ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ERNEST VESSIOT

Essai sur la propagation des ondes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 405-448

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__405_0>

ESSAI

SUR LA

PROPAGATION PAR ONDES;

Par M. E. VESSIOT.

Dans un précédent article (¹) nous avons étudié analytiquement la propagation par ondes dans un milieu dont la nature ne varie pas avec le temps, et montré les relations étroites de ce problème avec la théorie des transformations de contact, avec celle des équations aux dérivées partielles du premier ordre où ne figure pas explicitement la fonction inconnue, et avec la recherche des maxima et minima des intégrales simples.

Les pages qui suivent sont consacrées à la propagation par ondes dans un milieu dont la nature varie avec le temps. Le problème est traité à un point de vue purement cinématique. Le milieu est défini par le système des ondes élémentaires qui ont pour origines, à chaque instant, les divers points du milieu. La loi de la propagation est le principe des ondes enveloppes; mais nous supposons seulement qu'il ait lieu pour un intervalle de temps infinitésimal, et aux infiniment petits près d'ordre supérieur. Un des résultats obtenus est que le principe est alors rigoureusement vrai, dans tout intervalle de temps.

Nous raisonnons sur l'espace à n dimensions. Mais notre exposition ne suppose connus que la notion d'élément de contact, celle de multi-

---

(¹) *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIV, 1906).

plicité, et les principes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Deux faits essentiels se présentent : d'une part, la propagation se fait par éléments de contact, les éléments de contact de l'onde origine étant individuellement transportés pour constituer les ondes nouvelles qui en dérivent; et, d'autre part, la famille des ondes successivement issues d'une même onde origine est définie par une équation aux dérivées partielles, qui peut être l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, à n variables indépendantes, et à une fonction inconnue, la plus générale.

De là découle, intuitivement, une théorie nouvelle de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. La loi du déplacement des éléments de contact du milieu est donnée par le système différentiel que la théorie de Cauchy donne pour les caractéristiques.

Dans le déplacement d'un élément de contact, le point de cet élément décrit ce que nous appelons une *trajectoire de l'ébranlement*. Nous établissons que, dans ce cas du régime variable, comme dans le cas du régime permanent, les trajectoires correspondent à la durée minima dans la propagation. La question équivaut à l'étude générale des conditions nécessaires et suffisantes pour le minimum de l'intégrale d'une équation différentielle de la forme

$$dt = \Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n),$$

où Ω est homogène du premier degré en $dx_1, \ldots, dx_n$; cette intégrale est prise dans l'hypothèse où $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées courantes d'un point d'un arc de courbe, et a une valeur initiale donnée t_0 à l'origine de cet arc; et c'est la valeur qu'elle prend à l'extrémité de l'arc qu'il s'agit de rendre minima, en choisissant convenablement l'arc de courbe, dont les extrémités sont supposées données (1).

La considération de la variation simple conduit à des conditions nécessaires, qui définissent la courbe cherchée comme une trajectoire de la propagation. Nous montrons que ces conditions sont suffisantes,

(1) *Voir*, au sujet de problèmes de ce genre, A. Mayer, *Leipziger Berichte*, 1895, et D. Egorow, *Mathematische Annalen*, 1906.

toutes les fois que les ondes élémentaires ont, en chacun de ceux de leurs points qui interviennent, une forme concave vers leur origine.

Le fait résulte de ce que la question de minimum précédente se ramène à l'étude d'une question de maximum qui se présente dans la propagation d'un ébranlement le long d'une courbe donnée; et pour cette dernière question, la solution est presque intuitive.

Dans cette question de maximum, il s'agit de l'intégrale d'une équation de la forme

$$dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i,$$

prise le long d'une courbe fixe donnée; et il faut déterminer les fonctions $p_1, \ldots, p_n$ de manière qu'elles satisfassent à une relation donnée

$$H(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

et rendent maxima la valeur prise par l'intégrale à l'extrémité de l'arc de courbe.

La méthode qui se présente ainsi d'elle-même est équivalente aux méthodes de Weierstrass et d'Hilbert. Nous nous sommes bornés à l'esquisser rapidement. Elle s'applique, à plus forte raison, à la théorie des maxima et minima des intégrales simples, et peut s'étendre au cas des intégrales multiples. Nous y reviendrons dans un autre travail.

Signalons enfin que nous avons supposé que les ondes élémentaires ont ∞^{n-1} points et ∞^{n-1} plans tangents. Nous nous proposons de revenir, dans une autre occasion, sur les autres cas, qui offrent un intérêt particulier, tant au point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles que Lie a nommées *semi-linéaires* ou *pseudo-linéaires* qu'au point de vue du calcul des variations (¹).

(¹) Les pages qui suivent étaient rédigées quand j'ai eu connaissance du Mémoire de M. Carathéodory, *Sur les maxima et minima des intégrales simples* (*Math. Annalen*, t. LXII, 1906, p. 449-503), où l'auteur utilise, sous le nom d'*indicatrices*, les ondes dérivées, dans le cas $n = 2$, mais sans rattacher la question à celle de la propagation par ondes. Le problème traité par M. Carathéodory correspond du reste au cas du régime permanent, tandis que nous traitons ici du cas du régime variable.

I. — Équations différentielles de la propagation par ondes.

1. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace E_n à n dimensions, supposé rapporté à un système de coordonnées rectangulaires quelconque : nous appellerons ce point le point $(x_1, \ldots, x_n)$, ou, par abréviation, le point (x).

Nous considérerons l'espace E_n comme un *milieu* où peuvent se produire, et se propager par *ondes*, des *ébranlements* d'une nature déterminée.

Nous entendons par là que les points de E_n sont susceptibles d'acquérir, d'une manière instantanée, une propriété de nature déterminée (sonorité, luminosité, électrisation, etc.); et que, du fait que cette propriété se sera manifestée, à un instant quelconque t, en tous les points d'une multiplicité $\mathfrak{M}$, elle cessera, aux instants suivants, d'appartenir aux points de $\mathfrak{M}$, et se manifestera, à chacun de ces instants $t + \Delta t$, aux divers points d'une autre multiplicité $\mathfrak{M}'$, qui est déterminée par la nature du milieu, relativement à la propriété considérée, par l'instant t, par l'intervalle de temps Δt écoulé depuis cet instant, et par la multiplicité $\mathfrak{M}$.

C'est l'apparition de la propriété considérée en un point (x) que nous appelons un *ébranlement*, produit en ce point. Nous appelons *onde* toute multiplicité, lieu géométrique de points ébranlés à un même instant.

Le problème de la *propagation par ondes* est le suivant : *Dans un milieu de nature déterminée, déduire d'une onde $\mathfrak{M}$, donnée au temps t, l'onde nouvelle qui en provient, au bout du temps Δt.*

2. Il faut d'abord définir la nature du milieu, relativement à la propriété considérée.

Imaginons, à cet effet, le cas le plus simple, celui où un point isolé (x) est seul ébranlé à l'instant t. En se propageant, cet ébranlement donne naissance, à chaque instant $t + \Delta t$, à une onde $M(x \mid t, \Delta t)$; nous dirons que cette onde est *issue* de (x), ou encore qu'elle a (x) pour *origine*.

Prenons l'homothétique de cette onde, par rapport à (x), dans le rapport $\frac{1}{\Delta t}$; et admettons que cette homothétique tend vers une forme limite, lorsque Δt tend vers zéro. Nous appellerons cette forme limite l'*onde dérivée, qui a* (x) *pour origine, à l'instant* t.

Si, inversement, nous prenons l'homothétique de l'onde dérivée, par rapport à son origine (x), dans le rapport infiniment petit dt, la multiplicité obtenue s'appellera l'*onde élémentaire, ayant* (x) *pour origine, et correspondant à l'instant* t.

La nature du milieu, relativement à la propriété considérée, sera définie par le système des ondes dérivées (ou des ondes élémentaires) qui ont pour origines les divers points du milieu, à chaque instant t.

Ce système des ondes dérivées varie, en général, avec t. Dans le cas contraire, nous dirons qu'on est en *régime permanent;* nous verrons que le mode de propagation d'une onde quelconque est alors indépendant de l'instant auquel cet onde apparaît, et ne dépend que de sa forme. Le cas général s'appellera le cas du *régime variable*.

Nous supposerons, dans ce Mémoire, que les ondes dérivées ont ∞^{n-1} points, et aussi ∞^{n-1} plans tangents. Nous reviendrons sur les autres cas dans un autre travail; il y aura lieu de remarquer que les ondes dérivées n'ont pas nécessairement le même nombre de dimensions que les ondes finies issues des divers points de l'espace.

Dans le cas de l'espace ordinaire ($n = 3$), les ondes dérivées sont, dans le cas général, des surfaces non développables : on les appelle les *surfaces d'onde*. Dans les cas exceptionnels, elles peuvent être des surfaces développables, des courbes, des points.

