

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

TRAYNARD

Polygones et courbes de fréquence

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 26 (1909), p. 163-192

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__163_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POLYGONES ET COURBES DE FRÉQUENCE,

PAR M. TRAYNARD.



Introduction.

Depuis quelques années, on a publié à l'étranger, surtout en Angleterre et aux États-Unis, de nombreux travaux ⁽¹⁾ sur l'application aux sciences naturelles des méthodes de la statistique et de certains résultats du calcul des probabilités; l'importance de ce genre d'études apparaît principalement dans les questions de variation et de mutation.

Les recherches analogues sont peu répandues en France jusqu'ici, et il faut en voir, semble-t-il, la raison dans l'absence de Traités ou de Mémoires où les naturalistes pourraient apprendre à se servir d'un instrument mathématique qui leur est peu familier. C'est pourquoi j'ai pensé qu'il y aurait quelque intérêt à mettre à la portée des lecteurs français les Mémoires importants du professeur Pearson qui renferment les principaux résultats en cette matière.

Le présent travail s'occupe des polygones et des courbes de fréquence théoriques et de leur adaptation à des données expérimentales. La plupart des résultats exposés sont contenus dans un Mémoire publié dans le Volume CLXXXVI des *Philosophical Transactions* ⁽²⁾. J'ai complété ou rectifié la discussion sur certains points; je n'ai donné aucun exemple numérique; on trouvera dans le Mémoire anglais des

⁽¹⁾ Voir une bibliographie étendue dans DAVENPORT, *Statistical methods*.

⁽²⁾ K. PEARSON, *Contributions to the mathematical Theory of evolution*; II : *Skew variation in homogeneous material*, p. 343-414, avec 10 planches.

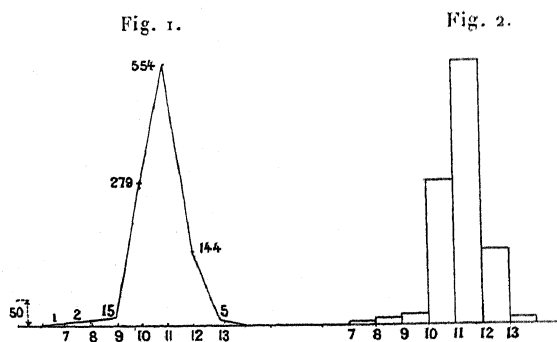
applications à des sujets très variés : Zoologie, Botanique, Médecine, Météorologie.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS. POLYGONE DE FRÉQUENCE. COURBE NORMALE.

C'est un procédé courant aujourd'hui que l'emploi d'une courbe pour l'étude d'un phénomène naturel. J'ai par exemple devant moi une gerbe de blé et je me propose d'en étudier les épis au point de vue du nombre de grains. Je compte les grains de chaque épi et je partage ainsi les épis en classes (classes) ⁽¹⁾, les épis d'une même classe ayant le même nombre de grains; ce nombre est l'ordre ou la grandeur de la classe (magnitude of the class); on le désigne par V ; dans chaque classe, je compte le nombre d'épis, c'est la fréquence de la classe (frequency of the class) désignée par f . Traçant alors deux axes rectangulaires et portant l'ordre en abscisses, la fréquence en ordonnées, j'obtiens un ensemble de points qui résume mes observations.

En joignant ces points par une ligne brisée, on obtient le polygone de fréquence (frequency polygon) tracé suivant la méthode des ordonnées (method of loaded ordinates) ou des trapèzes (*fig. 1*). En prenant



chaque ordonnée comme côté d'un rectangle dont le côté parallèle est sur l'ordonnée suivante, on trace le polygone par la méthode des rectangles (*fig. 2*). L'exemple dont je me suis servi pour les figures

(1) Je donnerai ainsi entre parenthèses les équivalents anglais des mots spéciaux.

est emprunté à Davenport et se rapporte au nombre de rayons de la nageoire anale de certains vérons.

Jusqu'ici les variables, c'est-à-dire les nombres de grains ou les nombres de rayons, ont été des nombres entiers (integral variates) et les grandeurs des classes ont été des entiers consécutifs. Si je veux étudier la longueur des épis, en la mesurant au millimètre près, je range dans une même classe des épis de longueurs différentes, par exemple ceux qui vont de 6^{cm},3 à 6^{cm},4, ou bien de 6^{cm},3 à 6^{cm},6; il s'introduit ainsi un élément nouveau : le contenu de la classe (the class range); il est égal dans les cas cités à 0^{cm},1 et 0^{cm},3. On prend alors pour grandeur de la classe la moyenne de ses limites : 6^{cm},35 ou 6^{cm},45; d'ailleurs, une transformation simple permet de numéroter les classes 1, 2, etc. Dans le cas actuel, les variables sont dites graduées (graduated).

Ces quelques définitions précisées, je vais montrer comment on peut déduire d'un polygone de fréquence certaines constantes numériques qui le caractérisent complètement.

Je rappelle tout d'abord les principes fondamentaux de la théorie des erreurs (¹). Lorsque plusieurs mesures d'une quantité inconnue semblent mériter la même confiance, on adopte comme résultat définitif la moyenne des valeurs trouvées. Gauss, en admettant que cette moyenne est la valeur la plus probable, a démontré que la probabilité d'une erreur comprise entre z et $z + dz$ est

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2} dz.$$

Ce résultat a été fort discuté et les objections qu'on lui oppose ne peuvent être réfutées, mais, ce qui est capital pour les considérations qui vont suivre, l'expérience le confirme. Je vais l'appliquer aux résultats obtenus plus haut.

Je reprends le polygone de fréquence obtenu en mesurant la longueur des épis de blés; l'épi type a une longueur b , moyenne des résultats obtenus; chaque épi donne une détermination approchée du nombre b ; la probabilité pour qu'elle soit comprise entre $b + z$ et

(¹) BERTRAND, *Calcul des probabilités*, chap. VIII.

$b + z + dz$ est, d'après le résultat de Gauss que je viens de rappeler,

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2} dz.$$

Soient n le nombre total des épis, y le nombre de ceux qui appartiennent à la classe limitée par $b + z$ et $b + z + dz$; on a, par définition,

$$\frac{y}{n} = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2} dz.$$

Si les classes sont désignées par les entiers consécutifs, dz est égal à l'unité et le polygone de fréquence a ses ordonnées égales à celles de la courbe

$$y = n \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 (x-b)^2},$$

qui correspondent à des valeurs entières de x .

On écrit généralement l'équation de cette courbe sous la forme

$$y = \frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}.$$

C'est la courbe normale (normal curve). On peut l'employer pour interpoler les résultats obtenus, ou par approximation la substituer au polygone des trapèzes.

Elle dépend de deux constantes qui caractérisent les matériaux étudiés.

La constante b est la moyenne (average, mean) désignée plus souvent par A ; c'est l'abscisse du centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe et Ox . Pour un polygone de fréquence, si l'on suppose la masse concentrée le long de chaque ordonnée, on a

$$A = \frac{\sum V f}{n}.$$

On distingue aussi, dans le cas général, le mode (mode) désigné par M : c'est la classe qui a la plus grande fréquence; la grandeur moyenne ou médiane (median); c'est la valeur de l'abscisse telle

que l'ordonnée correspondante partage en deux parties égales l'aire comprise entre Ox et le polygone des rectangles ou entre Ox et la courbe.

