W. STEKLOFF

Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale dont les parties s'attirent suivant la loi de Newton

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 275-336
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__275_0>

PROBLÈME DU MOUVEMENT

D'UNE

MASSE FLUIDE INCOMPRESSIBLE

DE LA

FORME ELLIPSOIDALE DONT LES PARTIES S'ATTIRENT

SUIVANT LA LOI DE NEWTON;

PAR M. W. STEKLOFF.

(SUITE.)

CHAPITRE III.

MOUVEMENT DE L'ELLIPSOIDE FLUIDE A TROIS AXES INÉGAUX.

Cas où l'ellipsoïde fluide ne change pas la grandeur de ses axes pendant le mouvement.

1. Dans son Mémoire, cité plus haut, Riemann a indiqué deux cas possibles du mouvement du liquide, où sa surface libre conserve, pendant le mouvement, la forme de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

Les mouvements dont il s'agit correspondent à la supposition que l'une ou deux des trois paires

$$(\alpha) \qquad (u, u'), \quad (v, v'), \quad (w, w'),$$

u, u', v, v', w, w' étant les variables de Riemann (*voir* Chap. I, n° 8), soient égales à zéro.

Dans le premier cas le mouvement du liquide est stationnaire et l'ellipsoïde se tourne autour de son centre, comme un corps solide; dans le second cas le mouvement n'est pas, en général, stationnaire, mais il peut se réduire à celui-ci sous certaines suppositions particulières.

Riemann a posé ensuite la question suivante :

Trouver toutes les solutions particulières des équations différentielles du mouvement correspondant à la supposition que les quantités a, b, c (les demi-axes de l'ellipsoïde) restent constantes.

Son analyse, dont il n'a pas reproduit des détails, l'a conduit à la conclusion que *la condition que l'un ou deux des trois couples* (α) *soient égaux à zéro est non seulement suffisante, mais encore nécessaire pour qu'on puisse satisfaire aux équations du mouvement par les valeurs constantes des inconnues a, b et c* [1].

L'étude détaillée du problème, posé dans la première Partie de mon Mémoire, m'a conduit à deux solutions particulières des équations du mouvement, où $a = b$ et c restent constantes, tandis qu'aucun des couples (α) ne s'annule et les quantités u, u', v, v', w, w' dépendent explicitement de t.

J'ai obtenu ainsi, au point de vue de l'Analyse pure, de nouvelles solutions particulières qui ne peuvent pas être déduites des équations du mouvement, si l'on essaye à les satisfaire en posant

$$a = b = \text{const.}, \qquad c = \text{const.}$$

et en égalant en même temps à zéro l'un ou deux des trois couples (α).

Donc, à ce point de vue, la proposition énoncée plus haut est inexacte et perd son sens dans le cas d'un ellipsoïde de révolution.

Si nous allons abandonner les considérations purement analytiques en attribuant le sens mécanique à toutes les quantités qui figurent dans les équations du mouvement, nous ferons correspondre à chaque solution un mouvement possible de l'ellipsoïde fluide.

En tenant compte de ce que les solutions particulières, indiquées au n° 6 de la première Partie du Mémoire présent, sont nouvelles au

---

(1) *Comparer* les Mémoires suivants : M. Padova, *Sul moto di un ellissoïde fluido et oniageneo* (Tesi presentata alla Scuola Normale super. di Pisa, 1869, p. 46, 47). — M. O. Tedone, *Il moto di un ellipsoïde fluido secondo l'ipotesi di Dirichlet* (Pisa, 1894).

Ces travaux, publiés dans les recueils très peu répandus, m'ont échappé lors de la composition du Mémoire présent. C'est seulement lorsqu'il était déjà sous presse que j'ai reconnu les recherches tout à l'heure mentionnées, grâce à l'indication aimable de M. T. Levi-Civita.

point de vue purement analytique, j'en ai conclu que les mouvements possibles correspondant à ces solutions (n° 10, p. 524-527 de la première Partie de ce Mémoire) sont aussi nouveaux et non stationnaires.

Mais cette dernière conclusion est inexacte.

En effet, M. S. Tchapliguine, dans une lettre du 19 avril 1909, a attiré mon attention sur ce fait que les mouvements du n° 6, page 516 de la première Partie de ce Mémoire (octobre 1908), ne diffèrent pas, au fond, de ceux qui correspondent à la supposition particulière $r=0$.

Je crois de mon devoir, en profitant de la permission de M. Tchapliguine, d'exposer brièvement ses remarques sur ce sujet. Les équations (27), (28) et (29) (p. 516) conduisent aux équations

$$\frac{dp}{dt}=rq, \qquad \frac{dq}{dt}=-rp.$$

Désignant par δ, δ' et δ'' les cosinus des angles que fait ω, la projection de la vitesse angulaire sur le plan équatorial de l'ellipsoïde, avec les axes mobiles ξ, η, ζ, on trouve

$$\frac{d\delta}{dt}=r\delta'-q\delta'', \qquad \frac{d\delta'}{dt}=p\delta''-r\delta, \qquad \frac{d\delta''}{dt}=q\delta-p\delta'.$$

Il s'ensuit que la direction de ω reste fixe dans l'espace et que la surface de l'ellipsoïde tourne uniformément autour de cet axe fixe. Cela posé, introduisons le système des coordonnées OX_1, OY_1, OZ_1, en prenant pour OX_1 la direction fixe de ω, pour OZ_1 l'axe de révolution de l'ellipsoïde, pour OY_1 une direction perpendiculaire au plan X_1OZ_1. Désignant par φ l'angle que fait l'axe OX_1 avec l'axe des ξ, on peut présenter les composantes u, v, w de la vitesse absolue du point ξ, η, ζ du liquide, suivant les axes ξ, η, ζ, sous la forme suivante :

$$(\beta) \quad u=-\frac{\omega}{\sigma}\zeta\sin\varphi, \qquad v=-\frac{\omega}{\sigma}\zeta\cos\rho, \qquad w=-\varepsilon\frac{\omega}{1-\varepsilon\sigma}(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi).$$

Désignant ensuite par U, V, W les projections de la vitesse absolue sur les axes OX_1, OY_1 et OZ_1, on en tire immédiatement

$$U=0, \qquad V=-\frac{\omega}{\sigma}z, \qquad W=-\frac{\varepsilon\omega}{1-\varepsilon\sigma}y,$$

y et z étant les coordonnées du point ξ, η, ζ par rapport aux axes OX_1, OY_1, OZ_1.

Les dernières équations montrent que le mouvement défini par les équations (β) (*voir* p. 524-527 de la première Partie de ce Mémoire) se réduit à un mouvement stationnaire et ne diffère pas, au fond, du mouvement correspondant à la supposition particulière $\varphi = 0$ ou, ce qui revient au même, $r = 0$.

D'après ces remarques, on peut exprimer les résultats des recherches de la première Partie de ce Mémoire comme il suit :

Les seuls cas possibles du mouvement d'une masse fluide incompressible, dont les parties s'attirent suivant la loi de Newton et dont la surface libre conserve, sous la pression extérieure constante, la forme d'un ellipsoïde de révolution, sont les suivants :

1° *Le mouvement de Dirichlet, possible pour un ellipsoïde aplati aussi bien que pour un ellipsoïde allongé;*

2° *Deux cas du mouvement, indiqués au n°* 10 (p. 524-527) *de la première Partie de ce Mémoire, qui ne sont possibles que pour un ellipsoïde allongé et qui se réduisent, de la manière indiquée plus haut, aux mouvements stationnaires.*

Ces trois cas sont les seuls possibles pour un ellipsoïde de révolution, de sorte qu'il n'en existe pas d'autres différents de ceux-ci.

2. Le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide de révolution étant ainsi complètement résolu, passons à l'étude du mouvement d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Nous pouvons maintenant nous borner au cas où le produit

$$\delta = (b - c)(c - a)(a - b)$$

reste différent de zéro, ce que nous allons toujours supposer dans ce qui va suivre.

Proposons-nous à résoudre la question suivante :

Trouver tous les cas possibles du mouvement d'un ellipsoïde À TROIS AXES INÉGAUX *sous la supposition que les demi-axes a, b, c restent constants pendant le mouvement* (problème de Riemann).

Supposons que

$$a = \text{const.}, \qquad b = \text{const.}, \qquad c = \text{const.}, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$(1_1) \qquad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Les équations (43) deviennent

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= (x_3+y_3)r - (x_2+y_2)q - x_2y_2 - x_3y_3 = \frac{2\lambda}{a} + 2\mathrm{A}, \\ f_2 &= (x_1+y_1)p - (x_3+y_3)r - x_3y_3 - x_1y_1 = \frac{2\lambda}{b} + 2\mathrm{B}, \\ f_3 &= (x_2+y_2)q - (x_1+y_1)p - x_1y_1 - x_2y_2 = \frac{2\lambda}{c} + 2\mathrm{C}. \end{aligned} \right.$$

Multipliant ces équations respectivement par a, b et c et additionnant les résultats, on trouve

$$6\lambda + 2(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c) = bx_1^2 + cy_1^2 + cx_2^2 + ay_2^2 + ax_3^2 + by_3^2.$$

Or, dans le cas considéré l'intégrale de forces vives (52_1) (Chap. I) donne, en vertu de (1) et (1_1),

$$(2_1) \qquad bx_1^2 + cy_1^2 + cx_2^2 + ay_2^2 + ax_3^2 + by_3^2 = \text{const.}$$

Donc

$$\lambda = \text{const.}$$

Il s'ensuit que dans les conditions (1) les équations du mouvement (41) et (42) admettent les trois intégrales suivantes

$$(2_2) \qquad f_1 = \text{const.}, \qquad f_2 = \text{const.}, \qquad f_3 = \text{const.}$$

Introduisons au lieu des variables x_i et y_i les variables z_1, z_2, z_3; p, q et r du n° 7 du Chapitre I.

Les intégrales (2_2) deviennent

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= c(a-b)(3b+a)r^2 - b(c-a)(a+3c)q^2 \\ &\quad + 2b(c-a)qz_2 - 2c(a-b)rz_3 + bz_2^2 + cz_3^2 = \text{const.}, \\ \varphi_2 &= a(b-c)(3c+b)p^2 - c(a-b)(b+3a)r^2 \\ &\quad + 2c(a-b)rz_3 - 2a(b-c)pz_1 + cz_3^2 + az_1^2 = \text{const.}, \\ \varphi_3 &= b(c-a)(3a+c)q^2 - a(b-c)(c+3b)p^2 \\ &\quad + 2a(b-c)pz_1 - 2b(c-a)qz_2 + az_1^2 + bz_2^2 = \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Les dérivées

$$\frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \frac{d\varphi_3}{dt}$$

doivent s'annuler, en vertu des équations différentielles (46) et (47).

En effectuant le calcul on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(4) \qquad && M(b-c) + cqz_1z_3 - brz_1z_2 - cb(b-c)pqr = 0,\\
&(5) \qquad && M(c-a) + arz_2z_1 - cpz_2z_3 - ac(c-a)pqr = 0,\\
& && M(a-b) + bpz_3z_2 - aqz_3z_1 - ba(a-b)pqr = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$M = az_1qr + bz_2rp + cz_3pq - \omega pqr = S - \omega pqr,$$
$$\omega = bc + ca + ab.$$

L'une des équations précédentes est une simple conséquence des deux autres.

Les équations (4) et (5) donnent

$$(6) \qquad pz_2z_3(b-c) + qz_3z_1(c-a) + rz_1z_2(a-b) + \delta pqr = 0.$$

Multiplions maintenant (4) par $a(c-a)$, (5) par $b(b-c)$, et retranchons les résultats.

On trouve

$$(7) \quad M\delta + bc(b-c)pz_2z_3 - ac(c-a)qz_1z_3 + ab(a-b)rz_1z_2 = M\delta + T = 0,$$

où l'on a posé

$$T = bc(b-c)pz_2z_3 + ac(c-a)qz_1z_3 + ab(a-b)rz_1z_2.$$

Multiplions les équations (47) du Chapitre I respectivement par $bc(b-c)$, $ca(c-a)$, $ab(a-b)$, et additionnons les résultats.

On obtient, eu égard à (1_1),

$$\begin{aligned}
&abc\frac{d}{dt}[p^2(b-c)^2 + q^2(c-a)^2 + r^2(a-b)^2]\\
&\quad = T - S\delta + [\mu_1 bc(b-c) + \mu_2 ca(c-a) + \mu_3 ab(a-b)]pqr.
\end{aligned}$$

Or,

$$\mu_1 bc(b-c) + \mu_2 ca(c-a) + \mu_3 ab(a-b) = \delta a.$$

On a donc, eu égard à (7),

$$abc\frac{d}{dt}[p^2(b-c)^2+q^2(c-a)^2+r^2(a-b)^2]$$
$$=-T-(S-\omega pqr)\delta=-(T+M\delta)=0.$$

Donc, les équations du mouvement admettent, dans l'hypothèse (1) faite sur a, b et c, l'intégrale suivante :

$$\psi_1=p^2(b-c)^2+q^2(c-a)^2+r^2(a-b)^2=\text{const.},\tag{8}$$

ou, en vertu de (40) du Chapitre I,

$$(bx_1+cy_1)^2+(cx_2+ay_2)^2+(ax_3+by_3)^2=\text{const.}\tag{9}$$

2. Additionnons maintenant les équations (2).

On trouve, en se rappelant que $\lambda=\text{const.}$,

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\text{const.},\tag{10}$$

ce qui exige qu'on ait

$$\frac{d}{dt}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=0,$$

en vertu des équations (41) et (42) du Chapitre I.

On obtient ainsi la relation suivante :

$$x_1x_2x_3+y_1y_2y_3=0.\tag{11}$$

On voit donc que, dans le cas considéré, les variables x_i et y ($i=1, 2, 3$) doivent satisfaire aux équations (50), (51), (2_1), (9), (10) et (11) qui se réduisent aisément aux six équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\psi_1=bx_1^2+cx_2^2+ax_3^2+cy_1^2+ay_2^2+by_3^2=\text{const.},\\
&\psi_2=b^2x_1^2+c^2x_2^2+a^2x_3^2+c^2y_1^2+a^2y_2^2+b^2y_3^2=\text{const.},\\
(12)\quad&\psi_3=bcx_1^2+cax_2^2+abx_3^2+bcy_1^2+cay_2^2+aby_3^2=\text{const.},\\
(13)\quad&\psi_4=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\text{const.},\\
&\psi_5=bcx_1y_1+cax_2y_2+abx_3y_3=\text{const.},\\
(14)\quad&\psi_6=x_1x_2x_3+y_1y_2y_3=0.
\end{aligned}$$

Nous allons distinguer deux cas différents :

1° Chacune des paires

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3)$$

reste différente de zéro, ou

2° Au moins l'une de ces paires s'annule.

