la variation de la parallaxe pendant la durée du phénomène.

Détermination de la parallaxe du Soleil par l'observation du passage de Vénus.

31. Nous allons montrer l'usage que l'on peut faire des formules fournies par la méthode des projections pour la détermination de la parallaxe du Soleil, et discuter l'approximation sur laquelle on peut compter dans les calculs.

La méthode que nous proposons repose sur l'observation complète d'un passage, c'est-à-dire l'observation des quatre contacts; et, pour bien mettre en évidence toutes les conséquences que nous voulons en tirer, nous avons choisi pour l'appliquer trois stations, savoir : Irkutsk (Sibérie), Hobart-Town (île de Van-Diemen) et Saïgon (Cochinchine). On comprendra plus tard la raison qui a dicté le choix de ces stations.

32.

Irkutsk.

Longitude......... $6^h\,47^m\,44^s$ E,
Latitude corrigée... $52^\circ\,6'\,18''$ B.

Pour cette latitude, $p = 23'',66$, en admettant les nombres donnés par les Éphémérides.

Premier contact extérieur. — Partant des données ci-dessus et des formules citées plus haut, nous avons trouvé, pour l'heure du premier contact extérieur calculé à *un dixième de seconde,*

$$20^h\,42^m\,5^s,4 \text{ (heure d'Irkutsk).}$$

Imaginons actuellement que cette heure ait été directement observée au lieu d'avoir été calculée, et désignons par $24 - \nu$ l'heure de la conjonction à Irkutsk, *laquelle nous est imparfaitement connue,* si la longitude de la station n'est pas exactement déterminée et si les Tables de Vénus comportent une petite erreur sur l'heure de la conjonction en ascension droite. Supposons aussi que l'horloge d'Irkutsk ne donne pas l'heure absolue; soit ε l'erreur constante affectant l'horloge, l'heure du contact sera

$$20^h\,42^m\,5^s,4 + \varepsilon,$$

et nous aurons, d'après cela, pour le temps écoulé à partir de la conjonction,

$$t = 20^h\,42^m\,5^s,4 + \varepsilon - 24 + \nu = -\,3^h\,2985 + u,$$

en représentant $\varepsilon + \nu$ par une seule constante u, ce que nous ferons, du reste, dans la suite de nos calculs, sans nouvelles explications.

Il vient, en réduisant en nombres les formules du n° **23** et en ne tenant compte que des termes du premier degré par rapport à t,

$$x = 648,445 + 62,530\,u,$$

$$y = -\,787,758 + 238,823\,u.$$

Nous corrigeons la déclinaison du Soleil et l'équation du temps d'après la longitude d'Irkutsk donnée par la *Connaissance des Temps,* ce qui fournit une approximation plus que suffisante si l'erreur de l'horloge n'est pas considérable, et nous trouvons ainsi, à l'instant du premier contact,

$$\text{D}^{\text{on}} \odot = 22^\circ 48' 50'',4;$$
$$\text{H} = 312^\circ 25' 12''.$$

Ces quantités que nous avons ici déterminées par le calcul, en supposant exactement connus les éléments de la question, seront, dans la pratique, obtenus comme il suit. La latitude d'Irkutsk étant exactement connue, si l'on observe la hauteur du Soleil, à midi, on trouvera sans peine la déclinaison correspondante, et l'on pourra, connaissant le temps écoulé depuis le passage du Soleil au méridien jusqu'au premier contact, faire la correction de la déclinaison et connaître cette déclinaison à l'instant du contact; si d'ailleurs on observe au même instant la hauteur du Soleil, on aura, pour trouver l'angle horaire, à calculer un angle d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés.

Il est entendu que l'on corrigera les hauteurs observées de la réfraction et de la parallaxe, laquelle est connue d'une manière suffisante pour que l'on puisse effectuer la correction.

