ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ELIE CARTAN

Les groupes de transformations continus, infinis, simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 93-161

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__93_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES

GROUPES DE TRANSFORMATIONS

CONTINUS, INFINIS, SIMPLES;

PAR E. CARTAN.

On sait quelle est l'importance des groupes simples dans les différentes applications qu'on peut faire de la théorie des groupes de transformations. En particulier, en ce qui concerne l'intégration des systèmes différentiels qui admettent un groupe de transformations continu G de structure connue (1), cette importance résulte des recherches déjà anciennes de S. Lie, et de celles, plus récentes, dues à M. Vessiot (2). L'intégration d'un système différentiel donné admettant le groupe G est, en effet, ramenée à celle d'un système *résolvant* dont la nature peut être quelconque, et à celle d'une suite de systèmes particuliers (systèmes *automorphes* de M. Vessiot) dont chacun correspond à l'un des groupes simples qui se présentent dans la décomposition du groupe G en une série normale de sous-groupes, et dont la nature ne dépend que de la structure du groupe simple considéré.

En ce qui concerne les groupes simples *finis*, leur détermination

---

(1) Cette structure est connue si l'on connaît les équations de définition des transformations finies du groupe.

(2) E. VESSIOT, *Sur l'intégration des systèmes différentiels, etc.* (*Acta Mathem.*, t. XXVIII, 1904, p. 307-349).

complète résulte des recherches de M. Killing ([1]), confirmées par les miennes ([2]); en dehors d'un nombre très restreint de groupes simples particuliers, tous les autres se partagent en quatre grandes classes, connues d'ailleurs depuis longtemps.

En ce qui concerne au contraire les groupes simples infinis, S. Lie en avait indiqué également quatre grandes classes, mais on ne savait s'il en existait d'autres; le problème paraissait difficile à aborder en l'absence de toute théorie précise sur la structure des groupes infinis. Il était même plus compliqué qu'on ne pouvait *a priori* se le figurer, car, à l'inverse de ce qui se passe pour les groupes finis, il existe des groupes infinis *intransitifs* qui ne sont isomorphes à aucun groupe transitif, et, parmi ces groupes intransitifs, il peut en exister de simples.

La détermination de tous les groupes infinis *primitifs* à n variables permettrait immédiatement de connaître les structures de tous les groupes infinis transitifs simples. Cette détermination a été faite, en partie incidemment, par S. Lie pour $n = 2, 3$, et par M. Kowalewski pour $n = 5$; il s'est trouvé que, dans aucun des trois cas qui viennent d'être indiqués, il n'existait de groupe infini primitif ne rentrant pas dans certains types généraux connus. J'ai essayé de résoudre le problème dans toute sa généralité, et je suis arrivé à ce résultat, assurément le plus simple de ceux qu'on pouvait espérer, que *tous les groupes infinis primitifs à n variables appartiennent à six grandes classes seulement*, à savoir :

1° *Le groupe de toutes les transformations à n variables;*

2° *Le groupe des transformations à n variables qui laissent invariants les volumes;*

3° *Le groupe des transformations à n variables qui reproduisent les volumes à un facteur constant près;*

4° *Le groupe des transformations à* $n > 4$ *variables (n pair) qui*

([1]) Killing, *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen* (*Math. Ann.*, t. XXXI, 1888, p. 252; t. XXXIII, 1889, p. 1; t. XXXIV, 1889, p. 57; t. XXXVI, 1890, p. 161).

([2]) E. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (Thèse). Paris, Nony, 1894.

laissent invariante l'intégrale double

$$\int\int dx_1\,dx_2 + \ldots + dx_{n-1}\,dx_n;$$

5° *Le groupe des transformations à* $n \geqq 4$ *variables* (n *pair*) *qui reproduisent l'intégrale double précédente à un facteur constant près;*

6° *Le groupe de toutes les transformations de contact dans l'espace à* $\frac{n+1}{2}$ *dimensions* (n *impair*), *considéré comme groupe de transformations ponctuelles à* n *variables* ($n \geqq 3$).

Les groupes 1°, 2°, 4°, 6° sont simples; le groupe 3° admet le groupe 2° comme sous-groupe invariant; le groupe 5° admet le groupe 4° comme sous-groupe invariant.

Ce qui précède montre qu'*il existe quatre grandes classes de groupes infinis transitifs simples,* les groupes 1°, 2°, 4°, 6°.

Les groupes infinis simples, qui ne sont isomorphes à aucun groupe transitif, peuvent assez facilement être déterminés en partant des résultats précédents. Ils se partagent en deux catégories :

1° *Les groupes simples proprement dits : on les obtient en prenant un groupe simple transitif (fini ou infini) et en faisant dépendre de la manière la plus générale possible les éléments arbitraires de* p *variables invariantes par le groupe;* un groupe simple transitif fini d'ordre r devient ainsi un groupe simple infini intransitif dépendant de r fonctions arbitraires de p arguments.

2° *Les groupes simples improprement dits; chacun d'eux est isomorphe à un groupe dont les équations ont la forme suivante :*

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad x'_{n-1} = x_{n-1},$$
$$x'_n = x_n + f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

en désignant par f *la solution la plus générale d'un certain système d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes, à coefficients fonctions données de* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Les résultats précédents, joints à ceux des recherches de M. Vessiot, conduisent à la conclusion suivante, que je mentionne, bien qu'elle soit étrangère au présent Mémoire :

Les systèmes automorphes qui se présentent dans l'intégration d'un système différentiel donné admettant un groupe G *de structure connue s'intègrent au moyen d'équations différentielles ordinaires et, suivant les cas, de systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à une fonction inconnue d'un certain nombre de variables indépendantes.*

Ce Mémoire est divisé en cinq Parties. Les deux premières, les plus courtes, contiennent l'exposé de la méthode qui m'a conduit à la détermination des groupes infinis primitifs; cette méthode s'appuie sur les théorèmes fondamentaux relatifs à la structure des groupes infinis ([1]) et en particulier sur les propriétés du groupe linéaire Γ qui indique comment un groupe transitif infini donné G à n variables transforme les éléments linéaires issus d'un point arbitraire; elle s'appuie également sur les propriétés de certains groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et que j'appelle *semi-involutifs*.

La troisième et la quatrième Partie sont consacrées aux calculs qui conduisent, une fois la méthode trouvée, à la détermination des groupes infinis primitifs et des groupes infinis intransitifs simples. On y trouvera incidemment la détermination de tous les groupes, finis ou infinis, pour lesquels les éléments linéaires issus d'un point arbitraire sont transformés avec la même généralité que pour les groupes infinis primitifs à n variables; cette détermination avait été déjà faite par S. Lie pour les trois premières classes de groupes primitifs.