Considérons le premier cas.

Il est aisé de s'assurer que le jacobien

$$D = \frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6)}{D(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)}$$

de six fonctions ψ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ n'est pas égal identiquement à zéro.

En posant, en effet,

$$x_1 = x_2 = y_3 = 0, \qquad x_3 = y_1 = y_2 = 1,$$

on trouve aisément

$$D = -\delta = -(b-c)(c-a)(a-b),$$

une quantité différente de zéro, d'après l'hypothèse faite sur δ $(\delta \lessgtr 0)$.

Les équations (12) forment donc un système de six équations indépendantes qui ne peuvent être satisfaites que par des valeurs constantes de x_i et y_i $(i = 1, 2, 3)$.

Abstraction faite du cas où δ s'annule, on peut affirmer que, s'il existe un mouvement du liquide correspondant à la supposition que la surface libre du liquide conserve la forme d'un ellipsoïde *à trois axes inégaux,* qui ne changent pas leur grandeur pendant le mouvement, et que chacune des trois paires

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3) \tag{14$_1$}$$

reste différente de zéro, ce mouvement doit être nécessairement stationnaire, c'est-à-dire on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 = \text{const.}, & x_2 = \text{const.}, & x_3 = \text{const.}, \\ p = \text{const.}, & q = \text{const.}, & r = \text{const.} \end{array}\right. \tag{15}$$

Il importe de remarquer que cette conclusion peut devenir inexacte, si δ ou l'une des paires (14$_1$) s'annulent.

Supposons, par exemple, que

$$a = b, \qquad x_3 = y_3 = 0.$$

Les équations (12) se réduisent aux trois suivantes :

$$\begin{gathered} a\ x_1^2 + c\ x_2^2 + c\ y_1^2 + a\ y_2^2 = \text{const.}, \\ a^2 x_1^2 + c^2 x_2^2 + c^2 y_1^2 + a^2 y_2^2 = \text{const.}, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 = \text{const.}, \end{gathered}$$

contenant quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2, qui peuvent ne pas être égales à des constantes, comme nous l'avons déjà vu dans le Chapitre II.

3. Multiplions les équations (46) successivement par az_1, bz_2, cz_3 et additionnons les résultats.

On trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(az_1^2 + bz_2^2 + cz_3^2) = pz_2 z_3(b - c) + qz_1 z_3(c - a) + rz_1 z_2(a - b) = \text{R},$$

d'où l'on conclut que dans le cas considéré

$$\text{R} = 0, \tag{16}$$

car, en vertu de (15) et (45) du Chapitre I,

$$z_1 = \text{const.}, \qquad z_2 = \text{const.}, \qquad z_3 = \text{const.},$$

Les équations (16) et (6) (du numéro précédent) conduisent à la suivante :

$$\delta pqr = 0.$$

Il s'ensuit que, dans le cas d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, au moins l'une des quantités

$$p, \quad q, \quad r$$

doit être égale à zéro.

Supposons, pour fixer les idées, que

$$p = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (40) du Chapitre I,

$$bx_1 + cy_1 = 0,$$

Supposant d'abord que

$$x_1 \quad \text{et} \quad x_2$$

soient différents de zéro, on trouve

$$y_1 = -\frac{b}{c} x_1. \tag{17}$$

Les équations (2) donnent [*voir* l'équation (13)]

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \text{const.}, \tag{18}$$

car λ, a, b et c ne dépendent pas de t.

Posant maintenant dans (41) et (42) du Chapitre I

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

on obtient [*voir* l'équation (11)]

$$x_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_2 = 0,$$

d'où l'on tire, eu égard à (17),

$$c x_2 x_3 - b y_2 y_3 = 0, \tag{19}$$

car, d'après l'hypothèse faite, x_1 est différent de zéro.

On doit donc avoir

$$c(x'_2 x_3 + x'_3 x_2) - b(y'_2 y_3 + y'_3 y_2) = 0;$$

d'où l'on tire, en tenant compte des équations (b), (c) (41) et (b), (c) (42) du Chapitre I,

$$r(x_3 + y_3) - q(x_2 + y_2) - 2x_3 y_3 - 2x_2 y_2 = 0.$$

Retranchant cette équation de la première des équations (2), on trouve

$$x_2 y_2 + x_3 y_3 = \text{const.},$$

d'où, en tenant compte de (18),

$$x_1 y_1 = \text{const.},$$

c'est-à-dire, en vertu de (17),

$$x_1 = \text{const.}, \qquad y_1 = \text{const.} \tag{20}$$

4. Ces équations conduisent, en vertu de (a) (41) et (a) (42) du Chapitre I, aux intégrales suivantes :

$$y_2(y_3 - r) - q y_3 = 0, \qquad x_2(x_3 + r) + q x_3 = 0,$$

qui peuvent s'écrire, en vertu de (40) du Chapitre I, sous la forme

$$\begin{aligned} a(c+b-2a)y_2 y_3 + a(c-a)y_2 x_3 - c(a-b)y_3 x_2 &= 0,\\ a(c+b-2a)x_2 x_3 - a(a-b)y_2 x_3 + b(c-a)x_2 y_3 &= 0. \end{aligned}$$

De ces égalités on tire, eu égard à (19),

$$\frac{y_2}{cb x_2} = \frac{y_3}{a^2 x_3} = \lambda.$$

Substituant maintenant ces expressions de y_2 et y_3 dans (19), on trouve

$$c x_2 x_3 (1 - \lambda^2 b^2 a^2) = 0.$$

Supposons d'abord que x_2 et x_3 soient différents de zéro.

Dans cette hypothèse on doit avoir

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{ba}, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

et

$$y_2 = \varepsilon \frac{c}{a} x_2, \qquad y_3 = \varepsilon \frac{a}{b} x_3. \tag{21}$$

Si $\varepsilon = -1$, on aura, en vertu de (40) (Chap. I),

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0,$$

c'est-à-dire l'ellipsoïde ne change pas la direction de ses axes.

Nous allons considérer ce cas particulier plus tard.

Si $\varepsilon = +1$, on aura

$$y_2 = \frac{c}{a} x_2, \qquad y_3 = \frac{a}{b} x_3$$

et, en vertu de (40) du Chapitre I,

$$p = 0, \qquad q = \frac{2cx_2}{c-a}, \qquad r = \frac{2ax_3}{a-b}.$$

Substituant (17) et (21) dans les équations (a) (41) et (a) (42) (Chap. I), on trouve

$$(a-b)(c-a)bx'_1 + c\mu_1 x_2 x_3 = 0,$$
$$(a-b)(c-a)bx'_1 - c\mu_1 x_2 x_3 = 0.$$

On en conclut que

$$x_2 \quad \text{ou} \quad x_3 = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse faite.

Le mouvement correspondant à l'hypothèse faite est donc impossible.

5. Considérons maintenant le cas où l'une des quantités x_2 ou x_3 est égale à zéro.

Supposons que

$$x_2 = 0.$$

On trouve, en vertu de l'équation (a) (41) (Chap. I),

$$q x_3 = 0,$$

c'est-à-dire : ou

$$q = 0, \quad \text{ou} \quad x_3 = 0.$$

Si $q = 0$, on a, eu égard à (b) (40),

$$y_2 = 0.$$

Les équations (b) (40) et (b) (41) du Chapitre I donnent

$$y_1(y_3 - r) = 0, \qquad x_1(x_3 - r) = 0,$$

d'où

$$y_3 = x_3 = r = \frac{ax_3 + by_3}{a-b},$$

c'est-à-dire

$$x_3 = y_3 = 0, \qquad r = 0.$$

Donc un seul cas du mouvement possible, sous l'hypothèse faite, est celui où p, q et r s'annulent à la fois.

Si

$$x_3 = 0,$$

on a, en vertu de (c) (41),

$$y_1(y_3 - r) = 0,$$

c'est-à-dire

$$y_3 = r = \frac{by_3}{a-b}, \qquad y_3 = 0.$$

Il s'ensuit que

$$r = 0$$

et, en vertu de (c) (42),

$$q = 0.$$

On retombe de nouveau au cas où p, q et r s'annulent à la fois.

Nous obtiendrons le même résultat si, au lieu de

$$x_2 = 0,$$

nous supposons (au début de ce numéro) que $x_3 = 0$.

6. Les recherches précédentes montrent que l'hypothèse que x_1 et y_1 soient des constantes différentes de zéro est, en général, inadmissible, au moins si l'une des quantités p, q et r est différente de zéro.

On doit donc supposer que [hypothèse (2) du n° 2]

$$x_1 = y_1 = 0, \qquad p = 0.$$

Dans ce cas on trouve, eu égard aux équations (b), (c) (41) et (b), (c) (42) du Chapitre I,

$$x_2 = \text{const.}, \qquad x_3 = \text{const.}, \qquad y_2 = \text{const.}, \qquad y_3 = \text{const.}$$

Les constantes x_2, x_3, y_2 et y_3 doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y_2 y_3 + r y_2 - q y_3 = 0, \\ & x_2 x_3 + r x_2 - q x_3 = 0 \end{aligned} \right.$$

et aux trois équations (43) du Chapitre I.

Il faut distinguer deux cas différents :

a. Chacune des deux paires

$$(x_2, y_2), \qquad (x_3, y_3) \tag{23}$$

reste différente de zéro, ou

b. L'une des paires (23) s'annule.

Dans le premier cas q et r restent différents de zéro et l'ellipsoïde fluide se tourne autour d'un axe, situé dans son plan principal; dans le second l'une des composantes q, r s'annule et le mouvement d'entraînement se réduit à la rotation de l'ellipsoïde autour d'un de ses axes principaux.

Nous retombons ainsi à deux cas du mouvement stationnaire, indiqués par Riemann.

Il faut encore ajouter le cas où p, q et r s'annulent à la fois, c'est-à-dire l'ellipsoïde fluide ne change pas la direction de ces axes pendant le mouvement.

Supposant que

$$p = q = r = 0,$$

on trouve, en vertu de (40) du Chapitre I,

$$y_1 = -\frac{b}{c}x_1, \qquad y_2 = -\frac{c}{a}x_2, \qquad y_3 = -\frac{a}{b}x_3.$$

Les équations (41) et (42) conduisent aux suivantes :

$$\begin{aligned} bx'_1 - cx_2x_3 &= 0, & bx'_1 + cx_2x_3 &= 0, \\ cx'_2 - ax_3x_1 &= 0, & cx'_2 + ax_3x_1 &= 0, \\ ax'_3 - bx_1x_2 &= 0, & ax'_3 + bx_1x_2 &= 0, \end{aligned}$$

qui exigent que deux des quantités x_1, x_2, x_3 s'annulent et la troisième reste constante pendant le mouvement.

Supposons, pour fixer les idées, que

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_3 = \text{const.}$$

Les équations (43) deviennent

$$-\frac{a}{b}x_3^2 = \frac{2\lambda}{a} + 2A,$$

$$-\frac{a}{b}x_3^2 = \frac{2\lambda}{b} + 2B,$$

d'où

$$\frac{\lambda}{c} + C = 0,$$

$$(23) \qquad -\frac{a}{b}x_3^2 = 2\left(A - \frac{Cc}{a}\right), \qquad -\frac{a}{b}x_3^2 = 2\left(B - \frac{Cc}{b}\right).$$

Ces équations exigent qu'on ait

$$c > a, \qquad c > b$$

et

$$(24) \qquad b(Aa - Cc) = a(Bb - Cc).$$

Ces conditions étant remplies, les équations (23) se réduisent à une seule et déterminent la valeur de x_3.

Nous avons ici un cas connu du mouvement, indiqué par Dirichlet (*voir* aussi Kirchhoff, *Vorlesungen über mathemat. Physik.*).

L'analyse précédente conduit au théorème suivant :

Les seuls cas possibles du mouvement du liquide, limité par une surface ellipsoïdale, où l'ellipsoïde tourne, comme un corps solide, autour de son centre, sont les suivants :

Deux cas du mouvement, indiqués par Riemann, ayant lieu pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux, et un cas particulier du mouvement de Dirichlet, tout à l'heure mentionné, possible sous la supposition qu'il existe la relation (24) *entre les constantes a, b et c.*

7. Passons à l'étude du mouvement, défini par les conditions

$$(25) \qquad x_1 = 0, \qquad y_1 = 0 \qquad \text{et, par suite,} \qquad p = 0.$$

Prenons les équations du mouvement sous la forme indiquée au n° 7 du Chapitre I, en introduisant au lieu des variables x_i et y_i les nouvelles inconnues z_i et p, q, r [*voir* les équations (45) du Chapitre I].