3. Pour définir maintenant la loi suivant laquelle les ondes se propagent, *nous admettrons que, pour une variation du temps infiniment petite, la propagation satisfait au principe des ondes enveloppes, à des infiniment petits près d'ordre supérieur.*

La suite prouvera que ce principe n'implique pas contradiction. Expliquons d'abord comment nous l'entendons :

Soit $\mathfrak{M}$ une onde quelconque, à l'instant t; et soit $\mathfrak{M}'$ l'onde qui en provient au bout du temps infiniment petit dt. Chacun des points (x) de $\mathfrak{M}$, s'il était seul ébranlé à l'instant t, aurait émis, au bout du temps dt, une onde $\mathrm{M}(x \mid t, dt)$; soit $\mathfrak{M}''$ l'enveloppe de toutes ces ondes $\mathrm{M}(x \mid t, dt)$ issues des divers points (x) de $\mathfrak{M}$. *Nous admettons* *que $\mathfrak{M}''$ représente $\mathfrak{M}'$ aux infiniment petits près d'ordre supérieur*, l'infiniment petit principal étant dt; et nous entendons par là qu'*il existe une correspondance, point par point, entre $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$, telle que les différences des coordonnées de même nom de deux points homologues quelconques sont d'ordre supérieur à* 1, par rapport à dt.

Cette définition donne lieu aux remarques suivantes, pour lesquelles nous nous bornerons, pour simplifier, à considérer des multiplicités à $(n-1)$ dimensions.

1° Soient Σ et Σ' deux multiplicités, dont chacune représente l'autre, à des infiniment petits près d'ordre supérieur; et soit θ l'infiniment petit principal. La correspondance entre un point quelconque (X) de Σ et le point homologue (X′) de Σ' sera mise en évidence dans les équations des deux multiplicités

$$(\Sigma) \qquad X_i = f_i(u_1, \ldots, u_{n-1} \mid \theta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$(\Sigma') \qquad X'_i = g_i(u_1, \ldots, u_{n-1} \mid \theta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

deux points homologues correspondant aux mêmes valeurs des paramètres $u_1, \ldots, u_n$.

Et l'identité des deux surfaces, aux infiniment petits près d'ordre supérieur, revient à supposer que les fonctions f_i et g_i, et leurs dérivées $\frac{df_i}{d\theta}$, $\frac{dg_i}{d\theta}$ sont, pour $\theta = 0$, des fonctions identiques des paramètres $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

De là résulte l'identité, deux à deux, des déterminants fonctionnels formés avec les dérivées des f_i et des g_i, prises par rapport à u_k, pour $\theta = 0$; et aussi des dérivées de ces déterminants fonctionnels, prises par rapport à θ (pour $\theta = 0$). De sorte que *les différences des coordonnées de même nom des plans tangents à Σ et Σ', en deux points homologues, sont aussi des infiniment petits d'ordre supérieur.*

2° Supposons maintenant que Σ fasse partie d'une famille de ∞_{n-1} multiplicités, à chacune desquelles corresponde une multiplicité Σ', la représentant aux infiniment petits près d'ordre supérieur. *Une correspondance de même nature aura lieu entre l'enveloppe des multiplicités Σ et celle des multiplicités Σ'.*

En effet, les équations de Σ sont maintenant de la forme

$$(1) \qquad X_i = f_i(u_1, \ldots, u_{n-1} \mid a_1, \ldots, a_{n-1} \mid \theta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et l'enveloppe sera donnée par les équations

$$(2) \qquad \text{Dét.} \left| \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_i}{\partial u_{n-1}} \quad \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \right|_{(i=1,2,\ldots,n)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1);$$

c'est-à-dire qu'un point quelconque de l'enveloppe est fourni par les équations (1), où $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont les fonctions de $a_1, \ldots, a_{n-1}$ définies par les équations (2).

Pour passer de là à l'enveloppe des Σ', il faudra remplacer les f_i par des fonctions g_i des mêmes variables; et, pour $\theta = 0$, les g_i et les $\frac{dg_i}{d\theta}$ sont respectivement identiques aux f_i et aux $\frac{df_i}{d\theta}$. Mais alors les fonctions u_k de $a_1, \ldots, a_{n-1}$ obtenues dans les deux cas seront, pour $\theta = 0$, les mêmes, ainsi que leurs dérivées prises par rapport à θ. D'où résulte le théorème annoncé.

3° *Si Σ' représente Σ aux infiniment petits près d'ordre supérieur, et si Σ'' représente de même Σ', la même correspondance existe entre Σ'' et Σ.*

La démonstration serait immédiate.

4° *L'onde $M(x \mid t, dt)$, émise par un point (x) quelconque, est représentée par l'onde élémentaire qui a ce même point pour origine, aux infiniment petits près d'ordre supérieur.*

Soient, en effet, P un point quelconque de $M(x \mid t, dt)$, et ρ sa distance à l'origine (x) de cette onde. Le point homologue de l'onde élémentaire a pour rayon vecteur

$$\left(\lim_{dt=0} \frac{\rho}{dt}\right) dt.$$

La distance des deux points homologues est donc la différence entre l'infiniment petit ρ et sa partie principale; et la remarque énoncée en résulte.

En combinant ces diverses remarques, nous pouvons énoncer le principe des ondes enveloppes sous la forme suivante :

Aux infiniment petits près d'ordre supérieur, l'onde issue d'une onde origine quelconque, à partir d'un instant t quelconque, au bout du temps infiniment petit dt, est l'enveloppe des ondes élémentaires qui seraient émises, dans les mêmes conditions, par les divers points de l'onde origine.

4. Pour traduire analytiquement ce principe, il faut se donner d'abord les ondes dérivées par leur équation générale. Nous imaginons pour cela, en chaque point (x), un système d'axes ayant ce point pour origine, et se déduisant par translation du système d'axes fondamental auquel est rapporté le milieu considéré. L'équation générale des plans étant supposée écrite sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i - 1 = 0, \tag{1}$$

nous nous donnerons l'équation tangentielle

$$H(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid u_1, \ldots, u_n) = 0 \tag{2}$$

de l'onde dérivée qui a (x) pour origine, rapportée précisément au système de coordonnées qui a (x) pour origine. Dans cette équation, $u_1, \ldots, u_n$ sont donc les coordonnées tangentielles courantes, tandis que $t, x_1, \ldots, x_n$ jouent le rôle de paramètres; et, dans l'équation (1), $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont les coordonnées ponctuelles courantes dans le même système auxiliaire de coordonnées.

Pour avoir, dans les mêmes conditions, l'équation générale des ondes élémentaires, nous remarquons que, si le plan (1) est tangent à l'onde dérivée, le plan tangent à l'onde élémentaire qui lui correspond est

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i - dt = 0.$$

Les coordonnées s'obtiennent donc en divisant par dt celles du plan tangent à l'onde dérivée, et par suite satisfont à l'équation

$$H(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid u_1\,dt, \ldots, u_n\,dt) = 0. \tag{3}$$

Nous abrégerons les calculs ultérieurs en donnant à l'équation (2) une forme particulière : rendons-la homogène, résolvons-la par rapport à la variable d'homogénéité, et donnons à cette variable la valeur 1. Nous obtiendrons une équation de la forme

$$\Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid u_1, \ldots, u_n) = 1, \tag{4}$$

où Π sera homogène, de degré 1, par rapport à $u_1, \ldots, u_n$.

On peut encore dire que Π est défini par l'identité

$$H\left(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid \frac{u_1}{\Pi}, \ldots, \frac{u_n}{\Pi}\right) \equiv 0. \tag{5}$$

L'équation du point de contact d'un plan tangent $(u_1, \ldots, u_n)$ à cette surface est alors

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 1;$$

et, par suite, les coordonnées de ce point de contact sont

$$\xi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Comme les seconds membres de ces formules (6) sont de degré zéro en $u_1, \ldots, u_n$, elles donnent en réalité les coordonnées du point de contact d'un plan tangent à la surface (4), parallèle à un plan donné.

La résolution qu'on a dû faire pour passer de la forme générale (2) à la forme canonique (4) revient donc à séparer l'onde dérivée en nappes telles que chacune de ces nappes ait un plan tangent et un seul parallèle à un plan arbitrairement donné.

Enfin, si l'onde dérivée est donnée sous la forme (4), l'onde élémentaire aura pour équation tangentielle

$$\Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid u_1, \ldots, u_n)\, dt = 1; \tag{7}$$

et, de même que l'onde dérivée est représentée paramétriquement, au point de vue ponctuel, par les formules (6), où les rapports des u_i interviennent seuls, de même l'onde élémentaire sera définie par les formules

$$\xi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Nous allons avoir besoin aussi de l'équation générale des ondes élémentaires rapportées au système de coordonnées primitif. Le plan, qui a (1) pour équation dans le système d'origine (x), a pour équation dans le système fondamental

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(X_i - x_i) - 1 = 0.$$

Et si l'on ramène cette équation à la forme

$$\sum_{i=1}^{n} q_i X_i - 1 = 0, \tag{9}$$

on a, pour transformer les coordonnées tangentielles, les formules

$$\frac{u_i}{q_i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k x_k + 1}{1} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} q_k x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'équation (7) devient donc

$$\Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n)\, dt + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = 1. \tag{10}$$

Les équations (8) sont remplacées, d'autre part, par les équations

$$X_i = x_i + \frac{\partial \Pi(t \mid x \mid q)}{\partial q_i}\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

5. Cela posé, reprenons les considérations du n° 3. Soit $\mathfrak{M}$ une onde quelconque, à l'instant t; et soit (x) l'un quelconque de ses points. Ce point est l'origine de l'onde élémentaire [(10), n° 4],

$$\Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid q_1, \ldots, q_n)\, dt + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = 1, \tag{1}$$

et nous avons à chercher l'enveloppe de toutes les ondes élémentaires représentées par cette équation (1), quand (x) décrit $\mathfrak{M}$. Chacune d'elles a en commun avec l'enveloppe un certain nombre d'éléments de contact (point, plan tangent), que nous allons déterminer. Nous écrivons pour cela qu'ils sont communs à (1) et aux ondes infiniment voisines qui en résultent par variation infiniment petite de (x) sur $\mathfrak{M}$.