De la déclinaison du Soleil, de l'angle horaire et de la latitude, on déduira x' et y', qui, en admettant les valeurs données plus haut, seront

$$x' = 0,888\,081\,p,$$
$$y' = 0,453\,427\,p,$$

formules dans lesquelles p représente la différence des parallaxes de Vénus et du Soleil pour la latitude d'Irkutsk.

Égalant maintenant la distance des centres du Soleil et de la planète à la somme des diamètres apparents, nous arrivons à l'équation

$$1\,041\,043,6 + 60\,946,4\,u^2 + 0,994\,284\,p^2 - 295\,157,0\,u \\ - 437,360\,p - 327,641\,pu = (\delta + \delta')^2.$$

Dernier contact extérieur. — Heure calculée :

$$25^{\text{h}}\,30^{\text{m}}\,51^{\text{s}},2.$$

Admettant ce nombre comme résultat d'observation, nous formerons, comme il a été dit plus haut,

$$t = 1,51422 + u,$$
$$x = 949,384 + 62,530\,u,$$
$$y = 361,631 + 238,823\,u,$$
$$\mathrm{D}^{\mathrm{on}}\ \odot = 22^\circ\,49'\,46'',$$
$$\mathrm{H} = 24^\circ\,35'\,18'',$$
$$x' = 0,943\,635\,p,$$
$$y' = -\,0,255\,579\,p;$$

d'où résulte l'équation

$$\begin{aligned}1\,032\,107,0 + 60\,946,4\,u^2 + 0,955\,768\,p^2\\ + 291\,461,6\,u - 1606,89\,p + 4,065\,00\,pu = (\delta + \delta')^2.\end{aligned}$$

Les valeurs de p, δ et δ' ne varient pas d'une manière appréciable pendant la durée du passage, et l'on pourra, par la combinaison des équations précédemment obtenues, éliminer les diamètres apparents, ce qui conduit à l'équation

$$(1)\quad 8936,60 + 0,038\,516\,p^2 - 586\,636,6\,u + 1169,54\,p - 331,706\,pu = 0.$$

Premier contact intérieur. — Le calcul a donné

$$21^{\mathrm{h}}\,9^{\mathrm{m}}\,0^{\mathrm{s}}.$$

Admettant ce nombre, on a

$$t = -\,2,85 + u,$$
$$x = 676,849 + 62,530\,u,$$
$$y = -\,680,646 + 238,823\,u,$$
$$\mathrm{D}^{\mathrm{on}}\ \odot = 22^\circ\,48'\,51'',$$
$$\mathrm{H} = 319^\circ\,9'\,43'',$$
$$x' = 0,907\,536\,p,$$
$$y' = 0,401\,784\,p,$$

d'où

$$\begin{aligned}920\,916,35 + 60\,946,4\,u^2 + 0,984\,725\,p^2 - 240\,476,6\,u\\ - 680,930\,p - 305,406\,pu = (\delta - \delta')^2.\end{aligned}$$

Dernier contact intérieur. — Le calcul a donné

$$25^h\,4^m\,6^s,8.$$

Admettant ce nombre, on a

$$\begin{aligned} t &= 1,06856 + u, \\ x &= 921,517 + 62,530\,u, \\ y &= 255,196 + 238,823\,u, \\ \mathrm{D^{on}}\,\odot &= 22^\circ 49' 34'', \\ \mathrm{H} &= 17^\circ 52' 39'', \\ x' &= 0,954057\,p, \\ y' &= -0,188842\,p; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 914318,58 + 60946,4\,u^2 + 0,945886\,p^2 + 237138,3\,u \\ - 1661,97\,p - 29,1148\,pu = (\delta - \delta')^2. \end{aligned}$$

L'élimination de $\delta - \delta'$ conduit à l'équation

$$(2)\quad 6597,97 + 0,038839\,p^2 - 477614,9\,u - 981,042\,p - 276,291\,pu = 0.$$

Enfin l'élimination de u entre les équations (1) et (2) conduit à la suivante :

$$(3)\quad 397640,9 - 16645,2\,p - 6,67272\,p^2 - 0,0022411\,p^3 = 0.$$

Cette équation admet une seule racine positive; elle est comprise entre 23,65 et 23,66.

