ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. REMY

Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 193-258
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__193_0>

SUR

UNE CLASSE DE SURFACES ALGÉBRIQUES

LIÉES AUX FONCTIONS ABÉLIENNES DE GENRE TROIS;

Par M. L. REMY.

Ce Mémoire a pour objet l'étude générale des surfaces algébriques dont les points correspondent aux couples de points d'une courbe de genre *trois*, et il a pour point de départ la représentation paramétrique des surfaces de la classe considérée par les fonctions abéliennes de trois variables.

De même que pour les surfaces hyperelliptiques, il convient d'établir une distinction fondamentale suivant que à un point de la surface répondent un ou plusieurs couples de points de la courbe. La première Partie de ce Mémoire traite des surfaces algébriques qui admettent une correspondance *univoque* avec une courbe de genre *trois*, et la seconde Partie est consacrée aux surfaces algébriques dont la correspondance avec cette courbe est du type (1, 2).

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES LIÉES A UNE COURBE DE GENRE TROIS PAR UNE CORRESPONDANCE UNIVOQUE.

Représentation paramétrique des surfaces S.

1. On doit à M. Humbert ([1]) une représentation paramétrique des surfaces considérées au moyen des fonctions abéliennes de trois variables u, v, w, à six systèmes de périodes simultanées, représentation dont nous ferons un fréquent usage dans l'étude de ces surfaces.

Désignons par $g_1(x,y)\,dx$, $g_2(x,y)\,dx$, $g_3(x,y)\,dx$ trois différentielles abéliennes distinctes de première espèce attachées à la courbe de genre *trois* C, d'équation $f(x,y)=0$, et posons

$$\begin{aligned}
g_1(x_1,y_1)\,dx_1+g_1(x_2,y_2)\,dx_2+g_1(x_3,y_3)\,dx_3&=du,\\
g_2(x_1,y_1)\,dx_1+g_2(x_2,y_2)\,dx_2+g_2(x_3,y_3)\,dx_3&=dv,\\
g_3(x_1,y_1)\,dx_1+g_3(x_2,y_2)\,dx_2+g_3(x_3,y_3)\,dx_3&=dw.
\end{aligned}$$

Toute fonction rationnelle symétrique par rapport à (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) est une fonction abélienne de u, v, w; il en est de même si l'on suppose que le point (x_3,y_3) est fixe, mais alors u, v, w sont liés par la relation

$$\vartheta(u+\lambda,\, v+\mu,\, w+\nu)=0,$$

$\vartheta(u,v,w)$ désignant la fonction thêta normale du premier ordre et de caractéristique nulle, et λ, μ, ν des constantes.

Si l'on désigne par $G(x,y)$ l'intégrale $\int g(x,y)\,dx$ on peut, en augmentant u, v, w de constantes et en choisissant convenablement les limites inférieures des intégrales, ramener les relations précédentes à la forme

$$\begin{aligned}
G_1(x,y)+G_1(x',y')&=u,\\
G_2(x,y)+G_2(x',y')&=v,\\
G_3(x,y)+G_3(x',y')&=w,\\
\vartheta(u,v,w)&=0.
\end{aligned}$$

([1]) *Journal de Mathématiques*, 5e série, t. III, 1896.

Dès lors, *les surfaces* S *peuvent être représentées paramétriquement par des équations de la forme*

$$\begin{aligned} X &= \Phi_1(u, v, w), \\ Y &= \Phi_2(u, v, w), \\ Z &= \Phi_3(u, v, w), \end{aligned}$$

où les fonctions Φ *sont des fonctions abéliennes à six systèmes de périodes des trois paramètres u, v, w liés eux-mêmes par la relation*

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0.$$

La fonction $\mathfrak{S}$ étant une fonction paire, la représentation précédente met en évidence une transformation birationnelle de la surface S en elle-même, à savoir celle qui fait correspondre au point d'arguments (u, v, w) le point d'arguments $(-u, -v, -w)$: deux tels points seront dits *conjugués*.

Sur le genre des surfaces S et sur leur système canonique.

2. Sur la surface S les trois intégrales doubles

$$\int\int du\, dv, \quad \int\int dv\, dw, \quad \int\int dw\, du$$

sont des intégrales de première espèce, car elles ne deviennent jamais infinies à l'intérieur d'un prismatoïde de périodes.

Réciproquement, on établit aisément que toute intégrale de première espèce de la surface

$$\int\int R(X, Y, Z)\, dX\, dY$$

est nécessairement de la forme

$$\int\int \sum_{(i,\,k=1,\,2,\,3)} a_{ik}[g_i(x, y)\, g_k(x', y') - g_k(x, y)\, g_i(x', y')]\, dx\, dx'$$

ou encore

$$\int\int a_{12}\, du\, dv + a_{23}\, dv\, dw + a_{31}\, dw\, du.$$

Donc *le genre géométrique des surfaces* S *est égal à* trois.

Les surfaces S possèdent trois intégrales de différentielles totales de première espèce linéairement distinctes :

$$\int du, \quad \int dv, \quad \int dw.$$

Réciproquement toute intégrale de différentielle totale de première espèce de la surface est une combinaison linéaire de ces trois intégrales. Soit en effet une telle intégrale

$$\int \mathrm{M}\, d\mathrm{X} + \mathrm{N}\, d\mathrm{Y};$$

elle devient, lorsqu'on y remplace X, Y, Z en fonction de (x, y), (x', y'),

$$\int \mathrm{P}(x, y;\, x', y')\, dx + \mathrm{Q}(x, y;\, x', y')\, dx',$$

P et Q étant deux fonctions rationnelles de x, y et x', y'. Si l'on suppose x', y' constants, l'intégrale précédente doit se réduire à une intégrale abélienne de première espèce de la courbe C. Dès lors

$$\mathrm{P}(x, y;\, x', y') = \lambda_1 g_1(x, y) + \lambda_2 g_2(x, y) + \lambda_3 g_3(x, y),$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant *a priori* des fonctions rationnelles de x', y' ; mais, comme ces fonctions doivent rester finies quel que soit le point (x', y'), elles se réduisent nécessairement à des constantes.

D'autre part, la différentielle doit rester inaltérée lorsqu'on permute les points (x, y) et (x', y'), ce qui exige

$$\mathrm{Q}(x, y;\, x', y') = \lambda_1 g_1(x', y') + \lambda_2 g_2(x', y') + \lambda_3 g_3(x', y').$$

Il est donc établi que l'intégrale considérée est de la forme

$$\int \mathrm{M}\, d\mathrm{X} + \mathrm{N}\, d\mathrm{Y} = \int \lambda_1\, du + \lambda_2\, dv + \lambda_3\, dw.$$

Donc *les surfaces* S *possèdent trois intégrales de différentielles totales de première espèce distinctes.*

En d'autres termes, les surfaces S sont des surfaces *irrégulières* et leur genre numérique p_n diffère de leur genre géométrique p_g ; d'après un théorème de M. Castelnuovo, la différence $(p_g - p_n)$ est égale au nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce.

Dès lors, *le genre numérique des surfaces* S *est égal à zéro.*

3. Proposons-nous de déterminer la valeur des invariants de M. Nöther $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ dont la définition est la suivante : l'invariant $p^{(1)}$ est le genre de la courbe générale du système canonique (ou système découpé sur la surface par ses adjointes d'ordre $m-4$), et l'invariant $p^{(2)}$ est le nombre des points d'intersection mobiles de deux courbes de ce système. M. Nöther a d'ailleurs établi que

$$p^{(1)} = p^{(2)} + 1,$$

dans le cas où les surfaces adjointes d'ordre $m-4$ ne passent par aucun point fixe de la surface en dehors des courbes multiples et de certains points multiples de la surface.

L'équation en u, v, w des courbes du système canonique s'obtient par un calcul simple. Les intégrales doubles de première espèce de la surface sont nécessairement de la forme

$$\iint Q(X, Y, Z) \frac{dX\,dY}{S'_Z},$$

S(X, Y, Z) désignant le premier membre de l'équation cartésienne de la surface et Q(X, Y, Z) un polynome adjoint d'ordre $m-4$; or on trouve de suite

$$dX\,dY = \frac{J}{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}}\,du\,dv,$$

en posant

$$J = \frac{D(X, Y, \mathfrak{S})}{D(u, v, w)}.$$

L'intégrale double générale de première espèce est donc de la forme

$$\begin{aligned}&\iint \lambda\,dv\,dw + \mu\,dw\,du + \nu\,du\,dv \\ &\quad= \iint \left(\lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}\right) \frac{dX\,dY}{J} = \iint Q \frac{dX\,dY}{S'_Z},\end{aligned}$$

d'où il résulte que la courbe générale L du système canonique a pour équation

$$L(u, v, w) = \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = 0.$$

Il convient de remarquer que les dérivées partielles $\frac{\partial \vartheta}{\partial u}, \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \frac{\partial \vartheta}{\partial w}$ (qui ne sont pas des fonctions thêta des trois variables indépendantes u, v, w) satisfont aux mêmes relations fonctionnelles que ϑ dans l'hypothèse où les arguments vérifient la relation

$$\vartheta(u, v, w) = 0.$$

Ceci posé, l'invariant $p^{(2)}$ est égal au nombre des solutions non fixes du système

$$\begin{gathered}\lambda_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \nu_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = 0,\\ \lambda_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \nu_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = 0,\\ \vartheta(u, v, w) = 0.\end{gathered}$$

Or, ces fonctions satisfaisant sur la surface aux équations fonctionnelles d'une fonction thêta du premier ordre, on peut leur appliquer le théorème de M. Poincaré d'après lequel trois fonctions thêta de genre *trois*, d'ordre m, n, p possèdent $6 \times m \times n \times p$ zéros communs. D'ailleurs ces équations n'ont pas de solution commune fixe, car les quatre fonctions $\vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial u}, \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \frac{\partial \vartheta}{\partial w}$ n'ont pas de zéro commun (si toutefois on exclut le cas hyperelliptique qui sera examiné à part).

On a dès lors pour les surfaces S

$$p^{(2)} = 6 \qquad \text{et} \qquad p^{(1)} = 7.$$

4. Il existe entre le système canonique de la surface S et la courbe fondamentale de genre *trois* C des relations géométriques intéressantes; on peut d'ailleurs supposer que C est une courbe plane du quatrième ordre, le cas hyperelliptique étant exclu.

Les intégrales doubles de première espèce de la surface S sont nécessairement de la forme

$$\iint \left\{ \begin{array}{l} \lambda[g_2(x,y)\,g_3(x',y') - g_3(x,y)\,g_2(x',y')] \\ +\mu[g_3(x,y)\,g_1(x',y') - g_1(x,y)\,g_3(x',y')] \\ +\nu[g_1(x,y)\,g_2(x',y') - g_2(x,y)\,g_1(x',y')] \end{array} \right\} dx\,dx'$$

et les différentielles $g(x,y)\,dx$ ont elles-mêmes pour expression

$$g_1(x,y)\,dx = \frac{x\,dx}{f'_y},$$
$$g_2(x,y)\,dx = \frac{y\,dx}{f'_y},$$
$$g_3(x,y)\,dx = \frac{dx}{f'_y}.$$

De là résulte que les courbes du système canonique sont définies par l'équation

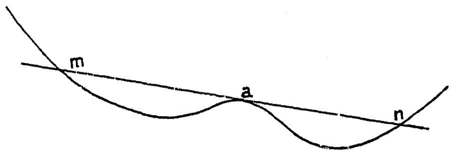
$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui exprime que le couple de points (x,y), (x',y') de la courbe C est en ligne droite avec le point $\left(\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}\right)$.

Donc *les points d'une courbe* L *du système canonique correspondent aux couples de points découpés sur la courbe du quatrième ordre* C *par une sécante qui tourne autour d'un point fixe* a.

Cette représentation géométrique appelle l'attention sur le cas où le point a est situé sur la courbe C : la courbe L se décompose alors en deux courbes distinctes : l'une $\mathcal{L}_a$ définie par les couples de C formés du point a et d'un point quelconque, et l'autre $\mathcal{L}'_a$ définie par les

Fig. 1.



couples situés en ligne droite avec le point a. Les courbes $\mathcal{L}_a$ et $\mathcal{L}'_a$ sont conjuguées l'une de l'autre et, d'après leur définition même, elles admettent une correspondance univoque avec la courbe C. Enfin elles se rencontrent en deux points d'intersection qui correspondent aux couples (a, m) et (a, n) déterminés sur la courbe C par la tangente au point a : la surface adjointe considérée est tangente en ces deux points à la surface S.

En résumé, *il existe une infinité de surfaces adjointes d'ordre $m-4$ de la surface* S *qui lui sont tangentes en deux points conjugués, et chacune d'elles découpe sur* S *deux courbes distinctes* $\mathfrak{L}$ *et* $\mathfrak{L}'$ *de genre* trois *et de mêmes modules que la courbe fondamentale* C.

Voici enfin quelques propriétés des familles $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ qui se déduisent aisément de leur liaison avec la courbe C. Le lieu géométrique des points de contact des surfaces adjointes d'ordre $m-4$ tangentes à S est la courbe $\mathfrak{D}$ définie par les couples (a, m), (a, n) découpés sur C par une tangente mobile amn; la courbe $\mathfrak{D}$ possède *vingt-huit* points doubles correspondant aux bitangentes de C. Les courbes de la famille $\mathfrak{L}$ ont pour enveloppe la courbe $\mathfrak{z}$ définie par les couples de C formés de deux points confondus (a, a) et celles de la famille $\mathfrak{L}'$ ont pour enveloppe la courbe $\mathfrak{z}'$ définie par les couples (m, n) découpés sur C par une tangente mobile; chacune de ces courbes touche son enveloppe en *un* point.

Enfin, la courbe $\mathfrak{D}$ est tangente à chacune des courbes $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$ en *vingt-quatre* points qui correspondent aux tangentes d'inflexion de la courbe du quatrième ordre C.

Sur les courbes algébriques tracées sur une surface S.

5. Avant d'aborder la théorie générale des courbes algébriques tracées sur une surface S, nous étudierons une famille particulière dont la considération nous sera très utile, savoir la famille définie par l'équation

$$\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu, w+\nu)=0,$$

où $\mathfrak{S}$ désigne la fonction thêta normale du premier ordre et de caractéristique nulle, et λ, μ, ν trois constantes arbitraires.

Nous supposons toujours que les limites inférieures des trois intégrales de première espèce $G(x, y)$ sont choisies de telle sorte que les relations

$$\begin{aligned} u &= G_1(x,y)+G_1(x',y'),\\ v &= G_2(x,y)+G_2(x',y'),\\ w &= G_3(x,y)+G_3(x',y') \end{aligned}$$

entraînent comme conséquence l'équation

$$\Im(u, v, w) = 0.$$

Dans ces conditions, le système des deux équations

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \Im(u, v, w) = 0, \\ \Im(u+\lambda, v+\mu, w+\nu) = 0 \end{cases}$$

est équivalent aux relations

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} u = G_1 x + G_1 x' = -\lambda + G_1 X + G_1 X', \\ v = G_2 x + G_2 x' = -\mu + G_2 X + G_2 X', \\ w = G_3 x + G_3 x' = -\nu + G_3 X + G_3 X', \end{cases}$$

où la notation $G_k x$ représente l'intégrale $G_k(x, y)$ et où (x, y), (x', y') et (X, Y), (X', Y') désignent deux couples de points de la courbe du quatrième ordre C.