Désignons à cet effet par δ toute différentiation relative à une telle variation : les variations $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ seront uniquement assujetties à la condition

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, \delta x_i = 0, \tag{2}$$

où $p_1, \ldots, p_n$ sont des coefficients de direction pour le plan tangent à $\mathfrak{M}$, en (x). Nous devons donc exprimer que l'équation obtenue en appliquant à (1) la différentiation δ est une conséquence de (2), ce qui donne les équations

$$\frac{\partial \Pi(t \mid x \mid q)}{\partial x_i}\, dt + q_i = m p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

où m est un facteur qu'on déterminerait en tenant compte de (1).

Mais on peut laisser m indéterminé, car les équations (3) définissent ainsi la direction des plans des éléments de contact cherchés, par les rapports des q_i; et les équations (11) (n° 4), où ne figurent que les rapports des q_i, donnent alors le point auquel appartient chacun des éléments de contact correspondants.

La forme des équations (3) montre qu'il y a une direction $(q_1, \ldots, q_n)$, satisfaisant à la question, qui tend vers la direction $(p_1, \ldots, p_n)$ lorsque dt tend vers zéro; et qu'il n'y en a qu'une. Donc, parmi les éléments de contact communs à l'onde élémentaire (1) et à toutes les ondes infiniment voisines, il y en a un et un seul qui tend, lorsque dt tend vers zéro, vers l'élément de contact $(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n)$ de l'onde M. Désignons par $(x'_1, \ldots, x'_n \mid p'_1, \ldots, p'_n)$ les coordonnées de cet élément de contact. Désignons encore par t' l'instant $t + dt$. Nous aurons les équations

$$x'_i = \frac{\partial \Pi(t \mid x \mid p')}{\partial p'_i}(t' - t) + x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

et

$$(5)\qquad \frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p')}{\partial x_i}(t'-t)+p'_i=mp_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

De plus, pour déterminer sans ambiguïté les p_i, dont les rapports seuls étaient donnés jusqu'ici, nous les assujettirons à vérifier la condition

$$(6)\qquad \Pi(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,p_1, \ldots, p_n)=1.$$

Et cela les définit bien sans ambiguïté, Π étant homogène, de degré 1.

De même, les p'_i seront assujettis à vérifier la relation analogue

$$(7)\qquad \Pi(t'\,|\,x'_1, \ldots, x'_n\,|\,p'_1, \ldots, p'_n)=1.$$

Alors, lorsque dt tend vers zéro, chacune des différences (x'_i-x_i) et (p'_i-p_i) tend vers zéro, et leurs parties principales, que nous désignerons par dx_i et dp_i s'obtiennent en différentiant les équations (4), (5) et (7), par rapport à t', pour $t'=t$; ce qui donne $(dt'=dt)$

$$(8)\qquad dx_i=\frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial p_i}dt \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$(9)\qquad \frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial x_i}dt+dp_i=p_i\,d\mu \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$(10)\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}dx_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}dp_i=0.$$

En éliminant les dx_i et les dp_i, la dernière fournit $d\mu$. Cela donne

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}d\mu=0,$$

d'où, à cause de l'homogénéité de Π,

$$(11)\qquad d\mu=-\frac{\partial \Pi}{\partial t}dt.$$

Nous arrivons donc au résultat suivant :

A chaque élément de contact $(x\,|\,p)$ d'une onde $\mathfrak{M}$, considérée à l'in-

stant t, correspond, sur l'onde infiniment voisine qui en résulte au bout du temps dt, un nouvel élément de contact, qui est donné, aux infiniment petits près du second ordre, par les formules

$$(12)\qquad dx_i = \frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial p_i}\,dt \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$(13)\qquad dp_i = -\left[\frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial t}\right] dt \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

en supposant que les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$ sont liées par la relation

$$(14)\qquad \Pi(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,p_1, \ldots, p_n) = 1.$$

6. Si nous supposons, plus généralement, que le système des ondes dérivées soit donné par l'équation (2) (n° 4), la condition (14) sera remplacée par

$$(1)\qquad \mathrm{H}(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

Puis, de l'identité (5) du n° 4, qui peut s'écrire

$$\mathrm{H}\left(t\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,\frac{p_1}{\Pi}, \ldots, \frac{p_n}{\Pi}\right) \equiv 0,$$

on déduit, en posant, pour abréger l'écriture,

$$\varpi_i = \frac{p_i}{\Pi} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

les identités

$$\frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,\varpi)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,\varpi)}{\partial \varpi_i}\,\frac{\varpi_i}{\Pi}\,\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,\varpi)}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,\varpi)}{\partial \varpi_i}\,\frac{\varpi_i}{\Pi}\,\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,\varpi)}{\partial \varpi_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,\varpi)}{\partial \varpi_i}\,\varpi_i\,\frac{\partial \Pi}{\partial p_k} = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

Dans l'hypothèse (14) (n° 5), elles se réduisent à

$$\mathrm{M}\frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial t},$$

$$\mathrm{M}\frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$\mathrm{M}\frac{\partial \Pi(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial p_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \mathrm{H}(t\,|\,x\,|\,p)}{\partial p_i}.$$

Et les équations (12), (13) *et* (14) *du n°* 5 *seront remplacées par les formules*

$$\frac{dx_i}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}} = \frac{dp_i}{-\left(\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} + p_i\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\right)} = \frac{dt}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}}, \tag{2}$$

jointes à l'équation (1).

II. — Les caractéristiques et la détermination des familles d'ondes.

7. Nous pouvons aborder maintenant le problème général de la propagation par les ondes, énoncé au n° 1 : *Connaissant une onde origine $\mathfrak{M}_0$, donnée à l'instant t_0, trouver l'onde $\mathfrak{M}$ qui en résulte à l'instant t.*

Il est naturel de penser que $\mathfrak{M}$ se déduira de $\mathfrak{M}_0$ en appliquant, une infinité de fois, la variation infinitésimale définie par les formules (12), (13), (14) du n° 5. C'est ce que nous allons examiner; et nous étudierons d'abord si l'application, indéfiniment répétée, de cette variation infinitésimale à une multiplicité quelconque $\mathfrak{M}_0$, prise à l'instant t_0, donne bien une multiplicité nouvelle.

D'après la théorie des équations différentielles ordinaires, l'application indéfiniment répétée de la variation (12), (13), (14) (n° 5) équivaut à l'emploi de la transformation qui en résulte par intégration. Mais, ce système étant surabondant, il faut montrer que cette intégration est possible.

Supposons donc intégré le système (12), (13) (n° 5), c'est-à-dire

$$(1) \qquad dx_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(2) \qquad dp_i = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'intégrale générale est de la forme

$$(3) \qquad x_i = A_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0 \mid t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(4) \qquad p_i = B_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0 \mid t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $x_1^0, \ldots, x_n^0$; $p_1^0, \ldots, p_n^0$ sont les valeurs initiales de $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$, pour $t = t_0$.

On déduit de plus, de (1) et (2),

$$\begin{aligned} d(\Pi - 1) &= \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} dp_i \\ &= \frac{\partial \Pi}{\partial t}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}\right) dt \\ &= \frac{\partial \Pi}{\partial t}(1 - \Pi)\, dt. \end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$(5) \qquad C = \Pi(t \mid A_1, \ldots, A_n \mid B_1, \ldots, B_n) - 1,$$

$$(6) \qquad \Pi_1 = \frac{\partial \Pi(t \mid A \mid B)}{\partial t},$$

C est une fonction de t qui satisfait à l'équation différentielle

$$(7) \qquad \frac{dC}{dt} + \Pi_1 C = 0,$$

et qui se réduit, pour $t = t_0$, à

$$C_0 = \Pi(t_0 \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0) - 1.$$

Or l'équation (7) a une intégrale et une seule qui se réduit à zéro pour $t = t_0$; et cette intégrale est évidemment $C \equiv 0$. Donc, si C_0 est nul, C est nul aussi quel que soit t.

En d'autres termes, les valeurs (3), (4) vérifient, quel que soit t, l'équation (14) du n° 5, c'est-à-dire

$$\Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1, \tag{8}$$

pourvu qu'elles la vérifient pour $t = t_0$.

On peut encore dire que *la transformation de* $(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0)$ *en* $(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n)$, *définie par* (3), (4), *laisse invariante l'équation* (8).

Il est prouvé par là qu'il est possible d'intégrer le système mixte (12), (13), (14) du n° 5 ; et que l'intégrale générale est donnée par les formules (3), (4), où $x_1^0, \ldots, x_n^0; p_1^0, \ldots, p_n^0; t_0$ sont assujettis seulement à satisfaire à la condition

$$\Pi(t_0 \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0) = 1. \tag{9}$$

L'application, indéfiniment répétée, de la variation infinitésimale considérée a donc un sens bien précis.