Les équations (45) donnent, en vertu de (25),

$$z_1 = 0.$$

Les équations (46) du Chapitre I deviennent

$$(26)\qquad r z_2 - q z_3 = 0,$$
$$z_2 = \text{const.},\qquad z_3 = \text{const.}$$

Quant aux équations (47), elles prennent la forme

$$(27)\qquad -z_2 z_3 + q(c-a)z_3 - r(a-b)z_2 + \mu_1 qr = 0,$$
$$(27_1)\qquad q = \text{const.},\qquad r = \text{const.}$$

L'équation (26) donne

$$(28)\qquad z_2 = \sigma q,\qquad z_3 = \sigma r.$$

Substituant ces expressions de z_2 et z_3 dans (27), on obtient l'équation pour σ

$$(29)\qquad \sigma^2 - \sigma(c+b-2a) - \mu_1 = 0,\qquad \mu_1 = 3a^2 - bc - ca - ab,$$

ayant pour racines

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{c+b-2a+\sqrt{(c+b-2a)^2+4\mu_1}}{2},\\ \sigma_2 &= \frac{c+b-2a-\sqrt{(c+b-2a)^2+4\mu_1}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Pour que le mouvement soit possible, il faut qu'on ait

$$\begin{aligned}(c+b-2a)^2+4\mu_1 &= 16a^2 - 8a(c+b) + (c-b)^2\\ &= [4a-(\sqrt{c}+\sqrt{b})^2][4a-(\sqrt{c}-\sqrt{b})^2] \geqq 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(31)\qquad 4a > (\sqrt{c}+\sqrt{b})^2,$$

ou

$$(32)\qquad 4a < (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2.$$

8. Passons aux équations (48) (Chap. I) qui prennent, dans le cas

considéré, en vertu de (28), la forme

$$\begin{gathered}[c(a-b)(3b+a)-2c(a-b)\sigma+c\sigma^2]r^2\\ -[b(c-a)(a+3c)-2b(c-a)\sigma-b\sigma^2]q^2=8v_0\left(\frac{\lambda}{a}+\mathrm{A}\right),\\ cr^2[\sigma^2-(a-b)(b+3a)+2\sigma(a-b)]=8v_0\left(\frac{\lambda}{b}+\mathrm{B}\right),\\ bq^2[\sigma^2+(c-a)(3a+c)-2\sigma(c-a)]=8v_0\left(\frac{\lambda}{c}+\mathrm{C}\right);\end{gathered}$$

d'où, en substituant au lieu de σ^2 son expression à l'aide de (29) et en posant

$$\sigma=a-\rho,$$

on tire

$$b(b+\rho)(4a-3b-c)cr^2+c(c+\rho)(4a-3c-b)bq^2=8v_0\left(\frac{\lambda}{a}+\mathrm{A}\right), \tag{33}$$

$$(b+\rho)cr^2(b-c)=8v_0\left(\frac{\lambda}{b}+\mathrm{B}\right), \tag{34}$$

$$(c+\rho)bq^2(b-c)=-8v_0\left(\frac{\lambda}{c}+\mathrm{C}\right). \tag{35}$$

Quant à ρ, il satisfait à l'équation

$$\rho^2+\rho(c+b-4a)+bc=(\rho+b)(\rho+c)-4a\rho=0. \tag{36}$$

Posons, pour plus de simplicité,

$$bq^2(\rho+c)=\eta,\qquad cr^2(\rho+b)=\zeta. \tag{37}$$

Les équations (33), (34) et (35) deviennent

$$(4a-3b-c)\zeta+(4a-3c-b)\eta=8v_0\left(\frac{\lambda}{a}+\mathrm{A}\right), \tag{38}$$

$$(b-c)\zeta=8v_0\left(\frac{\lambda}{b}+\mathrm{B}\right), \tag{39}$$

$$(b-c)\eta=-8v_0\left(\frac{\lambda}{c}+\mathrm{C}\right); \tag{40}$$

d'où l'on tire, en éliminant ζ et η,

$$(4a-3b-c)\left(\frac{\lambda}{b}+\mathrm{B}\right)-(4a-3c-b)\left(\frac{\lambda}{c}+\mathrm{C}\right)-\left(\frac{\lambda}{a}+\mathrm{A}\right)(b-c)=0,$$

ou, en vertu de (α) du Chapitre I,

$$\lambda D = -\pi v_0 \sqrt{v_0} \int_0^\infty \left[\frac{4a - b - c + 2u}{(b+u)(c+u)} + \frac{1}{a+u} \right] \frac{du}{\Delta(u)}.$$

Substituant cette expression de λ dans (39) et (40), on trouve

$$\frac{b-c}{b-a} D\eta = \mu \int_0^\infty [4a^2 + a(b-c) - bc + (4a - c)u] \frac{u\,du}{\Delta^3(u)}, \tag{41}$$

$$\frac{b-c}{a-c} D\zeta = \mu \int_0^\infty [4a^2 - a(b-c) - bc + (4a - b)u] \frac{u\,du}{\Delta^3(u)}, \tag{42}$$

où

$$D = 4a^2 - a(b+c) + bc, \qquad \mu = 8\pi v_0 \sqrt{v_0} > 0. \tag{43}$$

9. Nous avons déjà vu que le problème n'est possible que sous les suppositions (31) ou (32).

Remplaçons a, b et c respectivement par a^2, b^2 et c^2.

L'inégalité (31) devient

$$a \geqq \frac{b+c}{2}. \tag{44}$$

Supposons, pour fixer les idées, que

$$b > c.$$

L'inégalité (44) montre que dans le cas considéré

$$a > c.$$

Nous avons deux cas à distinguer :

$$a > b > c, \tag{a}$$

$$b > a > c. \tag{b}$$

Remarquons d'abord que, en vertu de (44), on a toujours

$$D = 4a^4 - a^2(b^2 + c^2) + b^2c^2 > 0,$$

et les racines de l'équation (36) sont positives.

Écrivons maintenant les équations (41) et (42) sous la forme

$$(41_1) \quad \frac{b^2-c^2}{b^2-a^2} D\eta = \mu \int_0^{\infty} [4a^4 + a^2(b^2-c^2) - b^2c^2 + (4a^2-c^2)u] \frac{u\,du}{\Delta^3(u)},$$

$$(42_1) \quad \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} D\zeta = \mu \int_0^{\infty} [4a^4 - a^2(b^2-c^2) - b^2c^2 + (4a^2-b^2)u] \frac{u\,du}{\Delta^3(u)}.$$

On a toujours, pourvu que a satisfasse à l'inégalité (44),

$$4a^4 + a^2(b^2-c^2) - b^2c^2 = a^2(4a^2-c^2) + b^2(a^2-c^2) > 0,$$
$$4a^2 - c^2 > 0, \qquad 4a^2 - b^2 > 0.$$

Donc, l'intégrale du second membre de l'équation (41_1) est positive.

D'autre part, les inégalités (37) montrent que, dans le cas considéré,

$$\eta > 0, \qquad \zeta > 0.$$

Il s'ensuit que, dans le cas (a),

$$\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2} D\eta < 0.$$

On en conclut que l'hypothèse

$$a > b > c$$

est inadmissible.

Il ne nous reste qu'à considérer le second cas (b).

Dans ce cas on a

$$\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2} D\eta > 0, \qquad \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} D\zeta > 0.$$

Les équations (41_1) et (42_1) donneront les valeurs réelles pour q et r.

Nous avons déjà vu que le second membre de l'équation (41_1) est positif. Il suffit de montrer qu'il en est de même de l'intégrale du second membre de l'équation (42_1).

On a, en effet,

$$4a^2 - (b+c)^2 > 0, \qquad 4a^2 + c^2 - b^2 > 2c(b+c).$$

Par conséquent, en vertu de (44),

$$4a^4 + a^2(c^2 - b^2) > 2a^2c(b+c) > \frac{c}{2}(b+c)^2 > b^2c^2.$$

Donc, le second membre de l'équation (42_1) est positif.

Les conditions de la possibilité du problème s'expriment comme il suit :

$$b > a \geqq \frac{b+c}{2}. \tag{45}$$

10. Supposant maintenant que les demi-axes de l'ellipsoïde satisfassent aux inégalités (45), désignons par M_1^2 et M_2^2 les seconds membres des équations (41_1) et (42_1), par ρ_1 et ρ_2 les racines de l'équation (36).

Résolvant (41_1) et (42_1) par rapport à q et r, on trouve

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \pm\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\frac{M_1}{b\sqrt{\rho_i+c^2}} \\ r_i &= \pm\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\frac{M_2}{c\sqrt{\rho_i+b^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (i=1,2),$$

et puis, en tenant compte de (25), (28) ainsi que de (40) et (45) du Chapitre I,

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0,$$

$$x_2^{(i)} = \pm\frac{c^2-\rho_i}{2c^2b\sqrt{D}}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\frac{M_1}{\sqrt{\rho_i+c^2}},$$

$$x_3^{(i)} = \pm\frac{2a^2-b^2-\rho_i}{2a^2c\sqrt{D}}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\frac{M_2}{\sqrt{\rho_i+b^2}};$$

$$y_2^{(i)} = \pm\frac{c^2-2a^2+\rho_i}{2a^2b\sqrt{D}}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\frac{M_1}{\sqrt{\rho_i+c^2}},$$

$$y_3^{(i)} = \pm\frac{\rho_i-b^2}{2b^2c\sqrt{D}}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\frac{M_2}{\sqrt{\rho_i+b^2}}.$$

Substituant ces expressions de $x_k^{(i)}$ et $y_k^{(i)}$ dans (16) du Chapitre I, nous trouverons les composantes u, v, w de la vitesse de chaque point ξ, η, ζ du liquide.

On peut dire qu'*à chaque ellipsoïde donné, dont les demi-axes* a, b, c

satisfont aux conditions (45), *correspondent huit cas du mouvement, si l'on considère les mouvements opposés comme différents.*

11. Considérons la seconde condition (32) qui s'écrira, avec les notations adoptées (n° 9), sous la forme

$$a \leqq \frac{b-c}{2} \qquad (b > c), \tag{46}$$

d'où

$$a < b.$$

Nous avons deux cas à distinguer :

$$b > a > c, \tag{a}$$

$$b > c > a. \tag{b}$$

Remarquons qu'on a toujours, en vertu de (46),

$$4a^2 - b^2 < c^2 - 2bc < 0$$

et

$$4a^4 - a^2(b^2 - c^2) - b^2c^2 = a^2(4a^2 - b^2) + c^2(a^2 - b^2) < 0,$$

ce qui montre que l'intégrale du second membre de l'équation (42_1) est négative.

On doit donc avoir

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} D\zeta < 0. \tag{47}$$

Or, quelles que soient les valeurs de a, b et c satisfaisant à la seule condition (46), les racines de l'équation (36) sont négatives.

Il s'ensuit que

$$(\rho + b^2)(\rho + c^2) < 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho + b^2 > 0, \qquad \rho + c^2 < 0,$$

car $b > c$.

On en conclut que

$$\eta = b^2 q^2(\rho + c^2) < 0, \tag{48}$$

$$\zeta = c^2 r^2(\rho + b^2) > 0, \tag{48_1}$$

quelles que soient les valeurs de a, b et c satisfaisant à l'inégalité (46).

On doit donc avoir, en vertu de (a) et (47),

$$D = 4a^4 - a^2(b^2 + c^2) + b^2c^2 < 0; \tag{49}$$

d'où

$$c^2 < \frac{a^2(b^2 - 4a^2)}{b^2 - a^2}. \tag{50}$$

Cela posé, considérons l'équation (41_1).

Les inégalités (a), (48) et (49) donnent

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} D\eta > 0,$$

ce qui exige qu'on ait

$$\int_0^\infty [4a^4 + a^2(b^2 - c^2) - b^2c^2 + (4a^2 - c^2)u] \frac{u\,du}{\Delta^3(u)} > 0. \tag{51}$$

On a, en vertu de (50) et (a),

$$4a^2 - c^2 > 4a^2 - \frac{a^2(b^2 - 4a^2)}{b^2 - a^2} = \frac{3a^2b^2}{b^2 - a^2} > 0$$

et

$$4a^4 + a^2(b^2 - c^2) - b^2c^2 > a^2(4a^2 + b^2) - (a^2 + b^2)\frac{a^2(b^2 - 4a^2)}{b^2 - a^2} = 6\frac{a^4b^2}{b^2 - a^2} > 0.$$

Donc, les inégalités (50) et (a) entraînent celle de (51).

Les conditions de la possibilité du problème se réduisent aux suivantes :

$$c < b - 2a, \qquad c^2 < \frac{a^2(b^2 - 4a^2)}{b^2 - a^2}. \tag{52}$$

Ces conditions étant remplies, les équations (41_1) et (42_1) donneront les valeurs réelles pour q et r.

A tout ellipsoïde donné dont les demi-axes a, b, c satisfont aux conditions (42), correspond, comme au numéro précédent, huit cas différents du mouvement du liquide.

Les composantes p et q de la vitesse angulaire Ω et les coefficients x_2, x_3, y_2, y_3 dans les expressions de u, v et w se déterminent par les formules, analogues à celles du numéro précédent.

12. Considérons enfin la dernière hypothèse (b) (n° 11).
Nous avons déjà vu qu'on doit avoir

$$\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}D\zeta<0, \qquad \zeta>0 \tag{47}$$

quels que soient a, b, c ($b>c$) satisfaisant à une seule condition (46).
Or, si a, b et c satisfont encore aux conditions (b), on aura

$$D>0. \tag{53}$$

On peut écrire, en effet,

$$D=a^2(4a^2-c^2)+b^2(c^2-a^2).$$

En remarquant que

$$b\geqq c+2a>3a, \qquad b^2>9a^2,$$

on trouve

$$D>a^2(4a^2-c^2)+9a^2(c^2-a^2)=a^2(8c^2-5a^2)>0.$$

La condition nécessaire (47) est donc, en effet, satisfaite si $c>a$, car

$$D\zeta<0, \qquad \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}<0.$$

Donc, l'équation (42_1) donnera les valeurs réelles pour r.
Considérons l'équation (41_1).
En se rappelant que [inégalité (48)]

$$\eta<0,$$

on trouve, eu égard à (53),

$$\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}D\eta=0.$$

Pour que le problème soit possible, on devra avoir

$$S=\int_0^\infty[4a^4-a^2(c^2-b^2)-b^2c^2+(4a^2-c^2)u]\frac{u\,du}{\Delta^3(u)}\leqq 0. \tag{54}$$

Considérons cette intégrale comme une fonction de la variable a qui varie entre zéro et c.

Il est évident que

$$S < 0 \quad \text{pour} \quad a = 0$$

et

$$S > 0 \quad \text{pour} \quad a = c.$$

On en conclut qu'il existe un ensemble de valeurs de a, b et c, satisfaisant aux conditions (46) et (b), pour lesquelles le problème sera possible.

Pour trouver les conditions précises de la possibilité du mouvement, il faut étudier plus attentivement les propriétés de l'intégrale S.

13. Introduisons au lieu de a, b, c les variables s et t en posant

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{s}, \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{t}. \tag{55}$$

L'inégalité (46) devient

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \leqq \frac{1}{\sqrt{t}} - 2;$$

d'où, eu égard à l'inégalité $c > a$, on tire

$$\frac{1}{\sqrt{t}} - 2 \geqq 1, \qquad \sqrt{t} \leqq \frac{1}{3} \tag{56}$$

et, pour toutes les valeurs de t satisfaisant à la condition (56),

$$s \geqq \frac{t}{(1 - 2\sqrt{t})^2}. \tag{57}$$

Transformons maintenant l'intégrale S (54) en y introduisant s et t au lieu de c et b à l'aide de (55).

On trouve, en remplaçant encore u par $a^2 x$,

$$S = \frac{\sqrt{st}}{a^3} \int_0^\infty [s(1 + 4t + 4tx) - (1 + t + tx)] \frac{x\,dx}{\Delta^3},$$

où l'on a posé

$$\Delta = \sqrt{(1+x)(1+tx)(1+sx)}.$$

La condition (54) de la possibilité du problème peut s'écrire comme il suit :

$$(54_1)\qquad \Phi(s,t) = \int_0^\infty [s(1+4t+4tx) - (1+t+tx)]\frac{x\,dx}{\Delta^3} \leqq 0.$$

Démontrons que $\Phi(s, t)$ est une fonction croissante de s.