D'autre part, étant données trois constantes quelconques λ, μ, ν, il est toujours possible, et cela d'une infinité de manières, de déterminer sur la courbe C quatre points (x_0, y_0), ..., (x_3, y_3) tels que

$$\lambda = \sum_{i=0}^{i=3} G_1(x_i, y_i),$$

$$\mu = \sum_{i=0}^{i=3} G_2(x_i, y_i),$$

$$\nu = \sum_{i=0}^{i=3} G_3(x_i, y_i).$$

Si l'on désigne enfin par (ξ, η), (ξ', η') les deux points de C en ligne droite avec les points (X, Y), (X', Y'), lesquels vérifient les relations

$$(G_k X + G_k X') + (G_k \xi + G_k \xi') = 0 \qquad (k = 1, 2, 3),$$

on déduit immédiatement du système (II) les trois équations

$$(G_k x + G_k x') + (G_k \xi + G_k \xi') + \sum_{i=0}^{i=3} G_k x_i = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

qui établissent que les couples de points (x, y), (x', y') et (ξ, η),

(ξ', η') sont situés sur une conique passant par les quatre points

$$(x_0, y_0), \quad \ldots, \quad (x_3, y_3).$$

En définitive, *la courbe définie par l'équation*

$$\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu, w+\nu) = 0$$

correspond aux couples de points découpés sur la courbe C *par les coniques passant par quatre points fixes de cette courbe.*

Cette définition géométrique appelle l'attention sur un cas intéressant, celui où les trois points fixes (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont en ligne droite, car les coniques en question se décomposent alors en une droite fixe menée par ces trois points et une droite variable menée par le point (x_0, y_0). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les constantes λ, μ, ν soient de la forme

$$\lambda = G_1(x_0, y_0) - G_1(X_0, Y_0) = \int_{X_0 Y_0}^{x_0 y_0} g_1(x, y)\, dx,$$

$$\mu = G_2(x_0, y_0) - G_2(X_0, Y_0) = \int_{X_0 Y_0}^{x_0 y_0} g_2(x, y)\, dx,$$

$$\nu = G_3(x_0, y_0) - G_3(X_0, Y_0) = \int_{X_0 Y_0}^{x_0 y_0} g_3(x, y)\, dx,$$

(X_0, Y_0) désignant le quatrième point d'intersection de C avec la droite menée par les trois points fixes (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

D'où cette conclusion : *Lorsque les constantes* λ, μ, ν *sont de la forme*

$$\lambda = \int_{XY}^{xy} g_1(x, y)\, dx, \qquad \mu = \int_{XY}^{xy} g_2(x, y)\, dx, \qquad \nu = \int_{XY}^{xy} g_3(x, y)\, dx,$$

l'équation

$$\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu, w+\nu) = 0$$

définit sur la surface S *deux courbes algébriques distinctes : l'une* $\mathfrak{L}_{XY}$ *correspond aux couples de* C *formés du point fixe* (X, Y) *et d'un point variable; l'autre* $\mathfrak{L}'_{xy}$ *correspond aux couples de points situés en ligne droite avec le point* (x, y) *de cette courbe.*

Nous présenterons une dernière remarque : lorsqu'on fait tendre le point (X, Y) vers le point (x, y), l'équation précédente définit à la limite l'ensemble des deux courbes $\mathfrak{L}_{xy}$ et $\mathfrak{L}'_{xy}$; cette équation limite s'obtient en prenant la dérivée de la fonction par rapport au paramètre X pour la valeur $X = x$, d'où

$$x \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{S}(u, v, w) + y \frac{\partial}{\partial v} \mathfrak{S}(u, v, w) + \frac{\partial}{\partial w} \mathfrak{S}(u, v, w) = 0.$$

La forme de l'équation met en évidence le fait que les deux courbes $\mathfrak{L}_{xy}$ et $\mathfrak{L}'_{xy}$ sont l'intersection de la surface S par une de ses adjointes d'ordre $m - 4$.

La représentation analytique en u, v, w des courbes particulières $\mathfrak{L}$ jouera un rôle important dans l'étude des courbes algébriques de la surface.

6. D'après la définition même des surfaces S, toute courbe algébrique irréductible de la surface définit une correspondance algébrique entre les deux points (x, y) et (x', y') de la courbe de genre *trois* C liée à S, et réciproquement. On doit à Hürwitz une étude des correspondances entre deux points d'une courbe algébrique quelconque qui peut servir de point de départ dans la recherche des courbes algébriques tracées sur une surface S. Il convient de rappeler d'abord certains résultats fondamentaux du Mémoire de Hürwitz ([1]).

Soit une correspondance algébrique quelconque entre les deux points (x, y) et (x', y') de la courbe C de genre *trois* ([2]), d'équation $f(x, y) = 0$; désignons par

$$(x'_1, y'_1), \quad (x'_2, y'_2), \quad \ldots, \quad (x'_\alpha, y'_\alpha)$$

les α points que la correspondance associe au point (x, y), et par

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_\beta, y_\beta)$$

les β points qu'elle associe au point (x', y').

Désignons par $G_1(x, y)$, $G_2(x, y)$, $G_3(x, y)$ les trois intégrales normales de première espèce attachées à la courbe C, lesquelles possèdent un Tableau de périodes de la forme

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XXVIII, p. 561.

([2]) La même démonstration est applicable à une courbe de genre p.

et considérons avec Hürwitz les sommes

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} G_k(x'_i, y'_i) \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Ces sommes, vues comme fonctions de (x, y), sont des intégrales de première espèce : elles peuvent donc s'exprimer par des relations de la forme

$$\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{i=\alpha} G_k(x'_i, y'_i) = \sum_j \pi_{kj} G_j(x, y) + \pi_k \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Si l'on fait décrire à la variable (x, y) un contour fermé tel que les intégrales $G_1(x, y)$, $G_2(x, y)$, $G_3(x, y)$ augmentent respectivement d'un de leurs systèmes de périodes simultanées, les premiers membres des équations (I) reprennent en même temps leurs valeurs initiales *à une période près :* il existe donc des entiers h, g, H et G tels que

$$\left.\begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum g_{jl}\, a_{kj} \\ \sum_j \pi_{kj}\, a_{jl} &= H_{kl} + \sum_j G_{jl}\, a_{kj} \end{aligned}\right\} \qquad (k, l = 1, 2, 3).$$

Éliminant les quantités π_{kl} entre les équations précédentes, on obtient un système d'équations à coefficients entiers entre les périodes a :

$$\text{(II)} \quad \sum_j h_{kj} a_{jl} + \sum_m \sum g_{mj}\, a_{km}\, a_{jl} = H_{kl} + \sum_j G_{jl} a_{kj} \qquad (k, l = 1, 2, 3).$$

Il convient dès lors de distinguer deux cas, suivant qu'il existe ou non des relations à coefficients entiers du type (II) entre les périodes a des intégrales de première espèce attachées à la courbe ; lorsqu'il existe une telle relation, la courbe et les fonctions abéliennes qui en dérivent sont dites *singulières*. Dorénavant, *nous supposerons expressément que la courbe considérée* C *n'est pas une courbe singulière.*

Dans cette hypothèse les équations (II) doivent être vérifiées identiquement, ce qui exige que

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = G_{11} = G_{22} = G_{33},$$

et que tous les autres coefficients h, g, H et G soient nuls; nous désignerons par $-\gamma$ la valeur commune des entiers h_{jj} et G_{jj} (¹).

Le système (I) prend dès lors la forme

$$\text{(III)} \qquad \sum_{i=1}^{i=\alpha} G_k(x'_i, y'_i) + \gamma G_k(x, y) = \pi_k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Ceci posé, désignons par $\mathfrak{S}(u, v, w)$ la fonction thêta normale du premier ordre et de caractéristique nulle correspondant au Tableau de périodes (T), et envisageons la fonction suivante des deux points (X, Y) et (X′, Y′) de la courbe C :

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}[&G_1(X, Y) - G_1(X', Y') + c_1,\\ &G_2(X, Y) - G_2(X', Y') + c_2,\\ &G_3(X, Y) - G_3(X', Y') + c_3],\end{aligned}$$

ou, pour abréger,

$$\mathfrak{S}(GX - GX').$$

Pour un choix convenable des constantes c_k, cette expression, considérée comme fonction du point (X, Y), est infiniment petite du premier ordre lorsque le point (X, Y) coïncide avec le point (X′, Y′), ou avec deux points (¹) fixes dépendant de la valeur des constantes c_k.

Soient (a, b) un point fixe de la courbe, $(a'_1, b'_1), \ldots, (a'_\alpha, b'_\alpha)$ les α points que lui associe la correspondance considérée ; soit enfin (c', d') un autre point fixe de la courbe et formons le produit

$$\begin{aligned}P = \Pi_i &\left[\frac{\mathfrak{S}(Gx' - Gx'_i)}{\mathfrak{S}(Gx' - Ga'_i)\,\mathfrak{S}(Gc' - Gx'_i)}\right]\\ &\times \left[\frac{\mathfrak{S}(Gx' - Gx)}{\mathfrak{S}(Gx' - Ga)\,\mathfrak{S}(Gc' - Gx)}\right]^{\gamma}.\end{aligned}$$

On démontre aisément, en vertu des relations fondamentales (III), que ce produit est *une fonction rationnelle des deux points* (x, y), (x', y'). C'est précisément cette fonction P introduite par Hürwitz qui va jouer le rôle fondamental dans l'étude des courbes algébriques des surfaces S.

(¹) L'entier γ est désigné par Hürwitz sous le nom de *correspondenzwerthigkeit*.

(¹) Ces points fixes sont en général au nombre de $(p-1)$, p étant le genre de la courbe.

7. Si l'on désigne par P′ la fonction qui se déduit de P par permutation des deux points (x, y) et (x', y'), le produit PP′ est une fonction rationnelle symétrique $R(x, y; x', y')$ des deux points (x, y), (x', y') : c'est donc une fonction rationnelle $R(X, Y, Z)$ des coordonnées d'un point de la surface [puisque la correspondance entre les couples (x, y) (x', y') et les points (X, Y, Z) est univoque], ou encore une fonction abélienne sextuplement périodique des variables u, v, w, supposées liées par la relation $\vartheta(u, v, w) = 0$.

D'après sa formation même, la fonction R s'annule pour tous les points de la courbe Γ définie sur la surface par la correspondance considérée entre les points (x, y) et (x', y'); il importe de déterminer avec précision toutes les lignes de zéros ou d'infinis de cette fonction.

Or, la fonction P de Hürwitz devient infinie du premier ordre lorsque le point (x', y') coïncide avec l'un quelconque des α points

$$(a'_1, b'_1), \quad \ldots, \quad (a'_\alpha, b'_\alpha),$$

ce que nous exprimerons par la notation

$$\begin{gathered}(x', y') = (a'_1, b'_1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (x', y') = (a'_\alpha, b'_\alpha),\end{gathered}$$

et également lorsque le point (c', d') coïncide avec l'un quelconque des points (x'_i, y'_i) ou, ce qui revient au même, lorsque le point (x, y) coïncide avec l'une quelconque des β déterminations

$$(c_1, d_1), \quad \ldots, \quad (c_\beta, d_\beta)$$

de (x, y) correspondant à la détermination (c', d') de (x', y'), c'est-à-dire lorsque

$$\begin{gathered}(x, y) = (c_1, d_1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (x, y) = (c_\beta, d_\beta).\end{gathered}$$

Enfin la fonction P devient infiniment petite [1] d'ordre γ pour

$$(x, y) = (x', y'),$$

[1] Ou infiniment grande d'ordre $-\gamma$, si l'entier γ est négatif.

et infiniment grande d'ordre γ pour

$$(x', y') = (a, b)$$

et

$$(x, y) = (c', d').$$

Dès lors, la détermination des lignes de zéros et d'infinis de R est immédiate. Si l'on désigne par $\mathfrak{z}$ la courbe de S définie par la correspondance

$$(x, y) = (x', y')$$

et par $\mathfrak{L}_{x_0 y_0}$ celle définie par l'ensemble des deux correspondances

$$(x, y) = (x_0, y_0) \qquad \text{et} \qquad (x', y') = (x_0, y_0) :$$

1° La fonction R s'annule le long de la courbe Γ;

2° Elle est infiniment petite d'ordre 2γ le long de la courbe $\mathfrak{z}$;

3° Enfin elle est infinie du premier ordre le long des $\alpha + \beta$ courbes

$$\mathfrak{L}_{a'_1 b'_1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{L}_{a'_\alpha b'_\alpha}, \quad \mathfrak{L}_{c_1 d_1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{L}_{c_\beta d_\beta},$$

et infinie d'ordre γ le long des deux courbes

$$\mathfrak{L}_{ab} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{L}_{c'd'}.$$

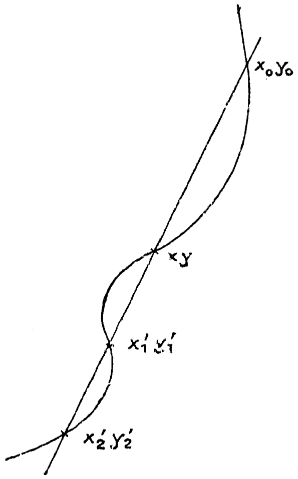
On peut modifier l'analyse précédente de manière à n'avoir plus à considérer la courbe $\mathfrak{z}$. Admettons, pour fixer les idées, que la courbe C est une courbe du quatrième ordre, en écartant le cas hyperelliptique qui sera examiné plus loin : soit (x_0, y_0) un point fixe de C, et envisageons la courbe $\mathfrak{L}'_0$ de la surface définie par la correspondance qui associe à un point (x, y) de C les points (x'_1, y'_1) et (x'_2, y'_2) situés sur la droite qui joint les points (x_0, y_0) et (x, y) (*fig.* 2). Il est possible de former une fonction rationnelle de (x, y) et (x', y') qui s'annule le long de $\mathfrak{L}'_0$ et de $\mathfrak{z}$, et n'admette, en outre, comme lignes de zéros et d'infinis, qu'un certain nombre de courbes $\mathfrak{L}$; effectivement, si (A, B) désigne un point fixe quelconque de C et si le point (x_0, y_0) est pris pour origine des coordonnées, la fonction

$$Q = \frac{yx' - xy'}{(yA - xB)(y'A - x'B)}$$

répond à la question.

De là résulte que le produit $RQ^{-2\gamma}$ est une fonction rationnelle $F(X, Y, Z)$ qui admet les mêmes lignes de zéros et d'infinis que la

Fig. 2.



fonction $R(X, Y, Z)$, excepté la courbe $\mathcal{S}$, et s'annule en outre à l'ordre 2γ le long de chacune des trois courbes $\mathcal{L}_{AB}$, $\mathcal{L}_{A_1'B_1'}$, $\mathcal{L}_{A_2'B_2'}$ (1).

Or, nous avons étudié précédemment la représentation des courbes $\mathcal{L}$ au moyen des fonctions thêta de u, v, w, et nous avons établi que la fonction

$$\Im_i^0 = \Im\left(u + \int_{x_i y_i}^{x_0 y_0} g_1\,dx,\; v + \int_{x_i y_i}^{x_0 y_0} g_2\,dx,\; w + \int_{x_i y_i}^{x_0 y_0} g_3\,dx\right)$$

s'annule le long des deux courbes $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}'_0$.

Dès lors, si la fonction F admet la courbe $\mathcal{L}_i$ comme ligne de zéros (ou d'infinis) d'ordre q, le produit $F(\Im_i^0)^{-q}$ admet la courbe $\mathcal{L}'_0$ comme ligne d'infinis (ou de zéros) d'ordre q, mais reste fini et différent de zéro le long de la courbe $\mathcal{L}_i$. Il est donc possible, par cette voie, de

(1) Lorsque la correspondance entre les points (x, y), (x', y') est symétrique, cette méthode conduit à une fonction F qui est infiniment petite *du second ordre* le long de la courbe Γ. Dans ce cas il suffit de considérer le produit $PQ^{-\gamma}$ qui est une fonction rationnelle symétrique des points (x, y) et (x', y'), à la condition qu'on donne une même valeur aux constantes (a, b) et (c', d') dans l'expression P de Hürwitz.

former une fonction $\Theta(u, v, w)$ jouissant sur la surface des propriétés d'une fonction thêta de u, v, w qui s'annule le long de la courbe Γ, mais reste finie et différente de zéro pour tout autre point de la surface, sauf peut-être le long de la courbe $\mathfrak{L}'_0$.

Il est aisé de préciser ce dernier point : en se reportant à la méthode de réduction employée, on reconnaît de suite que l'ordre de multiplicité de la courbe $\mathfrak{L}'_0$ pour la fonction Θ est égal à

$$\alpha + \beta - 6\gamma.$$

Dès lors, trois cas sont à considérer :

1° Si $\alpha + \beta - 6\gamma = 0$, la fonction $\Theta(u, v, w)$ reste toujours finie sur la surface et ne s'annule que le long de la courbe Γ;

2° Si $\alpha + \beta - 6\gamma > 0$, cette fonction s'annule, en outre, le long de la courbe $\mathfrak{L}'_0$ (à l'ordre de multiplicité $\alpha + \beta - 6\gamma$);

3° Si $\alpha + \beta - 6\gamma < 0$, la fonction $\Theta(\mathfrak{S}_0^0)^{6\gamma-\alpha-\beta}$ reste toujours finie sur la surface et ne s'annule en dehors de Γ que le long de la courbe $\mathfrak{L}_0$ (à l'ordre $6\gamma - \alpha - \beta$ de multiplicité).