8. Les formules (3), (4) (n° 7) ont des propriétés d'homogénéité qu'il est utile de remarquer. Posons, à cet effet, dans les équations (1), (2) (n° 7),

$$x_i = A_i, \qquad p_i = m B_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Les équations

$$dx_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

sont encore vérifiées, les seconds membres étant homogènes de degré zéro par rapport aux p_i. Quant aux équations

$$dp_i = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

elles donneront, en tenant compte de l'homogénéité,

$$m\, dB_i + B_i\, dm = -\left[m \frac{\partial \Pi(t \mid A \mid B)}{\partial A_i} + m^2 B_i \frac{\partial \Pi(t \mid A \mid B)}{\partial t}\right] dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ce qui se réduit, en tenant compte de la définition des A_i et des B_i, et de la notation introduite par la formule (6) du n° 7, à l'équation unique

$$dm = m(1-m)\,\Pi_1\,dt. \tag{4}$$

Cela posé, soit m_0 une constante arbitraire, et soit M celle des intégrales de (4) qui se réduit à m_0 pour $t = t_0$. Les fonctions

$$x_i = A_i, \qquad p_i = MB_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

constituent la solution du système (1), (2) qui est définie par les conditions initiales

$$x_i = x_i^0, \qquad p_i = m_0 p_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais cette même solution est aussi donnée par

$$\begin{aligned} x_i &= A_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid m_0 p_1^0, \ldots, m_0 p_n^0 \mid t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ p_i &= B_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid m_0 p_1^0, \ldots, m_0 p_n^0 \mid t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

On a donc les identités

$$\begin{aligned} A_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0 \mid t_0) &= A_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid m_0 p_1^0, \ldots, m_0 p_n^0 \mid t_0), \\ MB_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0 \mid t_0) &= B_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid m_0 p_1^0, \ldots, m_0 p_n^0 \mid t_0), \end{aligned}$$

pour $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Donc les fonctions A_i, ainsi que les rapports des fonctions B_i, sont homogènes de degré zéro par rapport à $p_1^0, \ldots, p_n^0$.

De là résulte qu'on pourra employer les formules (3), (4) (n° 7) à la transformation de l'élément de contact $(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0)$ en l'élément de contact nouveau $(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n)$, sans astreindre $p_1^0, \ldots, p_n^0$ à vérifier la condition (9) (n° 7).

9. Appliquons donc la transformation définie par les équations

$$x_i = A_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0 \mid t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

$$p_i = B_i(t \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0 \mid t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

à chacun des éléments de contact $(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0)$ d'une même multiplicité $\mathfrak{M}_0$. Nous allons montrer que les nouveaux éléments de contact ainsi obtenus appartiennent à une autre multiplicité.

Effectivement, $x_1^0, \ldots, x_n^0$; $p_1^0, \ldots, p_n^0$ sont, par hypothèse, des fonctions de $(n-1)$ variables indépendantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, dont les différentielles totales satisfont à l'identité

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \,\delta x_i^0 = 0;$$

et il faut montrer que les fonctions de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, qui s'en déduisent par les formules (1), (2), vérifient l'identité analogue

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta x_i = 0.$$

Or, comme ces fonctions (1), (2) satisfont aux équations

$$(5) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a

$$d\sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta x_i = \sum_{i=1}^{n} dp_i \,\delta x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} dp_i \,\delta x_i + \delta \sum_{i=1}^{n} p_i \,dx_i - \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \,dx_i,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta x_i = \delta \Pi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\delta x_i - \frac{\partial \Pi}{\partial t}\sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}\delta p_i,$$

ou enfin, réductions faites,

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta x_i + \Pi_1 \sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta x_i = 0,$$

où Π_1 est de nouveau la fonction de t définie par (6) (n° 7).

On peut alors reprendre, pour la fonction $\sum_{i=1}^{n} p_i \,\delta x_i$, le raisonnement fait au n° 7 pour la fonction C; et conclure que, puisque sa valeur initiale, pour $t=t_0$, est nulle, elle est nulle quel que soit t. Et c'est ce qu'il fallait établir.

Donc la transformation (1), (2), *où t et t_0 sont des constantes arbitraires, change toute multiplicité en une multiplicité. C'est,* suivant le langage de S. Lie, *une transformation de contact.*

10. Pour la commodité du langage, nous appellerons *trajectoire,* ou *rayon,* le lieu des points représenté par les équations

$$(1)\qquad x_i=\mathrm{A}_i(t\,|\,x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0\,|\,p_1^0,\,\ldots,\,p_n^0\,|\,t_0)\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

quand t varie seul; t_0; x_1^0, ..., x_n^0; p_1^0, ..., p_n^0 ayant des valeurs constantes. A chaque point de la trajectoire correspond un instant t; et nous considérons cette loi de correspondance comme faisant partie intégrante de la trajectoire. En d'autres termes, un point d'une trajectoire n'est considéré comme existant qu'à l'instant t qui lui correspond.

Il y a, ainsi entendu, ∞^{2n-1} trajectoires. A chaque instant t, il en passe ∞^{n-1} par chaque point de l'espace E_n.

Les trajectoires peuvent être considérées comme servant au transport des éléments de contact. Par chaque point de la trajectoire (1) passe en effet l'élément de contact dont la direction est donnée par les formules

$$(2)\qquad p_i=\mathrm{B}_i(t\,|\,x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0\,|\,p_1^0,\,\ldots,\,p_n^0\,|\,t_0)\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

La correspondance entre les points d'une trajectoire et les éléments de contact qu'ils portent est déjà donnée par les équations différentielles

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial\Pi}{\partial p_i}\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Car, d'après les explications du n° 4, ces équations différentielles peuvent s'interpréter ainsi :

Étant donnée une trajectoire, soit (x) le point de cette trajectoire qui existe à l'instant t : ce point est, à cet instant, l'origine d'une onde *dérivée; et la direction de la trajectoire en (x) est celle qui va de l'origine (x) au point de contact du plan tangent à l'onde dérivée qui est parallèle à l'élément de contact porté par le point (x) de la trajectoire, à l'instant t.*

L'ensemble d'une trajectoire et des éléments de contact ainsi portés par ses divers points s'appellera une *caractéristique*. Une caractéristique est donc définie par le système (1), (3), où t seul est variable.

La construction justifiée au n° 9 peut, avec ce langage nouveau, s'énoncer ainsi :

Étant donnée une multiplicité $\mathfrak{M}_0$, on considère les diverses caractéristiques qui ont pour éléments, à un même instant t_0, les éléments de contact de $\mathfrak{M}_0$. L'ensemble des éléments de toutes ces caractéristiques, qui coexistent à un autre instant t, est une nouvelle multiplicité.

En d'autres termes, *la nouvelle multiplicité résulte du transport simultané des éléments de la première par les trajectoires qui, à l'instant t_0, portent les éléments de contact de cette première multiplicité.*

11. Nous devons maintenant étudier si la famille des multiplicités $\mathfrak{M}'$ qui sont ainsi issues d'une multiplicité origine $\mathfrak{M}_0$, considérée à l'instant t_0, se confond avec la famille des ondes $\mathfrak{M}$ issues, dans le mode de propagation donné, de l'onde origine $\mathfrak{M}_0$, supposée produite à l'instant t_0.

Nous remarquons d'abord que la famille des multiplicités $\mathfrak{M}'$ (en vertu de son mode de construction) et la famille des ondes $\mathfrak{M}$ (en vertu de l'hypothèse du n° 3) jouissent de cette propriété commune qu'*on passe d'une multiplicité de la famille à la multiplicité infiniment voisine* (aux infiniment petits près d'ordre supérieur) *par la variation définie par les formules* (12), (13), (14) *du n° 5*.

Ceci prouve, en passant, que *notre principe des ondes enveloppes n'implique pas contradiction*. Et de là nous pourrons conclure aussi à l'identité des $\mathfrak{M}'$ avec les $\mathfrak{M}$, en prouvant que la famille des $\mathfrak{M}'$ est la seule qui satisfasse à cette propriété et contienne, pour $t = t_0$, la multiplicité donnée $\mathfrak{M}_0$.

Pour cela nous allons traduire d'abord analytiquement la propriété énoncée pour une famille de multiplicités quelconque, dont l'équation générale pourra être supposée donnée sous la forme

$$F(x_1, \ldots, x_n) = t. \tag{1}$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

et

$$\Pi(F \mid x_1, \ldots, x_n \mid P_1, \ldots, P_n) = \overline{\Pi}. \tag{3}$$

Alors, pour un élément de contact de (1), nous pourrons poser

$$p_i = P_i : \overline{\Pi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

et ces valeurs vérifieront déjà la relation (4) du n° 5. Et il restera seulement à exprimer que les différentielles données par les formules (12) et (13) du n° 5 satisfont aux équations obtenues en différentiant (1) et (4).