La constante σ porte le nom d'*indice de variabilité* ou de *déviatiou type* (index of variability, standard deviation). Pour la calculer, je prends la courbe normale sous la forme simplifiée

$$y = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

et je considère l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} yx^2 dx &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{yx}{\sigma^2}\right) (-\sigma^2 x) dx \\ &= \int_0^{\infty} y'(-\sigma^2 x) dx = (-\sigma^2 xy)_0^{\infty} + \int_0^{\infty} y\sigma^2 dx = \frac{n\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

On aura une valeur approchée du double de cette intégrale pour un polygone donné en calculant

$$\Sigma(x-b)^2 f,$$

d'où la formule

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-b)^2 f}{n}} \quad (1).$$

Si la grandeur de la classe comprend λ unités, on a

$$\sigma = \lambda \sqrt{\frac{\Sigma(x-b)^2 f}{n}}.$$

La courbe normale est synétrique par rapport à son ordonnée moyenne, s'abaisse de part et d'autre, présente deux points d'inflexion à la distance σ de cette ordonnée et devient asymptote à Ox . L'aire comprise entre la courbe et l'axe Ox est égale à n .

En général, l'étude de matériaux quelconques ne conduit pas nécessairement à une courbe normale, comme je l'expliquerai plus loin; on peut se rendre compte de la confiance à accorder aux calculs en se

(1) Voir au Chapitre III d'autres formules.

servant des formules

$$\Sigma(x - b)^4 f = 3 n \sigma^4, \quad \dots$$

Les valeurs de σ ainsi obtenues doivent être concordantes.

Pour rendre comparables les valeurs de σ obtenues dans différents cas, on introduit le coefficient de variabilité

$$C = \frac{\sigma}{A} 100.$$

CHAPITRE II.

COURBES GÉNÉRALES DE FRÉQUENCE.

La courbe normale doit être considérée seulement comme une première approximation. Sans parler des objections qui ont été faites à la méthode même de Gauss, il peut d'abord paraître que c'est une interpolation un peu osée de représenter des observations en nombre fini donnant des résultats finis par une courbe qui s'étend à l'infini. Mais, surtout, il y a des résultats statistiques qui ne peuvent certainement pas être représentés par la courbe normale; par exemple, les Tables de mortalité conduisent à des polygones nettement dissymétriques.

Ces considérations ont conduit le professeur Pearson à construire d'autres courbes de fréquence qui lui ont paru suffire à tous les usages.

Le premier type de courbe dérive du polygone binominal (point binominal). On l'obtient en prenant

$$x_r = rc, \quad y_r = \frac{\alpha}{c} \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!} p^{n-r+1} q^{r-1} \quad (p+q=1).$$

On voit que y_r est le $r^{\text{ième}}$ terme du développement du binôme $\frac{\alpha}{c}(p+q)^n$, d'où le nom du polygone.

Par exemple, en prenant

$$x_r = r, \quad y_r = \alpha \frac{12 \cdot 11 \dots (14-r)}{(r-1)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{13-r} \left(\frac{1}{3}\right)^{r-1},$$

on obtient les points (j'ai fait $\alpha = 3^{12}$ pour avoir des ordonnées en-

tières)

| | | | | | |
|----------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|------------|
| $x = 1,$ | $y = 4\ 096,$ | $x = 6,$ | $y = 101\ 376,$ | $x = 11,$ | $y = 264,$ |
| $x = 2,$ | $y = 24\ 576,$ | $x = 7,$ | $y = 59\ 136,$ | $x = 12,$ | $y = 24,$ |
| $x = 3,$ | $y = 67\ 584,$ | $x = 8,$ | $y = 25\ 344,$ | $x = 13,$ | $y = 1.$ |
| $x = 4,$ | $y = 112\ 640,$ | $x = 9,$ | $y = 7\ 920,$ | | |
| $x = 5,$ | $y = 126\ 720,$ | $x = 10,$ | $y = 1\ 760,$ | | |

Ils donnent un polygone nettement dissymétrique. On les obtient dans le problème suivant (1) :

Étant donnée une urne contenant des boules parmi lesquelles les $\frac{2}{3}$ sont blanches et les autres noires, la probabilité est $\frac{2}{3}$ pour que je tire une blanche, $\frac{1}{3}$ pour que je tire une noire. Je fais alors une série de 12 tirages en remettant à chaque fois la boule tirée; la probabilité pour que, dans cette série, il y ait $r - 1$ boules noires, est $\frac{y_r}{\alpha}$.

Je vais présenter ces mêmes faits d'une façon un peu différente :

Étant donnée cette urne qui contient des boules blanches et des boules noires dans une proportion inconnue, je veux déterminer le rapport des nombres de boules de chaque espèce, c'est-à-dire le rapport $\frac{p}{q}$; je fais pour cela des séries de n tirages successifs en remettant à chaque fois la boule tirée et je compte dans chaque série le nombre de boules noires que je désigne par $r - 1$. J'obtiens ainsi une valeur approchée $\frac{n - r + 1}{r - 1}$ du rapport $\frac{p}{q}$. Après avoir tiré un grand nombre de séries, je construis un polygone de fréquence pour représenter les résultats en portant en abscisses les nombres de boules noires et en ordonnées le nombre de séries correspondant. Ce polygone expérimental, d'après le théorème de Bernoulli, se rapproche du polygone théorique

$$x_r = rc, \quad y_r = \frac{\alpha}{c} \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!} p^{(n-r+1)} q^{(r-1)},$$

où c désigne une longueur prise pour unité et α l'aire comprise entre le polygone et Ox , ou bien le nombre de séries tirées.

(1) BERTRAND, *loc. cit.*, chap. IV.

Ces expériences conduisent donc à un polygone dissymétrique. Si le nombre de boules blanches était égal au nombre de boules noires, on aurait $p = q$ et le polygone serait symétrique. Dans ce cas, on démontre, en supposant n grand, que, au voisinage du maximum, le polygone se rapproche d'une courbe normale. Pearson remarque que cette analogie est beaucoup plus profonde; le calcul qui suit va le démontrer.

Je reprends le polygone

$$x_r = rc, \quad y_r = \frac{\alpha}{c} \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!} p^{n-r+1} q^{r-1},$$

et je considère la pente de la droite qui va du point x_r, y_r au point x_{r+1}, y_{r+1} ; c'est $\frac{y_{r+1} - y_r}{c}$; en divisant par l'ordonnée moyenne, j'obtiens

$$\frac{y_{r+1} - y_r}{\frac{1}{2}(y_{r+1} + y_r)c} = \frac{2}{c} \frac{(n+1)q - r}{(n+1)q + (p-q)r}.$$

En posant

$$\lambda = \frac{q}{p}, \quad x_{r+\frac{1}{2}} = c\left(r + \frac{1}{2}\right),$$

il vient

$$\frac{y_{r+1} - y_r}{\frac{1}{2}(y_{r+1} + y_r)c} = \frac{2}{c} \frac{\lambda(n+1) - (1+\lambda)r}{\lambda(n+1) + (1-\lambda)r} = \frac{2}{c} \frac{\lambda(n+1) - (1+\lambda)\left(\frac{x_{r+\frac{1}{2}}}{c} - \frac{1}{2}\right)}{\lambda(n+1) - (1-\lambda)\left(\frac{x_{r+\frac{1}{2}}}{c} - \frac{1}{2}\right)}.$$

Je change d'origine en posant

$$\begin{aligned} x'_{r+\frac{1}{2}} &= x_{r+\frac{1}{2}} - c\left[\frac{1}{2} + q(n+1)\right], \\ \frac{y_{r+1} - y_r}{\frac{1}{2}(y_{r+1} + y_r)c} &= \frac{2}{c} \frac{-\frac{1+\lambda}{c} x'_{r+\frac{1}{2}}}{\frac{1-\lambda}{c} x'_{r+\frac{1}{2}} + \frac{2\lambda}{1+\lambda}(n+1)} \\ &= -\frac{x'_{r+\frac{1}{2}}}{\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{c}{2} x'_{r+\frac{1}{2}} + \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} c^2 (n+1)} \\ &= -\frac{x'_{r+\frac{1}{2}}}{(p-q)\frac{c}{2} x'_{r+\frac{1}{2}} + pq(n+1)c^2}. \end{aligned}$$

Si les ordonnées du polygone sont rapprochées, le polygone des trapèzes est approximativement une courbe pour laquelle on a

$$\frac{\text{pente}}{\text{ordonnée}} = \frac{-\gamma \times \text{abscisse}}{a + \text{abscisse}}$$

avec

$$\gamma = \frac{2}{(p-q)c}, \quad a = \frac{2pq(n+1)c}{p-q}.$$

Si $p = q$, on obtient

$$\frac{\text{pente}}{\text{ordonnée}} = -\frac{\text{abscisse}}{\sigma^2}$$

avec

$$\sigma^2 = \frac{(n+1)c^2}{4}.$$

Or, pour la courbe

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = -y \frac{x}{\sigma^2},$$

$$\frac{\text{pente}}{\text{ordonnée}} = -\frac{\text{abscisse}}{\sigma^2}.$$

C'est la même relation.