8. Il importe de remarquer que la fonction $\Theta(u, v, w)$ à laquelle conduit l'analyse précédente n'est pas une fonction thêta proprement dite des trois variables indépendantes u, v, w, mais qu'elle joue *pour les points de la surface* le même rôle qu'une fonction thêta. D'autre part, l'équation $\Theta(u, v, w) = 0$ est susceptible de formes diverses, en raison de l'existence de la relation fondamentale $\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$: à titre d'exemple, les équations

$$\frac{\mathfrak{S}_1^0 \mathfrak{S}_0^2}{\mathfrak{S}_1^2} = 0$$

et

$$x_0 \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{S}(u, v, w) + y_0 \frac{\partial}{\partial v} \mathfrak{S}(u, v, w) + \frac{\partial}{\partial w} \mathfrak{S}(u, v, w) = 0$$

sont équivalentes sous la condition $\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$. Ce sont là des circonstances qui ne se présentent pas dans la théorie des surfaces hyperelliptiques dont les arguments u, v sont des variables indépendantes. Dans l'étude des surfaces S, nous entendrons désormais par *fonction thêta sur la surface* toute fonction de u, v, w qui reste toujours finie et vérifie les équations fonctionnelles d'une fonction thêta proprement dite, sous la condition $\vartheta(u, v, w) = 0$.

Nous présenterons une dernière remarque relative aux entiers α, β et γ. Dans l'étude des surfaces S, il n'y a pas lieu d'envisager isolément une correspondance non symétrique par rapport aux deux points (x, y) et (x', y'), mais seulement l'ensemble de cette correspondance (d'entiers α', β', γ') et de la correspondance symétrique (d'entiers β', α', γ'); or, il est permis de considérer cet ensemble comme une correspondance (non irréductible) ayant pour entiers caractéristiques

$$\alpha = \beta = (\alpha' + \beta') \qquad \text{et} \qquad \gamma = 2\gamma'.$$

Les courbes de la surface S sont donc caractérisées par les *deux* entiers α et γ ainsi définis.

Il convient de résumer les conclusions de l'analyse précédente :

Toute courbe algébrique Γ *de la surface* S *peut être représentée par une équation de la forme* $\Theta(u, v, w) = 0$, *la fonction* Θ *jouissant des deux propriétés suivantes :*

Elle satisfait aux équations fonctionnelles d'une fonction thêta de u, v, w *et reste toujours finie, sous la condition* $\vartheta(u, v, w) = 0$;

Elle ne s'annule pas sur la surface en dehors de la courbe considérée, si ce n'est peut-être le long de l'une ou l'autre de deux courbes déterminées $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}'_0$.

En fait, la fonction Θ *s'annule le long de* $\mathcal{L}'_0$, *ou bien de* $\mathcal{L}_0$, *ou enfin ne s'annule pas le long de ces courbes, suivant que l'expression*

$$\alpha - 3\gamma$$

est positive, négative ou nulle, α *et* γ *étant deux entiers caractéristiques de la courbe* Γ *définis comme suit :* α *est le nombre des points de* Γ *tels que l'un des points du couple homologue de la courbe* C, (ξ, η), (x_0, y_0), *ait une position donnée* (x_0, y_0); *quant à* γ, *c'est l'entier de Hürwitz défini par les relations*

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} G_k(\xi_i, \eta_i) + \gamma\, G_k(x_0, y_0) = \pi_k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

9. Le théorème précédent met en évidence une circonstance qui ne

se présente point dans la théorie des surfaces hyperelliptiques, à savoir l'impossibilité de représenter *individuellement* toute courbe algébrique de la surface par une équation de la forme

$$\Theta(u, v, w) = 0.$$

Toutefois on pourrait craindre que cette impossibilité apparente ne tienne à la méthode de réduction employée : il convient donc d'en donner une démonstration directe.

Soit Γ une courbe de la surface, d'entiers caractéristiques α, γ, et dont, par hypothèse, l'équation spéciale s'obtient en égalant à zéro une fonction Θ_N d'ordre N.

Considérons, d'autre part, la courbe Γ_1 définie par l'équation

$$\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu, w+\nu) = 0$$

qui correspond, ainsi que nous l'avons établi plus haut, aux couples (x, y), (x', y') découpés sur la courbe C par les coniques passant par quatre points fixes de cette courbe. D'après sa définition géométrique, cette courbe a pour entiers caractéristiques $\alpha' = 3$ et $\gamma' = 1$. Or, d'après un théorème de Hürwitz, le nombre des couples communs à deux correspondances ayant respectivement pour entiers caractéristiques α, β, γ et α', β', γ' est donné par l'expression

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta - 2p\gamma,$$

expression qui doit toutefois être divisée par 2 lorsque les correspondances considérées sont symétriques. Le nombre des points d'intersection [1] des deux courbes Γ et Γ_1 a donc pour valeur $(3\alpha - 3\gamma)$; mais il est égal d'autre part à 6N, en vertu du théorème de M. Poincaré sur le nombre des zéros communs à trois fonctions thêta de u, v, w. Dès lors

$$\alpha - \gamma = 2N. \tag{1}$$

La considération des points communs à deux courbes appartenant à

---

[1] Ce raisonnement suppose essentiellement que les points de S et les couples de C se correspondent univoquement *sans exception;* on verra plus loin qu'il n'est pas valable dans le cas hyperelliptique, en raison de l'existence d'un point fondamental.

la même série linéaire que Γ conduit de même à la relation

$$(2) \qquad \alpha^2 - 3\gamma^2 = 6N^2.$$

Éliminant N entre les équations (1) et (2), on obtient la relation

$$(3) \qquad (\alpha - 3\gamma)^2 = 0.$$

Si donc une courbe Γ est susceptible d'être représentée individuellement par une équation de la forme $\Theta = 0$, ses entiers α, γ vérifient nécessairement la relation (3); or, cette relation n'est point vérifiée pour toutes les courbes de la surface, notamment pour $\mathfrak{z}$ ainsi que pour les courbes dont l'entier γ est négatif : la proposition que nous avions en vue se trouve donc par là même établie.

Il résulte encore des équations (1) et (3) que, dans le cas où une courbe algébrique de S est représentable individuellement par une équation $\Theta = 0$, l'ordre de la fonction Θ est précisément égal à l'entier γ de Hürwitz.

Sur le genre des courbes algébriques tracées sur une surface S.

10. L'impossibilité de représenter une courbe algébrique quelconque de la surface S par une équation *spéciale* de la forme

$$\Theta(u, v, w) = 0$$

complique singulièrement l'étude de ces courbes : aussi laisserons-nous de côté la recherche et la classification des familles de courbes algébriques qu'on peut tracer sur la surface. Nous nous proposerons seulement de donner une expression générale du genre d'une courbe algébrique quelconque de la surface; deux cas sont à distinguer suivant que la courbe est représentable ou non par une équation spéciale

$$\Theta(u, v, w) = 0.$$

Considérons en premier lieu une courbe Γ représentée par l'équation spéciale

$$\Theta_n(u, v, w) = 0,$$

où Θ_n désigne une fonction thêta d'ordre n sur la surface.

Nous chercherons d'abord à former une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe Γ. Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées non homogènes d'un point de la courbe, on a le long de cette courbe

$$dX = \frac{\partial X}{\partial u}\,du + \frac{\partial X}{\partial v}\,dv + \frac{\partial X}{\partial w}\,dw,$$

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}\,dw,$$

$$0 = \frac{\partial \Theta_n}{\partial u}\,du + \frac{\partial \Theta_n}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \Theta_n}{\partial w}\,dw,$$

d'où

$$dX = H\,\frac{du}{\dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}},$$

en posant

$$H = \frac{D(X, \mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(u, v, w)}.$$

La fonction $H(u, v, w)$ n'est pas une fonction thêta proprement dite; mais, lorsque le point u, v, w appartient à la courbe considérée, les dérivées partielles de la fonction $\mathfrak{S}(u, v, w)$ satisfont aux mêmes relations fonctionnelles que $\mathfrak{S}$, et, d'autre part, les dérivées partielles de la fonction $\Theta_n(u, v, w)$ satisfont aux mêmes relations fonctionnelles que Θ_n; quant à $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial w}$, ce sont des fonctions abéliennes de u, v, w. Par suite, la fonction $H(u, v, w)$ joue, pour les points de la courbe $\Theta_n = 0$, le même rôle qu'une fonction thêta d'ordre $(n+1)$ et de mêmes multiplicateurs que Θ_n.

Dès lors, si l'on désigne par Θ_{n+1} une fonction thêta de mêmes multiplicateurs et de même ordre $(n+1)$ que la fonction H, le quotient

$$\frac{\Theta_{n+1}}{H}$$

est une fonction sextuplement périodique des paramètres u, v, w supposés liés par les deux relations

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0 \quad \text{et} \quad \Theta_n(u, v, w) = 0,$$

et, par conséquent, une fonction rationnelle des coordonnées X, Y, Z d'un point de la courbe. En définitive, l'intégrale

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\Theta_{n+1}\, du}{\dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}}$$

ou encore

$$\int \frac{\Theta_{n+1}}{H}\, dX$$

est une intégrale abélienne attachée à la courbe $\Theta_n = 0$.

Nous allons établir que l'intégrale $\mathfrak{z}$ est de première espèce. Les arguments u, v, w restant toujours finis dans un prismatoïde de périodes, l'intégrale ne saurait devenir infinie que dans le cas où la fonction

$$\frac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}$$

s'annule. Or on a sur la courbe

$$\frac{du}{\dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}} = \frac{dv}{\dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(w, u)}} = \frac{dw}{\dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(u, v)}},$$

d'où l'on déduit que l'intégrale ne peut devenir infinie que pour les valeurs de u, v, w qui sont solutions du système

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}(u, v, w) = 0, \\ \Theta_n(u, v, w) = 0, \\ \dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)} = \dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(w, u)} = \dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(u, v)} = 0. \end{cases}$$

Considérons dans l'espace de coordonnées u, v, w (ou plutôt dans la portion de cet espace qui correspond à un prismatoïde des périodes) les deux surfaces définies respectivement par les équations

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Theta_n(u, v, w) = 0.$$

Toute solution du système (I) définit un point double de la courbe d'intersection de ces deux surfaces. Or elles ne sauraient être tangentes entre elles, si les constantes dont dépend linéairement la fonction Θ_n sont prises arbitrairement; d'autre part, la surface

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$$

ne possède aucun point double (¹), et il en est de même de la surface

$$\Theta_n(u, v, w) = 0,$$

si Θ_n désigne, ainsi que nous le supposons, la fonction générale d'ordre n et de multiplicateurs donnés. Les quatre équations du système (I) n'admettent donc, dans ces conditions, aucune solution commune.

En définitive, l'intégrale

$$\mathfrak{I} = \int \frac{\Theta_{n+1}\, du}{\dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}}$$

est une intégrale abélienne de première espèce pour la courbe $\Theta_n = 0$, si la fonction Θ_n est la fonction générale de son ordre.

Combien cette forme donne-t-elle d'intégrales linéairement distinctes? Les fonctions Θ_{n+1} considérées d'ordre $(n+1)$ sont au nombre de $(n+1)^3$ linéairement distinctes; mais parmi ces fonctions figurent les produits de $\mathfrak{S}(u, v, w)$ par les fonctions thêta d'ordre n et de mêmes multiplicateurs que Θ_{n+1}, en nombre n^3.

De plus, les produits

$$\Theta_n \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}, \qquad \Theta_n \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}, \qquad \Theta_n \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w},$$

qui jouent sur la surface le même rôle que les fonctions Θ_{n+1}, sont identiquement nuls le long de la courbe. La formule donne donc

$$(n+1)^3 - n^3 - 3$$

intégrales distinctes, auxquelles il faut ajouter les trois intégrales

$$\int du, \quad \int dv, \quad \int dw,$$

soit au total

$$3n(n+1) + 1$$

intégrales distinctes.

On peut démontrer que ce sont bien là toutes les intégrales de pre-

(¹) Ceci suppose que les fonctions abéliennes considérées ne dérivent pas d'une courbe hyperelliptique.

mière espèce de la courbe $\Theta_n = 0$. D'après un théorème connu de M. Nöther, le genre p d'une courbe algébrique est lié au nombre ν des points d'intersection variables de cette courbe avec une de ses surfaces adjointes par la relation

$$\nu = 2(p-1).$$

Au cas actuel ν est égal au nombre des points d'intersection variables des courbes $\Theta_n = 0$ et $\Theta_{n+1} = 0$, ou encore au nombre des solutions du système

$$\Theta_n = 0, \qquad \Theta_{n+1} = 0, \qquad \mathfrak{S} = 0.$$

D'après le théorème de M. Poincaré, ce nombre est égal à $6n(n+1)$, ce qui établit la proposition énoncée.

D'où cette conclusion : *Le genre d'une courbe algébrique de la surface* S *dont l'équation spéciale s'obtient en égalant à zéro une fonction* Θ_n *d'ordre* n *a pour expression*

$$p = 3n(n+1) + 1.$$

Cette formule donne en particulier pour les courbes définies par les fonctions thêta du premier ordre $p = 7$, ainsi que nous l'avons déjà établi pour les courbes du système canonique.

11. Considérons, en second lieu, une courbe Γ de la surface S, d'entiers caractéristiques α et γ, définie par une équation $\Theta_n = 0$, où Θ_n désigne une fonction d'ordre n qui s'annule en outre le long de la courbe $\mathfrak{L}'_0$ à l'ordre de multiplicité $\delta = \alpha - 3\gamma$.

De même que dans le cas précédent, l'intégrale

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\Theta_{n+1}\, du}{\frac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}},$$

où Θ_{n+1} désigne une fonction d'ordre $n+1$ et de mêmes multiplicateurs que Θ_n, est une intégrale abélienne attachée à la courbe Γ, et elle ne saurait devenir infinie que pour les systèmes de valeurs annulant à la fois les fonctions $\mathfrak{S}(u, v, w)$, $\Theta_n(u, v, w)$ et les trois déterminants fonctionnels

$$\frac{D(\mathfrak{J}, \Theta_n)}{D(v, w)}, \qquad \frac{D(\mathfrak{J}, \Theta_n)}{D(w, u)}, \qquad \frac{D(\mathfrak{J}, \Theta_n)}{D(u, v)}.$$

Or, par hypothèse, la fonction Θ_n est infiniment petite d'ordre $(\delta + 1)$ au voisinage des points d'intersection des courbes Γ et $\mathfrak{L}'_0$: dès lors les dérivées partielles de cette fonction φ sont infiniment petites d'ordre δ, et il en est de même des trois déterminants fonctionnels. Pour que l'intégrale $\mathfrak{I}$ soit de première espèce, il est donc nécessaire et suffisant que la fonction Θ_{n+1} soit elle-même infiniment petite d'ordre δ en chacun des points d'intersection des courbes Γ et $\mathfrak{L}'_0$.

Ceci posé, il nous suffit de déterminer le nombre des points d'intersection non fixes de la courbe Γ avec ses adjointes $\Theta_{n+1} = 0$, pour en déduire le genre de la courbe Γ au moyen de la relation de M. Nöther.