La cinquième Partie contient la détermination des groupes linéaires et homogènes semi-involutifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane; elle s'appuie sur des résultats relatifs à la structure des groupes finis simples et exposés précédemment par l'auteur dans sa Thèse ([2]).

Juin 1907.

([1]) *Voir* E. CARTAN, *Sur la structure des groupes infinis* (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 153; t. XXII, 1905, p. 219).

([2]) Les résultats contenus dans ce Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans une Note portant le même titre et insérée dans les *Comptes rendus* le 21 mai 1907. Ce qui précède, à part les derniers alinéas, est la reproduction presque textuelle de cette Note.

I. — Les groupes linéaires involutifs et semi-involutifs.

Lorsqu'un groupe infini G à n variables a ses équations de définition du premier ordre, le groupe linéaire Γ d'ordre r qui indique comment G transforme les éléments linéaires issus d'un point arbitraire (groupe adjoint) jouit des propriétés suivantes :

Soient

$$\frac{\partial x_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} a_{i,\rho,s} e_\rho x_i \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

les formules qui définissent la transformation infinitésimale la plus générale de Γ; les $a_{i,\rho,s}$ sont des coefficients constants, les e_ρ sont les r paramètres indépendants de cette transformation infinitésimale. En désignant par $t_\rho, t'_\rho, \ldots, t_\rho^{(n-1)}$, n systèmes de r variables indépendantes, formons la matrice à n colonnes et n^2 lignes :

$$\left|\begin{array}{cccc}
\sum a_{1,\rho,1}\, t_\rho & \sum a_{2,\rho,1}\, t_\rho & \ldots & \sum a_{n,\rho,1}\, t_\rho \\
\sum a_{1,\rho,2}\, t_\rho & \sum a_{2,\rho,2}\, t_\rho & \ldots & \sum a_{n,\rho,2}\, t_\rho \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\sum a_{1,\rho,n}\, t_\rho & \sum a_{2,\rho,n}\, t_\rho & \ldots & \sum a_{n,\rho,n}\, t_\rho \\
\sum a_{1,\rho,1}\, t'_\rho & \sum a_{2,\rho,1}\, t'_\rho & \ldots & \sum a_{n,\rho,1}\, t'_\rho \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\sum a_{1,\rho,n}\, t'_\rho & \sum a_{2,\rho,n}\, t'_\rho & \ldots & \sum a_{n,\rho,n}\, t'_\rho \\
\sum a_{1,\rho,1}\, t''_\rho & \sum a_{2,\rho,1}\, t''_\rho & \ldots & \sum a_{n,\rho,1}\, t''_\rho \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\sum a_{1,\rho,n}\, t_\rho^{(n-1)} & \sum a_{2,\rho,n}\, t_\rho^{(n-1)} & \ldots & \sum a_{n,\rho,n}\, t_\rho^{(n-1)}
\end{array}\right|.$$

Désignons par :

σ_1 le rang (degré du déterminant principal) de la matrice formée des n premières lignes;

$\sigma_1 + \sigma_2$ le rang de la matrice formée des $2n$ premières lignes;
$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ le rang de la matrice formée des $3n$ premières lignes;
. . . . ;
$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ le rang de la matrice totale.

Désignons enfin par r_1 le nombre des solutions linéairement indépendantes du système d'équations linéaires en $u_{\rho,k}$ ($\rho = 1, \ldots, r$; $k = 1, 2, \ldots, r$),

$$(2) \qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=r} (a_{i,\rho,s} u_{\rho,k} - a_{k,\rho,s} u_{\rho,i}) = 0 \qquad (i,\ k,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

On a, dans l'hypothèse faite plus haut, entre les entiers σ_i et l'entier r_1, la relation

$$(3) \qquad r_1 = \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots + n\sigma_n.$$

Un groupe linéaire Γ qui jouira de la propriété précédente sera appelé un *groupe linéaire involutif*. La relation (3) caractérise donc les groupes involutifs.

Si le groupe infini G n'a pas ses équations de définition du premier ordre, le groupe Γ n'est pas involutif. Considérons alors le système (2) et soit

$$u_{\sigma,s} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r_1} b_{s,\rho,\sigma} \eta_\rho \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

la solution la plus générale de ce système, où les r_1 quantités η_ρ sont des paramètres arbitraires. Considérons enfin le groupe linéaire Γ_1 d'ordre r_1, à $n + r$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r$, et dont la transformation infinitésimale la plus générale est définie par les formules

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\delta x_s}{\delta t} = 0 && (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ &\frac{\delta y_\sigma}{\delta t} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{\rho=1}^{\rho=r_1} b_{i,\rho,\sigma} \eta_\rho x_i && (\sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \end{aligned} \right.$$

Ce groupe Γ_1 est dit le premier groupe *déduit* de Γ.

De Γ_1 on peut déduire un nouveau groupe Γ_2 par le même procédé ; ce groupe Γ_2 est à $n+r+r_1$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_{r_1}$ et à un certain nombre r_2 de paramètres. Et ainsi de suite.

Si le groupe G *est infini, l'un des groupes déduits de* Γ (*ainsi que tous les suivants*) *est involutif. Nous dirons dans ce cas que le groupe primitif* Γ *est semi-involutif.*

Si un groupe linéaire Γ *n'est pas semi-involutif, l'un de ses groupes déduits successifs se réduit à la transformation identique.*

En désignant par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, n expressions de Pfaff indépendantes convenablement choisies, formées avec les n variables transformées par le groupe G et leurs différentielles, le groupe G échange entre elles ces n expressions par un groupe linéaire qui est précisément le groupe adjoint Γ. Si le groupe G est infini, on démontre que *chacun des systèmes d'équations*

$$(5) \qquad \sum a_{i.\rho,s}\,\omega_i = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(6) \qquad \sum b_{i,\rho,\sigma}\,\omega_i = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, r;\ \rho = 1, 2, \ldots, r_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

correspondants au groupe Γ *et aux groupes déduits* $\Gamma_1, \ldots,$ *est complètement intégrable*. De plus, *le groupe* G *laisse invariant chacun de ces systèmes complètement intégrables, c'est-à-dire transforme entre elles leurs intégrales.*

Il résulte de là que, si le groupe G est *primitif*, chacun des systèmes d'équations (5), (6), ... est équivalent au système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 0.$$

Ce résultat peut être énoncé sous la forme suivante :