Un exemple numérique montrera davantage combien le polygone binominal et la courbe normale sont voisins.

Soient le polygone binominal obtenu en posant

$$c = 1, \quad p = q = \frac{1}{2}, \quad a = 2^{12}, \quad n = 12,$$

et la courbe normale de même aire avec $\sigma^2 = \frac{13}{4}$.

Les valeurs correspondantes des ordonnées sont :

| Abscisse. | Polygone. | Courbe. |
|-----------|-----------|---------|
| 0 | 924 | 906,4 |
| 1 | 792 | 777,1 |
| 2 | 495 | 489,8 |
| 3 | 220 | 226,9 |
| 4 | 66 | 77,3 |
| 5 | 12 | 19,3 |
| 6 | 1 | 3,5 |
| 7 | 0 | » |

Je reviens au polygone dissymétrique qui conduit à l'équation

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{-\gamma x}{x+a}.$$

En intégrant, on a

$$Ly = -\gamma x + \gamma a L\left(1 + \frac{x}{a}\right) + Ly_0,$$

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}.$$

Je vais étudier cette courbe en supposant que les constantes peuvent prendre des valeurs quelconques.

La constante a peut être supposée positive; si elle ne l'est pas, on la change de signe en même temps que x et γ , la courbe reste la même; de même y_0 peut être supposée positive. Il y a donc deux types :

1° $\gamma > 0$. On doit avoir

$$1 + \frac{x}{a} > 0, \quad x > -a.$$

Il y a un maximum pour $x = 0$; Ox est asymptote. La tangente au point ($x = -a, y = 0$) dépend des valeurs des constantes.

2° $\gamma < 0$. Il existe un minimum pour $x = 0$; $x = -a$ est asymptote et il y a une branche parabolique. Pour l'objet des recherches actuelles, ce type ne peut être considéré, l'aire comprise entre la courbe et Ox étant infinie.

On obtient ainsi une courbe limitée d'un seul côté; pour obtenir d'autres courbes parmi lesquelles certaines seront limitées des deux côtés, il suffit de changer un peu les données de l'expérience décrite plus haut; l'urne contient N boules blanches et noires, je tire une série de n boules sans les remettre, la probabilité pour que parmi elles il y ait $r - 1$ boules noires est

$$\frac{(Np - r + 2)(Np - r + 3) \dots Np(Nq - n + r)(Nq - n + r + 1) \dots Nq.1.2 \dots n}{(N - n + 1)(N - n + 2) \dots N.1.2 \dots (n - r + 1).1.2 \dots (r - 1)}.$$

Comme précédemment, je fais de nombreuses séries de n tirages et je représente les résultats obtenus par un polygone de fréquence; il se

rapprochera du polygone de fréquence

$$x_s = sc, \quad y_s = \frac{(Np - n + s)(Np - n + s + 1) \dots Np(Nq - s + 2) \dots Nq \dots n!}{N(N-1) \dots (N-n+1)(s-1)!(n-s+1)!},$$

obtenu en posant

$$s = n + 2 - r.$$

J'applique à ce polygone la méthode exposée plus haut :

$$\begin{aligned} \frac{y_{s+1}}{y_s} &= \frac{Nq - s + 1}{Np - n + s} \frac{n + 1 - s}{s}, \\ \frac{y_{s+1} - y_s}{\frac{1}{2}(y_{s+1} + y_s)c} &= \frac{2}{c} \frac{(Nq - s + 1)(n - s + 1) - (Np - n + s)s}{(Nq - s + 1)(n - s + 1) + (Np + s - r)s} \\ &= \frac{2}{c} \frac{(n + 1)(Nq + 1) - s(N + 2)}{(n + 1)(Nq + 1) - s[2(n + 1) + N(q - p)] + 2s^2}; \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} x_{s+\frac{1}{2}} &= c \left(s + \frac{1}{2} \right), \quad x'_{s+\frac{1}{2}} = x_{s+\frac{1}{2}} - c \left[\frac{1}{2} + \frac{(n + 1)(Nq + 1)}{N + 2} \right], \\ \frac{y_{s+1} - y_s}{\frac{1}{2}(y_{s+1} + y_s)c} &= \frac{2}{c} \frac{(n + 1)(Nq + 1) - \left(\frac{x_{s+\frac{1}{2}}}{c} - \frac{1}{2} \right)(N + 2)}{(n + 1)(Nq + 1) - \left(\frac{x_{s+\frac{1}{2}}}{c} - \frac{1}{2} \right)[2(n + 1) + N(q - p)] + 2 \left(\frac{x_{s+\frac{1}{2}}}{c} - \frac{1}{2} \right)^2}; \end{aligned}$$

d'où, en posant

$$\beta_1 = \frac{c^2(n + 1)(N - n + 1) + (Np + 1)(Nq + 1)}{(N + 2)^2},$$

$$\beta_2 = \frac{cN(N - 2n)(p - q)}{2(N + 2)^2},$$

$$\beta_3 = \frac{1}{N + 2},$$

$$\frac{y_{s+1} - y_s}{\frac{1}{2}(y_{s+1} + y_s)c} = \frac{-x'_{s+\frac{1}{2}}}{\beta_1 + \beta_2 x'_{s+\frac{1}{2}} + \beta_3 x'^2_{s+\frac{1}{2}}}.$$

Ceci nous conduit donc à considérer la courbe dont la loi de pente est donnée par la formule

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2}.$$

Cette loi contient les deux précédentes comme cas particuliers.

Pour l'intégration de cette équation, trois cas sont à distinguer :

Premier cas :

$$\beta_2^2 < 4\beta_1\beta_3.$$

$$Ly = C - \frac{1}{2\beta_3} L(\beta_3 x^2 + \beta_2 x + \beta_1) + \frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{1}{\sqrt{4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}} \operatorname{arc tang} \frac{2\beta_3 x + \beta_2}{\sqrt{4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}}.$$

En remplaçant $x + \frac{\beta_2}{\beta_3}$ par x et posant

$$a = \frac{\sqrt{4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}}{2\beta_3} = \frac{c}{4} \sqrt{4(Np+1)(Nq+1) - (N-2n)^2},$$

$$m = \frac{1}{2\beta_3} = \frac{N+2}{2},$$

$$\nu = \frac{\beta_2}{\beta_3 \sqrt{4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}} = \frac{N(N-2n)(p-q)}{\sqrt{4(Np+1)(Nq+1) - (N-2n)^2}},$$

on obtient la courbe

$$y = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^m} e^{\nu \operatorname{arc tang} \frac{x}{a}}.$$

La courbe ainsi obtenue est dissymétrique, illimitée dans les deux sens. La constante y_0 peut être prise positive; si a est négatif, on le change de signe en même temps que x ; il en est de même si ν est négatif. Enfin, on doit supposer m positif pour que l'aire soit finie. Dans ces conditions, il y a un maximum pour $x = 0$ et Ox est asymptote.