A cet effet, déterminons d'abord la valeur des entiers caractéristiques de la courbe $\Theta_{n+1} = 0$. Les entiers caractéristiques d'une courbe définie par une équation d'ordre n sont respectivement égaux à $(\alpha + 2\delta)$ et $(\gamma + \delta)$, car l'équation particulière $\Theta_n = 0$ définit d'une part la courbe Γ, d'entiers α et γ, et d'autre part la courbe $\mathfrak{L}'_0$, d'entiers $\alpha_0 = 2$ et $\gamma_0 = 1$, comptée δ fois; d'ailleurs les courbes définies par une équation du premier ordre ont pour entiers caractéristiques les nombres 3 et 1 : dès lors les entiers caractéristiques des courbes $\Theta_{n+1} = 0$ ont pour valeurs respectives

$$\alpha' = \alpha + 2\delta + 3 \qquad \text{et} \qquad \gamma' = \gamma + \delta + 1.$$

Le nombre total des points d'intersection de la courbe Γ avec ses adjointes $\Theta_{n+1} = 0$ est donc égal, d'après un théorème de Hürwitz, à

$$\alpha(\alpha + 2\delta + 3) - 3\gamma(\gamma + \delta + 1);$$

mais dans ce nombre les points d'intersection de Γ et de $\mathfrak{L}'_0$ comptent, au total, pour

$$\delta(2\alpha - 3\gamma)$$

unités. Par suite, le nombre ν des points d'intersection variables de Γ avec ses adjointes est égal à

$$\nu = \alpha(\alpha + 3) - 3\gamma(\gamma + 1).$$

La conclusion est d'ailleurs la même dans le cas où la fonction Θ_n s'annule le long de la courbe $\mathcal{L}_0$, au lieu de la courbe $\mathcal{L}'_0$. Nous parvenons ainsi au résultat suivant :

Le genre d'une courbe algébrique de la surface S *a pour expression générale*

$$p = \frac{\alpha(\alpha+3) - 3\gamma(\gamma+1)}{2} + 1,$$

α *et* γ *désignant les deux entiers caractéristiques de la courbe.*

Dans l'hypothèse où $\alpha = 3\gamma$, cette formule se confond avec celle donnée plus haut, puisque les entiers n et γ sont égaux dans ce cas.

L'application de la formule précédente donne en particulier :

Pour les courbes $\mathcal{L}'$........	$\alpha = 2,$	$\gamma = 1,$	$p = 3$
Pour la courbe $\mathfrak{z}$..........	$\alpha = 1,$	$\gamma = -1,$	$p = 3$
Pour la courbe $\mathfrak{z}'$.........	$\alpha = 10,$	$\gamma = 6,$	$p = 3$

ainsi qu'on pouvait le prévoir *a priori*.

Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce des surfaces S.

12. Les théorèmes établis dans les précédents Chapitres trouvent une application dans la détermination du nombre des intégrales doubles de seconde espèce des surfaces S : d'après un théorème fondamental de M. Picard (1), toute surface algébrique $F(X, Y, Z) = 0$ possède en effet un nombre limité ρ_0 d'intégrales doubles de seconde espèce *distinctes*, c'est-à-dire telles qu'il n'existe aucune combinaison linéaire de ces intégrales de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\right) dX\, dY,$$

U et V étant des fonctions rationnelles de X, Y, Z.

Dans la recherche de cet invariant ρ_0, nous aurons recours à la for-

(1) *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. II, chap. VII et XII.

mule suivante due également à M. Picard :

$$\rho_0 = N + d - 4p - (m-1) + 2r - (\rho - 1),$$

où l'on désigne par

m le degré de la surface,
N la classe de la surface,
d le nombre de ses points doubles isolés ([1]),
r le nombre de ses intégrales de différentielles totales de seconde espèce,
p le genre d'une section plane arbitraire.

Enfin la définition du nombre ρ est la suivante : on peut tracer sur la surface ρ courbes algébriques irréductibles C_i, telles qu'il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce n'ayant d'autres courbes logarithmiques que la totalité ou une partie des courbes C_i, mais telles que, si on leur adjoint une autre courbe algébrique irréductible quelconque de la surface, il existe une intégrale de troisième espèce n'ayant comme courbes logarithmiques que cette dernière courbe et la totalité ou une partie des courbes C_i.

Envisageons la surface S définie en coordonnées homogènes par les équations

$$\begin{matrix} X_i = \Theta_i(u, v, w) \\ \mathfrak{I}(u, v, w) = 0 \end{matrix} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où les Θ_i désignent quatre fonctions thêta normales de caractéristique nulle et d'ordre h, ne s'annulant à la fois pour aucun système de valeurs des arguments. Dans ces conditions, la correspondance des points de la surface S avec les points du champ abélien u, v, w, ou encore avec les couples de points de la courbe de genre *trois* C, est une correspondance univoque, sans point fondamental (répondant à une infinité de couples), ni courbe exceptionnelle (répondant à un seul couple).

Déterminons pour cette surface S particulière la valeur des différents éléments qui interviennent dans la formule de M. Picard : on trouve

---

([1]) La formule est établie dans le cas où la surface ne possède pas d'autres singularités qu'une courbe double avec des points triples, ainsi que des points doubles isolés.

immédiatement

$$d = 0,\quad m = 6h^2,\quad p = 3h(h+1)+1.$$

D'autre part

$$r = 6,$$

car, d'après un théorème de MM. Castelnuovo et Severi, le nombre des intégrales de différentielles totales de seconde espèce d'une surface algébrique est double de celui de ses intégrales de différentielles totales de première espèce.

Évaluons enfin la classe N de la surface. Soient $\Theta = 0$ et $\theta = 0$ les équations de deux sections planes quelconques : les points de contact des plans tangents menés à la surface par la droite d'intersection de ces deux plans sont déterminés par les équations

$$\text{(E)}\qquad \frac{\Theta}{\theta} = \frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial u}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial v}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}},$$

où l'on suppose que u, v, w vérifient la relation $\mathfrak{F}(u, v, w) = 0$, et où les dérivées $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ sont prises en considérant w comme fonction de u et v. Ces équations peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} \Theta(\theta'_u \mathfrak{F}'_w - \theta'_w \mathfrak{F}'_u) - \theta(\Theta'_u \mathfrak{F}'_w - \Theta'_w \mathfrak{F}'_u) = 0, \\ \Theta(\theta'_v \mathfrak{F}'_w - \theta'_w \mathfrak{F}'_v) - \theta(\Theta'_v \mathfrak{F}'_w - \Theta'_w \mathfrak{F}'_v) = 0. \end{cases}$$

Mais le système (1) admet des solutions étrangères : ce sont, d'une part, les solutions du système

$$(2)\qquad \begin{cases} \Theta = 0, \\ \theta = 0, \end{cases}$$

et, d'autre part [1], celles du système

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}'_w = 0, \\ \Theta\theta'_w - \theta\Theta'_w = 0. \end{cases}$$

---

[1] En effet, dans la recherche des plans tangents, on peut remplacer le système (E) par les deux systèmes analogues qui s'en déduisent par permutation des lettres u, v, w.

D'après le théorème de M. Poincaré, le système (1) admet $6(2h+1)^2$ solutions, le système (2) en admet $6h^2$ et le système (3) $12h$: de là résulte que le nombre des solutions propres des équations (E), c'est-à-dire la classe de la surface, est égal à

$$N = 6(3h^2 + 2h + 1).$$

13. Il nous reste à rechercher la valeur du nombre ρ dont dépend essentiellement la détermination de l'invariant ρ_0. Nous envisagerons la question à un point de vue plus général, en nous proposant le problème suivant : *Quelle est la valeur de l'invariant relatif ρ de M. Picard pour les surfaces algébriques S_p dont les points admettent une correspondance univoque avec les couples de points (x, y), (x', y') d'une courbe algébrique C_p, d'équation $f(x, y) = 0$ et de genre quelconque p?* On suppose d'ailleurs que la surface ne possède ni point fondamental (correspondant à une infinité de couples de points de C_p), ni courbe exceptionnelle (correspondant à un seul couple).

Nous démontrerons en premier lieu qu'on peut tracer sur la surface S_p *deux* courbes particulières telles qu'il ne saurait exister d'intégrale de différentielle totale de la surface ayant seulement ces deux courbes pour courbes logarithmiques. A cet effet, nous considérerons d'une part la courbe $\mathcal{J}$ qui correspond aux couples de C_p formés de de x points confondus et d'autre part la courbe $\mathcal{L}_0$ qui correspond aux couples formés d'un point variable et d'un point fixe (x_0, y_0).

Les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface étant des fonctions rationnelles de (x, y) et (x', y'), toute intégrale de différentielle totale de la surface est de la forme

$$\int R(x, y; x', y')\, dx + S(x, y; x', y')\, dx'.$$

Admettons donc qu'il existe une telle intégrale ayant seulement $\mathcal{J}$ et $\mathcal{L}_0$ pour courbes logarithmiques. Si on laisse x' constant, on obtient une intégrale simple

$$\int R(x, y; x', y')\, dx$$

dont les périodes (c'est là un point essentiel) ne doivent pas dépendre du paramètre x'. Il est permis de supposer en particulier que le résidu relatif au point logarithmique $(x = x', \; y = y')$ est égal à $+1$.

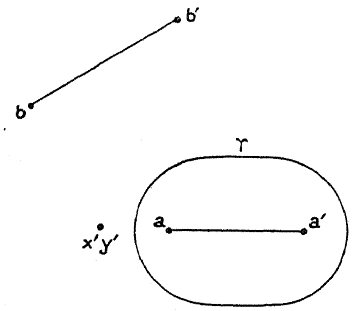
Ceci posé, envisageons la surface de Riemann qui correspond à l'équation algébrique $f(x, y) = 0$, de degré m en y et de genre p; d'après un théorème de Clebsch, cette surface peut être constituée par m feuillets dont chacun est réuni au suivant par une seule ligne de croisement, à l'exception des deux premiers, réunis entre eux par $(p+1)$ lignes de croisement aa', bb', ...; nous écarterons l'hypothèse où p serait nul, auquel cas le nombre ρ est égal à l'unité. Traçons sur le premier feuillet un cycle γ enveloppant les deux points de ramification a et a' et donnons au point (x', y') une position voisine du point a, mais extérieure au cycle γ.

Si l'on prend l'intégrale

$$\int \mathrm{R}(x, y; x', y')\, dx$$

le long du cycle γ avec la détermination (x', y') du paramètre, on obtient une période déterminée ω'. Si l'on fait ensuite tourner le

Fig. 3.



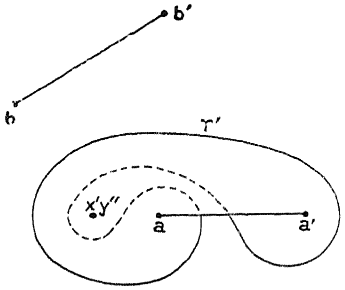
point (x', y') autour du point de ramification b, sans rencontrer le cycle γ, le paramètre prend une nouvelle détermination (x', y'') correspondant au second feuillet, sans que d'ailleurs le cycle γ soit altéré. La période considérée ω' se transforme donc en ω'', ω'' désignant la valeur de l'intégrale $\int \mathrm{R}\, dx$ prise le long du cycle γ avec la détermination (x', y'') du paramètre. Or cette période doit rester invariable puisque, par hypothèse, elle n'est pas fonction du paramètre x';

dès lors

$$(1) \qquad \omega' = \omega''.$$

Faisons maintenant tourner le point (x', y') autour du point de ramification a : y' se change de même en y'', mais en même temps le

Fig. 4.



cycle γ se déforme, fuyant en quelque sorte devant le point (x', y'), et il prend une position γ'; on reconnait aisément par la comparaison des deux cycles que la période transformée a pour valeur $\omega'' - 2\pi i$, d'où il résulte que

$$(2) \qquad \omega' = \omega'' - 2\pi i.$$

Les relations (1) et (2) étant incompatibles, on en conclut que l'intégrale dont nous avions admis l'existence ne saurait exister.

En second lieu nous démontrerons qu'étant donnée une courbe irréductible quelconque Γ de la surface S_p, il est possible de former une intégrale de différentielle totale ayant seulement pour courbes logarithmiques la courbe Γ, ainsi que les courbes $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{L}_0$ (ou l'une d'elles).

A cet effet, reportons-nous au théorème de Hürwitz que nous avons précédemment utilisé pour l'étude des courbes algébriques tracées sur les surfaces S : *étant donnée une correspondance quelconque* Γ *entre les points* (x, y) *et* (x', y') *d'une courbe algébrique* C_p non singulière, *on peut former une fonction rationnelle* $P(x, y; x', y')$ *qui n'admette pas, en dehors de la correspondance considérée, d'autres lignes de zéros ou d'infinis que la correspondance* $x = x'$, $y = y'$, *ainsi que les correspondances associant respectivement à un point variable certains points fixes* $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Ceci posé, le produit

$$P(x, y; x', y')\,P(x', y'; x, y)$$

est une fonction rationnelle symétrique de (x, y), (x', y') et, par conséquent, une fonction rationnelle des coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface; il en résulte que la fonction

$$I = \operatorname{Log} P(x, y; x', y') + \operatorname{Log} P(x', y'; x, y)$$

est une intégrale de différentielle totale de la surface ayant pour courbes logarithmiques les courbes Γ, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{L}_1$, ... et $\mathfrak{L}_k$.

Si l'on désigne d'autre part par

$$\int G_{0i}(x, y)\,dx$$

l'intégrale abélienne normale de troisième espèce attachée à la courbe

$$f(x, y) = 0$$

et relative aux deux points (x_0, y_0) et (x_i, y_i), il est manifeste que l'intégrale de différentielle totale

$$I_{0i} = \int G_{0i}(x, y)\,dx + G_{0i}(x', y')\,dx'$$

a pour courbes logarithmiques $\mathfrak{L}_0$ et $\mathfrak{L}_i$. Dès lors il est possible de déterminer les constantes A_{01}, ..., A_{0k} de manière que l'intégrale

$$I + A_{01} I_{01} + \ldots + A_{0k} I_{0k}$$

n'ait pas les courbes $\mathfrak{L}_1$, ..., $\mathfrak{L}_k$ pour courbes logarithmiques. En d'autres termes, cette intégrale n'admet pas, en dehors de Γ, d'autres courbes logarithmiques que les courbes $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{L}_0$.

D'où cette conclusion :

L'invariant relatif ρ est égal à DEUX *pour les surfaces dont les points admettent une correspondance univoque, sans point fondamental ni courbe exceptionnelle, avec les couples de points d'une courbe algébrique non singulière et non unicursale* (1).

(1) Ce résultat paraît en contradiction avec un théorème de M. Picard, d'après lequel

Il importe de remarquer que la démonstration suppose que la courbe considérée n'est pas une courbe *singulière*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation à coefficients entiers de la forme considérée précédemment entre les périodes de ses intégrales abéliennes de première espèce.

14. Revenons à la surface S considérée plus haut : elle appartient à la classe des surfaces S_p et ne possède d'ailleurs ni point fondamental, ni courbe exceptionnelle; on a donc pour cette surface

$$\rho = 2.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer la formule fondamentale de M. Picard :

$$\rho_0 = N + d - 4p - (m-1) + 2r - (\rho - 1);$$

comme il devait être, la valeur de h s'élimine et l'on trouve immédiatement

$$\rho_0 = 14.$$

Nous parvenons ainsi au théorème suivant :

Les surfaces algébriques dont les points admettent une correspondance univoque avec les couples de points d'une courbe algébrique de genre trois *non singulière possèdent quatorze intégrales doubles distinctes de seconde espèce.*

Ce théorème peut être présenté sous une autre forme. Désignons par

$$g_1(x, y)\,dx, \quad g_2(x, y)\,dx, \quad g_3(x, y)\,dx,$$

les différentielles normales de première espèce attachées à la courbe de genre *trois* C et par

$$g_4(x, y)\,dx, \quad g_5(x, y)\,dx, \quad g_6(x, y)\,dx$$

l'invariant ρ est égal à 1 pour les surfaces hyperelliptiques qui correspondent point par point, sans exception, au prismatoïde des périodes; en réalité la correspondance entre une telle surface et la courbe de genre *deux* possède un point fondamental qui répond aux couples découpés sur la courbe par ses adjointes d'ordre $m-3$, et la valeur de ρ est, de ce fait, diminuée de une unité.

les différentielles normales de seconde espèce relatives à trois points déterminés de la courbe. Il est clair que les intégrales de la forme

$$\int\int [g_i(x, y)\, g_k(x', y') - g_k(x, y)\, g_i(x', y')]\, dx\, dx' \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6)$$

sont des intégrales de seconde espèce de la surface S : ces combinaisons sont au nombre de *quinze*, mais, d'après le théorème précédent, elles ne sont pas distinctes; en d'autres termes, il existe une relation de la forme

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_k \mathrm{A}_{ik} \int\int [g_i(x, y)\, g_k(x', y') - g_k(x, y)\, g_i(x', y')]\, dx\, dx' \\ = \int\int \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{X}} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{Y}}\right) d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y},\end{aligned}$$

U et V étant des fonctions rationnelles de X, Y, Z et les A_{ik} des constantes.