On trouve, en différentiant,

$$\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x(1+x)(1+tx)}{\Delta^5} \times \{2(1+4t)+x[4t(2-s)+3-s+3t]+tx^2(3-4s)\}\,dx = A_0 + tA_1,$$

où l'on a posé

$$(58)\qquad A_0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x(1+x)}{\Delta^5}\{2(1+4t)+x[4t(2-s)+3-s+3t]+x^2t(3-4s)\}\,dx,$$

$$(59)\qquad A_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5}\{2(1+4t)+x[4t(2-s)+3-s+3t]+x^2t(3-4s)\}\,dx.$$

Moyennant maintenant l'égalité connue, ayant lieu quelles que soient les valeurs de s et de t,

$$(60)\qquad 0 = \int_0^\infty \frac{x(1+x)}{\Delta^5}\left[2 + \frac{3+s+t}{2}x - stx^2 - \frac{3}{2}stx^3\right]dx,$$

on obtient, en la retranchant de (58),

$$(61)\qquad 2A_0 = \int_0^\infty \frac{x(1+x)}{\Delta^5} \times \left[8t + \frac{8t(2-s)+3(1-s)+5t}{2}x + 3t(1-s)x^2 + \frac{3}{2}stx^3\right]dx.$$

Cette égalité montre que

$$(62)\qquad A_0 > 0,$$

car

$$s \leqq 1 < 2.$$

Multiplions maintenant (60) par $4t$ et retranchons le résultat de (61).

On trouve, après des réductions simples,

$$2A_0 = \int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5} \times \left\{ \frac{t(9-12s-4t)+3(1-s)}{2} + t[3(1-s)+4st]x + \frac{3}{2}st(1+4t)x^2 \right\} dx.$$

Multipliant enfin (59) par 2 et en ajoutant le résultat à cette dernière égalité, on obtient

$$2(A_0+A_1) = \int_0^\infty \frac{x^2(1+x)}{\Delta^5} Q\, dx,$$

où l'on a posé

$$Q = \frac{4(1-t^2)+t(25-12s)+3(1-s)}{2} + [3t(1-s)+4t(2-s)+3-s+4st^2+3t]x + tx^2(6-5s+12st).$$

L'équation précédente montre que

$$A_0 + A_1 > 0, \tag{63}$$

car

$$1-t^2>0, \quad 25-12s>0, \quad 1-s>0, \quad 2-s>0, \quad 3-s>0, \quad 6-5s>0.$$

Écrivons maintenant la dérivée $\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s}$ sous la forme

$$\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s} = A_0(1-t)+(A_0+A_1).$$

On en conclut immédiatement, en vertu de (62) et (63), que

$$\frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s} > 0$$

pour toutes les valeurs de t, comprises entre 0 et 1.

Donc, $\Phi(s,t)$ est une fonction croissante de s.

D'autre part

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \Phi(0, t) = -\int_0^\infty (1 + t + tx)\frac{x\,dx}{\Delta^3} < 0, \\ \Phi(1, t) = 3t\int_0^\infty \frac{x(1+x)\,dx}{\Delta^3} > 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'équation

$$\Phi(s, t) = 0$$

admet, pour toute valeur donnée de t, comprise dans l'intervalle $(0, 1)$ une seule racine réelle et rien qu'une.

Nous la désignerons par $s_0(t)$.

14. Remplaçons maintenant dans $\Phi(s, t)$ la variable s par

$$s_1(t) = \frac{t}{(1 - 2\sqrt{t})^2}$$

et posons

$$\lambda = \sqrt{t}.$$

Nous obtiendrons une fonction d'une seule variable λ, définie par l'intégrale suivante :

$$(64) \qquad \Phi[s_1(t), t] = (1 - 2\lambda)\int_0^\infty [\alpha(\lambda) + x\beta(\lambda)]\frac{x\,dx}{\Delta^3} = \psi(\lambda)(1 - 2\lambda),$$

où l'on a posé

$$\Delta = \sqrt{(1+x)(1+\lambda^2 x)[(1-2\lambda)^2 + \lambda^2 x]},$$

$$(65) \qquad \alpha(\lambda) = 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 1,$$

$$(66) \qquad \beta(\lambda) = 4\lambda^3 - \lambda^2,$$

$$(67) \qquad \psi(\lambda) = \int_0^\infty (\alpha + \beta x)\frac{x\,dx}{\Delta^3}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, λ doit être compris entre zéro et $\frac{1}{3}$, comme le montre l'inégalité (56).

Le facteur $1 - 2\lambda$ reste positif pour ces valeurs de λ.

Il s'ensuit que le signe de $\Phi[s_1(t), t]$ est égal à celui de la fonction $\psi(\lambda)$, pourvu que λ soit comprise dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Il est aisé de voir que

$$(68) \qquad \psi(\lambda) < 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \leqq \frac{1}{4},$$

$$(69) \qquad \psi(\lambda) > 0 \quad \text{pour} \quad \lambda = \frac{1}{3}.$$

En effet, on a, eu égard à (66),

$$(70) \qquad \beta(\lambda) \leqq 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \leqq \frac{1}{4},$$

$$(70_1) \qquad \beta(\lambda) > 0 \quad \text{pour} \quad \lambda > \frac{1}{4}.$$

D'autre part, différentiant deux fois (65) par rapport à λ, on trouve

$$\alpha'(\lambda) = 4(3\lambda^2 - 2\lambda + 1), \qquad \alpha''(\lambda) = 8(3\lambda - 1).$$

On en déduit que

$$\alpha''(\lambda) \leqq 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \leqq \frac{1}{3},$$

c'est-à-dire $\alpha'(\lambda)$ décroît, lorsque λ croît de zéro à $\frac{1}{3}$.

Or

$$\alpha'(0) = 4 > 0, \qquad \alpha'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} > 0.$$

Donc $\alpha'(\lambda)$ reste positif pour

$$0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{3}$$

et, par suite, $\alpha(\lambda)$ croît, lorsque λ croît de zéro à $\frac{1}{3}$.

En remarquant que

$$\alpha(0) = -1 < 0, \qquad \alpha\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16} < 0, \qquad \alpha\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^2} > 0,$$

on en conclut que

$$(71) \qquad \alpha(\lambda) < 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \leqq \frac{1}{4},$$

$$(71_1) \qquad \alpha(\lambda) > 0 \quad \text{pour} \quad \lambda = \frac{1}{3}.$$

En tenant compte de l'expression (67) de $\psi(\lambda)$ et des inégalités (70) et (71), on obtient l'inégalité (68); l'inégalité (69) résulte de celles de (70_1) et (71_1).

Donc la fonction $\psi(\lambda)$ admet une racine réelle λ_0, comprise entre les limites $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$.

15. Montrons que $\psi(\lambda)$ admet une seule racine entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ et rien qu'une.

Formons la dérivée $\psi'(\lambda)$ de la fonction $\psi(\lambda)$.

On a

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\alpha+\beta x}{\Delta^3} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\alpha+\beta\lambda}{(1+\lambda^2 x)^{\frac{3}{2}}[(1-2\lambda)^2+\lambda^2 x]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{K}+\mathrm{L}x+\mathrm{M}x^2+\mathrm{N}x^3}{(1+\lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}[(1-2\lambda)^2+\lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= 2(1-2\lambda)(2\lambda^2+4\lambda-1),\\
\mathrm{L} &= 4\lambda[-12\lambda^5+22\lambda^4-30\lambda^3+17\lambda^2+5\lambda+1],\\
\mathrm{M} &= 2\lambda^3[2\lambda^2(5-3\lambda)+4(2-3\lambda)+3\lambda(1-2\lambda)(4\lambda-1)],\\
\mathrm{N} &= 4\lambda^5(1-3\lambda).
\end{aligned}$$

Il est évident que, pour toutes les valeurs de λ, comprises entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$,

$$(72)\qquad \mathrm{K}>0,\qquad \mathrm{M}>0,\qquad \mathrm{N}>0.$$

Il ne nous reste qu'à déterminer le signe de L.

On peut écrire

$$\mathrm{L} = 4\lambda[\lambda^4(22-12\lambda)+\varphi(\lambda)],$$

en posant

$$\varphi(\lambda) = -30\lambda^3+17\lambda^2-5\lambda+1.$$

On a

$$\varphi'(\lambda) = -90\lambda^2+34\lambda-5.$$

La fonction $\varphi'(\lambda)$ n'admet pas des racines réelles et reste toujours négative.

Donc $\varphi(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ.

Or,

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}>0.$$

Il s'ensuit que

$$\varphi(\lambda)>0 \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{4}<\lambda \leqq \frac{1}{3}.$$

D'autre part, il est évident que

$$22-12\lambda>0.$$

On a donc

$$L>0 \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{4}<\lambda \leqq \frac{1}{3}. \tag{73}$$

Or,

$$\begin{aligned}\psi'(\lambda)&=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\alpha+\beta x}{\Delta^3}\right)dx\\ &=\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{K+Lx+Mx^2+Nx^3}{(1+\lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}[(1-2\lambda)x+\lambda^2 x]^{\frac{5}{2}}}\,dx.\end{aligned}$$

On en conclut, eu égard à (72) et (73), que

$$\psi'(\lambda)>0 \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{4}<\lambda \leqq \frac{1}{3},$$

c'est-à-dire $\psi(\lambda)$ va toujours en croissant, lorsque λ croît de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{3}$.

En rapprochant ce résultat avec celui du numéro précédent [les inégalités (68) et (69)], on s'assure que $\psi(\lambda)$ admet une seule racine réelle λ_0 entre zéro et $\frac{1}{3}$, et rien qu'une, et satisfait aux conditions

$$\begin{aligned}\psi(\lambda)&<0 \qquad \text{pour} \qquad 0<\lambda<\lambda_0,\\ \psi(\lambda)&>0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda_0<\lambda \leqq \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

De ces inégalités on tire ensuite, eu égard à (64),

$$\begin{aligned}\Phi[s,(t),t]&>0 \qquad \text{pour} \qquad 0<t<t_0,\\ \Phi[s,(t),t]&>0 \qquad \text{pour} \qquad t_0<t<\frac{1}{9},\end{aligned}$$

où t_0 désigne la valeur de t correspondant à $\lambda=\lambda_0$.

16. En rapprochant les inégalités obtenues avec celles de (α) du nº 13, on s'assure que

$$s_1(t) \leqq s_0(t) \tag{74}$$

pour toutes les valeurs de t, plus petites que $t_0 < \frac{1}{9}$.

Remarquant maintenant que pour toute valeur de t, prise dans l'intervalle $(0, t_0)$,

$$\Phi(s, t) \leqq 0, \qquad \text{si} \qquad s \leqq s_0(t),$$

on en tire l'une des conditions de la possibilité du problème sous la forme suivante :

$$s \leqq s_0(t), \qquad 0 < t < t_0 \leqq \frac{1}{9}. \tag{75}$$

D'autre part, s doit satisfaire à l'inégalité (57) qui peut s'écrire

$$s \geqq s_1(t).$$

On doit donc avoir

$$s_1(t) \leqq s \leqq s_0(t), \qquad 0 < t < t_0 \leqq \frac{1}{9},$$

ce qui est possible en vertu de (74).

Si nous supposons, au contraire, que

$$t_0 < t \leqq \frac{1}{9}, \tag{76}$$

on aura

$$\Phi[s_1(t), t] > 0,$$

c'est-à-dire

$$s_1(t) > s_0(t)$$

pour toutes les valeurs de t satisfaisant aux inégalités (76), et, en vertu de (75),

$$s < s_1(t),$$

ce qui contredit l'hypothèse (46), faite sur a, b et c, qui exige qu'on ait

$$s > s_1(t).$$

Donc, le problème n'est possible que pour les valeurs de t, plus petites que la racine t_0 de l'équation transcendante

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha(t) + x\beta(t)}{\Delta^3} x\,dx = 0.$$

A toute valeur de t, choisie de la manière tout à l'heure indiquée $(t \leqq t_0)$, peut correspondre chaque valeur de s, comprise entre les limites

$$\frac{t}{(1 - 2\sqrt{t})^2} \leqq s \leqq s_0(t), \tag{77}$$

où $s_0(t)$ est la racine de l'équation

$$\int_0^{\infty} \frac{s(1 + 4t + 4tx) - (1 + t + tx)}{\Delta^3} x\,dx = 0.$$

En remplaçant dans (77) s et t par leurs expressions en a, b et c, *on présentera les conditions de la possibilité du problème sous la forme suivante :*

$$\left\{ \begin{aligned} & b^2 \geqq \frac{a^2}{t_0}, \\ & \frac{a^2}{s_0\left(\frac{a^2}{b^2}\right)} \leqq c^2 \leqq (b - 2a)^2. \end{aligned} \right. \tag{78}$$

Les équations (41_1) *et* (42_1) *donneront les valeurs réelles pour* q *et* r, *quels que soient les nombres* a, b *et* c *satisfaisant aux inégalités* (78).

A tout ellipsoïde donné, dont les demi-axes a, b, c *satisfont aux conditions indiquées, correspondent huit cas différents du mouvement du liquide* (*voir* n° 10).

Les composantes q et r de la vitesse angulaire Ω du trièdre (B) et les coefficients x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ dans les expressions de u, v, w se déterminent à l'aide des formules, analogues à celles du n° 10.