Si $N = \frac{n}{2}$ ou bien si $p = q$, la courbe se réduit à

$$y = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^m};$$

elle est symétrique et analogue à la courbe normale.

Deuxième cas :

$$\beta_2^2 > 4\beta_1\beta_3.$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-x dx}{\beta_3(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{-dx}{\beta_3(a_1-a_2)} \left(\frac{a_1}{x-a_1} - \frac{a_2}{x-a_2} \right),$$

ou, en posant

$$\frac{1}{y} = \beta_3(a_1 - a_2),$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-\nu dx}{\frac{x}{a_1} - 1} + \frac{\nu dx}{\frac{x}{a_2} - 1}.$$

La primitive de $\frac{dx}{x-a}$ étant aussi bien $L(x-a)$ que $L(a-x)$, il y a quatre équations possibles :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1 \right)^{-\nu a_1} \left(\frac{x}{a_2} - 1 \right)^{\nu a_2}, \\ \text{(II)} \quad & y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1} \right)^{-\nu a_1} \left(\frac{x}{a_2} - 1 \right)^{\nu a_2}, \\ \text{(III)} \quad & y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1 \right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{\nu a_2}, \\ \text{(IV)} \quad & y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1} \right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{\nu a_2}. \end{aligned}$$

On peut toujours supposer $0 < a_1 < a_2$ ou bien $a_1 < 0 < a_2$, car, si a_1 et a_2 sont négatifs, on les change de signe et en même temps x et ν . On obtient ainsi les types de courbes suivants :

1° $a_1 < 0 < a_2, \nu > 0$. Équation IV : x reste compris entre a_1 et a_2 ; il y a un maximum pour $x = 0$. Les points $x = a_1, y = 0$; $x = a_2, y = 0$ sont deux points d'arrêt.

2° $a_1 < 0 < a_2, \nu < 0$. Équation II : x est supérieur à a_2 ; $x = a_2$ et $y = 0$ sont deux asymptotes.

3° $a_1 < 0 < a_2, \nu < 0$. Équation III : x est inférieur à a_1 ; $x = a_1$ et $y = 0$ sont deux asymptotes.

4° $a_1 < 0 < a_2, \nu < 0$. Équation IV : x est compris entre a_1 et a_2 ; il y a un minimum pour $x = 0$; $x = a_1$ et $x = a_2$ sont deux asymptotes.

5° $0 < a_1 < a_2, \nu > 0$. Équation III : x est compris entre a_1 et a_2 ; $x = a_1$ est une asymptote; $x = a_2, y = 0$ est un point d'arrêt.

6° $0 < a_1 < a_2, \nu < 0$. Équation I : x est supérieur à a_2 ; $x = a_2$ et $y = 0$ sont deux asymptotes.

7° $0 < a_1 < a_2, \nu < 0$. Équation III : x est compris entre a_1 et a_2 ; $x = a_2$ est une asymptote; $x = a_1, y = 0$ est un point d'arrêt.

8° $0 < a_1 < a_2, \nu < 0$. Équation IV : x est inférieur à a_1 ; il y a un maximum pour $x = 0; y = 0$ est une asymptote; $x = a_1, y = 0$ est un point d'arrêt.

Les autres types de courbes possibles, au nombre de quatre, ne doivent pas être considérés ici, leurs aires étant infinies.

Cas particulier. — $a_2 = +\infty$. Le dernier facteur devient une exponentielle, et les courbes 1° et 4° deviennent les courbes obtenues à partir du polygone binominal.

$a_1 + a_2 = 0$. Les courbes 1° et 4° deviennent symétriques.

Troisième cas :

$$\beta_2^2 = 4\beta_1\beta_3.$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-x dx}{\beta_3(x-a)^2} = \frac{-dx}{\beta_3 a} \left[\frac{1}{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2} + \frac{1}{\frac{x}{a} - 1} \right].$$

En posant

$$\frac{1}{\nu} = \beta_3 a,$$

on a deux équations possibles :

$$(I) \quad y = y_0 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^{-\nu a} e^{\frac{\nu a}{a} \frac{x}{a} - 1},$$

$$(II) \quad y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{-\nu a} e^{\frac{\nu a}{a} \frac{x}{a} - 1}.$$

On peut supposer a et y_0 positifs; ν ne peut être négatif et l'on a ainsi deux courbes :

I. x est plus grand que a ; $x = a$ et $y = 0$ sont deux asymptotes.

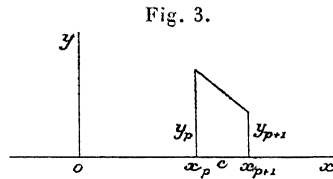
II. x est plus petit que a ; il y a un maximum pour $x = 0; y = 0$ est une asymptote; $x = a, y = 0$ est un point d'arrêt.

CHAPITRE III.

REPRÉSENTATION D'UN POLYGONE EXPÉRIMENTAL PAR UNE COURBE.

Le problème consiste, étant donné un polygone fourni par l'observation, à trouver une courbe qui s'en rapproche autant que possible.

Pearson a choisi pour cela la méthode suivante : on calcule pour la courbe les intégrales $\int yx^n dx$; ce sont les $n^{\text{ièmes}}$ moments de la courbe par rapport à Oy ; on en détermine des valeurs approchées à l'aide des



données expérimentales et, en les égalant aux valeurs théoriques, on obtient des équations qui permettent de calculer les constantes de la courbe.

Je m'occupe d'abord de la détermination des valeurs approchées des intégrales.

Soient y_1, y_2, \dots, y_n les fréquences. Je construis les points

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0; \quad x_1 = c, \quad y = y_1; \quad x_2 = 2c, \quad y = y_2, \quad \dots,$$

et je cherche la valeur de $\int yx^n dx$ pour le trapèze de côtés $y = 0$, $x = x_p$, $x = x_{p+1}$, ces deux derniers ayant pour longueur y_p et y_{p+1} :

$$\begin{aligned} \int_{x_p}^{x_{p+1}} yx^n dx &= \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left[y_{p+1} + (x - x_{p+1}) \frac{y_p - y_{p+1}}{x_p - x_{p+1}} \right] x^n dx \\ &= \frac{y_p - y_{p+1}}{x_p - x_{p+1}} \frac{x_{p+1}^{n+2} - x_p^{n+2}}{n+2} + \frac{x_p y_{p+1} - x_{p+1} y_p}{x_p - x_{p+1}} \frac{x_{p+1}^{n+1} - x_p^{n+1}}{n+1} \\ &= y_{p+1} \left[\frac{x_{p+1}^n}{2!} - \frac{n}{3!} x_{p+1}^{n-1} c^2 + \frac{n(n-1)}{4!} x_{p+1}^{n-2} c^3 - \dots \right] \\ &\quad + y_p \left[\frac{x_p^n c}{2!} + \frac{n}{3!} x_p^{n-1} c^2 + \frac{n(n-1)}{4!} x_p^{n-2} c^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

M'_n désignant la valeur approchée du $n^{\text{ième}}$ moment du polygone

$$M'_n = \sum_r 2y_r \left[\frac{r^n c^{n+1}}{2!} + \frac{n(n-1)}{4!} r^{n-2} c^{n+1} + \dots \right],$$

en posant

$$N'_s = \sum_r y_r r^s,$$

on a

$$\begin{aligned} M_0 &= cN'_0, & M_1 &= c^2N'_1, & M_2 &= c^3\left(N'_2 + \frac{1}{6}N'_0\right), & M_3 &= c^4\left[N'_3 + \frac{1}{2}N'_1\right], \\ M_4 &= c^5\left(N'_4 + N'_2 + \frac{1}{15}N'_0\right), & M_5 &= c^6\left(N'_5 + \frac{5}{3}N'_3 + \frac{1}{3}N'_1\right), \\ M_6 &= c^7\left(N'_6 + \frac{5}{2}N'_4 + N'_2 + \frac{1}{28}N'_0\right), \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\mu'_s = \frac{M'_s}{M'_0}, \quad \nu'_s = \frac{N'_s}{N'_0},$$

les μ'_s et les ν'_s sont liés par des relations analogues.