En vertu de son invariance vis-à-vis des transformations birationnelles, le second membre peut se mettre sous la forme

$$\int\int \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{R}(x, y;\, x', y') + \frac{\partial}{\partial x'} \mathrm{S}(x, y;\, x', y')\right] dx\, dx',$$

R et S étant des fonctions rationnelles.

D'où cette conclusion :

Les différentielles abéliennes normales de seconde espèce d'une courbe algébrique de genre trois *vérifient une relation de la forme*

$$\sum_i \sum_k \mathrm{A}_{ik} [g_i(x, y)\, g_k(x', y') - g_k(x, y)\, g_i(x', y')] = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x'},$$

R *et* S *étant deux fonctions rationnelles de* (x, y) *et* (x', y').

15. Nous indiquerons enfin une conséquence intéressante de la relation $\rho = 2$ établie précédemment, en démontrant qu'elle entraîne l'impossibilité de représenter individuellement toute courbe de la surface S par une équation *spéciale* de la forme $\theta(u, v, w) = 0$.

Admettons en effet que cette représentation soit possible, et montrons que dans cette hypothèse ρ est égal à *un*. Étant donnée une fonction $\Theta(u, v, w)$ quelconque d'ordre n, on peut choisir les constantes λ_0, μ_0, ν_0 de telle sorte que la fonction

$$[\mathfrak{S}(u-\lambda_0,\ v-\mu_0,\ w-\nu_0)]^n,$$

ou simplement $(\mathfrak{S}_0)^n$, admette les mêmes multiplicateurs que la fonction $\Theta(u, v, w)$. Dès lors le quotient $\frac{\Theta}{(\mathfrak{S}_0)^n}$ est, sur la surface, une fonction sextuplement périodique des variables u, v, w; c'est donc une fonction rationnelle des coordonnées X, Y, Z d'un point arbitraire de la surface, et par conséquent la fonction

$$\operatorname{Log}\frac{\Theta}{(\mathfrak{S}_0)^n}$$

est une intégrale de différentielle totale de la surface possédant les deux courbes logarithmiques

$$\Theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_0 = 0.$$

On peut donc se borner pour l'étude des courbes de la surface, en tant que courbes logarithmiques d'intégrales de troisième espèce, aux courbes définies par une équation de la forme

$$\mathfrak{S}(u-\lambda,\ v-\mu,\ w-\nu) = 0.$$

Si l'on considère *deux* telles courbes C_1 et C_2 correspondant aux équations

$$\mathfrak{S}(u-\lambda_1,\ v-\mu_1,\ w-\nu_1) = 0$$

et

$$\mathfrak{S}(u-\lambda_2,\ v-\mu_2,\ w-\nu_2) = 0,$$

on établit aisément qu'il existe une intégrale de différentielle totale ayant seulement C_1 et C_2 comme courbes logarithmiques, en ayant recours à une démonstration que M. Picard a donnée dans le cas des surfaces hyperelliptiques [1], mais qui s'applique sans modification

[1] *Annales de l'École normale*, t. XVIII, 1901.

dans le cas actuel, d'où il résulte que $\rho = 1$. La proposition que nous avions en vue se trouve par là même établie.

Or la première partie de la démonstration du n° 13, de laquelle il résulte que ρ est *au moins égal à deux* est absolument indépendante des résultats de Hürwitz : nous avons donc démontré à nouveau, par une voie toute différente, le théorème fondamental sur la représentation paramétrique des courbes algébriques des surfaces S.

Sur le cas hyperelliptique.

16. Nous avons supposé dans les précédents Chapitres que la courbe fondamentale C liée à la surface S était une courbe générale de genre *trois, non hyperelliptique*. Le cas hyperelliptique présente des particularités qui méritent une étude spéciale.

Toute courbe hyperelliptique de genre p peut être transformée birationnellement en une courbe plane de degré $(p+2)$ possédant un point multiple d'ordre p : il est donc permis de supposer que la courbe C est une courbe *du cinquième ordre avec un point triple* o. Toute sécante issue du point triple rencontre la courbe C en deux points qui seront dits *conjugués* : c'est précisément la considération de la correspondance $\mathfrak{K}$ associant à un point quelconque de C le point conjugué qui joue le rôle essentiel dans l'étude du cas hyperelliptique.

Tous les couples formés de deux points conjugués définissent un même système de valeurs u_0, v_0, w_0 des arguments

$$\begin{aligned} u &= G_1(x, y) + G_1(x', y'), \\ v &= G_2(x, y) + G_2(x', y'), \\ w &= G_3(x, y) + G_3(x', y'), \end{aligned}$$

et l'on peut faire en sorte que $u_0 = v_0 = w_0 = 0$. Il importe d'ailleurs de remarquer que le point (u_0, v_0, w_0) est un zéro double de la fonction $\vartheta(u, v, w)$.

17. Nous supposerons que les coordonnées homogènes

$$X_i = \Theta_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

d'un point de la surface S ne s'annulent pas toutes pour

$$u = v = w = 0 \quad (^1);$$

dans cette hypothèse, ce système de valeurs des arguments définit sur la surface *un point double*, car, si l'on considère deux plans variables $\Theta = 0$ et $\theta = 0$ menés par ce point, la demi-période $u = v = w = 0$ compte pour deux unités parmi les solutions du système

$$\mathfrak{S} = 0, \qquad \Theta = 0, \qquad \theta = 0.$$

De même que dans le cas général, le genre géométrique de la surface est égal à *trois* et le genre numérique à *zéro*.

Le degré du système canonique $p^{(2)}$ n'a pas la même valeur que dans le cas général : le point $u = v = w = 0$ figure en effet parmi les solutions du système

$$\begin{gathered}
L_1(u, v, w) = \lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu_1 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0, \\
L_2(u, v, w) = \lambda_2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu_2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0, \\
\mathfrak{S}(u, v, w) = 0,
\end{gathered}$$

pour *deux* unités, ce qui réduit à quatre le nombre des points de rencontre mobiles de deux courbes L_1 et L_2 du système canonique, d'où

$$p^{(2)} = 4.$$

Nous déterminerons directement la valeur de l'invariant $p^{(1)}$, car nous sommes précisément dans le cas d'exception du théorème de M. Nöther, les courbes du système canonique passant toutes par le point $u = v = w = 0$.

La courbe générale L du système canonique possède, en dehors des trois intégrales $\int du$, $\int dv$, $\int dw$, *trois* autres intégrales de première

(1) Lorsque le système de valeurs $u = v = w = 0$ annule les quatre coordonnées Θ_i, il définit sur la surface, non pas un point, mais une courbe unicursale; il serait aisé, dans ce cas, d'introduire les modifications nécessaires dans les énoncés.

espèce, linéairement distinctes, de la forme

$$\int \frac{\Theta_2 \, du}{\dfrac{D(S, L)}{D(v, w)}},$$

Θ_2 étant une fonction thêta du second ordre et de caractéristique nulle, s'annulant de plus pour $u = v = w = 0$. Dès lors

$$p^{(1)} = 6.$$

Il est utile de préciser le lien qui rattache le système canonique de la surface S à la courbe hyperelliptique C. Si l'on choisit le point triple de cette courbe pour origine des coordonnées, les différentielles abéliennes de première espèce attachées à C prennent la forme

$$g_1(x, y)\, dx = \frac{x^2\, dx}{f'_y},$$
$$g_2(x, y)\, dx = \frac{xy\, dx}{f'_y},$$
$$g_3(x, y)\, dx = \frac{y^2\, dx}{f'_y}.$$

D'autre part, les intégrales doubles de première espèce de la surface ont pour expression générale

$$\iint \left\{ \begin{array}{l} \lambda[g_2(x, y)\, g_3(x', y') - g_3(x, y)\, g_2(x', y')] \\ + \mu[g_3(x, y)\, g_1(x', y') - g_1(x, y)\, g_3(x', y')] \\ + \nu[g_1(x, y)\, g_2(x', y') - g_2(x, y)\, g_1(x', y')] \end{array} \right\} dx\, dx';$$

de là résulte que les courbes du système canonique sont définies par la correspondance suivante entre les points (x, y) et (x', y') de la courbe C :

$$(xy' - yx')\, [\lambda yy' + \mu(xy' + yx') + \nu xx'] = 0,$$

ou encore, après suppression du facteur étranger $(xy' - yx')$,

$$\lambda tt' + \mu(t + t') + \nu = 0$$

avec

$$t = \frac{y}{x} \qquad \text{et} \qquad t' = \frac{y'}{x'}.$$

D'où cette conclusion : *Les courbes* L *du système canonique de la sur-*

face S *correspondent aux couples de points découpés sur la courbe* C *par deux sécantes en involution, issues de son point triple.*

Un cas intéressant est celui où l'involution est constituée par une sécante fixe oaa' et une sécante variable omm' : la courbe L se décompose alors en deux courbes distinctes $\mathcal{L}_a$ et $\mathcal{L}_{a'}$ qui correspondent respectivement aux couples (a, m) et (a', m'). D'après leur définition même, les courbes de la famille $\mathcal{L}$ correspondent point par point à la courbe C; elles sont d'ailleurs susceptibles d'une définition géométrique : si l'on remarque en effet que les sécantes issues du point triple de la courbe C correspondent univoquement aux tangentes à la surface S en son point double O, on en conclut que les deux coubes $\mathcal{L}_a$ et $\mathcal{L}_{a'}$ admettent même tangente au point O, et par suite que la surface adjointe passant par ces deux courbes est tangente à la surface S en son point double.

En résumé, *les surfaces adjointes d'ordre* $m - 4$ *de la surface* S *qui lui sont tangentes en son point double découpent sur cette surface deux courbes distinctes de genre* trois *et de mêmes modules que la courbe fondamentale* C.

Si l'on suppose que la sécante oaa' coïncide avec l'une des tangentes ot à la courbe C issues de son point triple, la courbe $\mathcal{L}_{a'}$ se confond avec la courbe $\mathcal{L}_a$. D'où cette conséquence : *Il existe huit courbes particulières du système canonique suivant chacune desquelles on peut circonscrire à* S *une surface adjointe d'ordre* m-4.

18. La représentation analytique des courbes de la famille $\mathcal{L}$ présente des particularités spéciales au cas hyperelliptique. Envisageons encore le système

$$(1)\qquad \begin{cases} \vartheta(u, v, w) = 0, \\ \vartheta\left(u + \displaystyle\int_{x_0 y_0}^{X_1 Y_1} g_1\, dx, \quad v + \int_{x_0 y_0}^{X_1 Y_1} g_2\, dx, \quad w + \int_{x_0 y_0}^{X_1 Y_1} g_3\, dx\right) = 0, \end{cases}$$

qui est équivalent à l'ensemble des deux systèmes

$$(2)\qquad \begin{cases} u = G_1(x_0, y_0) + G_1(x, y), \\ v = G_2(x_0, y_0) + G_2(x, y), \\ w = G_3(x_0, y_0) + G_3(x, y), \end{cases}$$

et

$$(3)\quad \begin{cases} u = -G_1(X_1, Y_1) - G_1(X, Y), \\ v = -G_2(X_1, Y_1) - G_2(X, Y), \\ w = -G_3(X_1, Y_1) - G_3(X, Y). \end{cases}$$

Le système (3) peut encore s'écrire, dans le cas hyperelliptique,

$$(3')\quad \begin{cases} u = G_1(x_1, y_1) + G_1(x, y), \\ v = G_2(x_1, y_1) + G_2(x, y), \\ w = G_3(x_1, y_1) + G_3(x, y), \end{cases}$$

en désignant par (x_1, y_1) le point conjugué de (X_1, Y_1); dès lors le système (1) définit sur la surface l'ensemble des deux courbes $\mathfrak{L}_0$ et $\mathfrak{L}_1$ *de la même famille*. Si l'on suppose que le point (x_1, y_1) tend vers le point (x_0, y_0), on parvient à la conclusion suivante :

Dans le cas hyperelliptique, la courbe $\mathfrak{L}_0$ de la surface S *qui correspond aux couples de* C *formés d'un point variable et du point fixe* (x_0, y_0) *peut être représentée par une équation de la forme*

$$\vartheta(u - \lambda, v - \mu, w - \nu) = 0,$$

où λ, μ, ν *désignent des constantes, cette équation n'étant vérifiée par aucun point de la surface en dehors de la courbe considérée.*

Nous présenterons une dernière remarque relativement à la famille des courbes $\mathfrak{L}$. Considérons l'un des couples formés des points de contact de deux des tangentes à la courbe C issues de son point triple, et soit u_i, v_i, w_i le système correspondant d'arguments, lequel est une demi-période des fonctions abéliennes de u, v, w. On sait que la fonction

$$\vartheta(u + u_i, v + v_i, w + w_i)$$

est égale, à un facteur exponentiel près, à une des fonctions thêta normales du premier ordre ϑ_i; d'ailleurs cette fonction ϑ_i s'annule pour la demi-période

$$u = v = w = 0.$$

Donc les vingt-huit fonctions thêta normales du premier ordre qui s'annulent pour la demi-période qui est un zéro double de $\mathfrak{S}(u, v, w)$ définissent respectivement sur la surface les couples de courbes $\mathcal{L}$ qui correspondent aux combinaisons deux à deux des huit tangentes à C issues du point triple.

19. Abordons maintenant l'étude des courbes algébriques tracées sur une surface S liée à une courbe de genre trois *hyperelliptique*. La première partie de la démonstration du n° 7 subsiste sans modification dans le cas hyperelliptique ; en voici la conclusion : étant donnée une courbe algébrique quelconque Γ de la surface, on peut former une fonction rationnelle R(X, Y, Z) s'annulant le long de la courbe considérée et, en outre, le long de la courbe $\mathfrak{Z}$ (à l'ordre de multiplicité 2γ), et devenant infinie le long d'un certain nombre de courbes $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ de la famille $\mathcal{L}$.

Introduisons d'autre part la fonction rationnelle et symétrique

$$Q(x, y; x', y') = \left[\frac{yx' - xy'}{(yx_0 - xy_0)(y'x_0 - x'y_0)}\right]^2,$$

le point triple de la courbe C étant pris pour origine des coordonnées, et (x_0, y_0) désignant un point quelconque de la courbe. Cette fonction s'annule lorsque les deux points (x, y), (x', y') sont, ou bien confondus, ou bien conjugués l'un de l'autre, et elle devient infinie le long des deux courbes $\mathcal{L}_{x_0 y_0}$ et $\mathcal{L}_{x'_0 y'_0}$, (x'_0, y'_0) désignant le point conjugué du point (x_0, y_0). Or la correspondance $\mathfrak{H}$ qui associe les couples de points conjugués de C définit, par hypothèse, sur la surface, non pas une courbe, mais un point. Dès lors le produit

$$\varphi(u, v, w) = Q\left(x_0^2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + x_0 y_0 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + y_0^2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}\right)^2$$

est une fonction de u, v, w qui reste toujours finie sur la surface et qui n'admet pas d'autre ligne de zéros que la courbe $\mathfrak{Z}$ (¹).

(¹) Il est aisé d'expliciter la fonction $\varphi(u, v, w)$. D'après sa définition même, c'est, sur la surface, une fonction thêta du second ordre et de caractéristique nulle; elle s'annule d'ailleurs pour $u = v = w = 0$ à un ordre de multiplicité δ qu'on peut déterminer de la manière suivante : la courbe $\mathfrak{Z}$ rencontre un plan quelconque mené par le point double O de la surface en 2δ points confondus en O; or, *a priori*, elle possède *huit* branches passant

Ceci posé, il est manifeste qu'en multipliant la fonction R(X, Y, Z) définie plus haut par un produit convenablement choisi de la forme

$$[\varphi(u, v, w)]^{-2\gamma}[\mathfrak{L}_1(u, v, w)]^{\alpha_1}\ldots[\mathfrak{L}_k(u, v, w)]^{\alpha_k},$$

on peut former une fonction $\Theta(u, v, w)$ qui reste finie sur la surface S et ne possède pas d'autre ligne de zéros que la courbe Γ. D'où cette conclusion :

Toutes les courbes algébriques d'une surface S *liées à une courbe de genre* trois *hyperelliptique peuvent être représentées* INDIVIDUELLEMENT *par une équation de la forme*

$$\Theta(u, v, w) = 0,$$

la fonction Θ jouissant sur la surface des propriétés d'une fonction thêta de u, v, w et ne s'annulant pas en dehors de la courbe considérée.