THÉORÈME I. — *Si le groupe infini* G *est primitif, les accroissements infiniment petits des variables, dans le groupe adjoint* Γ *et dans chacun des groupes linéaires déduits de* Γ, *ne peuvent dépendre de moins de n combinaisons linéaires indépendantes de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Cela étant, supposons que G soit un groupe infini *primitif* et que le groupe linéaire adjoint Γ laisse invariante une multiplicité plane M, qu'on peut supposer définie par les équations

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Alors $\frac{\partial x_{p+1}}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t}$ ne dépendent que de $x_{p+1}, \ldots, x_n$. L'ensemble des transformations de Γ qui laissent invariante chacune des variables $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ forme un sous-groupe invariant γ, défini par exemple par les équations

$$e_{q+1} = e_{q+2} = \ldots = e_r = 0.$$

D'après les équations (2), les accroissements

$$\frac{\partial y_{q+1}}{\partial t}, \quad \frac{\partial y_{q+2}}{\partial t}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y_r}{\partial t},$$

subis par $y_{q+1}, \ldots, y_r$ dans le groupe Γ_1, ne dépendent aussi que de $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ne peuvent donc entrer que dans les q premières équations (4), celles qui donnent

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial t}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y_q}{\partial t}.$$

Elles y entrent d'ailleurs comme si l'on supprimait, dans les p premières équations (1), tous les termes qui contiennent soit

$$x_{p+1}, \quad x_{p+2}, \quad \ldots, \quad x_n,$$

soit

$$e_{q+1}, \quad e_{q+2}, \quad \ldots, \quad e_r.$$

Ce qui précède est d'ailleurs vrai pour les groupes déduits successifs.

Si le groupe G est primitif, les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ doivent entrer effectivement dans tous les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$; par suite, *le groupe linéaire* $\bar{\gamma}$ en $x_1, x_2, \ldots, x_p$, *qu'on obtient en faisant dans les formules* (1)

$$x_{p+1} = \ldots = x_n = 0, \qquad e_{q+1} = \ldots = e_r = 0,$$

est semi-involutif.

Ce groupe linéaire est d'ailleurs celui qui indique comment le groupe γ transforme entre eux les points de la multiplicité M. Le groupe γ étant d'autre part sous-groupe invariant de Γ, le groupe $\overline{\gamma}$ est un sous-groupe invariant du groupe $\overline{\Gamma}$ qui indique comment Γ transforme entre eux les points de M. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — *Si le groupe infini* G *est primitif, et si le groupe adjoint* Γ *laisse invariante une multiplicité plane* M,

$$x_{p+1} = \ldots = x_n = 0,$$

le groupe $\overline{\Gamma}$ *à* p *variables qui indique comment* Γ *transforme entre eux les points de* M, *ainsi que le sous-groupe invariant* $\overline{\gamma}$ *de* $\overline{\Gamma}$ *qui indique comment les points de* M *sont transformés entre eux par celles des transformations de* Γ *qui laissent invariante chacune des variables* $x_{p+1}, \ldots, x_n$, *sont semi-involutifs.*

Supposons enfin que le groupe Γ ne laisse invariante aucune multiplicité plane contenue dans M; alors *le groupe* $\overline{\Gamma}$ *à* p *variables* x_1, $x_2, \ldots, x_p$ *ne laisse lui-même invariante aucune multiplicité plane, et il est semi-involutif.*

Les remarques et les théorèmes précédents nous conduisent ainsi à considérer les groupes linéaires semi-involutifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.

II. — Détermination des groupes adjoints des groupes infinis primitifs.

Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, admettons maintenant le théorème suivant, qui sera démontré dans le paragraphe IV :

Théorème III. — *Tout groupe linéaire (et homogène) semi-involutif à* n *variables qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane est l'un des quatre groupes suivants :*

1° *Le groupe linéaire et homogène général;*

2° *Le groupe linéaire et homogène spécial;*

3° *Si n est pair, le groupe linéaire le plus général qui laisse invariante l'expression différentielle*

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 dx_4 - x_4 dx_3 + \ldots + x_{n-1} dx_n - x_n dx_{n-1};$$

4° *Si n est pair, le groupe linéaire le plus général qui reproduit l'expression différentielle précédente à un facteur constant près.*

Les groupes 2° et 3° sont simples; les groupes 1° et 4° sont respectivement formés des groupes 2° et 3° et du groupe engendré par la transformation infinitésimale

$$Uf = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Par suite, tout sous-groupe invariant semi-involutif des groupes 1°, 2°, 3°, 4° *se confond respectivement avec les groupes* 1° *ou* 2°, 2°, 3°, 3° *ou* 4°.

Cela étant, considérons un groupe infini primitif G à n variables. Il existe n expressions de Pfaff linéairement indépendantes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n$$

qui sont transformées entre elles par le groupe linéaire adjoint Γ. Deux cas sont à distinguer :

1° Le groupe adjoint Γ ne laisse invariante aucune multiplicité plane; alors il est l'un des quatre groupes précédemment énoncés;

2° Le groupe adjoint Γ laisse invariante au moins une multiplicité plane. Supposons qu'il laisse invariante la multiplicité plane M

$$\omega_{p+1} = \omega_{p+2} = \ldots = \omega_n = 0 \tag{1}$$

sans laisser invariante aucune multiplicité plane contenue dans M. Il est d'abord évident que p est au moins égal à 2, sinon le système (1) serait complètement intégrable, et le groupe G, qui transformerait entre elles ses intégrales, ne serait pas primitif.

Les covariants bilinéaires de $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ sont, en tenant compte des équations (1), de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} \omega'_{p+1} = \displaystyle\sum_{i,k}^{1,\ldots,p} A_{i,k,1}\,\omega_i\omega_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_n \quad = \displaystyle\sum_{i,k}^{1,\ldots,p} A_{i,k,n-p}\,\omega_i\omega_k, \end{cases}$$

les coefficients $A_{i,k,j}$ désignant des constantes. Le groupe linéaire $\bar{\gamma}$, dont il est question au théorème II du paragraphe précédent, qui indique comment sont transformées les expressions $\omega_1, \ldots, \omega_p$ par celles des transformations de Γ qui laissent invariantes $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$, laisse évidemment invariante chacune des expressions bilinéaires qui se trouvent dans les seconds membres des formules (2). Et ce groupe linéaire $\bar{\gamma}$ est semi-involutif; de plus, il est invariant dans un groupe semi-involutif $\bar{\Gamma}$ qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane. Donc $\bar{\gamma}$ est l'un des quatre groupes linéaires énoncés plus haut.