La différentiation de (1) donne, en tenant compte du fait que les dérivées $\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}$ sont homogènes de degré zéro, et aussi de l'équation (1) elle-même,

$$dt = \sum_{i=1}^{n} P_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} dt = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial P_i} dt = \overline{\Pi}\, dt,$$

c'est-à-dire

$$\overline{\Pi} = 1. \tag{5}$$

Ce premier résultat permet de simplifier les formules (4), qui deviennent

$$p_i = P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

En les différentiant à leur tour, on obtient les conditions

$$dP_i = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) dt = -\left(\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial F}\right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} dx_k + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais elles résultent de (5), en différentiant par rapport à x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Le principe des ondes enveloppes (au sens infinitésimal sous lequel nous l'avons pris) trouve donc son expression analytique dans la condition (5), *c'est-à-dire dans l'équation aux dérivées partielles*

$$\Pi\left(F \,|\, x_1, \ldots, x_n \,|\, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 1, \tag{7}$$

qui n'est autre que l'équation (14) du n° 5, c'est-à-dire

$$\Pi(t \,|\, x_1, \ldots, x_n \,|\, p_1, \ldots, p_n) = 1, \tag{8}$$

où l'on considère t comme une fonction de $x_1, \ldots, x_n$ dont $p_1, \ldots, p_n$ sont les dérivées partielles

$$p_i = \frac{\partial t}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Ceci nous donne inversement une interprétation de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue la plus générale, car nous avons vu, au n° 4, comment on pouvait ramener à la forme canonique (8) l'équation générale de la forme

$$H(t \,|\, x_1, \ldots, x_n \,|\, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{10}$$

La théorie des caractéristiques, exposée dans les numéros précédents, montre comment on peut construire, au moyen de l'intégration du sys-

tème (1), (2) du n° 7, c'est-à-dire du système (2) du n° 6,

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \frac{dp_i}{-\frac{\partial H}{\partial x_i} - p_i\frac{\partial H}{\partial t}} = \frac{dt}{\sum_{k=1}^{n} p_k\frac{\partial H}{\partial p_k}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

une solution de l'équation (10), *prenant la valeur donnée* t_0 *en tous les points d'une multiplicité* $\mathfrak{M}_0$ *arbitrairement choisie.*

Et il nous reste seulement à prouver que cette solution est la seule qui satisfasse à cette condition initiale.

12. Supposons en effet une famille de multiplicités $\mathfrak{M}$,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = t, \tag{1}$$

satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\Pi} = \Pi(F\,|\,x_1, \ldots, x_n\,|\,P_1, \ldots, P_n) = 1, \tag{2}$$

où l'on suppose de nouveau

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Par chaque point (x) de l'espace E_n passe une multiplicité $\mathfrak{M}$; et il lui correspond une valeur de t [donnée par (1)]. Ce point est, par suite, l'origine d'une onde dérivée déterminée. Prenons le plan tangent à cette onde qui est parallèle au plan tangent en (x) à la multiplicité $\mathfrak{M}$, et joignons-en le point de contact au point (x).

Nous obtenons ainsi, en chaque point de E_n, une direction D; et il existe une famille de courbes tangentes, en chacun de leurs points, à la direction D correspondante. A chaque point de l'une de ces courbes correspond une valeur de t, et un élément de contact porté par ce point, à savoir celui de la multiplicité $\mathfrak{M}$ de la famille considérée qui passe en ce point. Et comme chaque multiplicité $\mathfrak{M}$ est le lieu des éléments de contact, ainsi portés par ces courbes, qui correspondent à une même valeur de t, il suffira de prouver que la construction précédente donne des caractéristiques, pour avoir montré du même coup que toute famille (1), satisfaisant à (2), est fournie par la construction du n° 9.

Effectivement, les courbes que nous venons de définir géométriquement sont des intégrales du système

$$(4) \qquad dx_i = \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial P_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

car de ces équations résulte, à cause de (2),

$$dF = \sum_{i=1}^{n} P_i \, dx_i = \overline{\Pi} \, dt = dt;$$

ce qui entraîne l'équation (1), pourvu qu'on assujettisse les données initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$; t_0 à y satisfaire. Et, dès lors, les équations (4) expriment (*voir* n° 10) la propriété des tangentes aux courbes considérées qui nous a servi à les définir.

Pour les éléments de contact que nous faisons correspondre aux divers points de ces courbes, nous avons, par définition,

$$(5) \qquad p_i = P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Et il reste à vérifier que ces valeurs satisfont aux équations

$$(6) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

c'est-à-dire qu'on a identiquement, en vertu de (1), (2), (3) et (5),

$$dP_i = -\left(\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial F} \right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial P_k} + \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial F} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ou enfin à

$$(7) \qquad \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

à cause des identités

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Or ces identités (7) s'obtiennent en différentiant, par rapport à x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, l'identité (1) qui est vérifiée par hypothèse.

Il est donc bien établi que *toute solution de* (1), *prenant la valeur* t_0 *aux divers points d'une multiplicité donnée* $\mathfrak{M}_0$, *s'obtient par la construction du n° 9*; *et que, par suite, il n'existe qu'une solution satisfaisant à cette condition initiale.*

Et il en résulte, en même temps, que *cette construction définit bien la propagation de l'onde* $\mathfrak{M}_0$, *à partir de l'instant* t_0.

13. La transformation du n° 9, qui donne l'onde $\mathfrak{M}$, issue de l'onde origine $\mathfrak{M}_0$, donnée au temps t_0, quand arrive l'instant t, opère individuellement sur les éléments de contact de $\mathfrak{M}_0$, pour fournir les éléments de contact de $\mathfrak{M}$; et, pour un élément de contact particulier de $\mathfrak{M}_0$, elle ne dépend que de cet élément, et non de l'onde $\mathfrak{M}_0$ dont il fait partie.

De là résulte que, *si l'on imagine deux ondes origines ayant un élément de contact commun, les ondes* $\mathfrak{M}$ *qui leur correspondent à l'instant t auront aussi un élément de contact commun, qui sera le transformé du précédent.*

Comme l'une des ondes $\mathfrak{M}$ imaginées peut être réduite à un point, il résulte de là que *le principe des ondes enveloppes*, que nous avons admis pour une variation infiniment petite du temps, et aux infiniment petits près d'ordre supérieur, *est rigoureusement vérifié pour une variation finie quelconque du temps.*

Et il en résulte immédiatement que si l'on connaît les ondes finies émises, à partir d'un instant quelconque t_0, par les divers points du milieu, au bout d'un temps quelconque $t - t_0$, la propagation d'une onde origine quelconque est aussi connue, sans intégration.

Mais on peut obtenir un résultat un peu plus général qui donne les propriétés classiques des *intégrales complètes.*

Supposons en effet que nous connaissions la propagation de ∞^n ondes origines; c'est-à-dire une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$t = G(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_n) \tag{1}$$

contenant n constantes arbitraires essentielles. Pour $t = t_0$, les multiplicités (1) contiennent tous les ∞^{2n-1} éléments de contact de l'espace; et chacun d'eux peut être défini comme l'élément de contact commun à la multiplicité

$$t_0 = G(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_n) \tag{2}$$

et à celles qui en résultent par les variations infiniment petites des constantes $a_1, \ldots, a_n$ liées par une relation déterminée de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \delta a_i = 0. \tag{3}$$

Ces conditions donnent, en effet, pour déterminer cet élément, les $2n - 1$ équations

$$G = t_0, \qquad \frac{\partial G}{\partial a_i} = m b_i, \qquad p_i = h \frac{\partial G}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{4}$$

d'où l'on peut tirer inversement $a_1, \ldots, a_n$ et les rapports de $b_1, \ldots, b_n$ si l'élément est donné.

A cet élément correspondra, pour une autre valeur t du temps, celui qui est commun aux multiplicités issues des premières, c'est-à-dire à la multiplicité (1) et à celles qui en dérivent par les variations des constantes définies par la même équation (3). Cet élément transformé est donc celui qui satisfait aux équations

$$G = t, \qquad \frac{\partial G}{\partial a_i} = m b_i, \qquad p_i = h \frac{\partial G}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Ces dernières équations sont donc les équations générales des ∞^{2n-1} caractéristiques, si l'on y considère $a_1, \ldots, a_n$ et les rapports de $b_1, \ldots, b_n$ comme des constantes arbitraires.

Enfin toute multiplicité $\mathfrak{M}_0$, donnée comme onde origine à l'instant t_0, est enveloppe de ∞^{n-1} multiplicités (2), définies par une équation de la forme

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) = 0. \tag{6}$$

L'onde $\mathfrak{M}$ qui en résulte à l'instant t sera l'enveloppe des ∞^{n-1} multiplicités qui correspondent à celles-là, c'est-à-dire des multiplicités (1) satisfaisant à la condition (6).

14. Examinons comment se modifient les résultats précédents dans le *cas du régime permanent*.

L'équation générale des ondes dérivées

$$H(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

ou, sous forme canonique,

$$\Pi(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1, \tag{2}$$

ne contient pas le temps.

Le système différentiel des caractéristiques se simplifie et devient

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \frac{dp_i}{-\frac{\partial H}{\partial x_i}} = \frac{dt}{\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

ou, sous forme canonique,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Dans ce dernier, les seconds membres ne dépendent pas de t; et son intégrale générale est de la forme

$$x_i = \mathcal{A}_i(t - t_0 \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$
$$p_i = \mathcal{B}_i(t - t_0 \mid x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid p_1^0, \ldots, p_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Il en résulte que la construction qui donne l'onde $\mathfrak{M}$, émise, au bout du temps $(t - t_0)$, par une onde origine $\mathfrak{M}_0$, ne dépend que de cet intervalle de temps, et non de l'instant t_0 où cette onde origine apparaît. C'est ce que nous avions annoncé au n° 2.

On voit aussi qu'à une même trajectoire correspond ici une infinité de modes de distribution des temps t entre ses divers points. A un même point peuvent correspondre toutes les valeurs de t; mais la différence des valeurs de t qui correspondent à deux des points est entièrement déterminée.