La contradiction apparente de ce résultat avec le théorème énoncé dans le cas général s'explique par le fait que la surface S possède dans

---

par O, lesquelles correspondent aux tangentes à la courbe C issues de son point triple; par suite $\delta = 4$.

Ceci posé la fonction générale du second ordre et de caractéristique nulle θ dépend linéairement de huit constantes arbitraires. Soient, d'autre part,

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = f_2(u, v, w) + f_4(u, v, w) + \ldots$$

et

$$\theta(u, v, w) = \psi_0 + \psi_2(u, v, w) + \psi_4(u, v, w) + \ldots$$

les développements des fonctions $\mathfrak{S}$ et θ autour du point $u = v = w = 0$, les f et les ψ désignant des polynomes de degré égal à leur indice; pour que la fonction θ soit infiniment petite d'ordre *quatre* au voisinage du point $u = v = w = 0$ sur la surface, il faut que

$$\psi_0 = 0,$$
$$\psi_2(u, v, w) = k f_2(u, v, w),$$

k étant une constante, ce qui implique *six* conditions pour la fonction cherchée. Dès lors on en conclut qu'elle est nécessairement de la forme

$$\mathrm{A}\,\varphi(u, v, w) + \mathrm{B}[\mathfrak{S}(u, v, w)]^2.$$

La fonction $\varphi(u, v, w)$ est précisément celle que nous nous proposions de déterminer.

le cas hyperelliptique un point fondamental correspondant à l'infinité des couples conjugués de la courbe hyperelliptique C.

20. La formule du n° 10 relative au genre des courbes algébriques de la surface S ne saurait être appliquée sans modification au cas hyperelliptique : il a été supposé en effet au cours du raisonnement, que la fonction $\mathfrak{S}(u, v, w)$ ne possédait pas de zéro double vérifiant également l'équation de la courbe considérée $\Theta_n = 0$.

Supposons donc que le point

$$u = v = w = 0$$

annule la fonction Θ_n à l'ordre de multiplicité d. Pour que l'intégrale

$$\int \frac{\Theta_{n+1}\, du}{\dfrac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}}$$

reste finie au voisinage de ce point, il faut et il suffit que la fonction Θ_{n+1} soit infiniment petite d'un ordre au moins égal à celui du dénominateur $\frac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}$, c'est-à-dire d'ordre d. Dans ces conditions, le point fixe $u = v = w = 0$ compte pour $2d^2$ unités parmi les solutions du système

$$\mathfrak{S} = 0, \qquad \Theta_n = 0, \qquad \Theta_{n+1} = 0.$$

Le nombre ν des points de rencontre mobiles de la courbe considérée avec son adjointe se trouvant ainsi diminué de $2d^2$, on en conclut, d'après le théorème de M. Nöther, que le genre de la courbe s'abaisse de d^2 unités.

En résumé, *le genre d'une courbe algébrique quelconque de la surface définie par l'équation* $\Theta_n = 0$ *a pour expression*

$$p = 3n(n+1) - d^2,$$

n désignant l'ordre de la fonction Θ_n *et* d *l'ordre de multiplicité auquel elle s'annule au point* $u = v = w = 0$.

Il convient de rappeler que la démonstration suppose que la fonction Θ_n est prise arbitrairement, ou, d'une manière plus précise, qu'elle n'admet aucun zéro multiple en dehors du point $u = v = w = 0$.

21. Quel est enfin le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce d'une surface S liée à une courbe de genre trois *hyperelliptique?* Considérons de nouveau une surface dont les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales de caractéristique nulle et d'ordre h, lesquelles ne s'annulent à la fois pour aucun système de valeurs des arguments.

Dans la formule fondamentale de M. Picard

$$\rho_0 = \mathrm{N} + d - 4p - (m-1) + 2r - (\rho - 1),$$

les éléments r, m et p conservent la même valeur que dans le cas général, savoir :

$$r = 6, \qquad m = 6h^2, \qquad p = 3h(h+1) + 1;$$

d'autre part

$$d = 1.$$

La classe N de la surface est égale, d'après les considérations du n° 12, au nombre des solutions non fixes du système

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S} = 0, \\ \Theta[\theta'_u \mathfrak{S}'_w - \theta'_w \mathfrak{S}'_u] - \theta[\Theta'_u \mathfrak{S}'_w - \Theta'_w \mathfrak{S}'_u] = 0, \\ \Theta[\theta'_v \mathfrak{S}'_w - \theta'_w \mathfrak{S}'_v] - \theta[\Theta'_v \mathfrak{S}'_w - \Theta'_w \mathfrak{S}'_v] = 0, \end{cases}$$

qui ne sont solutions d'aucun des deux systèmes

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S} = 0, \\ \Theta = 0, \\ \theta = 0, \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S} = 0, \\ \mathfrak{S}'_w = 0, \\ \Theta\theta'_w - \theta\Theta'_w = 0. \end{cases}$$

Or, le point $u = v = w = 0$ compte, parmi les solutions du système (1), pour *deux* unités, sans vérifier d'ailleurs aucun des systèmes (2) et (3). La classe de la surface se trouve donc diminuée de ce fait de deux unités dans le cas hyperelliptique et elle a pour expression

$$\mathrm{N} = 18h^2 + 12h + 4.$$

Enfin, le théorème du n° 13 relatif au nombre ρ n'est pas applicable immédiatement à la surface S dans le cas hyperelliptique, parce que la correspondance entre les points de la surface et les couples de points de la courbe de genre *trois* C possède un point fondamental qui répond à l'infinité des couples formés de deux points conjugués.

Considérons une autre surface S' liée à la même courbe C, mais dont les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions $\Theta'_i(u, v, w)$ s'annulant à la fois pour

$$u = v = w = 0;$$

la correspondance entre la surface S' et la courbe C ne possédant pas de point fondamental, le nombre ρ' est égal à 2. Or, d'après un théorème de M. Picard, les invariants relatifs ρ et ρ' de deux surfaces S et S' qui se correspondent birationnellement sont liées par la relation

$$\rho + F = \rho' + F',$$

F désignant le nombre des points fondamentaux de la surface S.

Dans le cas actuel

$$\rho' = 2, \qquad F = 1, \qquad F' = 0,$$

d'où

$$\rho = 1.$$

L'application de la formule fondamentale de M. Picard donne dès lors, dans le cas hyperelliptique,

$$\rho_0 = 14,$$

de même que dans le cas général.

Donc : *Les surfaces algébriques dont les points admettent une correspondance univoque avec les couples de points d'une courbe hyperelliptique de genre* trois *non singulière possèdent quatorze intégrales doubles distinctes de seconde espèce.*

22. On peut établir ce résultat par une voie toute différente. Envisageons les six intégrales abéliennes distinctes de seconde espèce de la courbe hyperelliptique C, lesquelles peuvent être ramenées à la

forme

$$\int \frac{z^q\,dz}{\sqrt{P(z)}},$$

$P(z)$ désignant un polynome du septième degré et l'exposant q recevant les valeurs $0, 1, \ldots, 5$; formons les intégrales doubles

$$(1) \qquad \int\int \frac{z^q z'^r - z^r z'^q}{\sqrt{P(z)}\sqrt{P(z')}}\,dz\,dz' \qquad (q, r = 0, 1, \ldots, 5).$$

D'après leur formation même, ces expressions sont des intégrales doubles de seconde espèce de la surface S; elles sont d'ailleurs au nombre de quinze. Mais on peut établir qu'elles ne sont pas distinctes au moyen d'une identité de Weierstrass qui est fondamentale dans la théorie des intégrales hyperelliptiques

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P(z)}{(z'-z)\sqrt{P(z)\,P(z')}}\right] - \frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{P(z')}{(z-z')\sqrt{P(z)\,P(z')}}\right] = \frac{U(z, z')}{\sqrt{P(z)\,P(z')}},$$

$U(z, z')$ étant un polynome en z, z', défini par cette identité même et qui est du cinquième degré par rapport à z et par rapport à z'. Cette identité montre, en effet, qu'on peut former une combinaison linéaire à coefficients constants (non tous nuls) des expressions

$$\frac{z^q z'^r - z^r z'^q}{\sqrt{P(z)}\sqrt{P(z')}} \qquad (q, r = 0, 1, \ldots, 5)$$

qui se réduit à une somme de dérivées partielles, et, par suite, qu'il existe une combinaison linéaire des intégrales (1) réductible à la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial R}{\partial X} + \frac{\partial S}{\partial Y}\right) dX\,dY,$$

R et S étant des fonctions rationnelles des coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface.

On obtient donc par cette voie *quatorze* intégrales doubles de seconde espèce de la surface S, lesquelles sont distinctes si le polynome $P(z)$ est pris arbitrairement.

Toutefois cette démonstration ne précise pas le sens de l'expression

« pris arbitrairement », tandis que nous avons établi par d'autres considérations que le cas d'exception est celui où la courbe hyperelliptique $u^2 = P(z)$ est une courbe *singulière*.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES LIÉES A UNE COURBE DE GENRE TROIS PAR UNE CORRESPONDANCE NON UNIVOQUE.

---

23. La seconde partie de ce travail est consacrée à l'étude des surfaces algébriques dont les points admettent une correspondance *non univoque* avec les couples de points d'une courbe algébrique de genre *trois*; nous nous bornerons d'ailleurs au cas où un point arbitraire de la surface Σ répond à *deux* couples de points de la courbe C.

On obtient des surfaces de ce type en égalant les coordonnées non homogènes d'un point X, Y, Z à trois fonctions abéliennes *paires* $\Phi_1(u, v, w)$, $\Phi_2(u, v, w)$, $\Phi_3(u, v, w)$ des variables u, v, w, liées ellesmêmes par la relation

$$\vartheta(u, v, w) = 0,$$

car les deux systèmes d'arguments (u, v, w) et $(-u, -v, -w)$ définissent un même point de la surface. Les deux couples correspondants (x, y), (x', y') et (X, Y), (X', Y') de la courbe C sont découpés sur cette courbe par une de ses adjointes d'ordre $m-3$, en vertu des relations

$$[G_\alpha(x, y) + G_\alpha(x', y')] + [G_\alpha(X, Y) + G_\alpha(X', Y')] = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Réciproquement on peut établir que toute surface algébrique Σ dont les points admettent une correspondance $(1, 2)$ avec les couples de points d'une courbe de genre *trois* C est nécessairement de ce type.

Envisageons à cet effet une surface S dont les points correspondent d'une manière univoque aux couples de points de la courbe considérée C. A tout point m de S correspond un point μ de Σ, mais à tout point μ de Σ correspondent deux points m, m' de S; dès lors, la correspondance (m, m') définit une transformation birationnelle de la surface S en elle-même. Il suffit donc, pour démontrer la proposition énoncée, d'établir qu'il n'existe pas d'autre transformation birationnelle de la surface S en elle-même, que celle associant à un point (u, v, w) le point conjugué $(-u, -v, -w)$.

Soit donc une telle transformation associant au point $m(X, Y, Z)$, d'arguments u, v, w, le point $m'(X', Y', Z')$ d'arguments u', v', w'. On a sur la surface

$$\begin{aligned} du' &= M_1\,dX' + N_1\,dY', \\ dv' &= M_2\,dX' + N_2\,dY', \\ dw' &= M_3\,dX' + N_3\,dY', \end{aligned}$$

M_i et N_i désignant des fonctions rationnelles de X', Y', Z'.

Par hypothèse X', Y', Z' sont des fonctions rationnelles de X, Y, Z, dès lors

$$\begin{aligned} du' &= P_1\,dX + Q_1\,dY, \\ dv' &= P_2\,dX + Q_2\,dY, \\ dw' &= P_3\,dX + Q_3\,dY, \end{aligned}$$

P_i et Q_i désignant des fonctions rationnelles de X, Y, Z.

En d'autres termes, $\int du'$, $\int dv'$, $\int dw'$ sont des intégrales de différentielles totales de première espèce de la surface S et, par suite, elles sont nécessairement des combinaisons linéaires des trois intégrales $\int du$, $\int dv$, $\int dw$:

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= \pi_{11}u + \pi_{12}v + \pi_{13}w + \pi_1, \\ v' &= \pi_{21}u + \pi_{22}v + \pi_{23}w + \pi_2, \\ w' &= \pi_{31}u + \pi_{32}v + \pi_{33}w + \pi_3. \end{aligned} \right.$$

Envisageons d'autre part le Tableau des périodes des intégrales considérées

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ 0, & 1, & 0, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ 0, & 0, & 1, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \end{matrix}$$

et faisons décrire à la variable d'intégration un contour fermé tel que les intégrales u, v, w s'augmentent respectivement d'un de leurs systèmes de périodes simultanées : de leur côté u', v', w' doivent reprendre leurs valeurs initiales, *à une période près;* il existe donc des entiers h, g et H, G, tels que

$$\left.\begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_j g_{jl}\, a_{kj} \\ \sum_j \pi_{kj}\, a_{jl} &= \mathrm{H}_{kl} + \sum_j \mathrm{G}_{jl}\, a_{kj} \end{aligned}\right\} \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Ces équations sont précisément celles qui se présentent dans la théorie des correspondances de Hürwitz. Nous avons reconnu précédemment (n° 6) que, dans l'hypothèse où les fonctions abéliennes considérées ne dérivent pas d'une courbe *singulière*, ces équations exigent que

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = \mathrm{G}_{11} = \mathrm{G}_{22} = \mathrm{G}_{33}$$

et que tous les autres entiers h, g et H, G soient nuls. Par suite

$$\pi_{11} = \pi_{22} = \pi_{33},$$

alors que les autres constantes π_{kl} sont nulles, et les équations (1) prennent la forme

$$\begin{aligned} u' &= \pi u + \pi_1, \\ v' &= \pi v + \pi_2, \\ w' &= \pi w + \pi_3. \end{aligned}$$

Ceci posé, soient (x, y), (x', y') et (ξ, η), (ξ', η') les deux couples de points de la courbe de genre *trois* C qui répondent respectivement aux deux points (u, v, w) et (u', v', w') de la surface S : il résulte des relations précédentes que

$$g_\alpha(\xi, \eta)\, d\xi + g_\alpha(\xi', \eta')\, d\xi' = \pi\, g_\alpha(x, y)\, dx + \pi\, g_\alpha(x', y')\, dx'$$
$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

Or, dx et dx' étant arbitraires, ces trois équations exigent que les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} g_1(x, y) & g_1(x', y') & g_1(\xi, \eta) \\ g_2(x, y) & g_2(x', y') & g_2(\xi, \eta) \\ g_3(x, y) & g_3(x', y') & g_3(\xi, \eta) \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} g_1(x, y) & g_1(x', y') & g_1(\xi', \eta') \\ g_2(x, y) & g_2(x', y') & g_2(\xi', \eta') \\ g_3(x, y) & g_3(x', y') & g_3(\xi', \eta') \end{vmatrix}$$

soient *nuls*, ce qui exprime précisément qu'il existe une adjointe d'ordre $m-3$ à la courbe C :

$$\lambda_1 g_1(x, y) + \lambda_2 g_2(x, y) + \lambda_3 g_3(x, y) = 0$$

passant par les quatre points :

$$(x, y), \quad (x', y'), \quad (\xi, \eta), \quad (\xi', \eta').$$

D'où cette conclusion : *Les surfaces* S *dérivant d'une courbe de genre* trois *non singulière ne possèdent pas d'autre transformation birationnelle en elles-mêmes que celle associant les points conjugués.*

Dès lors : *Si une surface algébrique* Σ *admet une correspondance* (1, 2) *avec les couples de points d'une courbe de genre* trois *non singulière, les deux couples de points de la courbe qui correspondent à un même point de la surface sont nécessairement les points de rencontre de cette courbe avec une de ses adjointes d'ordre* $m-3$.

On peut d'ailleurs supposer que la courbe C est une courbe plane du quatrième ordre (sauf dans le cas hyperelliptique) : les deux couples de C homologues d'un même point de Σ sont alors situés sur une même droite.

Sur le genre des surfaces Σ.