Il est important pour ce qui va suivre de rapporter les polygones à un nouvel axe Oy mené par le centre de gravité de leur aire et de calculer les moments par rapport à cet axe.

Soient $d = qc$ l'abscisse du nouvel axe et M_n les nouveaux moments ; on a

$$M_n = \int y(x-d)^n dx = M'_n - n d M'_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 M'_{n-2}.$$

En particulier M_1 est nul, d'où

$$M'_1 - dM'_0 = 0, \quad d = \frac{M'_1}{M'_0} = \mu'_1 = c\nu'_1, \quad q = \nu'_1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu'_2 - \mu'^2_1 = c^2\left(\nu'_2 - \nu'^2_1 + \frac{1}{6}\right), \\ \mu_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu'^3_1 = c^3(\nu'_3 - 3\nu'_1\nu'_2 + 2\nu'^3_1), \\ \mu_4 &= \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'^2_1\mu'_2 - 3\mu'^4_1 \\ &= c^4\left(\nu'_4 - 4\nu'_1\nu'_3 + 6\nu'^2_1\nu'_2 - 3\nu'^4_1 + \nu'_2 - \nu'^2_1 + \frac{1}{15}\right), \\ \mu_5 &= \mu'_5 - 5\mu'_1\mu'_4 + 10\mu'^2_1\mu'_3 - 10\mu'^3_1\mu'_2 + 4\mu'^5_1 \\ &= c^5\left(\nu'_5 - 5\nu'_1\nu'_4 + 10\nu'^2_1\nu'_3 - 10\nu'^3_1\nu'_2 + 4\nu'^5_1 + \frac{5}{3}\nu'_3 - 5\nu'_2\nu'_1 + \frac{10}{3}\nu'^3_1\right), \\ \mu_6 &= c^6\left(\nu'_6 - 6\nu'_1\nu'_5 + 15\nu'^2_1\nu'_4 - 20\nu'^3_1\nu'_3 + 15\nu'^4_1\nu'_2 \right. \\ &\quad \left. - 5\nu'^6_1 + \frac{5}{2}\nu'_4 - 10\nu'_1\nu'_3 + 15\nu'^2_1\nu'_2 + 5\nu'^4_1 + \nu'_2 - \nu'^2_1 + \frac{1}{28}\right). \end{aligned}$$

Je vais maintenant calculer les valeurs des moments pour les types de courbes trouvés plus haut.

Type 1° du deuxième cas :

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}, \quad a_1 < 0 < a_2, \quad \nu > 0, \quad a_1 < x < a_2.$$

Je pose

$$a_1 = -a'_1, \quad a'_1 + a_2 = b, \quad m_1 = \nu a'_1, \quad m_2 = \nu a_2, \quad z = \frac{a'_1 + x}{b},$$

$$k = \frac{y_0 (a'_1 + a_2)^{m_1 + m_2}}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}};$$

il vient

$$y = k z^{m_1} (1 - z)^{m_2}.$$

Soient α l'aire comprise entre la courbe et l'axe Ox , $\alpha \mu'_n$ le $n^{\text{ième}}$ moment par rapport à $x = -a$:

$$\begin{aligned} \alpha \mu'_n &= \int_0^b y (x + a_2)^n dx = b^{n+1} k \int_0^1 z^{m_1 + n} (1 - z)^{m_2} dz \\ &= b^{n+1} k B(m_1 + n + 1, m_2 + 1) \quad (1) \\ &= b^{n+1} k \frac{\Gamma(m_1 + n + 1) \Gamma(m_2 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + n + 2)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha = bk \frac{\Gamma(m_1 + 1) \Gamma(m_2 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + 2)},$$

$$\mu'_1 = \frac{b(m_1 + 1)}{m_1 + m_2 + 2}, \quad \mu'_2 = \frac{b^2(m_1 + 1)(m_1 + 2)}{(m_1 + m_2 + 2)(m_1 + m_2 + 3)}, \quad \dots$$

Pour simplifier, je prends

$$m'_1 = m_1 + 1, \quad m'_2 = m_2 + 1, \quad m'_1 + m'_2 = r.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{b^2 m'_1 m'_2}{r^2 (r + 1)}, \\ \mu_3 &= \frac{2 b^3 m'_1 m'_2 (m'_2 - m'_1)}{r^3 (r + 1) (r + 2)}, \\ \mu_4 &= \frac{3 b^4 m'_1 m'_2 [m'_1 m'_2 (r - 6) + 2 r^2]}{r^4 (r + 1) (r + 2) (r + 3)}. \end{aligned}$$

(1) Voir GOURSAT, *Analyse*, t. I, p. 314.

La méthode de comparaison permet alors de trouver b , m'_1 et m'_2 .

Je pose

$$\alpha_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \quad \rho = m'_1 m'_2,$$

et j'obtiens les équations

$$\alpha_1 = \frac{4(r^2 - 4\rho)(r+1)}{\rho(r+2)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{3(r+1)[\rho(r-6) + 2r^2]}{\rho(r+2)(r+3)},$$

qui s'écrivent

$$\frac{\alpha_1(r+2)^2}{4(r+1)} = \frac{r^2}{\rho} - 4, \quad \alpha_2 \frac{(r+2)(r+3)}{3(r+1)} = \frac{2r^2}{\rho} + r - 6$$

et donnent

$$r = \frac{6(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)}{3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6}, \quad \rho = \frac{4r^2(r+1)}{\alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1)}.$$

D'autre part,

$$b^2 = \frac{\mu_2 r^2 (r+1)}{\rho}.$$

On peut ainsi, en fonction des données expérimentales qui fournissent α_1 et α_2 , calculer r puis ρ , ce qui donne m'_1 et m'_2 ; on a ensuite b qui conduit à $v = \frac{r-2}{b}$. Les constantes de la courbe sont ainsi connues.

Si l'on connaît une des limites, il est clair que le calcul se simplifie; la simplification est encore plus grande si l'on connaît les deux limites. Je ne m'arrêterai pas à ces calculs (1) et je vais discuter les résultats obtenus.

Dans le cas actuel, on a $m_1 > 0$, $m_2 > 0$; donc $r > 2$; d'autre part, α_1 étant certainement positif, on a $r^2 - 4\rho > 0$; par conséquent, m'_1 et m'_2 existent; chacun d'eux doit être supérieur à 1, ce qui donne

$$r > 2, \quad 1 - r + \rho > 0.$$

L'étude des trois autres courbes limitées va permettre d'interpréter ces conditions.

(1) Voir PEARSON, *loc. cit.*, p. 370.

Type 4° du deuxième cas :

$$y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1 \right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{\nu a_2}, \quad a_1 < 0 < a_2, \quad \nu < 0, \quad a_1 < x < a_2.$$

Je pose

$$a = -a'_1, \quad a'_1 + a_2 = b, \quad \nu = -\nu', \quad m_1 = -\nu' a'_1, \quad m_2 = -\nu' a_2,$$

$$z = \frac{a'_1 + x}{b},$$

$$k = \frac{y_0 (a'_1 + a_2)^{m_1 m_2}}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}};$$

il vient

$$y = k z^{m_1} (1 - z)^{m_2}.$$

Un calcul tout à fait analogue à celui qui a déjà été fait conduit aux mêmes équations pour calculer m'_1 et m'_2 .