Or $p = 23,66$ est la valeur qui nous a servi de point de départ pour calculer à $0^s,1$ les instants des quatre contacts; l'équation que l'on formera, en considérant ces instants calculés comme fournis par l'observation, donnera donc, *à un centième de seconde près*, la valeur de p, ou la différence des parallaxes pour la station d'Irkutsk.

33.

Hobart-Town (île de Van-Diemen).

Longitude..........	$9^h\,40^m\,1^s$ E,
Latitude corrigée....	$42^\circ 46' 44''$ A.

Pour cette latitude, $p = 23,68$.

Premier contact extérieur. — Heure calculée :

$$23^h\,39^m\,8^s,7 \text{ (heure de Hobart-Town)}.$$

Nous admettons ce nombre comme résultat d'observation, et, puisque la conjonction a lieu à Hobart-Town après le commencement du 9 décembre, désignons par $24 + u$ ce qui avait été désigné, dans la station précédente, par $24 - u$, et nous aurons

$$\begin{aligned} t &= -0,347\,583 - u,\\ x &= 832,966 - 62,530\,u,\\ y &= -83,011 - 238,823\,u. \end{aligned}$$

On calculera, comme plus haut, la déclinaison du Soleil et l'équation du temps, ou mieux on fera dans la pratique l'opération expliquée au paragraphe **32**, et l'on trouvera

$$\begin{aligned} \text{D}^{\text{on}}\ \odot &= 22^\circ\,48'\,47'',\\ \text{H} &= 3^\circ\,19'\,1'',5; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x' &= -0,341\,938\,p,\\ y' &= 0,042\,466\,p, \end{aligned}$$

p désignant la différence des parallaxes pour la latitude de Hobart-Town, et l'on arrive à l'équation

$$700\,723,2 + 60\,946,4\,u^2 + 0,118\,725\,p^2 - 64\,520,95\,u + 576,698\,p - 22,4793\,pu = (\delta + \delta')^2.$$

Dernier contact extérieur. — Heure du contact :

$$28^h\,8^m\,48^s,4,$$

$$\begin{aligned} t &= 4,146\,78 - u,\\ x &= 1113,998 - 62,530\,u,\\ y &= 990,346 - 238,823\,u;\\ \text{D}^{\text{on}}\ \odot &= 22^\circ\,49'\,37'',\\ \text{H} &= 64^\circ\,4'\,42'',\\ x' &= -0,452\,542\,p,\\ y' &= -0,660\,131\,p; \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation

$$2221776,7 + 60\,946,4\,u^2 + 0,640\,567\,p^2 - 61\,235,14\,u + 2315,78\,p - 371,904\,pu = (\delta + \delta')^2.$$

L'élimination de $\delta + \delta'$ conduit à l'équation

$$(1) \quad 1\,521\,053,6 + 0,521\,842\,p^2 - 547\,830,4\,u + 1739,08\,p - 349,425\,pu = 0.$$

Premier contact intérieur. — Heure du contact :

$$24^h\,8^m\,30^s,3,$$

$$t = 0,14175 - u,$$
$$x = 863,564 - 62,530\,u,$$
$$y = 33,853 - 238,823\,u,$$
$$\mathrm{D^{on}} \odot = 22^\circ\,48'\,53'',$$
$$\mathrm{H} = 4^\circ\,1'\,18'',$$
$$x' = -0,293\,174\,p,$$
$$y' = 0,051\,465\,p;$$

d'où

$$746\,888,8 + 60\,946,4\,u^2 + 0,0885996\,p^2 - 124\,167,2\,u + 502,865\,p - 12,0823\,pu = (\delta - \delta')^2.$$