17. Considérons maintenant le cas où non seulement

$$x_1 = y_1 = 0, \qquad p = 0,$$

mais encore

$$x_2 = y_2 = 0, \qquad q = 0.$$

Dans ce cas les équations (41) et (42) du Chapitre I donnent

$$x_3 = \text{const.}, \qquad y_3 = \text{const.}$$

Les équations (43) du Chapitre I deviennent

$$a x_3^2 + b y_3^2 + 2 b x_3 y_3 = 2(a-b)\left(\frac{\lambda}{\alpha} + \mathrm{A}\right) = \mathrm{P}(a-b),$$
$$-a x_3^2 - b y_3^2 - 2 a x_3 y_3 = 2(a-b)\left(\frac{\lambda}{b} + \mathrm{B}\right) = \mathrm{Q}(a-b),$$
$$\frac{\lambda}{c} + \mathrm{C} = 0.$$

On en tire les équations suivantes :

(79)
$$a x_3^2 + b y_3^2 = \mathrm{P} a + \mathrm{Q} b,$$
$$2 x_3 y_3 = -(\mathrm{P} + \mathrm{Q}),$$

où

(80)
$$\mathrm{P} = 2\left(\mathrm{A} - \frac{\mathrm{C}c}{a}\right), \qquad \mathrm{Q} = 2\left(\mathrm{B} - \frac{\mathrm{C}c}{b}\right).$$

Remplaçant maintenant a et b respectivement par a^2 et b^2, on peut réduire les équations précédentes à la forme

$$(a x_3 + b y_3)^2 = \mathrm{P} a^2 + \mathrm{Q} b^2 - ab(\mathrm{P} + \mathrm{Q}),$$
$$(a x_3 - a y_3)^2 = \mathrm{P} a^2 + \mathrm{Q} b^2 + ab(\mathrm{P} + \mathrm{Q}).$$

Substituant ensuite dans les seconds membres de ces équations, au lieu de P et Q, leurs expressions (α) du Chapitre I, on obtient, après des réductions simples,

(81)
$$ab w_0^2 = 2\mu(a-b)^2 \int_0^\infty [c^2(a^2 + ab + b^2) - b^2 a^2 + (ab + c^2)u] \frac{u\,du}{\Delta^3},$$

(82)
$$ab w_1^2 = 2\mu(a+b)^2 \int_0^\infty [b^2 a^2 - c^2(a^2 - ab + b^2) + (ab - c^2)u] \frac{u\,du}{\Delta^3},$$

où l'on a posé

$$w_0 = a x_3 + b y_3, \qquad w_1 = a x_3 - b y_3, \qquad \mu = \pi abc,$$
$$\Delta = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les intégrales de seconds membres des équations (81) *et* (82) *soient positives.*

18. Remarquons tout d'abord que c ne peut pas être égal au plus grand des demi-axes a, b et c de l'ellipsoïde.

L'équation (79) montre, en effet, qu'on devra avoir

$$\mathrm{P}a^2 + \mathrm{Q}b^2 \geqq 0,$$

c'est-à-dire

$$\mu\int_0^\infty \frac{(a^2 - c^2)u\,du}{(a^2+u)(c^2+u)\Delta} + \mu\int_0^\infty \frac{(b^2-c^2)u\,du}{(a^2+u)(c^2+u)\Delta} \geqq 0,$$

ce qui est évidemment impossible, si

$$c > a, \qquad c > b.$$

Il ne nous reste qu'à considérer les deux cas suivants :

$$(a) \qquad b > c > a;$$

$$(b) \qquad b > a > c.$$

Considérons le premier cas (a).

Posons, pour plus de simplicité,

$$\mathrm{R} = \int_0^\infty [c^2(a^2 + ab + b^2) - a^2b^2 + (ab + c^2)u]\frac{u\,du}{\Delta^3}, \tag{83}$$

$$\mathrm{S} = \int_0^\infty [b^2a^2 - c^2(a^2 - ab + b^2) + (ab - c^2)u]\frac{u\,du}{\Delta^3}. \tag{84}$$

Si $c > a$, on a

$$c^2(a^2 + ab + b^2) - a^2b^2 > a^3(a+b) > 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{R} > 0.$$

Les conditions de la possibilité du problème se réduisent à une seule :

$$\mathrm{S} \geqq 0. \tag{85}$$

Supposons que

$$c^2 > ab. \tag{86}$$

On a

$$b^2a^2 - c^2(a^2 - ab + b^2) < ba(2ab - a^2 - b^2) = -ba(a-b)^2 < 0,$$

c'est-à-dire $S < 0$.

Donc le problème est impossible, si a, b, c satisfont à l'inégalité (86). Il s'ensuit que *les conditions de la possibilité du mouvement, dans le cas* (a), *se représentent comme il suit :*

$$c^2 \leqq ab, \qquad S \geqq 0. \tag{87}$$

Considérons le second cas (b).

On a nécessairement

$$ab - c^2 > 0, \qquad b^2a^2 - c^2(a^2 - ab + b^2) = b^2(a^2 - c^2) + c^2a(b-a) > 0,$$

c'est-à-dire $S < 0$,

Les conditions de la possibilité du problème se réduisent à la suivante :

$$R \geqq 0. \tag{88}$$

19. Passons à l'étude plus détaillée des conditions (87) et (88).

Posons

$$\frac{a}{c} = s, \qquad \frac{b}{c} = \frac{1}{t},$$

s et t étant des quantités variables comprises entre 0 et $+1$.

Elles satisfont encore, en vertu de la première des inégalités (87), à la condition

$$s \geqq t. \tag{88$_1$}$$

Introduisons dans l'intégrale S les variables s et t.

On trouve

$$S = \frac{t}{c}\int_0^\infty \frac{s^2(1-t^2) + st(1+x) - 1 - t^2x}{(s^2+x)^{\frac{3}{2}}} \frac{x\,dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1+t^2x)^{\frac{3}{2}}},$$

en posant

$$u = c^2 x.$$

La seconde des conditions (87) se réduit à la suivante :

$$(89)\qquad \Phi(s, t) = \int_0^\infty \frac{s^2(1-t^2) + st(1+x) - 1 - t^2 x}{(s^2+x)^{\frac{3}{2}}} \frac{x\,dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1+t^2x)^{\frac{3}{2}}} \gtreqless 0.$$

Donnons à t une valeur quelconque, prise dans l'intervalle $(0, 1)$, et posons

$$s = t.$$

On trouve

$$(90)\qquad \Phi(t, t) = (t^2-1)(1-t^2)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta_1^3} < 0,$$

en posant

$$\Delta_1 = \sqrt{(1+x)(1+t^2x)(s^2+x)}.$$

Posons ensuite $s = 1$. On obtient

$$(91)\qquad \Phi(1, t) = t(1-t)\int_0^\infty \frac{(1+xt)x\,dx}{\Delta_1^3} > 0.$$

On voit donc que $\Phi(s, t)$, considéré comme une fonction de s, admet au moins une racine réelle dans l'intervalle $(t, 1)$.

Formons la dérivée de $\Phi(s, t)$, prise par rapport à s.

On trouve

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \int_0^\infty \frac{s[3 - 2st - s^2 + s^2t^2] + x[2s(1-st) + st^2 + t] + x^2t}{(s^2+x)^{\frac{5}{2}}(1+x)^{\frac{3}{2}}(1+t^2x)^{\frac{3}{2}}} x\,dx.$$

Il est évident que

$$3 - 2st - s^2 > 0, \qquad 2s(1-st) > 0,$$

car $st < 1$, $s^2 < 1$.

Par conséquent,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} > 0$$

pour toutes les valeurs de s comprises entre 0 et 1, quel que soit le nombre donné t, c'est-à-dire $\Phi(s, t)$ est une fonction croissante de la variable s.

On en conclut, eu égard à (90) et (91), que $\Phi(s, t)$ admet une racine réelle entre les limites t et 1, et rien qu'une.

Désignons cette racine, qui est d'ailleurs une fonction de t, par $s_0(t)$.

Les inégalités (90) et (91) montrent que

$$s_0(t) > t \tag{92}$$

et que

$$\Phi(s, t) \geqq 0$$

pour toutes les valeurs de s satisfaisant aux inégalités

$$1 \geqq s \geqq s_0(t), \tag{92_1}$$

compatibles, en vertu de (92), avec celle de (88_1).

Pour les valeurs limites 0 et 1 de t, $s_0(t)$ est égal à l'unité, car

$$\Phi(s, 0) = (s^2 - 1)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta_1^3},$$

$$\Phi(s, 1) = (s - 1)\int_0^\infty \frac{x(1 + x)\,dx}{\Delta_1^3}.$$

Posant dans (89) $s = 0$, on trouve

$$\Phi(0, t) = -\int_0^\infty \frac{1 + t^2 x}{\Delta_1^3}\, x\,dx.$$

On voit que la fonction $\Phi(0, t)$ reste essentiellement négative et ne peut s'annuler pour aucune valeur de t.

Il s'ensuit que $s_0(t)$ ne peut être égal à zéro.

Il existe donc une valeur de t, comprise entre 0 et 1, pour laquelle $s_0(t)$ atteint un minimum, positif et différent de zéro.

On trouvera ces valeurs de t et de $s_0(t)$, que nous désignerons par τ et σ, en résolvant deux équations transcendantes

$$\Phi(s, t) = 0, \qquad \frac{\partial \Phi(s, t)}{\partial t} = 0.$$

Le demi-axe c, qui coïncide avec l'axe de rotation du liquide, étant donné, les demi-axes a et b doivent varier entre les limites

$$\infty > b \geqq a, \qquad c \geqq a \geqq c\sigma.$$

Le mouvement est impossible, si

$$\frac{a}{c} < \sigma.$$

20. Considérons le second cas (b), où la condition de la possibilité du problème s'exprime par l'inégalité (88) (n° 18).

Posons

$$\frac{c}{a} = s, \qquad \frac{b}{a} = \frac{1}{t},$$

où s et t sont des quantités satisfaisant, en vertu de (b), aux conditions

$$0 \leqq s \leqq 1, \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

L'inégalité (88) devient

$$\Phi(s, t) = \int_0^\infty [s^2(t^2 + t + 1) - 1 + t(1 + s^2 t)x] \frac{x\,dx}{\Delta_1} \geqq 0.$$

Quelle que soit la valeur de t, comprise entre 0 et 1, on aura nécessairement

$$\Phi(s, t) > 0 \qquad \text{pour} \qquad s \geqq \frac{1}{t^2 + t + 1}.$$

Formons maintenant la dérivée de la fonction $\Phi(s, t)$, prise par rapport à s.

On trouve

$$\frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial s} = s\int_0^\infty \frac{[3 - s^2(t^2 + t + 1)] + [2 - t(1 + s^2 t) + 2t^2]x + 2t^2x^2}{(s^2 + x)^{\frac{5}{2}}(1 + x)^{\frac{3}{2}}(1 + t^2 x)^{\frac{3}{2}}}\, x\,dx.$$

Il est évident que $\frac{\partial\Phi(s, t)}{\partial s}$ reste toujours positif, quelles que soient les valeurs de s et t comprises entre 0 et 1, car

$$3 - s^2(t^2 + t + 1) > 0, \qquad 2 - t(1 + s^2 t) > 0.$$

Donc l'équation

$$\Phi(s, t) = 0$$

ne peut admettre plus qu'une racine réelle et positive qui doit être d'ailleurs plus petite que

$$\frac{1}{t^2 + t + 1},$$

quel que soit le nombre t compris entre 0 et 1.

Désignant cette racine par $s_0(t)$, *on peut exprimer les conditions de possibilité du problème sous la forme*

$$(93) \qquad 1 \geqq s \geqq s_0(t).$$

Si nous posons $t = 0$, on aura

$$\Phi(s, 0) = (s^2 - 1)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta_1},$$

c'est-à-dire

$$s_0(0) = 1.$$

En posant $t = 1$, on obtient

$$(94) \qquad \Phi(s, 1) = \int_0^\infty [3s^2 - 1 + (1 + s^2)x]\frac{x\,dx}{\Delta_1}.$$

Il est aisé de s'assurer que

$$\Phi(0, 1) = \int_0^\infty \frac{(x-1)x\,dx}{\Delta_1} = -\frac{3}{8}\pi < 0,$$

$$\Phi(1, 1) = 2\int_0^\infty \frac{(1+x)x\,dx}{\Delta_1} > 0.$$

Donc l'équation

$$(94_1) \qquad \Phi(s, 1) = 0$$

admet une racine réelle $s_0(1)$, comprise entre 0 et 1, et rien qu'une.

En posant, avec Riemann,

$$\frac{c}{a} = \sin\psi,$$

on aura, en vertu de (94) et (94_1), après avoir effectué l'intégration,

$$(\cos 4\psi + 2\cos 2\psi - 5)(\pi - 2\psi) + 10\sin 2\psi + 2\sin 4\psi = 0.$$

C'est l'équation, due à Riemann, ayant pour racine

$$s_0(1) = \frac{c}{a} = 0{,}303327\ldots.$$

L'ellipsoïde se réduit à l'ellipsoïde de révolution $a = b$, pour lequel les conditions de la possibilité du problème (93) s'expriment comme il suit :

$$1 \geqq s \geqq 0{,}303327\ldots.$$

21. Supposons maintenant que, dans le cas de

$$b > c > a,$$

le rapport

$$\frac{a}{c} = s$$

satisfasse à la condition (92_1) où $s_0(t)$ désigne la racine réelle et positive, comprise entre o et 1, de l'équation

$$\int_0^\infty \frac{s^2(1-t^2) + st(1+x) - 1 - t^2 x}{(s^2+x)^{\frac{3}{2}}} \frac{x\,dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1+t^2x)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

t désignant le rapport $\frac{b}{c}$, qui peut varier entre o et 1.

Supposons que dans le cas de

$$b \geqq a \geqq c,$$

le rapport

$$\frac{c}{a} = s$$

satisfasse à la condition (93), où $s_0(t)$ est la racine, comprise entre o et 1, de l'équation

$$\int_0^\infty \frac{[s^2(t^2+t+1) - 1 + t(1+s^2t)x]}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1+t^2x)^{\frac{3}{2}}(s^2+x)^{\frac{3}{2}}} x\,dx = 0,$$

t désignant le rapport $\frac{b}{a}$, qui peut varier entre o et 1.

Ces conditions étant remplies, les intégrales R et S [(83) et (84)] seront positives et les équations (81) et (82) donneront les valeurs réelles pour w_0 et w_1 :

$$w_0 = \pm(a-b)\sqrt{R}\sqrt{\frac{2\mu}{ab}} = a x_3 + b y_3,$$

$$w_1 = \pm(a+b)\sqrt{S}\sqrt{\frac{2\mu}{ab}} = a x_3 - b y_3,$$

d'où

$$(95)\qquad \begin{cases} x_3 = \pm \dfrac{1}{2a}\sqrt{\dfrac{2\mu}{ab}}\left[(a-b)\sqrt{R} \pm (a+b)\sqrt{S}\right], \\ y_3 = \pm \dfrac{1}{2b}\sqrt{\dfrac{2\mu}{ab}}\left[(a-b)\sqrt{R} \mp (a+b)\sqrt{S}\right], \end{cases}$$

et, en vertu de (40) du Chapitre I,

$$(96)\qquad r = \pm(a-b)\sqrt{R}\sqrt{\frac{2\mu}{ab}}.$$

Substituant les valeurs trouvées de x_3 et y_3 dans (16) du Chapitre I, nous obtiendrons les expressions des composantes u, v, w de la vitesse absolue de tout point ξ, η, ζ du liquide.

A tout ellipsoïde, dont les demi-axes a, b, c satisfont aux conditions tout à l'heure indiquées, correspondent quatre cas différents du mouvement (*voir* n° 10). *La vitesse angulaire du mouvement de translation se détermine à l'aide de la formule* (93); *quant aux u, v, w, ils s'expriment comme il suit :*

$$u = y_3\eta, \qquad v = x_3\zeta, \qquad w = 0,$$

où x_3, y_3 se définissent par les équations (95).