Ces deux quantités étant comprises entre 0 et 1, on a les conditions

$$r^2 - 4\rho > 0, \quad 0 < r < 2, \quad \rho > 0, \quad 1 - r + \rho > 0.$$

D'ailleurs $r^2 - 4\rho > 0$ est contenu dans $r > 0$ et d'après sa forme ρ est certainement positif; ν est donné par $\nu = \frac{r-2}{b}$, valeur qui est bien négative.

Type 5° du deuxième cas :

$$y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1 \right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{\nu a_2}, \quad 0 < a_1 < a_2, \quad \nu > 0.$$

Je pose

$$a_2 - a_1 = b, \quad m_1 = -\nu a_1, \quad m_2 = \nu a_2, \quad z = \frac{x - a_1}{b},$$

$$k = \frac{y_0 (a_2 - a_1)^{m_1 + m_2}}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}},$$

$$y = k z^{m_1} (1 - z)^{m_2}.$$

Ici on a

$$0 < m'_1 < 1 < m'_2,$$

d'où

$$r > 0, \quad 1 - r + \rho < 0.$$

Les autres conditions sont satisfaites.

ν est donné par la formule générale; on a donc $r > 2$.

Type 7° :

$$y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1 \right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{\nu a_2}, \quad 0 < a_1 < a_2, \quad \nu < 0.$$

Le même changement de variables conduit aux conditions

$$r > 0, \quad 1 - r + \rho < 0, \quad r < 2.$$

Avant de résumer ces conditions où l'on a vu l'importance des valeurs de r , je vais faire une étude de la variation de cette quantité.

On a

$$r = \frac{6(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)}{3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6}.$$

Je représente les résultats dans un plan où sont tracés deux axes de coordonnées rectangulaires; α_1 et α_2 sont les coordonnées. On a $r = a$ pour tous les points situés sur la droite

$$6(\alpha_2 - \alpha_1 - 1) - a(3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6) = 0.$$

On sait que cette droite tourne dans le même sens lorsque a varie d'une façon continue. Je choisis quelques valeurs particulières de a :

$$\begin{array}{ll} a = -3, & 3\alpha_1 + 12 = 0, \\ a = -2, & 2\alpha_2 + 6 = 0, \\ a = 0, & \alpha_2 - \alpha_1 - 1 = 0, \\ a = 2, & 6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 = 0, \\ a = \infty, & 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 = 0. \end{array}$$

D'ailleurs α_1 et α_2 sont nécessairement positifs.

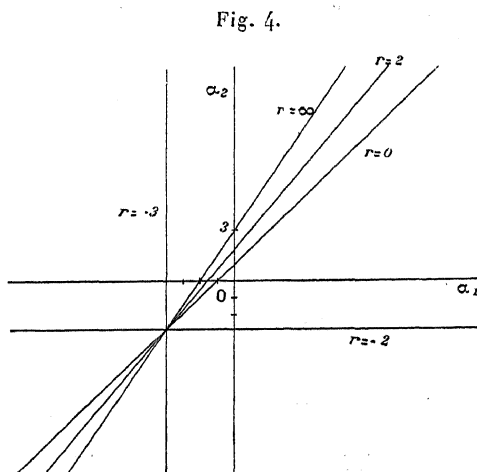
Le simple examen de la figure 4 montre que $r > 0$ entraîne

$$\alpha_2 - \alpha_1 - 1 > 0, \quad 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 > 0.$$

et l'on reconnaît les quatre types de la façon suivante :

- Types 1° : $6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 < 0, \quad \rho > r - 1;$
 » 2° : $6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 > 0, \quad \rho > r - 1;$
 » 5° : $6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 < 0, \quad \rho < r - 1;$
 » 7° : $6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 > 0, \quad \rho < r - 1.$

Cet ensemble d'inégalités caractérise les courbes limitées.



Je passe maintenant aux courbes limitées d'un seul côté; les types suivants ont été rencontrés.

Deuxième cas :

- 2° $y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1} \left(\frac{x}{a_2} - 1\right)^{\nu a_2}, \quad a_1 < 0 < a_2, \quad \nu < 0, \quad x > a_2,$
 3° $y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1\right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}, \quad a_1 < 0 < a_2, \quad \nu < 0, \quad x < a_1,$
 6° $y = y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1\right)^{-\nu a_1} \left(\frac{x}{a_2} - 1\right)^{\nu a_2}, \quad 0 < a_1 < a_2, \quad \nu < 0, \quad x > a_2,$
 8° $y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{\nu a_2}, \quad 0 < a_1 < a_2, \quad \nu < 0, \quad x > a_1.$

Troisième cas :

$$\text{I. } y = y_0 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^{-\nu a} e^{\frac{\nu x}{a}}, \quad x > a > 0, \quad \nu = 0.$$

$$\text{II. } y = y_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{-\nu a} e^{\frac{\nu x}{a}}, \quad x < a, \quad a > 0, \quad \nu > 0.$$

Courbe du binôme :

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}, \quad a > 0, \quad \gamma > 0, \quad x > -a.$$

La méthode employée est tout à fait analogue à celle qui vient d'être exposée.

Type 2° du deuxième cas. — Je pose

$$\begin{aligned} a_1 = -a'_1, \quad \nu = -\nu', \quad a'_1 + a_2 = b, \quad m_1 = -\nu' a'_1, \quad m_2 = -\nu' a_2, \\ 1 + m_1 = m'_1, \\ 1 + m_2 = m'_2, \\ r = m'_1 + m'_2, \end{aligned}$$

$$z = \frac{x - a_2}{x + a'_1}, \quad k = y_0 \frac{b^{m_1 + m_2}}{a_1^{m'_1} a_2^{m'_2}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} y &= \frac{k z^{m_2}}{(1-z)^{m_1 + m_2}}, \\ \alpha \mu'_n &= \int_{a_2}^{\infty} y (x - a_2)^n dx = k b^{n+1} \int_0^1 \frac{z^{m_2+n}}{(1-z)^{m_1 + m_2 + n + 2}} dz \\ &= k b^{n+1} B(m_2 + n + 1, -m_1 - m_2 - n - 1) \\ &= k b^{n+1} \frac{\Gamma(m_2 + n + 1) \Gamma(-m_1 - m_2 - n - 1)}{\Gamma(-m_1)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{b m'_2}{-r}, & \mu'_2 &= \frac{b^2 m'_2 (m'_2 + 1)}{r(r+1)}, \\ \mu'_3 &= \frac{b^3 m'_2 (m'_2 + 1) (m'_2 + 2)}{-r(r+1)(r+2)}, & \mu'_4 &= \frac{b^4 m'_2 (m'_2 + 1) (m'_2 + 2) (m'_2 + 3)}{r(r+1)(r+2)(r+3)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \frac{b^2 m'_1 m'_2}{r^2 (r+1)}, & \mu_3 &= \frac{2 b^3 m'_1 m'_2 (m'_2 - m'_1)}{r^3 (r+1) (r+2)}, \\ \mu_4 &= \frac{3 b^4 m'_1 m'_2 [m'_1 m'_2 (r-6) + 2r^2]}{r^4 (r+1) (r+2) (r+3)}.\end{aligned}$$

Le calcul se continue alors comme plus haut et conduit aux mêmes formules que je rappelle :

$$\begin{aligned}r = m'_1 + m'_2 &= \frac{6(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)}{3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6}, & \rho &= m'_1 m'_2 = \frac{4r^2 (r+1)}{\alpha_1 (r+2)^2 + 16(r+1)}, \\ b^2 &= \frac{\mu_2 r^2 (r+1)}{\rho}, & \nu &= \frac{r-2}{b}.\end{aligned}$$

Pour l'existence des quantités μ'_n , on doit avoir

$$m_2 + n + 1 > 0, \quad -r - n + 1 > 0, \quad -m_1 > 0,$$

c'est-à-dire

$$m'_1 < 1, \quad m'_2 > 0, \quad r < -3.$$

La première condition est obtenue indépendamment de n ; la seconde pour $n = 0$; elles sont essentielles pour la considération de cette courbe; au contraire, la troisième est obtenue pour $n = 4$; elle est imposée par la méthode employée (1). Je reviendrai d'ailleurs plus loin sur ce point.