Dernier contact intérieur. — Heure du contact :

$$27^h\,39^m\,45^s,0,$$

$$t = 3,6625 - u,$$
$$x = 1083,716 - 62,530\,u,$$
$$y = 874,689 - 238,823\,u,$$
$$\mathrm{D^{on}} \odot = 22^\circ\,49'\,32'',$$
$$\mathrm{H} = 56^\circ\,49'\,0'',$$
$$x' = -0,1121182\,p,$$
$$y' = -0,614\,286\,p;$$

d'où l'équation

$$1939521,2 + 60946,4\,u^2 + 0,554742\,p^2 - 553321,2\,u$$
$$+ 1987,50\,p - 346,084\,pu = (\delta - \delta')^2.$$

L'élimination de $\delta - \delta'$ donne

$$(2) \quad 1192632,4 + 0,466142\,p^2 - 429154,1\,u + 1484,64\,p - 334,002\,pu = 0.$$

Enfin l'élimination de u entre les équations (1) et (2) conduit à l'équation

$$(3) \quad 593180,24 - 24306,3\,p - 30,6731\,p^2 - 0,011415\,p^3 = 0.$$

Cette équation (3) a une seule racine positive comprise entre 2,68 et 2,69; or, la valeur $p = 23,68$ nous ayant servi de point de départ dans nos calculs relatifs à Hobart-Town, l'équation (3) nous donne également la valeur de p avec l'approximation de $0'',01$.

34. Les stations d'Irkutsk et de Hobart-Town ont été recommandées comme avantageuses. Pour Irkutsk, en effet, la durée du passage excède de 11 minutes celle qui serait observée du centre de la Terre; pour Hobart-Town, elle lui est inférieure de 10 minutes; ce qui fait entre les durées une différence de 21 minutes. Il sera difficile, à ce que nous croyons, si l'on veut employer la méthode de Halley, d'en trouver de meilleures. Nous n'avons pas ici à nous préoccuper de ces différences, et disons seulement que l'observation complète du passage faite de l'une ou de l'autre de ces stations nous conduit à une équation du troisième degré en p, *donnant la différence des parallaxes à un centième de seconde, si, de ces stations, l'instant des quatre contacts a été observé avec l'approximation d'un dixième de seconde.*

35. Considérons actuellement la station de Saïgon, pour laquelle la durée du passage n'excède que d'une minute la durée observée du centre de la Terre.

Saïgon (Cochinchine).

Longitude..........	$6^h\,57^m\,26^s$ E,
Latitude corrigée....	$10°\,42''\,27''$ N.

Parallaxe pour cette latitude $p = 23'',73$.

Premier contact extérieur. — Le calcul a donné

$$20^h\,56^m\,18^s,6 \text{ (heure de Saïgon).}$$

Adoptant ce nombre, et désignant par $24+u$ l'heure de la conjonction, on trouve

$$t = -3,06150 - u,$$
$$x = 663,265 - 62,530\,u,$$
$$y = -731,156 - 238,823\,u,$$
$$D^{on}\odot = 22^\circ\,48'\,47'',$$
$$H = 315^\circ\,58'\,27'',$$
$$x' = 0,444\,842\,p,$$
$$y' = 0,682\,891\,p;$$

d'où résulte l'équation

$$974\,517,28 + 60\,946,4\,u^2 + 0,664\,225\,p^2 + 266\,290,0\,u + 408,516\,p + 381,812\,pu = (\delta+\delta')^2.$$

Dernier contact extérieur. — Heure du contact :

$$25^h\,36^m\,6^s,6,$$

$$t = 1,60183 - u,$$
$$x = 954,862 - 62,530\,u,$$
$$y = 382,553 - 238,823\,u,$$
$$D^{on}\odot = 22^\circ\,49'\,39'',$$
$$H = 25^\circ\,54'\,15'',$$
$$x' = 0,514\,146\,p,$$
$$y' = -0,429\,262\,p;$$

équation :

$$1\,058\,107,7 + 60\,946,4\,u^2 + 0,448\,612\,p^2 - 302\,139,95\,u - 653,443\,p - 140,736\,pu = (\delta+\delta')^2.$$