24. De même que les surfaces générales S, les surfaces Σ possèdent trois intégrales doublés de première espèce

$$\iint du\, dv, \quad \iint dv\, dw, \quad \iint dw\, du,$$

mais elles ne possèdent manifestement aucune intégrale de différentielle totale de première espèce :

Les surfaces Σ sont donc des surfaces régulières de genre trois.

On établit, par la même méthode que précédemment, que les invariants de M. Nöther ont pour valeurs, dans le cas des surfaces Σ,

$$p^{(2)} = 3 \qquad \text{et} \qquad p^{(1)} = 4.$$

Les propriétés géométriques du système canonique des surfaces Σ rappellent de trop près celles des surfaces S pour qu'il y ait lieu de nous y arrêter (¹). Nous nous bornerons à énoncer les résultats suivants :

Toute surface adjointe d'ordre $m - 4$ tangente à la surface Σ découpe sur elle une courbe $\mathcal{L}$ de genre *trois* et de mêmes modules que la courbe fondamentale C. L'enveloppe de la famille des courbes $\mathcal{L}$, d'une part, et le lieu géométrique de leur point double, d'autre part, sont également deux courbes de genre *trois* et de mêmes modules que C.

Sur les courbes algébriques tracées sur une surface Σ.

25. Envisageons en même temps une surface S admettant une correspondance univoque point par couple avec une courbe de genre *trois* et une surface Σ admettant une correspondance (1, 2) avec cette même courbe : à toute courbe algébrique C de la surface S correspond une courbe Γ de la surface Σ, et réciproquement à toute courbe Γ de la surface Σ correspondent deux courbes C et C′ de la surface S, lesquelles peuvent d'ailleurs coïncider.

D'après le théorème fondamental du n° 8, étant donnée une courbe C de la surface S, il est possible de former une fonction $\theta(u, v, w)$ jouissant sur la surface des propriétés d'une fonction thêta, s'annulant le long de la courbe considérée et peut-être aussi le long de l'une ou l'autre de deux courbes déterminées $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}'_0$.

(¹) *Voir* notre Mémoire *Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre* trois (*Journal de Mathématiques*, 6ᵉ série, t. IV, 1908).

Ceci posé formons le produit

$$\Theta(u, v, w) = \theta(u, v, w)\,\theta(-u, -v, -w)\,[\mathfrak{S}_0]^{-\delta},$$

en désignant par δ l'ordre de multiplicité auquel la fonction $\theta(u, v, w)$ s'annule le long de la courbe $\mathcal{L}_0$ (ou $\mathcal{L}'_0$), et par $\mathfrak{S}_0$ la fonction

$$x_0 \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{S}(u, v, w) + y_0 \frac{\partial}{\partial v}\mathfrak{S}(u, v, w) + \frac{\partial}{\partial w}\mathfrak{S}(u, v, w).$$

D'après sa formation même, la fonction $\Theta(u, v, w)$ n'est jamais infinie sur la surface Σ et ne s'y annule que le long de la courbe considérée Γ; de plus c'est une fonction paire ou impaire (car la fonction $\mathfrak{S}_0$ est impaire).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui peut servir de point de départ pour l'étude des courbes algébriques de la surface :

Toute courbe algébrique tracée sur une surface Σ non singulière peut être représentée par une équation de la forme

$$\Theta(u, v, w) = 0,$$

Θ désignant une fonction paire ou impaire qui jouit des propriétés d'une fonction thêta de u, v, w sous la condition $\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$.

L'étude des courbes algébriques des surfaces Σ se trouve donc notablement simplifiée, grâce à cette circonstance que les multiplicités $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}'_0$ distinctes sur les surfaces S, se recouvrent l'une l'autre sur les surfaces Σ.

26. Les propriétés des *systèmes linéaires* de courbes tracées sur la surface découlent des propriétés des fonctions thêta de trois variables; il suffit d'ailleurs de considérer les fonctions thêta *normales*, puisque les courbes de la surface Σ sont définies par les fonctions $\Theta(u, v, w)$ de parité déterminée. Nous rappellerons d'abord quelques propriétés des fonctions thêta normales de genre *trois*.

Soit un tableau normal de périodes

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ 0, & 1, & 0, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ 0, & 0, & 1, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \end{matrix}$$

dans lequel on suppose

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

On appelle *fonction thêta normale d'ordre n* une fonction uniforme, entière de u, v, w, vérifiant les relations

$$\begin{aligned}
\Theta(u+1, \quad v, \quad w) &= e^{\varepsilon_1 \pi i}\, \Theta(u, v, w),\\
\Theta(u, \quad v+1, \quad w) &= e^{\varepsilon_2 \pi i}\, \Theta(u, v, w),\\
\Theta(u, \quad v, \quad w+1) &= e^{\varepsilon_3 \pi i}\, \Theta(u, v, w),\\
\Theta(u+a_{11}, v+a_{12}, w+a_{13}) &= e^{\eta_1 \pi i}\, \Theta(u, v, w) e^{-nu - n\frac{a_{11}}{2}},\\
\Theta(u+a_{21}, v+a_{22}, w+a_{23}) &= e^{\eta_2 \pi i}\, \Theta(u, v, w) e^{-nv - n\frac{a_{22}}{2}},\\
\Theta(u+a_{31}, v+a_{32}, w+a_{33}) &= e^{\eta_3 \pi i}\, \Theta(u, v, w) e^{-nw - n\frac{a_{33}}{2}},
\end{aligned}$$

ε_1, ε_2, ε_3, η_1, η_2, η_3 désignant o ou 1.

L'ensemble des six nombres

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, \end{matrix}$$

est dit *la caractéristique de la fonction thêta;* la caractéristique est dite *nulle* si les six nombres sont nuls. D'après cela il existe 64 caractéristiques différentes et, par suite, 64 systèmes de fonctions thêta normales d'un ordre donné.

Fonctions thêta du premier ordre. — Parmi les 64 fonctions thêta normales du premier ordre, 36 sont paires et 28 sont impaires : chacune s'annule pour 28 demi-périodes, c'est-à-dire pour 28 systèmes de valeurs de u, v, w compris dans les formules

$$\begin{aligned}
u &= l\pi i + p\frac{a_{11}}{2} + q\frac{a_{12}}{2} + r\frac{a_{13}}{2},\\
v &= m\pi i + p\frac{a_{21}}{2} + q\frac{a_{22}}{2} + r\frac{a_{23}}{2},\\
w &= n\pi i + p\frac{a_{31}}{2} + q\frac{a_{32}}{2} + r\frac{a_{33}}{2},
\end{aligned}$$
$$(l, m, n, p, q, r = \text{o ou } 1).$$

Fonctions thêta d'ordre impair. — Pour chacune des 64 caractéristiques, il existe $\frac{n^3+1}{2}$ fonctions de même parité que la fonction $\mathfrak{S}_i$ du premier ordre et de la même caractéristique; chacune d'elles s'annule pour les 28 demi-périodes qui sont des zéros de $\mathfrak{S}_i$.

Il existe $\frac{n^3-1}{2}$ fonctions de parité contraire à $\mathfrak{S}_i$; elles s'annulent toutes pour les 36 demi-périodes qui ne sont pas des zéros de $\mathfrak{S}_i$.

Fonctions thêta d'ordre pair — Ce cas se subdivise en deux suivant que la caractéristique est nulle ou non.

Les n^3 fonctions de caractéristique nulle comprennent $\frac{n^3+8}{2}$ fonctions paires ne s'annulant pour aucune demi-période, et $\frac{n^3-8}{2}$ fonctions impaires s'annulant pour les 64 demi-périodes.

Pour chacune des 63 caractéristiques non nulles, il existe $\frac{n^3}{2}$ fonctions paires et $\frac{n^3}{2}$ fonctions impaires. Soit $\mathfrak{S}_i$ la fonction du premier ordre et de la même caractéristique, et $\mathfrak{S}$ celle du premier ordre et de caractéristique nulle : les $\frac{n^3}{2}$ fonctions de même parité que le produit $(\mathfrak{S}_i\mathfrak{S})$ admettant pour zéros les 32 demi-périodes qui annulent une *seule* des deux fonctions $\mathfrak{S}_i$ et $\mathfrak{S}$; et les $\frac{n^3}{2}$ fonctions de parité contraire au produit $(\mathfrak{S}_i\mathfrak{S})$ s'annulent pour les 32 autres demi-périodes.

27. Dans l'étude des courbes algébriques d'une surface Σ, il importe de remarquer que certaines combinaisons linéaires des fonctions thêta sont identiquement nulles sur la surface, en vertu de la relation

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0.$$

Le nombre δ des paramètres homogènes dont dépend le système linéaire défini par une équation de la forme $\Theta_n(u, v, w) = 0$ n'est donc pas égal au nombre des fonctions thêta de trois variables, d'ordre n, de caractéristique et de parité données, linéairement distinctes, car ces fonctions comprennent les produits de $\mathfrak{S}(u, v, w)$ par une fonction Θ_{n-1}, d'ordre $n-1$, de même caractéristique et de même parité que Θ_n; en fait, le nombre δ est égal à la différence du nombre des fonctions Θ_n linéairement indépendantes et de celui des fonctions Θ_{n-1}.

Différents cas sont à considérer suivant la caractéristique et la parité de la fonction Θ_n; voici les résultats :

La série linéaire de courbes définies par l'équation $\Theta_n(u, v, w) = 0$ *dépend d'un nombre de paramètres homogènes*

$$\delta = \frac{3n(n-1)}{2} + K,$$

où n *désigne l'ordre de la fonction thêta et* K *une constante numérique ne dépendant que de la caractéristique et de la parité de la fonction* Θ_n (¹).

Les valeurs de la constante K sont données par le Tableau suivant :

Θ_n *est de caractéristique nulle.*

La fonction Θ_n et l'entier n sont de même parité	$K = 4$
La fonction Θ_n et l'entier n sont de parité contraire ...	$K = -3$

Θ_n *est de caractéristique non nulle.*

Le produit $(\vartheta_i \Theta_n)$ et l'entier n sont de même parité....	$K = 0$
Le produit $(\vartheta_i \Theta_n)$ et l'entier n sont de parité contraire.	$K = 1$

(ϑ_i désigne la fonction du premier ordre et de même caractéristique que Θ_n).

On peut disposer des coefficients de la fonction Θ_n de manière qu'elle admette pour zéros multiples certaines demi-périodes [prises parmi les zéros de $\vartheta(u, v, w)$] : il nous sera utile de connaître le nombre des conditions linéaires qui expriment qu'une demi-période (u_i, v_i, w_i) est un zéro d'ordre s_i pour la fonction Θ_n.

On a, au voisinage du point (u_1, v_1, w_1),

$$\vartheta(u, v, w) = a_1(u - u_1) + a_2(v - v_1) + a_3(w - w_1) + \ldots = 0,$$

d'où, en résolvant par rapport à $(w - w_1)$,

$$(1) \qquad w - w_1 = S(u - u_1, v - v_1),$$

(¹) Cette formule n'est pas valable pour $n = 1$.

S désignant une série entière et *impaire* en $(u - u_1)$ et $(v - v_1)$.

Ceci posé, deux cas sont à distinguer :

1° Si la fonction Θ_n ne s'annule pas normalement pour la demi-période u_1, v_1, w_1, elle est nécessairement une fonction paire de $(u-u_1)$, $(v-v_1)$, $(w-w_1)$, et son développemement est, en vertu de (1), de la forme

$$\Theta_n = b_0 + b_2(u-u_1)^2 + b_2(u-u_1)(v-v_1) + b_3(v-v_1)^2 + \ldots.$$

Le nombre des conditions linéaires qui expriment que u_1, v_1, w_1 est un zéro d'ordre $(2r)$ pour Θ_n est donc égal à

$$1 + 3 + \ldots + (2r - 1) = r^2.$$

2° Si la fonction Θ_n s'annule normalement pour la demi-période (u_1, v_1, w_1), elle est nécessairement une fonction impaire de $(u-u_1)$, $(v-v_1)$, $(w-w_1)$, et son développement est de la forme

$$\Theta_n = c_1(u-u_1) + c_2(v-v_1) + c_3(u-u_1)^3 + \ldots.$$

Le nombre des conditions linéaires exprimant que u_1, v_1, w_1 est un zéro d'ordre $2q+1$ pour Θ_n est donc égal à

$$2 + 4 + \ldots + 2q = q(q+1).$$

Sur le genre des courbes algébriques tracées sur une surface Σ.

28. Soit une courbe algébrique quelconque de la surface Σ définie par l'équation

$$\Theta_n(u, v, w) = 0,$$

Θ_n étant, sur la surface, une fonction thêta d'ordre n, de caractéristique quelconque, paire ou impaire; proposons-nous de déterminer le genre de cette courbe.

De même que précédemment, nous formerons d'abord une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe $\Theta_n = 0$. Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées non homogènes d'un point de la courbe, on a le long de cette courbe

$$dX = \frac{H\,du}{\frac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}}$$

en posant

$$H = \frac{D(X, \mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(u, v, w)}.$$

La fonction $H(u, v, w)$ joue, pour les points de la courbe $\Theta_n = 0$, le même rôle qu'une fonction thêta d'ordre $(n+1)$ de même caractéristique que Θ_n, mais de parité contraire. Si donc on désigne par Θ_{n+1} une fonction quelconque d'ordre $(n+1)$, de même caractéristique que Θ_n et de parité contraire, l'intégrale

$$I = \int \frac{\Theta_{n+1}\,du}{\frac{D(\mathfrak{S}, \Theta_n)}{D(v, w)}} = \int \frac{\Theta_{n+1}}{H}\,dX$$

est une intégrale abélienne attachée à la courbe $\Theta_n = 0$.

On démontre, par un raisonnement déjà employé, que cette intégrale est de première espèce dans l'hypothèse où Θ_n désigne la fonction *générale* d'ordre n, d'une caractéristique et d'une parité données.

Combien cette forme donne-t-elle d'intégrales linéairement distinctes? Nous avons déterminé, dans la section précédente, le nombre des fonctions thêta d'ordre $(n+1)$, de caractéristique et de parité données, non identiquement nulles sur la surface; mais, parmi ces fonctions, il en est *trois* qui sont identiquement nulles sur la courbe $\Theta_n = 0$: à savoir les produits

$$\Theta_n \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}, \quad \Theta_n \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}, \quad \Theta_n \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}.$$

Dès lors, le nombre ϖ des intégrales I linéairement distinctes est donné par la formule

$$\varpi = \frac{3n(n+1)}{2} + K - 3.$$

On peut démontrer, au moyen du théorème de M. Nöther, que ce sont bien là toutes les intégrales de première espèce de la courbe considérée. A cet effet, déterminons le nombre ν des points de rencontre mobiles de la courbe $\Theta_n = 0$ avec son adjointe $\Theta_{n+1} = 0$, lequel est égal à la moitié du nombre des solutions non fixes du système

$$\mathfrak{S} = 0, \qquad \Theta_n = 0, \qquad \Theta_{n+1} = 0.$$

Ce système admet au total $6n(n+1)$ solutions, dont il faut déduire les solutions fixes, à savoir les σ demi-périodes annulant à la fois $\mathfrak{S}$, Θ_n et Θ_{n+1}.

La détermination du nombre σ dans les différents cas ne présente aucune difficulté, si l'on se reporte au Tableau des zéros des fonctions thêta de trois variables (n° 26). Voici les résultats :

Θ_n est de caractéristique nulle.

La fonction Θ_n et l'entier n sont de même parité	$\sigma = 0$
La fonction Θ_n et l'entier n sont de parité contraire	$\sigma = 28$

Θ_n est de caractéristique non nulle.

Le produit $(\mathfrak{S}_i\Theta_n)$ et l'entier n sont de même parité	$\sigma = 16$
Le produit $(\mathfrak{S}_i\Theta_n)$ et l'entier n sont de parité contraire ..	$\sigma = 12$

($\mathfrak{S}_i$ désigne la fonction du premier ordre et de même caractéristique que Θ_n).

Il convient d'ailleurs de remarquer que, dans tous les cas, les demi-périodes annulant à la fois $\mathfrak{S}$ et Θ_n sont les mêmes que celles annulant à la fois $\mathfrak{S}$ et Θ_{n+1}.