La première condition est évidente d'après la valeur de m'_1 et l'on a de même $m'_2 < 1$, et, d'après la condition imposée à r , il est certain que m'_1 est négatif; donc ρ est négatif. Dans ces conditions, b^2 est positif et ν négatif, comme cela doit être.

On a donc, en se reportant à la variation de r , les conditions caractéristiques du cas actuel :

$$3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 < 0 \text{ exprime que } r \text{ est inférieur à } -3;$$

$\alpha_1 (r+2)^2 + 16(r+1) > 0$ exprime que ρ est négatif et que, par suite, m'_1 et m'_2 existent; enfin $\rho > r - 1$ exprime que m'_1 et m'_2 sont inférieurs à 1.

(1) Il était d'ailleurs bien certain que r devait être négatif, puisque le cas où r est positif a été complètement étudié plus haut; on peut ainsi justifier, indépendamment de la méthode employée, la condition énoncée quelques lignes plus bas : $\rho < 0$.

Type 3° du deuxième cas. — Je pose

$$x = -x', \quad a_1 = -a'_2, \quad a_2 = a'_1, \quad \nu = \nu',$$

et j'obtiens

$$y = y_0 \left(\frac{x'}{a'_2} - 1 \right)^{-\nu' a'_2} \left(1 + \frac{x}{a'_1} \right)^{-\nu' a'_1},$$

équation qui ne diffère pas de la précédente.

Type 6° du deuxième cas. — Je pose

$$\begin{aligned} \nu &= -\nu', & a_2 - a_1 &= b, & m_1 &= \nu' a_1, & m_2 &= -\nu' a_2, \\ z &= \frac{x - a_2}{x - a_1}, & k &= y_0 \frac{b^{m_1+m_2}}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}, \end{aligned}$$

et j'obtiens

$$y = \frac{k z^{m_2}}{(1-z)^{m_1+m_2}}.$$

Le calcul va se continuer comme ci-dessus; on devra, pour l'existence des quantités μ'_n , satisfaire aux mêmes conditions. Parmi elles, on trouve $m'_1 < 1$, ce qui est évidemment impossible. Cette courbe ne peut donc être considérée.

Type 8° du deuxième cas. — Je remplace x par $-x$ et je pose

$$\begin{aligned} a_1 &= a'_2, & a_2 &= a'_1, & \nu &= -\nu', & b &= a'_1 - a'_2, & m_1 &= -\nu' a'_1, & m_2 &= \nu' a'_2, \\ z &= \frac{x + a'_2}{x + a'_1}, & k &= y_0 \frac{b^{m_1+m_2}}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}, \end{aligned}$$

et j'obtiens

$$y = \frac{k z^{m_2}}{(1-z)^{m_1+m_2}}.$$

On a ici $m'_2 > 1$ et, comme r est toujours négatif, $m'_1 < 0$. Donc ρ est négatif. Les conditions suivantes caractérisent ce cas :

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 &< 0, \\ \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) &> 0, \\ \rho &< r-1. \end{aligned}$$

Type I du troisième cas. — Je pose

$$\nu a = m, \quad \frac{x}{a} - 1 = mz, \quad k = \frac{y_0}{m^m},$$

et j'obtiens

$$y = kz^{-m}e^{\frac{1}{z}}.$$

L'intégrale

$$\alpha = \int_a^\infty y dx = kam \int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{z}} dz}{z^m}$$

étant infinie, cette courbe ne peut être considérée.

Type II du troisième cas. — Je remplace x par $-x$ et je pose

$$m = \nu a, \quad \frac{x}{a} + 1 = mz, \quad k = \frac{y_0}{m^m}.$$

J'obtiens

$$y = \frac{k}{z^m e^{\frac{1}{z}}},$$

$$\alpha \mu'_n = k (ma)^{n+1} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{m-n} e^{\frac{1}{z}}}.$$

Cette intégrale existe si $m - n$ est supérieur à 1, donc si m est supérieur à 5.

En intégrant par parties, on a

$$\alpha \mu'_n = \frac{k (ma)^{n+1}}{m - n - 1} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{m-n+1} e^{\frac{1}{z}}} = \frac{ma \alpha \mu'_{n-1}}{(m - n - 1)^2};$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{ma}{(m-2)}, & \mu'_2 &= \frac{m^2 a^2}{(m-2)(m-3)}, \\ \mu'_3 &= \frac{m^3 a^3}{(m-2)(m-3)(m-4)}, & \mu'_4 &= \frac{m^4 a^4}{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}, \\ \mu_2 &= \frac{m^2 a^2}{(m-2)^2 (m-3)}, & \mu_3 &= \frac{4m^3 a^3}{(m-2)^3 (m-3)(m-4)}, \\ \mu_4 &= \frac{3(m+4)m^4 a^4}{(m-2)^4 (m-3)(m-4)(m-5)}, \\ \alpha_1 &= \frac{16(m-3)}{(m-4)^2}, & \alpha_2 &= \frac{3(m-3)(m+4)}{(m-4)(m-5)}. \end{aligned}$$

Une méthode analogue à celle qui a conduit au calcul de r donne

$$m - 2 = \frac{6(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)}{2\alpha_2 - 3\alpha_1 - 6}.$$

Par suite, la quantité désignée plus haut par $\alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1)$ est nulle et l'on a ainsi les caractéristiques de la courbe

$$3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 < 0, \quad \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) = 0.$$

Courbe du binome. — Je pose

$$\gamma a = m, \quad 1 + \frac{x}{a} = \frac{1}{mz}, \quad k = \frac{y_0 e^m}{m^m},$$

et j'obtiens

$$y = \frac{k}{z^m e^{\frac{1}{z}}},$$

$$\alpha \mu'_n = k \left(\frac{a}{m}\right)^{n+1} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{m+n+2} e^{\frac{1}{z}}} = \frac{m}{a} \frac{\alpha \mu_{n+1}}{m+n+1};$$

d'où

$$\mu'_1 = \frac{a}{m} (m+1),$$

$$\mu'_2 = \frac{a^2}{m^2} (m+1)(m+2),$$

$$\mu'_3 = \frac{a^3}{m^3} (m+1)(m+2)(m+3),$$

$$\mu'_4 = \frac{a^4}{m^4} (m+1)(m+2)(m+3)(m+4),$$

$$\mu_2 = \frac{a^2}{m^2} (m+1), \quad \mu_3 = \frac{2a^3}{m^3} (m+1), \quad \mu_4 = \frac{a^4}{m^4} (m+1).$$

La valeur de μ_2 , toujours positive, montre qu'on a $m+1 > 0$, condition nécessaire pour que les intégrales existent. On constatera que, dans le cas actuel, $3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6$ est nul; ceci caractérise la courbe étudiée.