Si l'on fait abstraction de la correspondance entre les points d'une trajectoire (ou les éléments de contact qui forment une caractéristique) et le temps, il n'y a plus ici que ∞^{2n-2} trajectoires (ou caractéristiques).

Quel que soit l'instant auquel part un élément de contact de l'espace, il est toujours transporté par la même trajectoire, et prend la même position nouvelle au bout d'un intervalle de temps donné.

On peut encore dire que *la famille des transformations de contact* définies au n° 9, *qui donnent la loi de la propagation*, et qui, dans le cas général, dépend des deux constantes t et t_0, *ne dépend plus, dans le cas du régime permanent, que de la constante* $(t - t_0)$, *et forme alors un groupe à un paramètre.*

III. — Propriétés des trajectoires.

15. On peut obtenir un système différentiel définissant les trajectoires, indépendamment des éléments de contact qu'elles transportent. Il faut pour cela éliminer $p_1, \ldots, p_n$ des équations (12), (13), (14) du n° 5, c'est-à-dire

$$x_i' = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

$$p_i' = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

$$\Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1, \tag{3}$$

en désignant les dérivées $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dp_i}{dt}$ par x_i' et p_i'.

Pour effectuer cette élimination, nous introduisons l'équation générale des ondes dérivées, sous forme ponctuelle, en reprenant les notations du n° 4. En raisonnant comme on l'a fait pour l'équation tangentielle, dans ce n° 4, on voit que l'équation ponctuelle peut être prise sous la forme canonique

$$\Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) = 1, \tag{4}$$

où Ω est homogène, de degré 1, en $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Le plan tangent en un point a pour équation, à cause de cette homogénéité,

$$\sum_{i=1}^{n} \Xi_i \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} - 1 = 0, \tag{5}$$

de sorte qu'on a, pour les coordonnées de ce plan, définies comme au n° 4, les formules

$$u_i = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid \xi)}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{6}$$

de même qu'on avait, pour les coordonnées du point de contact,

$$\xi_i = \frac{\partial \Pi(t \mid x \mid u)}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

On remarquera encore que (4) résulte de l'élimination des rapports de u_i entre les équations (7), de même que

$$\Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid u_1, \ldots, u_n) = 1 \tag{8}$$

résulterait de l'élimination des rapports des ξ_i entre les équations (6).

Une nappe de l'onde, représentée simultanément par les équations canoniques (4) et (8), n'a qu'un point sur chaque droite issue de (x), de même qu'elle n'a qu'un plan tangent parallèle à un plan donné : cela dans des limites convenables, bien entendu.

Cela posé, on voit que les équations (1) et (3) auront, pour système équivalent, les équations

$$\Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid x'_1, \ldots, x'_n) = 1 \tag{9}$$

et

$$p_i = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid x')}{\partial x'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Pour transformer les équations (2), il faut encore calculer les $\frac{d\Pi}{dx_i}$

et $\frac{d\Pi}{dt}$. Nous remarquons à cet effet que, de l'identité

$$\Omega\left(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial p_n}\right) = 1,$$

on tire, par différentiation, en tenant compte de (1),

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial x'_k} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_k \, \partial t} = 0,$$

c'est-à-dire, à cause de (10),

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_k \, \partial t} = 0,$$

ou enfin, $\frac{d\Pi}{dt}$ étant homogène, de degré 1, en $p_1, \ldots, p_n$,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Les équations (2) deviennent donc

$$\frac{d \frac{\partial \Omega}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial t} \frac{\partial \Omega}{\partial x'_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{13}$$

et les trajectoires sont définies par le système (9), (13).

Ce système est surabondant; mais on peut le simplifier. Nous avons, en effet, vu l'homogénéité de Ω,

$$\frac{\partial \Omega(t \mid x \mid x')}{\partial x'_i} = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid dx)}{\partial \, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial \Omega(t \mid x \mid x')}{\partial x_i} = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid dx)}{\partial x_i} \frac{1}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial \Omega(t \mid x \mid x')}{\partial t} = \frac{\partial \Omega(t \mid x \mid dx)}{\partial t} \frac{1}{dt}.$$

Et nous écrirons le système (13), en posant dorénavant

$$\Omega = \Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{14}$$

sous la forme

$$d\frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Multiplions ces équations par dx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et ajoutons. Cela donne

$$d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i}dx_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i}d^2x_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}dx_i - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i}dx_i = 0,$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}(dt - \Omega) = 0. \tag{16}$$

Donc, si l'on est en régime variable, l'équation (9) est une conséquence des équations (13), ou (15). Si l'on est en régime permanent, les équations (15) se réduisent à $(n - 1)$, et ne contiennent pas le temps.

En d'autres termes : *En régime variable, les trajectoires sont définies par le système* (15), *aussi bien quant à leur forme que quant à la loi suivant laquelle elles sont décrites.*

En régime permanent, la forme des trajectoires est définie par le système

$$d\frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

qui se réduit à $n - 1$ équations indépendantes; et la loi suivant laquelle elles sont décrites est donnée par l'équation

$$dt = \Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{18}$$

qui ne contient pas alors t explicitement.

Dans le cas du régime variable, cette équation (18) a toujours lieu, mais est une conséquence des équations (15).

Enfin, les formules qui donnent l'élément de contact qu'il faut associer à chaque point d'une trajectoire pour en faire une caractéristique sont les formules (10), c'est-à-dire

$$p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Ces formules traduisent toujours la loi de correspondance entre la direction de la trajectoire et la direction de l'élément qui a été énoncée au n° 10.

16. Restons dorénavant dans le cas du régime variable, et désignons par le mot *rayon* une trajectoire dont on ne considère que la forme, c'est-à-dire pour laquelle on fait abstraction de la loi de correspondance entre les points de la trajectoire et les valeurs de t qui leur correspondent.

Si l'on se donne un rayon, on en peut déduire, sans intégration, la caractéristique correspondante.

En effet les équations (15) du n° 15, où l'on remplacera dt par sa valeur (18) (n° 15), donnent alors t explicitement. Et alors l'élément de contact associé à chaque point résulte, suivant la loi connue (n° 10), de la direction de la trajectoire en ce point.

Cela posé, imaginons une famille de ∞^{n-1} rayons; et, par la méthode qui vient d'être donnée, transformons-les en caractéristiques. S'il arrive que les ∞^{n-1} éléments de contact qui, sur ces rayons, correspondent alors à une même valeur de t, appartiennent à une même multiplicité, nous dirons que la famille de rayons considérée est *conjuguée* à cette multiplicité.

Alors, les résultats du n° 9 peuvent s'énoncer : *Si une famille de ∞^{n-1} rayons est conjuguée à une multiplicité, elle est conjuguée à ∞^1 multiplicités.*

A une telle famille de rayons correspond, d'après le n° 11, une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$\mathrm{H}(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1. \tag{1}$$

Et la réciproque est vraie, d'après le n° 12.

On peut donc considérer une intégrale de cette équation, c'est-à-dire une famille d'ondes obtenues par propagation successive de l'une d'entre elles, comme une famille de ∞^1 multiplicités conjuguées à une famille de ∞^{n-1} rayons.

Et si nous remarquons que les valeurs de t associées aux divers points d'un même rayon sont aussi définies par l'équation

$$dt = \Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{2}$$

dès qu'on se donne la valeur t_0 qui correspond à un point particulier, nous pourrons énoncer le théorème suivant, qui est la généralisation des théorèmes classiques de Thomson et Tait :

Lorsqu'une famille de ∞^1 multiplicités est conjuguée à une famille de ∞^{n-1} rayons, l'intégrale de l'équation différentielle (2), *prise le long de l'un quelconque des rayons, entre deux quelconques des multiplicités, prend la même valeur, quel que soit le rayon, en arrivant à la deuxième multiplicité, si on lui a donné comme valeur initiale, au départ de la première multiplicité, la valeur t_0 de t qui correspond à cette multiplicité.*

17. L'intégrale de l'équation

$$dt = \Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n), \tag{1}$$

prise le long d'un arc de courbe quelconque (C), allant d'un point (x^0) à un point (x), en partant de la valeur t_0, au point origine (x^0), est *le temps que mettrait un ébranlement produit en (x^0) à l'instant t_0 pour se propager jusqu'en (x) le long de* (C).

Il faut comprendre par là que l'on considère (C) comme un tube de diamètre infiniment petit, dont les parois n'exercent sur l'ébranlement ni réflexion ni frottement.

Dans ces conditions, en effet, l'ébranlement se propage par ondes élémentaires successives, ayant pour origines les points de (C); et, si l'ébranlement est arrivé en (x) à l'instant t, à l'instant $t + dt$, il aura atteint, aux infiniment petits près d'ordre supérieur, le point $(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$ qui est infiniment voisin de (x) sur la courbe, et qui est aussi sur l'onde élémentaire ayant (x) pour origine à l'instant t.

Or, c'est précisément ce qu'exprime l'équation (1); car, l'équation de l'onde dérivée étant

$$\Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) = 1 \tag{2}$$

[quand (x) est pris pour origine des coordonnées], l'équation de l'onde élémentaire est

$$\Omega\left(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid \frac{\xi_1}{dt}, \ldots, \frac{\xi_n}{dt}\right) = 1,$$

ou

$$\Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) = dt; \tag{3}$$

et l'équation (1) exprime bien que le point de coordonnées $(dx_1 \ldots dx_n)$ appartient à cette onde.