Les seconds membres des formules (2) ne sont pas tous nuls, sinon le système (1) serait complètement intégrable, et par suite le groupe G serait imprimitif. Donc le groupe $\bar{\gamma}$ ne contient pas la transformation infinitésimale Uf. Le groupe $\bar{\gamma}$ est donc l'un des groupes 2° et 3°. Ce ne peut être le groupe 2°, qui ne laisse invariante aucune expression bilinéaire. C'est donc le groupe 3°.

Or le groupe simple 3°, il est facile de le démontrer, ne laisse invariante qu'une expression différentielle bilinéaire, soit

$$\omega_1\omega_2 + \ldots + \omega_{p-1}\omega_p;$$

par suite, les covariants $\omega'_{p+1}, \ldots, \omega'_n$, lorsqu'on tient compte de (1), sont proportionnels entre eux et l'on peut faire en sorte qu'on ait, si $p < n-1$,

$$(3)\quad \left.\begin{cases} \omega'_{p+1} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \omega'_{n-1} \equiv 0 \\ \omega'_n \quad \equiv \omega_1\omega_2 + \ldots + \omega_{p-1}\omega_p \end{cases}\right\} \quad (\bmod\ \omega_{p+1}, \ldots, \omega_n).$$

Supposons d'abord $p < n - 1$. On a alors des formules de la forme suivante :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega'_{p+1} &\equiv \omega_n \sum_{i=1}^{i=p} a_{1,i}\omega_i \\ \omega'_{p+2} &\equiv \omega_n \sum_{i=1}^{i=p} a_{2,i}\omega_i \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega'_{n-1} &\equiv \omega_n \sum_{i=1}^{i=p} a_{n-1-p,i}\omega_i \end{aligned} \right\} \quad (\mathrm{mod}\, \omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \dots, \omega_{n-1}).$$

Les $n - p - 1$ combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ qui se trouvent dans les seconds membres des formules (3) sont au nombre de p indépendantes, parce que, d'après un théorème général, le système

$$\omega_{p+1} = \omega_{p+2} = \dots = \omega_{n-1} = \omega_n = \sum a_{1,i}\omega_i = \dots = \sum a_{n-p+1,i}\omega_i = 0$$

est complètement intégrable, et que, de plus, G est primitif.

Appliquons alors le théorème II du paragraphe I à la multiplicité plane

$$\omega_{p+1} = \omega_{p+2} = \dots = \omega_{n-1} = 0,$$

invariante par Γ. Le groupe $\bar{\gamma}$ à $p+1$ variables correspondant laisse invariante l'équation $\omega_n = 0$ et laisse invariant chacun des seconds membres de (4) ; ce groupe $\bar{\gamma}$ doit être semi-involutif, et il doit encore le rester si l'on fait $\omega_n = 0$; or il se réduit à un groupe à un paramètre

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = e_1 x_1, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial x_p}{\partial t} = e_1 x_p,$$

et *ce groupe n'est pas semi-involutif*.

Donc l'hypothèse $p < n - 1$ *est impossible*. Donc n est un nombre impair et

$$p = n - 1.$$

Théorème IV. — *Si* G *est un groupe infini primitif à* n *variables, le* *groupe linéaire adjoint* Γ *satisfait à l'une des cinq hypothèses suivantes :*

A. *Le groupe* Γ *ne laisse invariante aucune multiplicité plane et coïncide avec le groupe linéaire et homogène général à n variables.*

B. *Le groupe* Γ *ne laisse invariante aucune multiplicité plane et coïncide avec le groupe linéaire et homogène spécial à n variables.*

C. *Le groupe* Γ *ne laisse invariante aucune multiplicité plane et coïncide avec le groupe linéaire le plus général qui laisse invariante l'expression différentielle bilinéaire (n pair)*

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{n-1}\omega_n.$$

D. *Le groupe* Γ *ne laisse invariante aucune multiplicité plane et coïncide avec le groupe linéaire le plus général qui reproduit, à un facteur constant près, l'expression différentielle bilinéaire (n pair)*

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{n-1}\omega_n.$$

E. *Le groupe* Γ *laisse invariante une seule multiplicité plane à* $n - 1$ *dimensions (n impair)*

$$\omega_n = 0$$

et transforme les points de cette multiplicité plane par le groupe linéaire le plus général qui reproduit, à un facteur constant près, l'expression bilinéaire

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{n+2}\omega_{n-1},$$

qui se déduit du covariant bilinéaire ω'_n *en faisant*

$$\omega_n = 0.$$

Dans le dernier cas, le groupe Γ ne laisse pas, en faisant $\omega_n = 0$, invariant le covariant ω'_n, sinon Γ laisserait ω_n invariant, et le système

$$\frac{\partial\omega'_n}{\partial\omega_1} = \frac{\partial\omega'_n}{\partial\omega_2} + \ldots + \frac{\partial\omega'_n}{\partial\omega_n} = 0,$$

qui est d'ordre *pair* $n - 1$, serait complètement intégrable, ce qui contredirait la primitivité du groupe G.

Remarquons enfin, dans le dernier cas, que le groupe Γ n'est pas complètement déterminé; sa détermination exacte sera faite dans le paragraphe suivant en même temps que celle des groupes G correspondants.

III. — Détermination des groupes infinis primitifs à n variables.

Il nous reste maintenant à reprendre chacun des cinq groupes linéaires Γ qui viennent d'être énumérés et à rechercher, pour chacun d'eux, les groupes G correspondants.

Cette recherche a été faite par S. Lie dans les deux premiers cas. Voici les résultats auxquels il est arrivé :

A. *Il y a deux groupes infinis à n variables dont le groupe adjoint est le groupe linéaire général; ce sont :*

1° *Le groupe général à n variables;*

2° *Le groupe qui reproduit les volumes à un facteur constant près, autrement dit le groupe défini par l'équation*

$$\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = a,$$

en désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *les variables primitives, par* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *les variables transformées et par a une constante arbitraire.*

B. *Il y a un groupe infini à n variables dont le groupe adjoint est le groupe linéaire spécial; c'est le groupe qui laisse invariants les volumes; il est défini par l'équation*

$$\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1.$$

Il ne nous reste donc qu'à examiner les cas C, D et E. Nous commencerons par le cas D, en dirigeant nos calculs de manière qu'ils puissent servir en même temps pour le cas C.