Cas où le mouvement d'entraînement se réduit à la rotation de l'ellipsoïde autour d'un de ses axes principaux.

1. Dirichlet et Riemann ont indiqué un cas du mouvement d'un ellipsoïde fluide, où le mouvement d'entraînement se réduit à la rotation du trièdre (B) (*voir* Chap. I) autour d'un des axes principaux de l'ellipsoïde.

L'analyse détaillée d'un cas particulier de ce mouvement, où les demi-axes de l'ellipsoïde restent constants, nous l'avons donnée à la fin de la section précédente.

Il est naturel de poser la question suivante :

Existe-t-il des autres cas du mouvement jouissant de la même propriété que ceux de Dirichlet et Riemann?

Pour en donner la réponse complète, nous allons résoudre le problème suivant :

Trouver tous les cas possibles du mouvement, défini par les équations (40) *à* (43) *du Chapitre I, correspondant à l'hypothèse que le mouvement d'entraînement se réduise à la rotation de l'ellipsoïde autour d'un de ses axes principaux.*

Supposons, pour fixer les idées, que

$$p = q = 0. \tag{1}$$

Les équations (46) du Chapitre I deviennent alors

$$z'_1 = \frac{dz_1}{dt} = r z_2, \qquad z'_2 = \frac{dz_2}{dt} = -r z_1, \qquad z_3 = \text{const.} \tag{2}$$

Les équations (47) (Chap. I) conduisent aux relations suivantes :

$$2a z_1(\beta - \gamma) - z_2[z_3 + r(a + b)] = 0,$$
$$2b z_2(\gamma - \alpha) - z_1[z_3 - r(a - b)] = 0,$$

qui peuvent s'écrire, en vertu de (45), (40) (Chap. I) et (1),

$$\left\{\begin{aligned} & z_1(\beta - \gamma) - z_2 x_3 = 0, \\ & z_2(\gamma - \alpha) + z_1 y_3 = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Supposons d'abord que z_1 et z_2 soient différents de zéro.

Dans ce cas, on trouve

$$x_3 y_3 = -(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha). \tag{4}$$

Différentions maintenant (3) par rapport à t.

On trouve

$$\left\{\begin{aligned} & z'_1(\beta - \gamma) + z_1(\beta' - \gamma') - z'_2 x_3 - z_2 x'_3 = 0, \\ & z'_2(\gamma - \alpha) + z_2(\gamma' - \alpha') + z'_1 y_3 - z_1 y'_3 = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Or, les équations (c) (41) et (c) (42) du Chapitre I donnent, en vertu de (1), et de (7) et (40) (Chap. I),

$$x'_3 = r(\beta - \alpha) + x_3\gamma - \frac{z_1 z_2}{4ac},$$

$$y'_3 = r(\beta - \alpha) + y_3\gamma - \frac{z_1 z_2}{4bc}.$$

Substituant ces expressions de x'_3 et y'_3 dans (5) et en tenant compte de (2), on obtient

$$-rz_2(\gamma - \alpha) + z_1(\beta' - \gamma') + rz_1x_3 - z_2x_3\gamma + \frac{z_1z_2^2}{4ac} = 0,$$

$$rz_1(\beta - \gamma) + z_2(\gamma' - \alpha') + rz_2y_3 + z_1y_3\gamma - \frac{z_2z_1^2}{4bc} = 0,$$

d'où l'on tire, eu égard à (3),

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} r(x_3 + y_3) + \frac{z_2^2}{4ac} &= \gamma' - \beta' + \gamma(\beta - \gamma), \\ -r(x_3 + y_3) + \frac{z_1^2}{4bc} &= \gamma' - \alpha' - \gamma(\gamma - \alpha), \end{aligned} \right.$$

en se rappelant que, d'après l'hypothèse faite, z_1 et z_2 sont différents de zéro.

Ces équations conduisent encore à la suivante :

$$(7)\qquad \frac{z_1^2}{4bc} + \frac{z_2^2}{4ac} = 2\gamma' - \beta' - \alpha' + \gamma(\beta\xi + \alpha) - 2\gamma = 3(\gamma' - \gamma^2),$$

car [l'équation (39) du Chapitre I]

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

2. Transformons maintenant les équations (43) du Chapitre I.

En remarquant que, en vertu de (1), et (40) et (45) du Chapitre I,

$$x_1y_1 = -\frac{z_1^2}{4bc}, \qquad x_2y_2 = -\frac{z_2^2}{4ac},$$

on peut écrire, eu égard à (4),

$$r(x_3+y_3)+\frac{z_2^2}{4ac}+(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)-\alpha^2-\alpha'=\frac{2\lambda}{a}+2A,$$
$$-r(x_3+y_3)+\frac{z_1^2}{4bc}+(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)-\beta^2-\beta'=\frac{2\lambda}{b}+2B,$$
$$\frac{z_1^2}{4bc}+\frac{z_2^2}{4ac}-\gamma^2-\gamma'=\frac{2\lambda}{c}+C.$$

On en tire, en tenant compte de (6), (7) et (39) du Chapitre I,

$$\gamma'-2\gamma^2=\frac{\lambda}{a}+A=\frac{\lambda}{b}+B=\frac{\lambda}{c}+C.$$

Ces relations exigent qu'on ait

$$Aa(c-b)+Bb(a-c)+Cc(b-a)=0,$$

ou [*voir* les formules (α) du Chapitre I]

$$-(b-c)(c-a)(a-b)\int_0^\infty \frac{u\,du}{\Delta^3(u)}=0.$$

Cette équation est impossible pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

Laissant de côté le cas de l'ellipsoïde de révolution, déjà étudié dans le Chapitre II, on peut dire que l'hypothèse, faite plus haut sur z_1 et z_2, est impossible; en d'autres termes, on doit avoir

$$z_1=z_2=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x_1=y_1=x_2=y_2=0.$$

C'est le cas du mouvement, indiqué par Riemann (*Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides*, p. 183).

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Un seul cas possible du mouvement de la masse fluide, défini par les équations (40) *à* (43) *du Chapitre I, où le mouvement d'entraînement se* *réduit à la rotation de l'ellipsoïde (à trois axes inégaux) autour d'un de ses axes principaux, est celui de Riemann.*

3. Les équations (41) et (42) du Chapitre I se réduisent aux deux suivantes :

$$x_3' - x_3\gamma = r(\beta - \alpha),$$
$$y_3' - y_3\gamma = r(\beta - \alpha),$$

d'où, en vertu de (44) du Chapitre I,

$$\frac{d}{dt}(x_3 - y_3) = \gamma(x_3 - y_3) = \frac{c'}{2c}(x_3 - y_3).$$

On en tire, en intégrant,

$$x_3 - y_3 = \rho\sqrt{c},$$

ρ désignant une constante arbitraire.

D'autre part, la dernière des équations (2) donne

$$z_3 = 2ax_3 - r(a - b) = ax_3 - by_3 = \sigma = \text{const.}$$

On a donc, en remplaçant a, b et c respectivement par a^2, b^2 et c^2,

$$x_3 = \frac{\rho c b^2 - \sigma}{b^2 - a^2}, \qquad y_3 = \frac{\rho c a^2 - \sigma}{b^2 - a^2} \tag{8}$$

et, en vertu de (40) du Chapitre I,

$$r = \frac{-2\rho c a^2 b^2 + \sigma(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2}. \tag{9}$$

Il ne nous reste qu'à exprimer a, b, c en fonction de t.

Pour cela il suffit de substituer les expressions trouvées de x_3, y_3 et r dans les trois équations (43) du Chapitre I.

Nous obtiendrons ainsi trois équations différentielles du second ordre, indiquées par Riemann (*loc. cit.*, p. 183).

Les fonctions a, b, c étant déterminées, nous trouverons x_3, y_3 et r en fonction de t à l'aide de (8) et (9), et enfin, les composantes u, v, w de la vitesse absolue de tout point ξ, η, ζ du liquide à l'aide de (16) du Chapitre I.

Cas où l'ellipsoïde ne change pas la direction de ses axes pendant le mouvement.

1. Considérons encore le problème suivant :

Trouver tous les cas possibles du mouvement, où l'ellipsoïde fluide ne change pas la direction de ses axes avec le temps.

Pour résoudre la question posée, il faut trouver toutes les solutions possibles des équations (39) à (44), ou, ce qui revient au même, des équations (46) à (48) du Chapitre I, en supposant que

$$p = q = r = 0.$$

Moyennant les dernières des équations tout à l'heure mentionnées, on trouve

$$z_1 = \text{const.}, \qquad z_2 = \text{const.}, \qquad z_3 = \text{const.},$$

$$(1) \quad 2a z_1(\beta - \gamma) = z_2 z_3, \qquad 2b z_2(\gamma - \alpha) = z_1 z_3, \qquad 2c z_3(\alpha - \beta) = z_1 z_2.$$

Ces équations donnent

$$z_2^2 z_3^2 bc + z_3^2 z_1^2 ca + z_1^2 z_2^2 ab = 0,$$

ce qui est impossible si au moins deux des quantités z_1, z_2, z_3 restent différentes de zéro.

Donc le mouvement considéré n'est possible que dans l'une des suppositions suivantes :

$$(1) \qquad z_1 = 0, \qquad z_2 = 0, \qquad z_3 \text{ est différent de zéro},$$

ou

$$(2) \qquad z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Dans le dernier cas, les équations du mouvement se réduisent aux trois suivantes :

$$\alpha^2 + \alpha' = -\frac{2\lambda}{a} - 2A,$$

$$\beta^2 + \beta' = -\frac{2\lambda}{b} - 2B,$$

$$\gamma^2 + \gamma' = -\frac{2\lambda}{c} - 2C,$$

où

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Ces équations admettent l'intégrale [l'équation (52) du Chapitre I]

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 2D + \text{const.}$$

C'est un cas particulier du mouvement, mentionné dans la Section précédente (*voir* aussi Kirchhoff, *Vorlesungen über mathem. Physik*, p. 366. Leipzig, 1883).

2. Considérons la première hypothèse.

Les équations (1) montrent que dans ce cas

$$\alpha = \beta, \tag{2}$$

c'est-à-dire, en vertu de (44) du Chapitre I,

$$b = \mu a,$$

μ désignant une constante arbitraire.

Étudions d'abord le cas particulier, en supposant que

$$a = b, \qquad \mu = 1.$$

Les équations (48) se réduisent aux deux suivantes :

$$\frac{\varpi_3^2}{4a^2} - (\alpha^2 + \alpha') = \frac{2\lambda}{a} + 2A,$$

$$2\alpha^2 - \alpha' = \frac{\lambda}{c} + C,$$

car

$$\gamma = -2\alpha.$$

Ces équations donnent

$$\alpha'(a - 2c) + \alpha^2(a + 4c) = \frac{\rho^2}{a} + 2(Cc - Aa), \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\rho^2 = \frac{\varpi_3^2}{4}.$$

L'équation (52) du Chapitre I, représentant l'intégrale de celle de (3), devient

$$\alpha^2(a+2c) = 2D - \frac{\rho^2}{a} + h,$$

ou

$$a'^2 = 4a[(2D+h)a - \rho^2].$$

Le problème se réduit à une quadrature.

Nous avons ici un cas particulier du mouvement de Dirichlet (*voir* Chap. II).

3. Supposons, enfin, que μ soit différent de l'unité.

Les équations (48) deviennent

$$\frac{\rho^2}{\mu a^2} - \alpha^2 - \alpha' = \frac{2\lambda}{a} + 2A,$$
$$\frac{\rho^2}{\mu a^2} - \alpha^2 - \alpha' = \frac{2\lambda}{a} + 2B,$$
$$-2\alpha^2 - \alpha' = \frac{\lambda}{c} + C.$$

On a donc

$$\lambda = \frac{ab(B-A)}{b-a}$$

et

$$\frac{\rho^2}{\mu a^2} - \alpha^2 - \alpha' = \frac{2b(B-A)}{b-a} + 2A,$$
$$-2\alpha^2 + \alpha' = \frac{ab(B-A)}{c(b-a)} + C,$$

d'où

$$-3\alpha^2 = \frac{b(2c+a)}{c(b-a)}(B-A) + 2A + C - \frac{\rho^2}{\mu a^2}.$$

Substituant au lieu de A, B, C leurs expressions (α) (Chap. I), on trouve

$$-3\alpha^2 = \frac{\mu}{c}\int_0^\infty [2c(u+c) + ca + cb - ab + cu]\frac{u\,du}{\Delta} - \frac{\rho^2}{ab},$$
$$\mu = \pi\sqrt{v_0}.$$

D'autre part, l'intégrale de forces vives [l'équation (52) du Chapitre I] donne

$$\alpha^2(a+b+4c) + \frac{\rho^2(a+b)}{ab} = 4\mu\int_0^\infty \frac{du}{\Delta} + h.$$

Ces équations en α^2 ne peuvent pas être compatibles.

Donc, *les seuls cas possibles, où l'ellipsoïde fluide ne change pas la direction de ses axes pendant le mouvement, sont ceux de Kirchhoff et de Dirichlet.*

Remarques générales sur l'intégration des équations du mouvement. Certaines solutions particulières.