Cette durée de propagation peut aussi se définir, à cause de l'homogénéité de Ω, par la formule

$$dt = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i, \tag{4}$$

à condition que $p_1, \ldots, p_n$ soient définis, en chaque point de la courbe (C), par les formules

$$p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même, par l'ensemble des équations

$$dx_i = \rho \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

et de l'équation

$$\Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 1. \tag{7}$$

Ce dernier résultat pourrait s'obtenir directement en remarquant que, le long de (C), l'ébranlement doit se propager par une suite d'arcs de trajectoires infiniment petits, tracés d'un point de (C) au point infiniment voisin. L'un quelconque de ces arcs de trajectoires, ayant (x) pour origine, a pour composantes $dx_1, \ldots, dx_n$; et il aboutit au point de l'onde élémentaire [ayant (x) pour origine à l'instant t]

qui est le point de contact d'un certain plan tangent à cette onde : c'est ce qu'expriment les équations (4), (6), (7).

Nous admettons ici qu'il y a un arc de trajectoire joignant un point quelconque (x) à un point infiniment voisin quelconque, à un instant t quelconque ; mais cela résulte de la forme des équations (15) (n° 15).

En effet, ces équations sont du premier degré en $d^2x_1, \ldots, d^2x_n$. Leur déterminant est nul, car c'est le hessien de Ω par rapport à $dx_1, \ldots, dx_n$; et ce hessien est nul, à cause des identités

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\, dx_i\, \partial\, dx_k} dx_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui expriment que les dérivées

$$\frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont homogènes de degré zéro. Mais les mineurs du hessien ne sont pas tous nuls, sans quoi les équations (5) entraîneraient plus d'une relation entre $p_1, \ldots, p_n$, et les ondes dérivées n'auraient pas ∞^{n-1} plans tangents.

D'autre part, si l'on introduit l'équation (1), ces équations en $d^2x_1, \ldots, d^2x_n$ se réduisent, d'après ce qu'on a vu au n° 15, à $n-1$. Et, les mineurs du hessien n'étant pas tous nuls, on pourra tirer $n-1$ des différentielles secondes en fonction de la $n^{\text{ième}}$, qui pourra être supposée nulle.

On aura ainsi, par exemple, les dérivées $\frac{dt}{dx_n}, \frac{d^2x_1}{(dx_n)^2}, \ldots, \frac{d^2x_{n-1}}{(dx_n)^2}$ exprimées en fonction de t ; $x_1, \ldots, x_n$; $\frac{dx_1}{dx_n}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n}$. Ce qui établit le fait en question.

Ce même fait résulte aussi de ce que, la direction d'une trajectoire étant donnée en un point initial, à un instant initial donné, l'élément de contact initial de la caractéristique correspondante est déterminé (n° 10). La caractéristique est par suite déterminée, d'après la forme du système différentiel définissant les caractéristiques, et il en est de même de la trajectoire.

18. *La durée de la propagation d'un ébranlement le long d'une*

courbe (C), *que nous venons de définir, peut être considérée comme répondant à une propriété de maximum.*

Reprenons, en effet, l'équation différentielle

$$(1) \qquad dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i,$$

en supposant que $p_1, \ldots, p_n$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ et de t, assujettis seulement à vérifier l'équation

$$(2) \qquad \text{H}(t \,|\, x_1, \ldots, x_n \,|\, p_1, \ldots, p_n) = 1.$$

Et intégrons l'équation (1) le long de (C), en prenant pour valeur initiale une valeur t_0 donnée. A chaque choix des fonctions $p_1, \ldots, p_n$ correspond une valeur de l'intégrale de (1), à l'extrémité de l'arc de courbe (C); et nous demandons comment il faut choisir $p_1, \ldots, p_n$ pour que cette valeur de l'intégrale soit un maximum.

Le long de (C), $x_1, \ldots, x_n$ sont des fonctions données d'une variable indépendante u; et $p_1, \ldots, p_n$ sont des fonctions de u et de t, qu'il s'agit de déterminer. Nous avons à écrire que, dans ces conditions, la variation de la valeur de l'intégrale est nulle. Or on aurait, pour la déterminer, puisque les variations des x_i sont nulles, l'équation différentielle

$$(3) \qquad d\,\delta t = \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \, dx_i;$$

et les δp_i sont assujettis seulement à l'équation de condition

$$(4) \qquad \frac{\partial \text{H}}{\partial t}\delta t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \text{H}}{\partial p_i}\delta p_i = 0.$$

La propriété devant avoir lieu, quelle que soit l'extrémité de l'arc de courbe choisi sur (C), nous trouvons comme condition nécessaire que

$$\sum^{n} \delta p_i \, dx_i$$

doit s'annuler sous la seule condition

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \partial p_i = 0.$$

Et cela donne bien les équations (6) du n° 17 :

$$(6) \qquad dx_i = \rho \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En tenant compte de (1), on trouve, remarquons-le en passant,

$$dt = \rho,$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le maximum de l'intégrale considérée ne peut donc avoir lieu que lorsque cette intégrale représente la durée de la propagation, le long de (C), d'un ébranlement produit à l'origine de la courbe, au temps t_0.

19. On peut interpréter géométriquement la relation qui existe entre un déplacement infinitésimal sur (C) et la différentielle correspondante de la fonction t considérée au numéro précédent.

En effet, l'équation

$$(1) \qquad dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i$$

exprime que le point $(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$ de la courbe (C) se trouve sur le plan tangent à l'onde élémentaire d'origine (x), dont les coordonnées sont $p_1, \ldots, p_n$. Dans le cas où t est la durée de la propagation, le point $(x + dx)$ se trouve au point de contact même de ce plan.

Cette remarque permet de voir qu'*il y a un cas où la durée de la propagation constitue bien un maximum pour l'intégrale t. C'est celui où l'onde élémentaire est constamment concave vers son origine*, cas qui présente une importance toute spéciale pour les applications.

Supposons en effet, dans ce cas, que $p_1, \ldots, p_n$ aient des valeurs suffisamment voisines des valeurs

$$(2) \qquad p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui correspondent au cas de la variation nulle. Sur la tangente à (C) au point (x), on rencontrera, en partant de (x), d'abord le point d'intersection de la tangente avec l'onde élémentaire d'origine (x), puis le point d'intersection de cette tangente avec le plan tangent, de coordonnées $(p_1, \ldots, p_n)$. Donc à une même valeur positive de dt correspondra une valeur de du (qu'on peut supposer positive) plus petite pour le cas de la variation nulle que pour le cas voisin.

Donc, pour une même valeur de u, et une même valeur de t, la dérivée $\frac{dt}{du}$ est plus grande pour le cas de la variation nulle que pour le cas voisin.

Cela posé, réservons la lettre t pour le cas de la variation nulle; et employons la lettre θ pour le cas voisin. Les fonctions t et θ sont les intégrales de deux équations différentielles :

$$(3) \qquad \frac{dt}{du} = f(t, u),$$

$$(4) \qquad \frac{d\theta}{du} = \varphi(\theta, u),$$

qui prennent la même valeur t_0, pour la valeur initiale u_0 de u; et l'on a, quels que soient t et u, dans les intervalles où nous opérons, l'inégalité

$$(5) \qquad f(t, u) > \varphi(t, u).$$

Je dis qu'il en faut conclure que la différence $(t - \theta)$ est positive tout le long de (C), en limitant convenablement, s'il y a lieu, l'arc de (C) que peut décrire le point (x).

Je supposerai, pour cela, que la courbe (C) est une courbe analytique. Alors les fonctions $p_1, \ldots, p_n$ qui sont données par les formules (2) sont analytiques aussi, Ω étant supposée une fonction analytique de ses arguments. Et nous supposerons encore que les fonctions $p_1, \ldots, p_n$, voisines des fonctions (2), soient analytiques également. Alors t et θ sont elles-mêmes des fonctions analytiques de u, ainsi que $(t-\theta)$ et $\frac{d(t-\theta)}{du}$. On devra se limiter, sur (C), à un arc tel que la fonction t n'y ait aucun point singulier; et l'on peut supposer qu'il en est de même pour θ. Soit (u_0, u_1) l'intervalle de variation de u correspondant à ces dernières hypothèses. Dans cet intervalle, $(t-\theta)$ et $\frac{d(t-\theta)}{du}$ sont donc holomorphes. Pour $u=u_0$, $t=\theta=t_0$ et $(t-\theta)$ est nul; en même temps $\frac{d(t-\theta)}{du}$ est positif, en vertu de (5). La fonction $(t-\theta)$ commence donc par être positive; et elle ne pourra cesser de l'être qu'en s'annulant. Je dis qu'il est impossible qu'elle s'annule. Supposons en effet qu'elle s'annule : ses zéros étant isolés, soit u' le premier qui se rencontre. Dans un intervalle de la forme $(u'-\varepsilon, u')$ la dérivée serait de signe constant, car ses zéros sont aussi isolés; et comme la fonction passe, dans cet intervalle $(u'-\varepsilon, u')$, d'une valeur positive à la valeur zéro, la dérivée y serait constamment négative; et, par suite, cette dérivée ne serait pas positive pour $u=u'$. Or cela est en contradiction avec l'hypothèse (5), puisque, pour $u=u'$, on a $t=\theta$, de sorte que $\frac{d(t-\theta)}{du}$ est alors égal à

$$f(t, u')-\varphi(t, u'),$$

qui est positif d'après (5).