D. Le groupe Γ est le groupe linéaire le plus général à un nombre pair $2n$ de variables, qui reproduise, à un facteur constant près, une expression bilinéaire

$$\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n}.$$

Les accroissements que subissent les ω_i par la transformation infinitésimale la plus générale de Γ peuvent être représentés par les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\omega_{2i-1} &= e_0\omega_{2i-1} + \sum_{k=1}^{k=2n} e_{2i,k}\,\omega_k \\ \delta\omega_{2i} &= e_0\omega_{2i} - \sum_{k=1}^{k=2n} e_{2i-1,k}\,\omega_k \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $e_{i,j} = e_{j,i}(i, j = 1, 2, \ldots, 2n)$ désignent $n(2n+1)$ paramètres indépendants, e_0 un autre paramètre indépendant des précédents si l'on est dans le cas D, identiquement nul si l'on est dans le cas C.

Les équations de structure du groupe cherché G contiennent d'abord $2n$ équations de la forme suivante :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_{2i-1} &= \omega_{2i-1}\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{2i,k} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} \mathrm{A}_{2i,j,k}\,\omega_j\omega_k \\ \omega'_{2i} &= \omega_{2i}\varpi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{2i-1,k} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} \mathrm{A}_{2i-1,j,k}\,\omega_j\omega_k \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on ajoutait aux expressions ϖ_0, $\varpi_{i,j}$ des combinaisons linéaires à coefficients constants arbitraires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$, les coefficients constants $\mathrm{A}_{i,j,k}$ seraient changés; leurs nouvelles valeurs $\overline{\mathrm{A}}_{i,j,k}$ se déduiraient des anciennes par des formules qu'on peut condenser dans les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n}(\overline{\mathrm{A}}_{2i,j,k} - \mathrm{A}_{2i,j,k})\omega_j\omega_k &= \omega_{2i-1}\Omega_0 + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\Omega_{2i,k}, \\ \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n}(\overline{\mathrm{A}}_{2i-1,j,k} - \mathrm{A}_{2i-1,j,k})\omega_j\omega_k &= \omega_{2i}\Omega_0 - \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\Omega_{2i-1,k}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations (3), Ω_0 et

$$\Omega_{i,j} = \Omega_{j,i}$$

désignent

$$n(2n+1)+1$$

combinaisons linéaires à coefficients arbitraires des ω_i. Si l'on désigne par α_ρ ces

$$n(2n^2+n+1)$$

coefficients arbitraires, les équations (3) expriment, en somme, chaque différence

$$\overline{A}_{i,j,k} - A_{i,j,k}$$

par une combinaison linéaire déterminée des coefficients α.

Mais, d'autre part, les équations de structure (2) sont invariantes par le groupe Γ; exprimons simplement qu'elles sont invariantes par le sous-groupe de Γ défini par les équations

$$\begin{aligned} \delta\omega_{2i-1} &= \quad e_{2i-1,2i}\,\omega_{2i-1}, \\ \delta\omega_{2i} &= -e_{2i-1,2i}\,\omega_{2i}. \end{aligned}$$

Convenons de poser

$$\eta_{2i-1} = -\eta_{2i} = e_{2i-1,2i}$$

et formons les équations

$$\begin{aligned} \eta_{2i-1}\,\omega'_{2i-1} = {} & \eta_{2i-1}\,\omega_{2i-1}\,\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \eta_k\,\omega_k\,\varpi_{2i,k} + \sum_{j,k}^{1,\ldots,2n} A_{2i,j,k}(\eta_j+\eta_k)\,\omega_j\,\omega_k \\ & + \omega_{2i-1}\,\delta\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\,\delta\varpi_{2i,k}, \\ \eta_{2i}\,\omega'_{2i} = {} & \eta_{2i}\,\omega_{2i}\,\varpi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \eta_k\,\omega_k\,\varpi_{2i-1,k} + \sum_{j,k}^{1,\ldots,n} A_{2i-1,j,k}(\eta_j+\eta_k)\,\omega_j\,\omega_k \\ & + \omega_{2i}\,\delta\varpi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\,\delta\varpi_{2i-1,k}, \end{aligned}$$

qui expriment que les formules (2) sont invariantes par le sous-groupe considéré de Γ. Ces équations peuvent s'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{j,k} A_{2i,j,k}(\eta_j+\eta_k+\eta_{2i})\,\omega_j\omega_k \\ &\qquad +\omega_{2i-1}\,\delta\varpi_0+\sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k[\delta\varpi_{2i,k}+(\eta_{2i}+\eta_k)\varpi_{2i,k}]=0, \\ &\sum_{j,k} A_{2i-1,j,k}(\eta_j+\eta_k+\eta_{2i-1})\,\omega_j\omega_k \\ &\qquad +\omega_{2i}\,\delta\varpi_0-\sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k[\delta\varpi_{2i-1,k}+(\eta_{2i-1}+\eta_k)\varpi_{2i-1,k}]=0, \end{aligned}\right.$$

et l'on voit que, dans ces équations $\delta\varpi_0$, $\delta\varpi_{i,j}-(\eta_i+\eta_j)\varpi_{i,j}$ sont des combinaisons linéaires convenablement choisies de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$.

On remarquera l'analogie entre les formules (3) et les formules (4); les dernières se déduisent des premières en remplaçant

$$\begin{array}{ccc} A_{i,j,k}-\overline{A}_{i,j,k} & \text{par} & (\eta_i+\eta_j+\eta_k)A_{i,j,k}, \\ \Omega_0 & » & \delta\varpi_0, \\ \Omega_{i,j} & » & \delta\varpi_{i,j}+(\eta_i+\eta_j)\varpi_{i,j}. \end{array}$$

Cela étant, on peut profiter de l'indétermination des $n(2n^2+n+1)$ coefficients α qui entrent dans Ω_0 et $\Omega_{i,j}$ pour donner au plus grand nombre possible de coefficients $A_{i,j,k}$ des valeurs particulières, par exemple la valeur zéro. Pour ces coefficients-là, on pourra d'ailleurs supposer que les valeurs primitives étaient déjà zéro. Cela veut dire que l'élimination des α dans les équations (3) conduit aux équations

$$\overline{A}_{i,j,k}=A_{i,j,k},$$

où $A_{i,j,k}$ désigne successivement tous les coefficients qui n'ont pas pu être annulés *a priori*. Mais alors l'élimination des coefficients inconnus de $\delta\varpi_0$ et $\delta\varpi_{i,j}+(\eta_i+\eta_j)\varpi_{i,j}$ dans les équations (4) conduit aux équations analogues

$$(\eta_i+\eta_j+\eta_k)A_{i,j,k}=0,$$

où les $A_{i,j,k}$ sont les mêmes coefficients qui n'ont pu être annulés *a priori*. Mais, *comme* $\eta_i+\eta_j+\eta_k$ *ne peut pas être nul*, il en résulte que *tous les coefficients* $A_{i,j,k}$ *sont nuls*.