1. Indiquons une transformation des équations du mouvement, établies aux nos 6 et 7 du Chapitre I.

Introduisons, au lieu de x_i et y_i $(i = 1, 2, 3)$, les nouvelles inconnues ξ_i et η_i en posant

$$(1)\qquad \begin{cases} b x_1 - c y_1 = \xi_1, & (y_1 - x_1)\sqrt{bc} = \eta_1, \\ c x_2 - a y_2 = \xi_2, & (y_2 - x_2)\sqrt{ca} = \eta_2, \\ a x_3 - b y_3 = \xi_3, & (y_3 - x_3)\sqrt{ab} = \eta_3. \end{cases}$$

Les équations (41) et (42) du Chapitre I prennent, si l'on y remplace en même temps a, b, c respectivement par a^2, b^2 et c^2, cette forme simple :

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi'_1 = \sigma_3\eta_3\xi_2 - \sigma_2\eta_2\xi_3 + \mu_1\xi_2\xi_3 = X_1(\xi_2, \xi_3, \eta_2, \eta_3, a, b, c), \\ \xi'_2 = \sigma_1\eta_1\xi_3 - \sigma_3\eta_3\xi_1 + \mu_2\xi_3\xi_1 = X_2(\xi_3, \xi_1, \eta_3, \eta_1, a, b, c), \\ \xi'_3 = \sigma_2\eta_2\xi_1 - \sigma_1\eta_1\xi_2 + \mu_3\xi_1\xi_2 = X_3(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, a, b, c); \end{cases}$$

$$(2_1)\qquad \begin{cases} \eta'_1 = \sigma_3\xi_3\eta_2 - \sigma_2\xi_2\eta_3 + \mu_1\eta_2\eta_3 = Y_1(\xi_2, \xi_3, \eta_2, \eta_3, a, b, c), \\ \eta'_2 = \sigma_1\xi_1\eta_3 - \sigma_3\xi_3\eta_1 + \mu_2\eta_3\eta_1 = Y_2(\xi_3, \xi_1, \eta_3, \eta_1, a, b, c), \\ \eta'_3 = \sigma_2\xi_2\eta_1 - \sigma_1\xi_1\eta_2 + \mu_3\eta_1\eta_2 = Y_3(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, a, b, c), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{2bc}{(b^2 - c^2)^2}, \qquad \sigma_2 = \dfrac{2ac}{(c^2 - a^2)^2}, \qquad \sigma_3 = \dfrac{2ab}{(a^2 - b^2)^2}, \\ \mu_1 = \dfrac{(b^2 - c^2)(3a^4 - \omega)}{(c^2 - a^2)^2(a^2 - b^2)^2}, \qquad \mu_2 = \dfrac{(c^2 - a^2)(3b^4 - \omega)}{(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2}, \\ \mu_3 = \dfrac{(a^2 - b^2)(3c^4 - \omega)}{(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2}, \\ \omega = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2. \end{cases}$$

Quant aux équations (43), elles peuvent s'écrire comme il suit :

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a\frac{3b^2+a^2}{(a^2-b^2)^3}(\xi_3+\eta_3)^2 - a\frac{3c^2+a^2}{(c^2-a^2)^3}(\xi_2+\eta_2)^2 \\
&\qquad - \frac{2\xi_3\eta_3}{(a+b)^3} - \frac{2\xi_2\eta_2}{(c+a)^3} - a'' = \frac{2\lambda}{a} + 2\mathrm{A}a, \\
& b\frac{3c^2+b^2}{(b^2-c^2)^3}(\xi_1+\eta_1)^2 - b\frac{3a^2+b^2}{(a^2+b^2)^3}(\xi_3+\eta_3)^2 \\
&\qquad - \frac{2\xi_1\eta_1}{(b+c)^3} - \frac{2\xi_3\eta_3}{(a+b)^3} - b'' = \frac{2\lambda}{b} + 2\mathrm{B}b, \\
& c\frac{3a^2+c^2}{(c^2-a^2)^3}(\xi_2+\eta_2)^2 - c\frac{3b^2+c^2}{(b^2-c^2)^3}(\xi_1+\eta_1)^2 \\
&\qquad - \frac{2\xi_2\eta_2}{(c+a)^3} - \frac{2\xi_1\eta_1}{(b+c)^3} - c'' = \frac{2\lambda}{c} + 2\mathrm{C}c.
\end{aligned}
\right.
$$

En ajoutant aux équations différentielles (2), (2_1) et (4) la relation

$$(5)\qquad abc = v_0 = \text{const.},$$

on obtient un système de dix équations, suffisantes pour déterminer dix inconnues :

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3;\quad \eta_1,\quad \eta_2,\quad \eta_3;\quad a,\quad b,\quad c \quad \text{et} \quad \lambda.$$

2. Transformons les équations (4) de la manière suivante :

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 &= \frac{3b^2+a^2}{(a^2-b^2)^3}(\xi_3+\eta_3)^2 - \frac{3c^2+a^2}{(c^2-a^2)^3}(\xi_2+\eta_2)^2 - \frac{2\xi_3\eta_3}{a(a+b)^3} - \frac{2\xi_2\eta_2}{a(c+a)^3}, \\
\mathbf{S}_2 &= \frac{3c^2+b^2}{(b^2-c^2)^3}(\xi_1+\eta_1)^2 - \frac{3a^2+b^2}{(a^2-b^2)^3}(\xi_3+\eta_3)^2 - \frac{2\xi_1\eta_1}{b(b-c)^3} - \frac{2\xi_3\eta_3}{b(a+b)^3}, \\
\mathbf{S}_3 &= \frac{3a^2+c^2}{(c^2-a^2)^3}(\xi_2+\eta_2)^2 - \frac{3b^2+c^2}{(b^2-c^2)^3}(\xi_1+\eta_1)^2 - \frac{2\xi_2\eta_2}{c(c+a)^3} - \frac{2\xi_1\eta_1}{c(b+c)^3}.
\end{aligned}
$$

Désignons par $\mathrm{T}(\xi_i, \eta_i, a, b, c)$ la somme

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 = \mathrm{T}(\xi_i, \eta_i, a, b, c) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il est aisé de s'assurer que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} = -2\bigg[& \frac{(\xi_1 b + \eta_1 c)(\xi_1 c + \eta_1 b)}{bc(b^2-c^2)^2} + \frac{(\xi_2 c + \eta_2 a)(\xi_2 a + \eta_2 c)}{ca(c^2-a^2)^2} \\
& + \frac{(\xi_3 a + \eta_3 b)(\xi_3 b + \eta_3 a)}{ab(a^2-b^2)^2}\bigg].
\end{aligned}
$$

Multiplions maintenant (4) respectivement par $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et additionnons les résultats ainsi obtenus.

On trouve

$$2\lambda = \frac{a^2 b^2 c^2}{\omega}\left[T - 4\pi - \frac{a''}{a} - \frac{b''}{b} - \frac{c''}{c}\right],$$

car

$$A + B + C = 2\pi.$$

D'autre part, la relation (5) donne

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 0,$$

d'où l'on tire, en dérivant encore une fois par rapport à t,

$$\begin{aligned}\frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{c''}{c} &= \frac{a'^2}{a^2} + \frac{b'^2}{b^2} + \frac{c'^2}{c^2}\\ &= 2\left(\frac{a'^2}{a^2} + \frac{b'^2}{b^2} + \frac{a'b'}{ab}\right) = 2Q(a, b, a', b')\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$2\lambda = \frac{a^2 b^2 c^2}{\omega}[T(\xi_i, \eta_i, a, b) - 4\pi - 2Q(a, b, a', b')].$$

Substituant cette expression de λ dans (4), on obtient les deux équations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} a'' = R_1(\xi_i, \eta_i, a, b) + \dfrac{2ab^2c^2}{\omega}Q(a, b, a', b') = A_1,\\[2ex] b'' = R_2(\xi_i, \eta_i, a, b) + \dfrac{2bc^2a^2}{\omega}Q(a, b, a', b') = B_1,\end{cases}$$

où l'on a posé

$$(7)\qquad \begin{cases} R_1(\xi_i, \eta_i, a, b) = aS_1 - 2Aa - \dfrac{ab^2c^2}{\omega}(T - 4\pi),\\[2ex] R_2(\xi_i, \eta_i, a, b) = bS_2 - 2Bb - \dfrac{ba^2c^2}{\omega}(T - 4\pi).\end{cases}$$

On suppose que, dans les équations (6) et (7), c soit remplacée par son expression en a et b à l'aide de (5).

3. Prenons maintenant

$$a' = \frac{da}{dt}, \qquad b' = \frac{db}{dt}$$

pour les nouvelles inconnues.

Les équations du mouvement s'écriront comme il suit :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\xi'_1 = X_1(\xi_2, \xi_3, \eta_2, \eta_3, a, b), \qquad \eta'_1 = Y_1(\xi_2, \xi_3, \eta_2, \eta_3, a, b),\\
&\xi'_2 = X_2(\xi_3, \xi_1, \eta_3, \eta_1, a, b), \qquad \eta'_2 = Y_2(\xi_3, \xi_1, \eta_3, \eta_1, a, b),\\
&\xi'_3 = X_3(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, a, b), \qquad \eta'_3 = Y_3(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, a, b),\\
&\frac{da'}{dt} = R_1(\xi_i, \eta_i, a, b) + \frac{2ab^2c^2}{\omega} Q(a, b, a', b') = A_1,\\
&\frac{db'}{dt} = R_2(\xi_i, \eta_i, a, b) + \frac{2bc^2a^2}{\omega} Q(a, b, a', b') = B_1,\\
&\frac{da}{dt} = a', \qquad \frac{db}{dt} = b'.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations forment un système normal de dix équations du premier ordre dont l'intégration détermine les inconnues ξ_i, η_i, a et b du problème en fonction de t.

Les équations (8) admettent trois intégrales générales qui se présentent, en variables ξ_i, η_i, sous la forme [comp. les équations (50), (51), (52) du Chapitre I]

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \text{const.} = k^2,\\
&\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \text{const.} = l^2,\\
&a'^2 + b'^2 + c'^2 + \frac{(\xi_1 b + \eta_1 c)^2 + (\xi_1 c + \eta_1 b)^2}{(b^2 - c^2)^2}\\
&\qquad + \frac{(\xi_2 c + \eta_2 a)^2 + (\xi_2 a + \eta_2 c)^2}{(c^2 - a^2)^2}\\
&\qquad + \frac{(\xi_3 a + \eta_3 b)^2 + (\xi_3 b + \eta_3 a)^2}{(a^2 - b^2)^2} = 4D + h.
\end{aligned}\right.$$

Ces intégrales étant connues, la solution du problème se ramène à l'intégration d'un système du septième ordre.

4. Les seconds membres des équations (8) étant indépendants de t,

considérons le système de neuf équations différentielles :

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{d\xi_1}{db} = \dfrac{X_1}{b'}, & \dfrac{d\xi_2}{db} = \dfrac{X_2}{b'}, & \dfrac{d\xi_3}{db} = \dfrac{X_3}{b'}, \\[2ex]
\dfrac{d\eta_1}{db} = \dfrac{Y_1}{b'}, & \dfrac{d\eta_2}{db} = \dfrac{Y_2}{b'}, & \dfrac{d\eta_3}{db} = \dfrac{Y_3}{b'}, \\[2ex]
\dfrac{da'}{db} = \dfrac{A_1}{b'}, & \dfrac{db'}{db} = \dfrac{B_1}{b'}, & \dfrac{da}{db} = \dfrac{a'}{b'},
\end{array}
\right.
$$

qui admettent trois intégrales connues (9).

Il suffit, certainement, de trouver encore *six* intégrales, distinctes de (9), pour ramener le problème à une quadrature ; or, *dans le cas considéré, le nombre d'intégrations nécessaires peut être diminué à une unité.*

Nous allons démontrer, en effet, cette propriété importante des équations du mouvement (8) :

Il suffit de trouver, outre les trois intégrales connues (9), *encore* CINQ *intégrales distinctes, ne dépendant pas de t, pour ramener l'intégration des équations du mouvement aux quadratures.*

En tenant compte des expressions de X_i, Y_i ($i = 1, 2, 3$), A_1 et B_1, on s'assure sans peine que

$$
(11)\qquad \left\{
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{b'}\left[\frac{\partial b'}{\partial b} + \frac{\partial a'}{\partial a} + \frac{\partial B_1}{\partial b'} + \frac{\partial A_1}{\partial a'} + \sum_1^3 \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i}\right)\right] \\
&= \frac{2}{b'}\left[\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{b a^2 c^2 Q}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{a b^2 c^2 Q}{\omega}\right) + (\gamma - \beta)\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}\right. \\
&\qquad \left. + (\alpha - \gamma)\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} + (\beta - \alpha)\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Or, en vertu de (44) du Chapitre I,

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{2}{b'}\left[(\gamma - \beta)\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + (\alpha - \gamma)\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} + (\beta - \alpha)\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right] \\
&= \frac{a'}{ab'}\left(2\,\frac{v_0^2 + a^4 b^2}{v_0^2 - a^4 b^2} - \frac{a^2 b^4 + v_0^2}{a^2 b^4 - v_0^2} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{b}\left(\frac{v_0^2 + a^4 b^2}{v_0^2 - a^4 b^2} + 2\,\frac{v_0^2 + a^2 b^4}{v_0^2 - a^2 b^4} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right).
\end{aligned}
$$

Il est aisé de s'assurer que

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial b}\left(2\frac{v_0^2+a^4b^2}{v_0^2-a^4b^2}-\frac{a^2b^4+v_0^2}{a^2b^4-v_0^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$$
$$=\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{v_0^2+a^4b^2}{v_0^2-a^4b^2}+2\frac{v_0^2+a^2b^4}{v_0^2-a^2b^4}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right).$$

On a donc

$$\text{(12)}\qquad \mathrm{H}=\frac{df_1}{db},$$

où l'on a posé

$$f_1=\log\frac{a^4b^4}{(v_0^2-a^4b^2)(b^4a^2-v_0^2)(a^2-b^2)}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{b'}\left[\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{ba^2c^2\mathrm{Q}}{\omega}\right)+\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{ab^2c^2\mathrm{Q}}{\omega}\right)\right]=v_0^2\left[\frac{2a^2+b^2}{b\omega_1}+\frac{a'}{b'}\,\frac{(a^2+2b^2)}{a\omega_1}\right]$$
$$=v_0^2\left(\frac{2a^2+b^2}{b\omega_1}+\frac{da}{db}\,\frac{a^2+2b^2}{a\omega_1}\right),$$
$$\omega_1=v_0^2(a^2+b^2)+a^4b^4.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{2a^2+b^2}{b\omega_1}\right)=\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{a^2+2b^2}{a\omega_1}\right).$$

Par conséquent,

$$\text{(13)}\qquad \frac{1}{b'}\left[\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{ba^2c^2\mathrm{Q}}{\omega}\right)+\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{ab^2c^2\mathrm{Q}}{\omega}\right)\right]=\frac{df_2}{db},$$

où

$$f_2=v_0^2\int\left(\frac{2a^2+b^2}{b\omega_1}\,db+\frac{a^2+2b^2}{a\omega_1}\,da\right).$$

Les équations (11), (12) et (13) conduisent à la relation suivante :

$$\mathrm{I}=\frac{d(f_1+f_2)}{db}=\frac{df}{db},$$

qui montre que *le principe du dernier multiplicateur de Jacobi s'applique aux équations* (10).

Il en résulte immédiatement la proposition énoncée au début de ce numéro.

5. Les équations (8) jouissent d'une autre propriété remarquable : étant symétriques en ξ_1, ξ_2, ξ_3 et η_1, η_2, η_3, elles restent inaltérées si l'on remplace ξ_i respectivement par η_i ($i = 1, 2, 3$), et inversement.

Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

Si les équations (8) *admettent une certaine solution de la forme*

$$\xi_i = \varphi_i(t), \qquad \eta_i = \psi_i(t),$$
$$a = \theta_1(t), \qquad b = \theta_2(t), \qquad c = \theta_3(t),$$

$\varphi_i(t)$, $\psi_i(r)$, $\theta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) *étant les fonctions connues de* t, *elles admettent nécessairement une autre, définie par les formules*

$$\xi_i = \psi_i(t), \qquad \eta_i = \varphi_i(t),$$
$$a = \theta_1(t), \qquad b = \theta_2(t), \qquad c = \theta_3(t).$$

Revenant aux variables x_i, y_i, liées à ξ_i et η_i par les relations (1), on peut dire que les équations différentielles (41), (42), (43) et (44) du Chapitre I ne changent pas sa forme, si l'on y remplace

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3; \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3$$

respectivement par

$$y_1\sqrt{\frac{c}{b}}, \quad y_2\sqrt{\frac{a}{c}}, \quad y_3\sqrt{\frac{b}{a}}; \quad x_1\sqrt{\frac{b}{c}}, \quad x_2\sqrt{\frac{c}{a}}, \quad x_3\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Donc, si ces équations admettent une solution quelconque

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$a = \theta_1(t), \qquad b = \theta_2(t), \qquad c = \theta_3(t),$$

$\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $\theta_i(t)$ étant les fonctions connues, elles admettent nécessairement une autre :

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{b}}\psi_1(t), \qquad x_2 = \sqrt{\frac{a}{c}}\psi_2(t), \qquad x_3 = \sqrt{\frac{b}{a}}\psi_3(t),$$
$$y_1 = \sqrt{\frac{b}{c}}\varphi_1(t), \qquad y_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}\varphi_2(t), \qquad y_3 = \sqrt{\frac{a}{b}}\varphi_3(t),$$
$$a = \theta_1(t), \qquad b = \theta_2(t), \qquad c = \theta_3(t).$$

Cette proposition conduit au théorème suivant, dû à Dedekind :

A tout mouvement possible, défini par les équations

$$u = \frac{a'}{2a}\xi - y_3\eta + x_2\zeta, \qquad p = \frac{x_1 b + y_1 c}{b - c},$$

$$v = x_3\xi + \frac{b'}{2b}\eta + y_1\zeta, \qquad q = \frac{x_2 c + y_2 a}{c - a},$$

$$w = y_2\xi + x_1\eta + \frac{c'}{2c}\zeta, \qquad r = \frac{x_3 a + y_3 b}{a - b},$$

d'un ellipsoïde

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c} = 1,$$

correspond un mouvement réciproque, défini par les équations

$$u = \frac{a'}{2a}\xi + \sqrt{\frac{a}{b}}\,x_3\eta + \sqrt{\frac{a}{c}}\,y_2\zeta, \qquad p = \frac{\sqrt{bc}}{b - c}(x_1 + y_1),$$

$$v = \sqrt{\frac{b}{a}}\,y_3\xi + \frac{b'}{2b}\eta + \sqrt{\frac{b}{c}}\,x_1\zeta, \qquad q = \frac{\sqrt{ca}}{c - a}(x_2 + y_2),$$

$$w = \sqrt{\frac{c}{a}}\,x_2\xi + \sqrt{\frac{c}{b}}\,y_1\eta + \frac{c'}{2c}\zeta, \qquad r = \frac{\sqrt{ab}}{a - b}(x_3 + y_3),$$

où u, v, w désignent les composantes de la vitesse absolue du point ξ, η, ζ du liquide; p, q, r les composantes de la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement; a, b, c, x_i et y_i les fonctions connues de t vérifiant les équations (41), (42), (43), (44) *du mouvement* (Chap. I).

6. Il n'est pas inutile d'indiquer l'application de ces théorèmes à certains cas particuliers, où le problème d'intégration se simplifie essentiellement.

On peut satisfaire aux équations (2) et (2_1) en posant

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (1),

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad x_3 = y_3,$$

ce qui correspond à la supposition que *le mouvement du liquide soit irrotationnel.*

Les équations du mouvement (8) prennent la forme suivante :

$$(16)\quad \begin{cases} \xi_1' = \mu_1\xi_2\xi_3, \qquad \xi_2' = \mu_2\xi_3\xi_1, \qquad \xi_3' = \mu_3\xi_1\xi_2, \\ \dfrac{da'}{dt} = R_1(\xi_i, 0, a, b) + \dfrac{2ab^2c^2}{\omega}Q(a, b, a', b'), \qquad \dfrac{da}{dt} = a', \\ \dfrac{db'}{dt} = R_2(\xi_i, 0, a, b) + \dfrac{2bc^2a^2}{\omega}Q(a, b, a', b'), \qquad \dfrac{db}{dt} = b'. \end{cases}$$

Les intégrales (9) se réduisent aux *deux* suivantes :

$$(17)\quad \begin{cases} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = k^2, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 + \xi_1^2\dfrac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2} + \xi_2^2\dfrac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2} + \xi_3^2\dfrac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2} = 4D + h. \end{cases}$$

En appliquant à ce cas particulier le théorème du n° 4, on s'assure qu'*il suffit de trouver* CINQ *intégrales distinctes des équations* (16) *pour ramener le problème aux quadratures.*

Or, deux intégrales (17) de ces équations étant connues, *il ne nous reste qu'à trouver encore* TROIS *intégrales, ne dépendant pas de t, pour résoudre le problème à l'aide des quadratures.*

7. Les équations (8) étant symétriques (¹) par rapport à ξ_1, ξ_2, ξ_3 et η_1, η_2, η_3, on en déduit immédiatement un second cas possible du mouvement en posant (*comp.* le théorème du n° 5)

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.$$

Les équations (8) se réduiront à *sept* équations de la forme (16), où il faut seulement remplacer les variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 respectivement par η_1, η_2, η_3.

Les équations ainsi obtenues admettent deux intégrales qu'on obtient en remplaçant dans (17) ξ_1, ξ_2, ξ_3 par η_1, η_2, η_3.

Il suffit de trouver encore trois intégrales distinctes, ne dépendant pas

(¹) Remarquons, en passant, que cette propriété des équations (8) conduit immédiatement au résultat suivant : s'il existe une intégrale des équations (8)

$$(\alpha)\qquad f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, a, b, a', b') = \text{const.}$$

non symétrique en ξ_1, ξ_2, ξ_3 et η_1, η_2, η_3, il existe nécessairement une autre qui se déduit de (α) par la permutation réciproque des lettres ξ_1, ξ_2, ξ_3 et η_1, η_2, η_3.

de t, pour achever l'intégration des équations dont il s'agit à l'aide de deux quadratures.

8. La troisième solution particulière correspond à la supposition

$$(18) \qquad \xi_1 = \eta_1, \qquad \xi_2 = \eta_2, \qquad \xi_3 = \eta_3.$$

Les équations (8) deviennent alors

$$(18_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_1 = (\sigma_3 - \sigma_2 + \mu_1)\xi_2\xi_3, \\ \xi'_2 = (\sigma_1 - \sigma_3 + \mu_2)\xi_3\xi_1, \\ \xi'_3 = (\sigma_2 - \sigma_1 + \mu_3)\xi_1\xi_2; \\ \dfrac{da'}{dt} = R_1(\xi_i, \xi_i, a, b) + \dfrac{2ab^2c^2}{\omega} Q(a, b, a', b'), \qquad \dfrac{da}{dt} = a'; \\ \dfrac{db'}{dt} = R_2(\xi_i, \xi_i, a, b) + \dfrac{2bc^2a^2}{\omega} Q(a, b, a', b'), \qquad \dfrac{db}{dt} = b'; \end{array} \right.$$

et les intégrales (9) se réduisent aux deux suivantes :

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = k^2,$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2\xi_1^2 \frac{(b+c)^2}{(b^2-c^2)^2} + 2\xi_2^2 \frac{(c+a)^2}{(c^2-a^2)^2} + 2\xi_3^2 \frac{(a+b)^2}{(a^2-b^2)^2} = 4D + h.$$

Le problème se ramène, comme dans les deux cas précédents, *à la détermination de* TROIS *autres intégrales, ne dépendant pas de t, des équations* (18).

Ces intégrales étant trouvées, l'intégration s'achève à l'aide de deux quadratures.

9. Les équations du mouvement admettent encore la solution suivante :

$$\xi_1 = \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0,$$
$$\xi_3 = \text{const.}, \qquad \eta_3 = \text{const.}$$

et se réduisent, dans ce cas particulier, à quatre équations

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da'}{dt} = R_1(0, 0, \xi_3, 0, 0, \eta_3, a, b) + \dfrac{2ab^2c^2}{\omega} Q(a, b, a', b'), \\ \dfrac{db'}{dt} = R_2(0, 0, \xi_3, 0, 0, \eta_3, a, b) + \dfrac{2bc^2a^2}{\omega} Q(a, b, a', b'), \\ \dfrac{da}{dt} = a', \qquad \dfrac{db}{dt} = b', \end{array} \right.$$

qui admettent une intégrale de la force vive

$$(20) \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 + \frac{(\xi_3 a + \eta_3 b)^2 + (\xi_3 b + \eta_3 a)^2}{(a^2 - b^2)^2} = 4D + h.$$

D'après le théorème du n° 4, il suffit de trouver *deux* intégrales distinctes, indépendantes de t, pour ramener l'intégration aux quadratures.

Or, l'intégrale (20) étant connue, *il ne reste qu'à déterminer encore une seule intégrale de l'espèce considérée pour résoudre le problème à l'aide des quadratures.*

Nous avons ici un cas possible du mouvement, indiqué par Riemann.

Le cas particulier de celui-ci, correspondant à la supposition

$$a = \text{const.}, \qquad b = \text{const.}, \qquad c = \text{const.},$$

nous l'avons déjà étudié plus haut.

10. Remarquons que les équations (16), (17) et (18_1) admettent aussi les solutions particulières correspondant à la supposition que la surface libre du liquide ne change pas sa forme pendant le mouvement, pourvu qu'il existe certaines relations entre les constantes a, b et c.

Considérons, par exemple, le mouvement, défini par les équations (18) et (18_1).

Les équations (18) conduisent, en vertu de (1), aux relations suivantes :

$$bx_1 - cy_1 = 0, \qquad cx_2 - ay_2 = 0, \qquad ax_3 - by_3 = 0.$$

Si a, b et c ne dépendent pas de t, on doit avoir, d'après les recherches de la Section I de ce Chapitre, ou

$$(1) \qquad x_1 = y_1 = 0,$$

x_2, y_2, x_3, y_3 étant différents de zéro, ou

$$(2) \qquad x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0,$$

x_3 et y_3 étant différents de zéro.

La première hypothèse exige qu'on ait

$$\xi_1 = 0,$$

ξ_2 et ξ_3 étant des constantes, différentes de zéro.

Or, la première des équations (18_1) donne

$$(\sigma_3 - \sigma_2 + \mu_1)\xi_2\xi_3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sigma_3 - \sigma_2 + \mu_1 = 0.$$

Pour que le mouvement soit possible, il faut et il suffit que cette relation soit compatible avec l'une des conditions (45), (52), (78).

En nous bornant par cette remarque, sans entrer dans le détail, considérons la seconde hypothèse où

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \qquad a x_3 + b y_3 = 0.$$

Les équations (81) et (82) de la Section I deviennent, eu égard à (83) et (84),

$$R = 0, \qquad 2a^3 b x_3^2 = \mu(a+b)^2 S.$$

Le mouvement n'est possible que dans la supposition (b) du n° 18 de la Section I, lorsque

$$b > a > c,$$

et, comme il est aisé de voir, correspond au cas, où les conditions (93) se réduisent à l'équation

$$\frac{c}{a} = s = s_0\left(\frac{a}{b}\right) = s_0(t),$$

$s_0(t)$ désignant la racine de l'équation

$$\Phi(s, t) = 0$$

(*voir* n° 20 de la Section I de ce Chapitre).

11. Je terminerai ce Chapitre par la remarque suivante :

L'intégration des équations (2), (2_1) et (4) [ou (8)] étant effectuée, on obtient les expressions des variables

$$x_i,\quad y_i,\quad a,\quad b \quad \text{et} \quad c \qquad (i=1,2,3),$$

en fonction de t, ainsi que les composantes p, q et r du mouvement d'entraînement.

Pour déterminer complètement la position du système dans l'espace, il faut encore exprimer en fonction de t les cosinus directeurs α_i, β_i, γ_i $(i=1, 2, 3)$ des axes mobiles ξ, η, ζ avec les axes x, y, z, fixes dans l'espace.

Montrons que *ce dernier problème se ramène toujours à une seule quadrature*.

Envisageons les équations (46) du Chapitre I.

Ces équations, combinées avec les équations de cinématique

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=r\alpha_2-q\alpha_3,\qquad \frac{d\beta_1}{dt}=r\beta_2-q\beta_3,\qquad \frac{d\gamma_1}{dt}=r\gamma_2-q\gamma_3,$$
$$\dots\dots\dots,\qquad \dots\dots\dots,\qquad \dots\dots\dots,$$

montrent que le vecteur

$$k=\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2},$$

passant par le centre de l'ellipsoïde, ne change pas sa direction dans l'espace.

En le prenant donc pour l'axe des z, on trouve

$$(21)\qquad \begin{cases} z_1=k\cos(k,\xi)=k\gamma_1,\\ z_2=k\cos(k,\eta)=k\gamma_2,\\ z_3=k\cos(k,\zeta)=k\gamma_3.\end{cases}$$

Ces équations déterminent γ_1, γ_2, γ_3 en fonction de t.

Introduisant maintenant les angles θ, φ et ψ d'Euler et en se rappelant que

$$\gamma_1=-\sin\theta\cos\varphi,\qquad \gamma_2=\sin\theta\sin\varphi,\qquad \gamma_3=\cos\theta,$$

on obtient

$$\cos\theta=\frac{z_3}{k},\qquad \operatorname{tang}\varphi=-\frac{z_2}{z_1}.$$

Ces équations déterminent θ et φ en fonction de t.

Il ne reste qu'à déterminer l'angle ψ.

Pour cela il suffit d'employer les formules bien connues de cinématique

$$p = \sin\varphi \frac{d\theta}{dt} - \cos q \sin\theta \frac{d\psi}{dt},$$

$$q = \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} + \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt},$$

qui donnent, eu égard à (21) et (22),

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{1 - \gamma_3^2} = k\frac{pz_1 + qz_2}{k^2 - z_3^2},$$

d'où l'on tire à l'aide d'une quadrature

$$\psi = \psi_0 + k\int_0^t \frac{pz_1 + qz_2}{k^2 - z_3^2}\,dt.$$