Donc la fonction $(t-\theta)$ est nécessairement positive sur tout l'arc de la courbe (C) considéré; et la durée de la propagation le long de (C) constitue bien un maximum pour l'intégrale t.

20. Revenons maintenant aux trajectoires. Nous allons voir que *les trajectoires issues d'un point (x^0), à l'instant t_0, sont les courbes le long desquelles un ébranlement, produit en (x^0), au temps t_0, se propage le plus rapidement.*

Pour le démontrer, reprenons, par exemple, les équations

$$(1) \qquad dx_i=\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}\,dt \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

et

$$(2) \qquad \Pi(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n)=1,$$

qui peuvent être considérées comme définissant la durée de la propagation d'un ébranlement le long d'une courbe (C), allant de (x_0) en (x). De ces équations résulte la formule, déjà employée,

$$dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i. \tag{3}$$

Ce sont ici les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de la variable u, que nous avons à faire varier; au contraire $p_1, \ldots, p_n$ sont connus, quand les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ sont données.

Nous avons, pour calculer la variation δt, la formule

$$d\,\delta t = \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \, dx_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \, d\,\delta x_i, \tag{4}$$

d'où il faudra éliminer les δp_i, en tenant compte de (1) et (2). Or, à cause de (1), l'équation (4) s'écrit

$$d\,\delta t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \delta p_i \, dt + \sum_{i=1}^{n} p_i \, d\,\delta x_i;$$

et l'on tire de (2), en prenant les variations des deux membres,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} \delta t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \delta p_i = 0.$$

Il reste donc la formule

$$d\,\delta t = \sum_{i=1}^{n} p_i \, d\,\delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \delta x_i \, dt - \frac{\partial \Pi}{\partial t} \delta t \, dt,$$

que nous mettons sous la forme

$$\begin{aligned} d\left(\delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta x_i\right) + \frac{\partial \Pi}{\partial t}\left(\delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta x_i\right) dt \\ = -\sum_{i=1}^{n} \left[dp_i + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) dt\right] \delta x_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Nous l'écrirons plus simplement

$$\frac{d\Delta}{dt} + A\Delta = B, \tag{6}$$

en posant

$$\Delta = \delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i\, \delta x_i, \tag{7}$$

$$A = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \tag{8}$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) \delta x_i. \tag{9}$$

La courbe (C) est supposée varier de manière que ses extrémités demeurent fixes; les δx_i sont donc nuls à l'origine et à l'extrémité de (C), et Δ se réduit alors à δt. De plus δt est nul à l'origine. Donc Δ est celle des intégrales de (6) qui se réduit à zéro pour $t = t_0$; et nous avons à écrire qu'elle est nulle, quel que soit le choix des δx_i, quand on arrive à la valeur finale de t. Or Δ est donné par la formule

$$\Delta = e^{-\int_{t_0}^{t} A\, dt} \int_{t_0}^{t} B\, e^{\int_{t_0}^{t} A\, dt}\, dt. \tag{10}$$

On voit donc que Δ ne peut être nul si B n'est pas identiquement nul (par rapport à $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$); car, sans cela, on peut choisir $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ de manière que B soit constamment positif dans l'intervalle d'intégration.

Ce raisonnement suppose que $A = \dfrac{\partial \Pi}{\partial t}$ reste fini sur (C). Sous cette hypothèse, nous concluons donc que la variation de l'intégrale t ne peut être nulle que sous les conditions

$$dp_i = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Et ce sont précisément les équations qu'il faut adjoindre aux équations (1) et (2) pour définir les caractéristiques; et, par conséquent, les trajectoires seules peuvent répondre au problème du minimum de durée dans la propagation.

21. Les calculs précédents donnent aussi une interprétation de l'élément de contact associé à une trajectoire, en chacun de ses points.

Car la condition pour que la variation δt reste nulle, lorsque l'origine (x_0) seule de (C) reste fixe, est que l'extrémité (x), dans son déplacement, satisfasse à la condition

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta x_i = 0. \tag{1}$$

L'élément $(x \mid p)$, associé au point (x) d'une trajectoire, pour l'instant t correspondant à ce point, est celui sur lequel doit se déplacer le point (x) de la trajectoire pour que la durée de la propagation d'un ébranlement, le long de cette trajectoire, entre le point fixe (x^0) d'où l'ébranlement part à l'instant t_0 et le point variable (x), ait une variation nulle.

Cela revient à dire que l'élément $(x \mid p)$ est un élément de contact de l'onde issue de (x^0), à partir de l'instant t_0, quand arrive l'instant t. Ce qui est conforme aux résultats obtenus dans la construction des familles d'ondes.

Remarquons encore qu'on aurait pu calculer la variation de t, dans les conditions du n° 20, en partant de la formule

$$dt = \Omega(t \mid x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n). \tag{2}$$

On aurait alors

$$d\,\delta t = \frac{\partial\Omega}{\partial t}\,\delta t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Omega}{\partial x_i}\,\delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Omega}{\partial\, dx_i}\,d\,\delta x_i,$$

d'où

$$d\left(\delta t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Omega}{\partial\, dx_i}\,\delta x_i\right) - \frac{\partial\Omega}{\partial t}\left(\delta t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Omega}{\partial\, dx_i}\,\delta x_i\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(d\,\frac{\partial\Omega}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial\Omega}{\partial t}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial\Omega}{\partial x_i}\right)\delta x_i. \tag{3}$$

Et un raisonnement semblable à celui que nous avons fait au n° 20, sur l'équation (5) (n° 20), montrera que la condition $\delta t = 0$ oblige à annuler identiquement le second membre de (3); ce qui donne, pour conditions nécessaires du minimum, les équations

$$d\,\frac{\partial\Omega}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial\Omega}{\partial t}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

c'est-à-dire qu'on retrouve bien le système (15) du n° 15.

Et un raisonnement semblable à celui du début du paragraphe actuel donne, pour l'élément de contact associé au point (x) de la trajectoire, la condition

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} \delta x_i = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire redonne les formules (19) du n° 15 :

$$p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

22. Il nous reste à montrer que *les conditions trouvées suffisent pour qu'on ait vraiment un minimum, si l'on suppose*, comme au n° 19, *que l'onde élémentaire est concave vers son origine.*

Cela tient à une relation remarquable entre le problème actuel et le problème traité aux n^{os} 18, 19.

Soit (T) une trajectoire, issue de (x^0) à l'instant t_0; soit (x) l'un quelconque de ses points; et soit θ l'instant qui correspond à (x) sur la trajectoire. Soit (C) une courbe voisine de (T), allant aussi de (x^0) à (x); et soit t le temps que mettrait l'ébranlement, produit en (x^0) à l'instant t_0, à se propager jusqu'en (x) le long de (C). Il s'agit de prouver que la différence $(t - \theta)$ est positive, si (C) est suffisamment voisine de (T).

Considérons à cet effet l'élément $(x^0 | p^0)$ associé à T en son point de départ (x^0), et concevons une onde origine $\mathfrak{M}_0$ ayant cet élément $(x^0 | p^0)$ pour l'un de ses éléments de contact, et que nous supposerons produite à l'instant t_0. Dans la propagation de cette onde, l'élément $(x^0 | p^0)$ va suivre la trajectoire; et, de l'instant t_0 à l'instant t, l'onde passera successivement par tous les points de l'arc de trajectoire considéré.

Nous admettrons que l'on puisse choisir $\mathfrak{M}_0$ de manière que, dans les mêmes conditions, l'onde passe aussi successivement par tous les points de l'arc de comparaison (C).

Soit alors

$$F(x_1, \ldots, x_n) = t \tag{1}$$

l'équation générale (*voir* n^{os} 11 et suivants) de la famille d'ondes considérée. En chaque point de (T) nous avons (*voir* n° 12)

$$(2) \qquad p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

de sorte que la formule

$$(3) \qquad dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i,$$

qui donne la durée de la propagation le long de (T), est équivalente à

$$(4) \qquad dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = dF.$$

Cette formule donnera donc la même valeur θ pour la durée de la propagation de (x^0) en (x) le long de (T), qu'on l'intègre le long de (T) ou le long de (C).

Donc θ est la valeur de l'intégrale de l'équation différentielle (3), prise le long de (C), dans les mêmes conditions qu'au n° 19, lorsque $p_1, \ldots, p_k$ ont les valeurs (2). Et t est la valeur de cette intégrale, quand on intègre le long de la même courbe (C), avec les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$ données par les formules

$$(5) \qquad p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial \, dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Enfin, les valeurs (5) et les valeurs (2) sont aussi voisines qu'on veut, car elles se réduisent les unes aux autres, quand (C) coïncide avec (T); et (C) est aussi voisine de (T) qu'on veut.

On se trouve donc, pour t et θ, exactement dans les conditions du n° 19; et l'on doit conclure que $(t - \theta)$ est positif. C'est précisément ce qu'il fallait établir.

On voit donc bien que *l'existence d'un maximum pour le problème du* n° 18 *et l'existence d'un minimum pour le problème du* n° 20, *ou inversement, sont corrélatives.*

C'est la relation entre ces deux problèmes que nous avions annoncée.

Lyon, le 15 novembre 1908.