On peut donc toujours supposer que, dans les équations de structure (2), *tous les coefficients* $A_{i,j,k}$ *sont nuls.*

Cela étant, si le groupe linéaire Γ était involutif, les équations (2) définiraient complètement une structure de groupe infini, et tous les groupes G cherchés seraient des sous-groupes d'un seul et même groupe infini, celui qui serait défini par les équations (2). Mais le groupe Γ n'est pas involutif, du moins dans le cas D; ses caractères sont

$$\sigma_1 = n, \qquad \sigma_2 = n, \qquad \sigma_3 = n-1, \qquad \sigma_4 = n-2, \qquad \ldots, \qquad \sigma_n = 2;$$

d'autre part, le groupe déduit Γ_1 est de la forme

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial y_{i,j}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{k=2n} e_{i,j,k} x_k \qquad (y_{i,j} = y_{j,i};\ i, j = 1, 2, \ldots, 2n),$$

où les paramètres sont les

$$r_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

quantités

$$e_{i,j,k} = e_{i,k,j} = e_{j,i,k} = e_{j,k,i} = e_{k,i,j} = e_{k,j,i}.$$

Or on a

$$r_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} < \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n.$$

Mais le fait que la variable y_0, qui correspond au paramètre e_0 de Γ, est invariante par le groupe Γ_1, nous conduit à calculer le covariant bilinéaire de ϖ_0. Si l'on applique l'identité fondamentale aux équations (2), on obtient les équations

$$\omega_{2i-1}\varpi'_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi'_{2i,k} = \omega'_{2i-1}\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega'_k \varpi_{2i,k},$$

$$\omega_{2i}\ \ \varpi'_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi'_{2i-1,k} = \omega'_{2i}\ \ \varpi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega'_k \varpi_{2i-1,k}.$$

Ces équations sont vérifiées, en particulier, si l'on prend

$$\varpi'_0 = 0,$$

$$\varpi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\varpi_{i,2\rho}\varpi_{j,2\rho-1} + \varpi_{j,2\rho}\varpi_{i,2\rho-1}) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Leur solution générale s'obtient en ajoutant aux seconds membres les expressions bilinéaires Π_0, $\Pi_{i,j}$ les plus générales satisfaisant aux équations

$$\omega_{2i-1}\Pi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \Pi_{2i,k} = 0,$$

$$\omega_{2i}\quad \Pi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \Pi_{2i-1,k} = 0.$$

L'expression Π_0, en particulier, est de la forme

$$\Pi_0 = \sum_{i,k} a_{i,k}\omega_i\omega_k + \sum b_{i,j,k}\omega_i\varpi_{j,k}.$$

On a donc

$$\varpi'_0 = \sum a_{i,k}\omega_i\omega_k + \sum b_{i,j,k}\omega_i\varpi_{j,k}.$$

Si nous exprimons que les équations de structure sont invariantes par la transformation

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial t} = e_0\omega_i$$

qui entraîne

$$\frac{\partial\varpi_0}{\partial t} = \frac{\partial\varpi_{i,j}}{\partial t} = 0,$$

nous obtenons

$$0 = 2e_0 \sum a_{i,k}\omega_i\omega_k + e_0 \sum b_{i,j,k}\omega_i\varpi_{j,k},$$

d'où enfin

$$\varpi'_0 = 0. \tag{5}$$

Théorème. — *Les équations de structure de tout groupe* G *dont le* *groupe adjoint* Γ *satisfait à la condition* D *contiennent les équations*

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \omega'_{2i-1} &= \omega_{2i-1}\varpi_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi_{2i,k},\\ \omega'_{2i} &= \omega_{2i}\ \ \varpi_0 - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi_{2i-1,k},\\ \varpi'_0 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (6) sont d'ailleurs les équations de structure d'un groupe infini déterminé; par exemple, celui qui reproduit, à un facteur constant près, l'expression différentielle bilinéaire

$$dx_1\,dx_2 + dx_3\,dx_4 + \ldots + dx_{2n-1}\,dx_{2n}.$$

Donc tous les groupes G cherchés sont des sous-groupes infinis de celui-là.

Théorème V. — *Tout groupe infini primitif* G *dont le groupe adjoint satisfait à la condition* D *est semblable, soit au plus grand groupe qui reproduit, à un facteur constant près, l'expression différentielle bilinéaire*

$$dx_1\,dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}\,dx_{2n},$$

soit à l'un de ses sous-groupes.

Il nous reste donc, pour résoudre complètement le problème dans le cas D, à rechercher tous ceux des sous-groupes du groupe (6) dont les équations de structure contiennent les équations (6).

Formons les prolongements normaux du groupe (6); leurs équations de structure s'obtiennent en ajoutant aux équations (6), successivement, les équations

$$(7)\qquad \varpi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\varpi_{i,2\rho}\varpi_{j,2\rho-1} + \varpi_{j,2\rho}\varpi_{i,2\rho-1}) + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi_{i,j,k},$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} \varpi'_{i,j,k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} & \varpi_{i,2\rho}\varpi_{j,k,2\rho-1} + \varpi_{j,2\rho}\varpi_{i,k,2\rho-1} + \varpi_{k,2\rho}\varpi_{i,j,2\rho-1}\\ & + \varpi_{i,j,2\rho}\varpi_{k,2\rho-1} + \varpi_{i,k,2\rho}\varpi_{j,2\rho-1} + \varpi_{j,k,2\rho}\varpi_{i,2\rho-1}\\ & + \sum_{h=1}^{h=2n} \omega_h \varpi_{i,j,k,h}, \end{aligned}$$

Les $\varpi_{i,j,k}$, $\varpi_{i,j,k,h}$, ... sont de nouvelles expressions de Pfaff, dans lesquelles on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des indices; nous appellerons *degré* d'une de ces expressions le nombre de ses indices.