L'élimination de $\delta+\delta'$ donne

$$(1)\quad 83\,598,12 - 0,215\,613\,p^2 - 568\,425,7\,u - 1061,948\,p - 522,548\,pu = 0.$$

Premier contact intérieur. — Heure du contact :

$$21^h\,23^m\,44^s,4,$$
$$t = -2,604\,333 - u,$$
$$x = 691,851 - 62,530\,u,$$
$$y = -621,973 - 238,823\,u,$$
$$\mathrm{D}^{on}\odot = 22°48'52'',$$
$$\mathrm{H} = 322°49'48'',$$
$$x' = 0,474\,867\,p,$$
$$y' = 0,593\,732\,p;$$

équation :

$$865\,509,45 + 60\,946,4\,u^2 + 0,577\,898\,p^2 + 210\,560,5\,u + 81,3729\,p + 342,933\,pu = (\delta - \delta')^2.$$

Dernier contact intérieur. — Heure du contact :

$$25^h\,8^m\,54^s,4,$$
$$t = 1,148\,444 - u,$$
$$x = 926,512 - 62,530\,u,$$
$$y = 274,274 - 238,823\,u,$$
$$\mathrm{D}^{on}\odot = 22°49'34'',$$
$$\mathrm{H} = 19°6'16'',5,$$
$$x' = 0,531\,433\,p,$$
$$y' = -0,321\,595\,p;$$

équation :

$$933\,650,7 + 60\,946,4\,u^2 + 0,385\,844\,p^2 - 246\,875,5\,u - 808,348\,p - 87,147\,pu = (\delta - \delta')^2.$$

L'élimination de $\delta - \delta'$ donne

(2) $68\,141,26 - 0,192\,054\,p^2 - 457\,435,98\,u - 889,721\,p - 430,080\,pu = 0.$

Enfin l'élimination de u entre les équations (2) et (3) donne

(3) $492\,506,12 - 20\,313,15\,p - 18,7378\,p^2 - 0,007\,6265\,p^3 = 0.$

Cette équation (3) admet une racine positive unique comprise entre 23,72 et 23,73; or $p = 23,73$ est la valeur qui nous a servi de point de départ. *Donc l'équation fournie par les observations de Saïgon donne la même approximation que celles qui ont été déduites des observations d'Irkutsk et de Hobart-Town, bien qu'à Saïgon la durée du passage soit sensiblement la même que pour le centre de la Terre.*

L'équation que fournirait l'observation de Calcutta, où la durée du passage excède de 3 minutes celle qui serait observée du centre de la Terre, conduit à la même conclusion relativement à l'approximation de p.

36. La valeur de p connue, on passera à la valeur équatoriale correspondante p_1 au moyen de la formule

$$p_1 = p(1 + a\sin^2\lambda),$$

et on déduira facilement de p_1 la parallaxe équatoriale du Soleil.

Soit en effet π cette parallaxe, Π celle de la planète, R et r les rayons vecteurs de la Terre et de la planète donnés par les Éphémérides à l'époque du passage. Les centres de la Terre, de la planète et du Soleil étant en ligne droite lors du passage, nous aurons la proportion

$$\frac{\pi}{\Pi} = \frac{R - r}{R},$$

et, puisque

$$\Pi - \pi = p_1,$$

on aura

$$\frac{\pi}{p_1} = \frac{R - r}{r};$$

p_1 ayant été trouvé, comme on l'a expliqué plus haut, l'équation précédente fera connaître π ou la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil.

N'ayant pas à notre disposition les Éphémérides de la planète pour 1874, nous nous abstenons de faire des calculs qui, du reste, n'offrent aucune difficulté.

Conclusion.