En résumé, le nombre ν des points de rencontre mobiles de la courbe considérée avec son adjointe a pour valeur

$$\nu = \frac{6n(n+1) - \sigma}{2}.$$

Dès lors, pour s'assurer que les intégrales I comprennent *toutes* les intégrales de première espèce de la courbe $\Theta_n = 0$, il suffit de vérifier l'égalité suivante dans les quatre cas distingués précédemment :

$$\nu = 2(\varpi - 1),$$

c'est-à-dire

$$\frac{6n(n+1) - \sigma}{2} = 2\left[\left(\frac{3n(n+1)}{2} + K - 3\right) - 1\right],$$

ou encore

$$4K + \sigma = 16.$$

Cette vérification est immédiate d'après les valeurs de K et de σ données aux nos 27 et 28.

29. Nous avons supposé jusqu'ici que la courbe algébrique considérée était la courbe générale de la série linéaire définie par l'équation $\Theta_n = 0$: il nous reste à examiner le cas où la fonction Θ_n admet certains systèmes de valeurs des arguments pour zéros d'ordre de multiplicité s_i. Un tel système définit sur la courbe $\Theta_n = 0$ un point multiple à s_i branches ; en effet, d'après les développements

$$\begin{gathered} \vartheta(u, v, w) = a(u - u_i) + b(v - v_i) + c(w - w_i) + d(u - u_i)^2 + \ldots = 0, \\ \Theta_n(u, v, w) = A(u - u_i)^{s_i} + B(u - u_i)^{s_i - 1}(v - v_i) + \ldots = 0, \end{gathered}$$

les développements des coordonnées d'un point de la courbe au voisinage du point u_i, v_i, w_i sont de la forme

$$X = S\left[(u - u_i)^{\frac{1}{s_i}}\right],$$

S désignant une série entière.

Il convient de distinguer parmi les zéros multiples de Θ_n les demi-périodes qui annulent la fonction $\vartheta(u, v, w)$.

Soit u_i, v_i, w_i une telle demi-période, annulant la fonction Θ_n à l'ordre s_i de multiplicité : pour que l'intégrale

$$\int \frac{\Theta_{n+1}\, du}{\dfrac{D(\vartheta, \Theta_n)}{D(v, w)}}$$

reste finie au voisinage du point u_i, v_i, w_i, il est nécessaire que la fonction Θ_{n+1} y soit infiniment petite d'ordre $(s_i - 1)$ au moins. Mais, d'après une remarque précédente, les demi-périodes annulant ϑ et Θ_n sont les mêmes que celles annulant ϑ et Θ_{n+1}, et, par suite, l'ordre de multiplicité du zéro u_i, v_i, w_i est de même parité pour Θ_{n+1} que pour Θ_n : on en conclut que u_i, v_i, w_i doit nécessairement être un zéro d'ordre s_i pour la fonction Θ_{n+1}. Le nombre total des conditions linéaires (1) im-

(1) Ces relations linéaires pourraient n'être pas toutes distinctes, auquel cas l'abaisse-

posées de ce fait à la fonction Θ_{n+1}, c'est-à-dire l'abaissement du genre, a donc pour expression

$$\Sigma r^2 + \Sigma q(q+1).$$

Enfin si la fonction Θ_n s'annule à l'ordre s_j pour un système de valeurs u_j, v_j, w_j des arguments qui n'est pas une des demi-périodes annulant $\vartheta(u, v, w)$, il faut et il suffit, pour que l'intégrale considérée reste finie en ce point, que la fonction Θ_{n+1} y soit infiniment petite d'ordre $(s_j - 1)$, ce qui entraîne un nombre de conditions linéaires égal à

$$\frac{s_j(s_j-1)}{2}.$$

Voici donc le théorème général auquel conduit l'analyse précédente :

Le genre d'une courbe algébrique quelconque de la surface Σ, définie par l'équation $\theta_n(u, v, w) = 0$, a pour expression

$$p = \frac{3n(n+1)}{2} + K - 3 - \Sigma r^2 - \Sigma q(q+1) - \Sigma \frac{s(s-1)}{2},$$

où l'on désigne par :

n *l'ordre de la fonction* Θ_n;

$2r_1, 2r_2, \ldots, (2q_1+1), (2q_2+1), \ldots$ *les ordres de multiplicité des zéros de θ_n qui font partie des vingt-huit demi-périodes annulant* $\vartheta(u, v, w)$;

---

ment du genre serait *inférieur* à $[\Sigma r^2 + \Sigma q(q+1)]$. Cette objection peut être écartée à l'aide du théorème de M. Nöther. En effet, le nombre ν' des points de rencontre mobiles de la courbe particulière $\theta_n = 0$ avec son adjointe est au plus égal à

$$\begin{aligned} \nu' &= 3n(n+1) - \frac{1}{2}[\Sigma(2r)^2 + \Sigma(2q+1)^2] \\ &= 3n(n+1) - 2[\Sigma r^2 + \Sigma q(q+1)] - \frac{\sigma}{2}, \end{aligned}$$

tandis qu'on a pour la courbe générale

$$\nu = 3n(n+1) - \frac{\sigma}{2};$$

d'où l'on conclut que l'abaissement du genre, qui est donné par la différence $\frac{\nu - \nu'}{2}$, est *au moins égal à*

$$\Sigma r^2 + \Sigma q(q+1).$$

s_1, s_2, ... *les ordres de multiplicité des autres zéros multiples de* θ_n; K *enfin une constante numérique qui dépend de la caractéristique et de la parité de la fonction* θ_n, *et dont les valeurs ont été données au* n° 27.

Il résulte en particulier de la formule précédente que les courbes définies sur la surface Σ par les soixante-trois fonctions thêta du premier ordre et de caractéristique non nulle sont de genre *un*, et que les courbes du système canonique sont de genre *quatre*.

Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce des surfaces Σ.

30. Nous nous proposons de déterminer la valeur de l'invariant ρ_0 pour les surfaces Σ par la méthode déjà exposée pour les surfaces S.

Envisageons une surface Σ définie en coordonnées homogènes par les équations

$$\begin{gathered} \vartheta(u, v, w) = 0, \\ X_i = \Theta_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \end{gathered}$$

où les Θ_i sont quatre fonctions thêta normales d'orde h, de caractéristique nulle, et de même parité que l'entier h, qui ne s'annulent à la fois pour aucun système de valeurs de u, v, w.

Les vingt-huit demi-périodes u_i, v_i, w_i annulant $\vartheta(u, v, w)$ définissent des points doubles de la surface; en effet les fonctions Θ_i, ne s'annulant point pour la demi-période u_i, v_i, w_i, admettent au voisinage de ce point des développements suivant les puissances paires de $(u - u_i)$, $(v - v_i)$, $(w - w_i)$, d'où l'on conclut aisément qu'une droite menée par le point (u_i, v_i, w_i) de la surface Σ, a, avec celle-ci, deux intersections confondues au point considéré. Dès lors

$$d = 28.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} m &= 3h^2, \\ p &= \frac{3h(h+1)}{2} + 1, \\ r &= 0. \end{aligned}$$

Pour déterminer la classe N de la surface, on considère les solutions propres du système d'équations

$$\frac{\Theta}{\theta} = \frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial u}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial v}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}};$$

ces solutions sont au nombre de $6(3h^2+2h+1)$, deux à deux égales et de signes contraires; mais il faut en déduire les vingt-huit demi-périodes annulant $\vartheta(u, v, w)$, auxquelles il ne correspond pas de plan tangent proprement dit. La classe de la surface a donc pour expression

$$N = \frac{6(3h^2+2h+1)-28}{2} = 9h^2+6h-11.$$

Enfin la valeur du nombre ρ se déduit immédiatement du théorème général sur les courbes algébriques tracées sur la surface Σ (n° 25).

Soient en effet deux courbes algébriques quelconques C_1, C_2 de la surface Σ, représentées par les équations

$$\theta_1(u, v, w) = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta_2(u, v, w) = 0,$$

respectivement d'ordre n_1 et n_2. Le quotient

$$\frac{(\theta_1)^{2n_2}}{(\theta_2)^{2n_1}}$$

est, sur la surface, une fonction sextuplement périodique de u, v, w: c'est donc une fonction rationnelle des coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface. Dès lors, l'expression

$$\operatorname{Log} \frac{(\theta_1)^{2n_2}}{(\theta_2)^{2n_1}}$$

est une intégrale de différentielle totale de troisième espèce ne possédant pas d'autre courbe logarithmique que les courbes C_1 et C_2.

On a donc pour toute surface Σ non singulière et sans courbe exceptionnelle $\rho = 1$.

Dès lors, l'application de la formule fondamentale de M. Picard

$$\rho_0 = N + d - 4p - (m-1) + 2r - (\rho - 1)$$

donne, pour la surface considérée,

$$\rho_0 = 14.$$

L'invariant ρ_0 *a donc la même valeur pour les surfaces* Σ *que pour les surfaces* S.

Sur le cas hyperelliptique.

31. Les particularités des surfaces Σ, spéciales au cas hyperelliptique, rappellent celles exposées précédemment pour les surfaces S.

Le point $u = v = w = 0$, qui est un zéro double de la fonction $\mathfrak{S}(u, v, w)$ dans le cas hyperelliptique, définit un point quadruple O de la surface Σ (dans l'hypothèse où il n'annule pas les quatre fonctions coordonnées); en effet, si l'on considère deux plans variables $\Theta = 0$ et $\theta = 0$ menés par ce point, la demi-période $u = v = w = 0$ compte pour $2 \times 2 \times 2$ unités parmi les solutions du système

$$\mathfrak{S} = 0, \qquad \Theta = 0, \qquad \theta = 0,$$

d'où l'on déduit qu'une droite, menée par le point O de la surface Σ, a, avec celle-ci, quatre intersections confondues au point considéré.

Les surfaces Σ dérivant d'une courbe hyperelliptique sont des surfaces régulières de genre *trois;* mais leurs invariants $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ n'ont pas la même valeur que dans le cas général : on établit aisément que

$$p^{(2)} = 2 \qquad \text{et} \qquad p^{(1)} = 3.$$

Les courbes du système canonique correspondent aux couples découpés sur la courbe du cinquième ordre C par deux sécantes en involution issues de son point triple; elles comprennent en particulier la famille des courbes $\mathcal{L}$ qui correspondent aux couples de C découpés par une sécante fixe oaa' et une sécante variable omm'. D'après leur définition même, les courbes $\mathcal{L}$ correspondent point par point à la courbe C; toutefois cette conclusion se trouve en défaut pour les huit courbes particulières Λ qu'on obtient en faisant coïncider la sécante oaa' avec l'une des tangentes ot à la courbe C issues de son point triple; en effet les points a et a' étant confondus, les couples conjugués am et $a'm'$ ne sont plus séparés analytiquement et la courbe Λ de la surface correspond d'une manière univoque, non plus aux points de la courbe C, mais aux sécantes menées par le point triple : elle est donc unicursale.

En définitive, *il existe huit surfaces adjointes d'ordre $m - 4$ circonscrites à la surface Σ le long d'une courbe unicursale* Λ.

Voici encore une propriété des courbes Λ qui découle de leur correspondance avec C : si l'on considère sur l'une de ces courbes les sept points d'intersection des autres courbes Λ, ainsi que le point quadruple de la surface, les huit points en question ont mêmes rapports anharmoniques que les huit tangentes à C issues de son point triple.

32. La représentation analytique des courbes algébriques de la surface Σ ne présente pas de particularités spéciales dans le cas hyperelliptique. Toutefois la formule du n° 29, relative au genre de la courbe algébrique définie sur la surface par l'équation $\theta_n = 0$, doit être complétée lorsque la fonction θ_n s'annule, à l'ordre de multiplicité d, pour la demi-période

$$u = v = w = 0$$

qui est un zéro double de la fonction $\Im(u, v, w)$.

Pour que l'intégrale

$$\int \frac{\theta_{n+1}\, du}{\dfrac{D(\Im, \theta_n)}{D(v, w)}}$$

reste finie au voisinage du point $u = v = w = 0$, il faut et il suffit que la fonction θ_{n+1} soit infiniment petite, d'ordre au moins égal à celui du dénominateur, c'est-à-dire à d. Or les fonctions θ_{n+1} et θ_n sont de parité contraire : il en est donc de même des ordres de multiplicité de leur zéro commun $u = v = w = 0$, et, par suite, la fonction θ_{n+1} est nécessairement d'ordre $(d + 1)$ en ce point.

Évaluons le nombre des conditions linéaires imposées de ce fait à la fonction θ_{n+1}. Supposons d'abord la fonction θ_n *impaire* et s'annulant à l'ordre $d = 2m + 1$ pour $u = v = w = 0$; on a, autour de ce point, des développements de la forme

$$\Im(u, v, w) = f_2(u, v, w) + f_4(u, v, w) + \ldots = 0,$$
$$\theta_{n+1}(u, v, w) = F_0 + F_2(u, v, w) + \ldots,$$

les f et les F désignant des polynomes homogènes de degré égal à l'indice.

Pour que θ_{n+1} soit d'ordre $2m+2$, *eu égard à la relation*

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0,$$

il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_2 &= f_2\varphi_0, \\ F_4 - f_4\varphi_0 &= f_2\varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ F_{2m} - f_{2m}\varphi_0 - \ldots - f_4\varphi_{2m-4} &= f_2\varphi_{2m-2}, \end{aligned}$$

les φ étant des polynomes arbitraires de degré égal à leur indice, ce qui implique pour la fonction θ_{n+1} un nombre de conditions égal à

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m}(4\nu+1) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

Dans le cas où la fonction θ_n est paire et d'ordre $d=2m$ pour $u=v=w=0$, on établit de la même manière que le nombre des conditions imposées de ce fait à la fonction θ_{n+1} est égal à

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m}(4\nu-1) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

En résumé, lorsque la fonction θ_n admet le point $u=v=w=0$ pour zéro d'ordre d, l'expression du genre de la courbe $\theta_n=0$ est diminuée du terme $\frac{d(d+1)}{2}$ (1).

Donc : *Le genre de la courbe définie sur une surface Σ par l'équation $\theta_n(u, v, w) = 0$ a pour expression, dans le cas hyperelliptique,*

$$p = \frac{3n(n+1)}{2} + K - 3 - \left[\Sigma r^2 + \Sigma q(q+1) + \Sigma\frac{s(s-1)}{2}\right] - \frac{d(d+1)}{2},$$

d désignant l'ordre de multiplicité auquel la fonction θ_n s'annule pour le

(1) On vérifie l'indépendance des conditions linéaires imposées à la fonction θ_{n+1} au moyen du théorème de M. Nöther; le point $u=v=w=0$ diminue en effet de $d(d+1)$ unités le nombre des points d'intersection variables des courbes $\theta_n=0$ et $\theta_{n+1}=0$.

zéro double de $\mathfrak{S}(u, v, w)$, *et les autres lettres ayant la même signification que dans le cas général.*

33. Quelle est enfin la valeur de l'invariant ρ_0 pour les surfaces algébriques Σ dont les points admettent une correspondance (1, 2) avec les couples de points d'une courbe de genre *trois, hyperelliptique?*

Si l'on désigne respectivement par

$$g_i(z)\,dz = \frac{z^i\,dz}{Z} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 5)$$

les six différentielles abéliennes distinctes de seconde espèce attachées à la courbe hyperelliptique de genre *trois* C, d'équation

$$Z^2 = P(z),$$

les expressions

$$(1) \qquad \iint [g_i(z)\,g_k(z') - g_k(z)\,g_i(z')]\,dz\,dz' \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, 5)$$

présentent les caractères d'une intégrale de seconde espèce; d'ailleurs elles restent invariables lorsqu'on remplace respectivement les deux points (z, Z) et (z', Z') par leurs conjugués hyperelliptiques $(z, -Z)$ et $(z', -Z')$; dès lors ce sont des intégrales doubles de seconde espèce de la surface Σ.

Les combinaisons de la forme (1), au nombre de quinze, donnent au plus *quatorze* intégrales distinctes, en vertu de l'identité fondamentale de Weierstrass; elles en donnent effectivement quatorze dans l'hypothèse où la courbe n'est pas singulière, d'après les considérations exposées à propos des surfaces S.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

L'invariant ρ_0 *est égal à* quatorze *pour les surfaces algebriques dont les points admettent soit une correspondance univoque, soit une correspondance* (1, 2) *avec les couples de points d'une courbe de genre* trois, *générale ou hyperelliptique, mais non singulière.*