On obtiendra les équations de structure de l'un quelconque des sous-groupes cherchés de (6), en prenant un des prolongements normaux de (6), par exemple le $p^{\text{ième}}$, et en liant ω_i, ϖ_0, $\varpi_{i,j}$, $\varpi_{i,j,k}$, ..., $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_{p+1}}$ par certaines relations linéaires à coefficients constants. Par hypothèse, il n'y a aucune relation entre les ω_i, ϖ_0 et $\varpi_{i,j}$. Nous allons montrer qu'il y en a nécessairement entre les ω_i, ϖ_0, $\varpi_{i,j}$ et $\varpi_{i,j,k}$. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, qu'il n'y ait aucune relation entre les ω_i, ϖ_0 et les ϖ de degré inférieur à q, mais qu'il y en ait au moins une contenant les ϖ de degré $q \geqq 4$, soit

$$(9) \qquad \sum A_{i_1,i_2,\ldots,i_q}\omega_{i_1,i_2,\ldots,i_q} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant de degré inférieur à q. Le covariant bilinéaire du premier membre de l'équation (9) devant être nul en vertu des relations cherchées, considérons dans ce covariant les termes produits d'une expression ϖ du troisième degré et d'une expression ϖ de degré $q-1$; l'ensemble de ces termes doit être nul. On a donc

$$(10) \qquad \sum A_{i_1,i_2,\ldots,i_q}(\varpi_{i_1,i_2,2\rho}\varpi_{i_3,\ldots,i_q,2\rho-1} - \varpi_{i_1,i_2,2\rho-1}\varpi_{i_3,\ldots,i_q,2\rho}) = 0.$$

Cette équation montre d'abord que tous les coefficients A, pour lesquels deux au moins des indices sont égaux, sont nuls; il suffit, par exemple, de considérer dans (10) le terme en

$$\varpi_{1,1,1}\varpi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{q-2},2};$$

ce terme est en effet multiplié, à un coefficient numérique près, par $A_{1,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-2}}$. De même tous les A, pour lesquels deux des coefficients sont de la forme $2\lambda-1$, 2λ, sont nuls; il suffit de considérer, par exemple, dans (10), le terme en

$$\varpi_{1,2,2}\varpi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{q-2},1},$$

dont le coefficient est $A_{1,2,\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-2}}$. Enfin, tous les autres coefficients A sont nuls aussi; il suffit, par exemple, de considérer dans (10) le terme en

$$\varpi_{1,1,3}\varpi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-2},2},$$

dont le coefficient est $-A_{1,3,\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-2}}$.

Il est donc démontré que q ne peut être supérieur à 3.

Prenons donc une relation entre les ω_i, ϖ_0, $\varpi_{i,j}$ et $\varpi_{i,j,k}$, soit

$$\sum A_{i,j,k}\varpi_{i,j,k}+\ldots=0, \tag{11}$$

les termes non écrits étant ceux en ω_i, ϖ_0, $\varpi_{i,j}$. Formons le covariant du premier membre de (11) et ne conservons dans ce covariant que les termes qui ne contiennent pas les ω_i. Il y aura alors des produits qui contiendront une expression du deuxième degré et une du troisième, et des produits qui contiendront deux expressions du deuxième degré. Comme il n'y a aucune relation possible entre les $\varpi_{i,j}$, on voit que dans les premiers groupes de termes le coefficient de l'une quelconque des expressions $\varpi_{\alpha,\beta}$ doit être nul à des expressions près du second degré. Désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ des indéterminées liées par les n relations

$$r_1+r_2=r_3+r_4=\ldots=r_{2n-1}+r_{2n}=0;$$

appelons *poids* d'une expression $\varpi_{i,j,k}$ la quantité $r_i+r_j+r_k$. Alors la considération, dans le covariant du premier membre de (11), des termes en $\varpi_{1,2}, \varpi_{3,4}, \ldots, \varpi_{2n-1,2n}$ conduit à la conclusion suivante :

Toute relation de la forme (11) *entraîne l'existence de la relation*

$$\sum (r_i+r_j+r_k)A_{i,j,k}\varpi_{i,j,k}+\ldots=0.$$

Autrement dit, on peut toujours supposer que, dans chaque relation (11), toutes les expressions $\varpi_{i,j,k}$ sont de même poids.

Ce poids peut être de l'une des formes

$$3r_1,\quad 2r_1+r_3,\quad r_1+r_3+r_5,\quad r_1.$$

L'existence d'une relation du premier type, soit

$$\varpi_{1,1,1}+\ldots=0,$$

entraîne, d'après la forme de $\varpi'_{1,1,1}$, l'existence des $2n$ relations

$$\varpi_{1,1,1}+\ldots=\varpi_{1,1,2}+\ldots=\varpi_{1,1,3}+\ldots=\ldots=\varpi_{1,1,2n}+\ldots=0,$$

puis celle des $n(2n+1)$ relations

$$\varpi_{1,i,j}+\ldots=0 \qquad (i, j=1, 2, \ldots, 2n),$$

et enfin celle des $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ relations

$$\varpi_{i,j,k}+\ldots=0 \qquad (i, j, k=1, 2, \ldots, 2n).$$

L'existence d'une relation du second type, soit

$$\varpi_{1,1,3}+\ldots=0,$$

entraîne, d'après la forme de $\varpi'_{1,1,3}$, l'existence d'une relation du premier type, et, par suite, de $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ relations distinctes. Il en est de même de l'existence d'une relation du troisième type, telle que

$$\varpi_{1,3,5}+\ldots=0.$$

Enfin l'existence d'une relation du quatrième type,

$$A_1\varpi_{1,1,2}+A_2\varpi_{1,3,4}+A_3\varpi_{1,5,6}+\ldots+A_n\varpi_{1,2n-1,2n}+\ldots=0,$$

entraîne, si A_1 n'est pas nul, en prenant dans le covariant le coefficient de $\varpi_{2,2}$, l'existence d'une relation

$$\varpi_{1,1,1}+\ldots=0,$$

et, si A_2 n'est pas nul, en prenant le coefficient de $\varpi_{4,4}$, l'existence d'une relation

$$\varpi_{1,3,3}+\ldots=0;$$

dans les deux cas, l'existence de $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ relations distinctes.

Nous voyons donc que *chaque expression* $\varpi_{i,j,k}$ *s'exprime par une combinaison linéaire à coefficients constants des* ω_i, ϖ_0, $\varpi_{i,j}$.

De là résulte enfin que *tout sous-groupe du groupe* (6), *qui admet le même groupe adjoint que le groupe* (6), *est fini*.

On peut démontrer sans difficulté que tous ces sous-groupes sont homologues dans le groupe (6) et qu'on peut prendre, par exemple,

$$\varpi_{i,j,k} = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Nous admettrons ce résultat dont la démonstration serait un peu étrangère au sujet. Le sous-groupe unique ainsi obtenu est un groupe linéaire (non homogène); il s'obtient en prenant le plus grand groupe linéaire et homogène qui laisse invariante l'équation

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{2n-1} dx_{2n} - x_{2n} dx_{2n-1} = 0,$$

et en le composant avec le groupe des translations.