Il résulte de nos calculs :

1° Que si, d'un lieu donné, on observe l'instant de chacun des quatre contacts avec l'approximation de $0^s,1$ (*), on pourra déduire de ces observations une équation du troisième degré faisant connaître la différence des parallaxes de Vénus et du Soleil, et, par suite, celle du Soleil avec l'approximation d'un centième de seconde; et, pour arriver à un pareil résultat, il suffira d'employer les Tables de logarithmes à sept décimales.

2° Que l'approximation d'un centième de seconde, pour la différence des parallaxes, sera obtenue *sans qu'il soit nécessaire de connaître exactement les diamètres apparents du Soleil et de la planète, sans qu'il soit nécessaire non plus de connaître exactement ni la longitude du lieu d'observation, ni l'heure locale, ni l'instant de la conjonction en ascension droite*. Les seules choses à connaître d'une manière précise sont : les mouvements de la planète en ascension droite et en déclinaison, la déclinaison de cette dernière lors de la conjonction, et l'instant de chacun des quatre contacts, lesquels pourront d'ailleurs être observés au moyen d'une horloge qui ne marquerait pas *exactement* l'heure locale.

3° Que *les valeurs déduites des observations de Saïgon et de Calcutta sont aussi approchées que celles qui seraient déduites d'observations faites à Irkutsk et à Hobart-Town où l'effet de parallaxe sur la durée du phénomène est considérable*. Les observations faites de stations plus rapprochées de l'un ou de l'autre pôle ne nous donneraient pas d'ailleurs une approximation plus grande. Sera-t-il nécessaire, d'après cela, en vue de l'exactitude, de pénétrer au cœur de la Sibérie ou d'aborder la terre Adélie dans l'hémisphère austral? Nous ne le pensons pas, à moins que la méthode de Halley ne donne, ce que nous ignorons d'ail-

---

(*) L'approximation de $0^s,1$ sera difficile à obtenir, peut-être, surtout pour le premier contact extérieur; mais n'y a-t-il pas lieu d'espérer que, grâce aux recherches des habiles observateurs qui s'occupent de la question, on arrive, même pour ce premier contact, à un degré de précision suffisant?

leurs, des résultats beaucoup plus approchés que celle dont nous nous sommes servi.

Le *Nautical Almanac* nous indique des localités pourvues d'observatoires publics qui seront des stations avantageuses : Calcutta, Madras, dans l'Indoustan; Sidney, Melbourne, en Australie. On peut ajouter à cette énumération Batavia, Singapore, Canton, Saïgon, etc., tous les lieux, en un mot, d'où l'on pourra observer dans de bonnes conditions l'entrée et la sortie. On déterminera facilement tous ces lieux en faisant usage d'un globe terrestre, conformément à la règle donnée n° 16.

Note. — Nous avons regardé, dans notre travail, les mouvements de la planète et du Soleil comme rigoureusement uniformes pendant la durée du passage. Cela est permis pour le Soleil; il s'agit de reconnaître s'il en est de même pour la planète.

A défaut des Éphémérides de 1874, nous avons consulté celles de 1866. On sait que, tous les huit ans, les conjonctions se reproduisent sensiblement dans les mêmes circonstances, et en effet la conjonction inférieure de 1866 a lieu le 11 décembre.

Ce sont les résultats fournis par la *Connaissance des Temps*, pour la présente date, qui vont nous servir dans la discussion qui suit.

Mouvement en déclinaison de ♀.

Date.			Déclinaison.	Δ	Δ^2
1866. Décembre		11	$22^\circ 27' 12'',1$	»	»
»	»	12	$22^\circ 8' 45'',4$	$-18' 26'',7$	»
»	»	13	$21^\circ 50' 18'',5$	$-18' 26'',9$	$0'',2$

Mouvement en ascension droite de Vénus.

Date.			Ascension droite.	Δ	Δ^2
1866. Décembre		11	$17^h 14^m 52^s,80$	»	»
»	»	12	$17^h 12^m 21^s,16$	$-2^m 31^s,64$	»
»	»	13	$17^h 9^m 50^s,98$	$-2^m 30^s,18$	$1^s,46$

Il résulte de l'inspection des deux tableaux ci-dessus que, si le mouvement en déclinaison peut être regardé comme rigoureusement uniforme pendant la durée du passage, il n'en est pas de même du mouvement en ascension droite, pour lequel il faut faire une correction.