J'arrive maintenant aux courbes illimitées dans les deux sens. Deux types ont été rencontrés :

Premier cas de l'équation complète

$$y = \frac{y_0}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^m} e^{\operatorname{arctang} \frac{x}{a}};$$

courbe normale

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Courbe du premier cas. — Pour calculer

$$\alpha \mu'_n = \int_{-\infty}^{+\infty} y x^n dx,$$

je pose

$$x = a \operatorname{tang} \theta, \quad r = 2(1 - m),$$

et j'obtiens

$$\alpha \mu'_n = y_0 a^{n+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{-n-r} \theta \sin^n \theta e^{\nu \theta} d\theta.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{-n-r} \theta \sin \theta d\theta \sin^{(n-1)} \theta e^{\nu \theta} \\ &= \frac{n-1}{-r-n+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{-n-r+2} \theta \sin^{n-2} \theta e^{\nu \theta} d\theta \\ &+ \frac{\nu}{-r-n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{-r-n+1} \theta \sin^{n-1} \theta e^{\nu \theta} d\theta. \end{aligned}$$

On a donc la formule de récurrence

$$\alpha \mu'_n = \frac{\alpha a}{1-n-r} [(n-1) \alpha \mu'_{n-2} + \nu \mu'_{n-1}].$$

Elle donne

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= -\frac{\alpha \nu}{r}, & \mu'_2 &= \frac{\alpha^2}{r(r+1)} (\nu^2 - r), & \mu'_3 &= \frac{-\alpha^3 \nu}{r(r+1)(r+2)} (\nu^2 - 3r - 2), \\ \mu'_4 &= \frac{\alpha^4 [3r(r+2) - \nu^2(6r+8) + \nu^4]}{r(r+1)(r+2)(r+3)}, \\ \mu_2 &= -\frac{\alpha^2(r^2 + \nu^2)}{r^2(r+1)}, & \mu_3 &= -\frac{4\alpha^3 \nu(r^2 + \nu^2)}{r^3(r+1)(r+2)}, \\ \mu_4 &= \frac{3\alpha^4(r^2 + \nu^2) [(r-6)(r^2 + \nu^2) + 8r^2]}{r^4(r+1)(r+2)(r+3)}, \\ \alpha_1 &= \frac{-16\nu^2(r+1)}{(r+2)^2(r^2 + \nu^2)}, & \alpha_2 &= \frac{3(r+1) [(r^2 + \nu^2)(r-6) + 8r^2]}{(r+2)(r+3)(r^2 + \nu^2)}. \end{aligned}$$

Ces dernières expressions ne sont pas différentes de celles qui ont été trouvées plus haut, si l'on remplace $r^2 + v^2$ par 4ρ . On a donc

$$r = \frac{6(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)}{3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6}, \quad r^2 + v^2 = \frac{r^2(r+1)}{\alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1)}, \quad a^2 = \frac{-\mu_2 r^2(r+1)}{r^2 + v^2}.$$

L'existence des quantités μ'_n exige $1 - n - r > 0$, $r < -3$; l'expression de $r^2 + v^2$ doit alors être positive; par conséquent, son dénominateur est négatif et a^2 est positif. On a donc comme inégalités caractéristiques

$$3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 < 0, \quad \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) < 0.$$

Pour calculer y_0 , on utilise la relation

$$\alpha = y_0 a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{-r} \theta e^{v\theta} d\theta.$$

Cette intégrale a été étudiée par Forsyth (*Quart. Journ.*, janv. 1895). J'arrive enfin à la courbe normale pour laquelle

$$\alpha \mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} y x^n dx = y_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

$$\alpha = y_0 \sigma \sqrt{2\pi}, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \sigma^2, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_4 = 3\sigma^4.$$

CONCLUSION.

Pour étudier une courbe expérimentale, on formera les quantités

$$\alpha_2 - \alpha_1 - 1, \quad 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6,$$

et, connaissant leurs signes, on trouvera la courbe théorique correspondante par le Tableau suivant (1) :

(1) J'ai mis dans toutes les équations de courbes les signes en évidence.

$$\begin{array}{ll}
 \alpha_2 - \alpha_1 - 1 > 0, & 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 > 0, & \text{Courbes limitées.} \\
 6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 < 0, & \rho > r - 1, & \text{Courbe ayant un maximum} \\
 6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 > 0, & \rho > r - 1, & \text{Courbe ayant un minimum}
 \end{array}$$

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1} \right)^{\nu\alpha_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{\nu\alpha_2};$$

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1} \right)^{-\nu\alpha_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{-\nu\alpha_2}.$$

Ces deux courbes sont symétriques et ont pour équation

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\pm\nu\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha_1 = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho < r - 1 \\ 6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 > 0, \end{array} \right\} \text{ Courbe ayant une asym-} \\
 \left. \begin{array}{l} \rho < r - 1 \\ 6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 > 0, \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 < 0. \end{array} \right\} \text{ ptote} \\
 \left. \begin{array}{l} \rho > r - 1 \\ \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) > 0, \end{array} \right\} \text{ Courbe ayant deux asym-} \\
 \left. \begin{array}{l} \rho < r - 1 \\ \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) > 0, \end{array} \right\} \text{ ptotes rectangulaires} \\
 \left. \begin{array}{l} \rho < r - 1 \\ \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) < 0, \end{array} \right\} \text{ Courbe ayant un maximum,} \\
 \left. \begin{array}{l} \rho < r - 1 \\ \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) < 0, \end{array} \right\} \text{ limitée d'un côté} \\
 \left. \begin{array}{l} \rho < r - 1 \\ \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) < 0, \end{array} \right\} \text{ Courbe ayant un maximum,} \\
 \left. \begin{array}{l} \rho < r - 1 \\ \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) < 0, \end{array} \right\} \text{ illimitée} \\
 \left. \begin{array}{l} \rho < r - 1 \\ \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) < 0, \end{array} \right\} e^{\nu \text{ arc tang } \frac{x}{a}}.$$

Cette courbe est symétrique et a pour équation

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{-m} \quad \text{si} \quad \alpha_1 = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) = 0 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 = 0, \end{array} \right\} \text{ Courbe ayant un maximum,} \\
 \left. \begin{array}{l} \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) = 0 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 = 0, \end{array} \right\} \text{ limitée d'un côté} \\
 \left. \begin{array}{l} \alpha_1(r+2)^2 + 16(r+1) = 0 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6 = 0, \end{array} \right\} \text{ Courbe du binome}$$

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{-\nu\alpha} e^{\frac{x}{a} + 1},$$

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{\nu\alpha} e^{-\gamma x}.$$

L'intermédiaire entre les deux courbes à maximum symétriques pour $\alpha_1 = 0$ est la courbe normale.

Ce Tableau présente encore des lacunes. Tout d'abord le cas où l'on a $\alpha_2 - \alpha_1 - 1 < 0$ n'est pas étudié. La méthode employée élimine, en effet, pour les courbes du n° II, les valeurs de r comprises entre 0 et -2 . Les formules générales peuvent peut-être s'étendre à ce cas. En pratique, il semble bien que ce cas ne puisse se présenter, les moments d'ordre supérieur à 1 ne pouvant être infinis.

D'autres lacunes sont apparentes. On n'a pas mentionné le cas $\rho = r - 1$; pour les courbes réunies sous le n° I et les deux premières du n° II, si ρ se rapproche de $r - 1$, α_1 se rapproche de zéro et les courbes obtenues pour $\alpha_1 = 0$ ne peuvent pas être considérées. On n'a pas mentionné également le cas où $6\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9 = 0$; si le premier membre tend vers zéro, r se rapproche de 2, ρ se rapproche de $\frac{3}{\alpha_1 + 3}$, valeur plus petite que $r - 1$; en même temps, α_1 se rapproche de α_2 et les deux dernières courbes du n° I disparaissent.

Les différents cas qui peuvent être rencontrés sont ainsi bien caractérisés. Les courbes obtenues paraissent satisfaire à tous les usages. Je signale particulièrement une représentation très approchée des Tables de mortalité par la combinaison de trois courbes. On la trouvera dans le Mémoire cité, avec des comparaisons entre la mortalité française et la mortalité anglaise déduites de cette représentation.