Voici la manière d'opérer qui nous paraît la plus commode.

Nous regardons, dans une première approximation, le mouvement en acension droite comme rigoureusement uniforme, et s'il s'agit de Hobart-Town, par exemple, nous arriverons aux équations (1) et (2) [n° 33].

La résolution de ces équations donne

$$p = 23'',67, \quad u = 2,8098.$$

Ayant obtenu un premier système de valeurs approchées, il faut tenir compte des termes du second ordre affectant le mouvement en ascension droite.

Pour cela, on fera usage de la formule

$$h \cos D' + t\left(\eta \cos D' + \frac{\delta}{2} \sin h \sin D'\right),$$

qui fait connaître la vitesse moyenne entre l'époque de la conjonction et celle qui répond au temps t écoulé depuis cette époque (n° 23).

Les lettres entrant dans cette dernière formule ont des significations connues; quant à la valeur de η, d'après le second tableau, et puisque le mouvement du Soleil est uniforme, elle est, en se reportant à la formule d'interpolation de Newton,

$$\eta = \frac{1'',46 \times 15}{2 \times 24^2} = 0'',019,$$

et l'on trouve, en effectuant les calculs,

$$\eta \cos D' + \frac{\delta}{2} \sin h \sin D' = 0'',030;$$

et, pour l'expression de la vitesse moyenne,

$$h \cos D' + 0'',019\, t = 238'',823 + 0,030\, t.$$

Pour Hobart-Town, la valeur de t au premier contact extérieur est (n° 33)

$$t = -0,3476 - 2,8098 = -3,1574.$$

La vitesse moyenne sera, par conséquent,

$$238'',823 - 0,030 \times 3,1574 = 238'',728,$$

avec une erreur qui n'affecte pas le troisième ordre décimal.

D'après cela, en désignant par y l'ordonnée de la planète, lors du premier contact extérieur, on aura

$$y = -82,967 - 238,728\,u.$$

La valeur de x reste ce qu'elle est au n° 33.

On formera l'équation du second degré en p et u relative au premier contact extérieur; on formera de la même manière celle qui est relative au dernier contact extérieur, et l'élimination de $\partial + \partial'$ entre les deux équations conduit à une équation de la forme

$$(1) \qquad a + bp^2 + cpu + \partial u + fp + \varepsilon u^2 = 0,$$

dans laquelle les termes n'auront pas identiquement les mêmes coefficients que dans l'équation (1) [n° 33], et qui d'ailleurs contient un terme en u^2 affecté d'un coefficient relativement petit.

La considération des contacts intérieurs nous conduira à l'équation

$$(2) \qquad a' + b'p^2 + c'pu + \partial' u + f'p + \varepsilon' u^2 = 0,$$

qui donne lieu aux mêmes remarques que l'équation (1).

On remplacera, dans ces équations (1) et (2), u et p par $u + du$, $p + dp$, et cette substitution conduira à des équations de la forme

$$m + dp(bp + cu + f) + du(cp + 2\varepsilon u + \partial) = 0,$$

$$m' + dp(b'p + c'u + f') + du(c'p + 2\varepsilon' u + \partial') = 0.$$

On tirera de ces deux équations les valeurs de dp que l'on ajoutera à la valeur précédemment obtenue pour p, et l'on déterminera finalement la valeur de cette inconnue avec l'approximation d'un centième de seconde.

Si nous n'avons pas rapporté ici les résultats de nos calculs numériques, cela tient à ce que, n'ayant pas les Éphémérides de 1874 à notre disposition, nos calculs n'avaient pas le degré de précision convenable. Du reste, cette omission n'infirme en rien les conclusions posées dans notre travail.