Théorème VI. — *Il existe, à $2n$ variables, deux groupes dont le groupe adjoint satisfait à la condition* D :

1° *Le groupe infini, qui reproduit, à un facteur constant près, l'expression différentielle bilinéaire*

$$dx_1 dx_2 + dx_3 dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n};$$

2° *Le groupe fini linéaire d'ordre $(n+1)(2n+1)$ qu'on obtient en composant avec le groupe des translations le groupe linéaire et homogène qui laisse invariante l'équation*

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{2n-1} dx_{2n} - x_{2n} dx_{2n-1} = 0.$$

C. Dans le cas C, les raisonnements sont identiques; il n'y a partout qu'à supprimer l'expression ϖ_0. On arrive ainsi au théorème suivant :

Théorème VII. — *Il existe, à $2n$ variables, deux groupes dont le groupe adjoint satisfait à la condition* C :

1° *Le groupe infini, qui laisse invariante l'expression différentielle bilinéaire*

$$dx_1 dx_2 + dx_3 dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n};$$

2° *Le groupe fini d'ordre $n(2n+3)$ qu'on obtient en composant avec le groupe des translations le groupe linéaire et homogène qui laisse inva-*

riante l'expression

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{2n-1} dx_{2n} - x_{2n} dx_{2n-1}.$$

Le premier de ces groupes est simple.

E. En changeant un peu les notations, nous pourrons définir le groupe linéaire Γ par les formules suivantes :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \omega_0}{\partial t} &= 2 e_{0,0}\,\omega_0 \\ \frac{\partial \omega_{2i-1}}{\partial t} &= e_{0,0}\,\omega_{2i-1} + \sum_{k=1}^{k=2n} e_{2i,k}\,\omega_k + e_{2i,0}\,\omega_0 \\ \frac{\partial \omega_{2i}}{\partial t} &= e_{0,0}\,\omega_{2i} - \sum_{k=1}^{k=2n} e_{2i-1,k}\,\omega_k - e_{2i-1,0}\,\omega_0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$e_{0,0}, \qquad e_{i,j} = e_{j,i}, \qquad e_{i,0}$$

désignent $(n+1)(2n+1)$ paramètres, les paramètres $e_{0,0}$ et $e_{i,j}$ étant indépendants, les $e_{i,0}$ pouvant aussi être indépendants, mais pouvant être liés entre eux et avec les autres paramètres par certaines relations linéaires.

Les équations de structure de tout groupe G cherché contiennent nécessairement des équations de la forme

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \omega'_0 &= 2\omega_0 \varpi_{0,0} + \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n}, \\ \omega'_{2i-1} &= \omega_0 \varpi_{2i,0} + \omega_{2i-1}\varpi_{0,0} + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi_{2i,k} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{2i,j,k}\,\omega_j\omega_k, \\ \omega'_{2i} &= -\omega_0 \varpi_{2i-1,0} + \omega_{2i}\,\varpi_{0,0} - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \varpi_{2i-1,k} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{2i-1,j,k}\,\omega_j\omega_k. \end{aligned}\right.$$

Les expressions ω_0, ω_i, $\varpi_{i,j}$ sont indépendantes entre elles, mais les $\varpi_{i,0}$ peuvent être liées entre elles et avec les précédentes par certaines relations linéaires à coefficients constants.

Si l'on ajoutait aux $\varpi_{i,j}$ des combinaisons linéaires à coefficients constants arbitraires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$, les coefficients constants $A_{i,j,k}$ seraient changés : leurs nouvelles valeurs $\overline{A}_{i,j,k}$ se déduiraient des anciennes par des formules qu'on peut condenser dans les équations

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} (\overline{A}_{2i,j,k} - A_{2i,j,k})\,\omega_j\omega_k = \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \Omega_{2i,k},\\ &\sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} (\overline{A}_{2i-1,j,k} - A_{2i-1,j,k})\,\omega_j\omega_k = -\sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k \Omega_{2i-1,k},\end{aligned}\right.$$

où $\Omega_{i,j} = \Omega_{j,i}$ désignent $n(2n+1)$ combinaisons linéaires à coefficients arbitraires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$.

Exprimons maintenant que les équations de structure (13) sont invariantes par le groupe linéaire (12); ce groupe (12) contient, en particulier, une transformation de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega_0}{\partial t} &= 2\omega_0,\\ \frac{\partial\omega_{2i-1}}{\partial t} &= \omega_{2i-1} + \alpha_{2i}\,\omega_0,\\ \frac{\partial\omega_{2i}}{\partial t} &= \omega_{2i} + \alpha_{2i-1}\omega_0,\end{aligned}$$

où α_i désignent n constantes convenablement choisies. On en déduit

$$\partial\varpi_{0,0} = -\tfrac{1}{2}(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \ldots + \alpha_{2n}\omega_{2n}),$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{j,k}^{1\ldots 2n} A_{2i,j,k}\,\omega_j\omega_k = {} & \sum \omega_{2k-1}\left(\frac{\partial\varpi_{2i,2k-1}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\alpha_{2k-1}\omega_{2i-1} - \tfrac{1}{2}\alpha_{2i}\,\omega_{2k}\right)\\ & + \omega_{2k}\left(\frac{\partial\varpi_{2i,2k}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\alpha_{2k}\,\omega_{2i-1} + \tfrac{1}{2}\alpha_{2i}\,\omega_{2k-1}\right),\\ \sum_{j,k}^{1\ldots 2n} A_{2i-1,j,k}\,\omega_j\omega_k = {} & -\sum \omega_{2k-1}\left(\frac{\partial\varpi_{2i-1,2k-1}}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\alpha_{2k-1}\omega_{2i} - \tfrac{1}{2}\alpha_{2i-1}\omega_{2k}\right)\\ & -\sum \omega_{2k}\left(\frac{\partial\varpi_{2i-1,2k}}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\alpha_{2k}\,\omega_{2i} + \tfrac{1}{2}\alpha_{2i-1}\omega_{2k-1}\right).\end{aligned}$$

La comparaison des équations précédentes avec les formules (14) montre, comme dans le cas D, *qu'on peut supposer tous les coefficients* $A_{i,j,k}$ *nuls*.

Cela étant, les équations (13), où l'on suppose tous les $A_{i,j,k}$ nuls, définissent la structure d'un groupe infini, savoir le groupe des transformations de contact de l'espace à n dimensions. Tous les groupes G cherchés s'obtiendront en déterminant ceux des sous-groupes du groupe (13) pour lesquels les expressions ω_0, ω_i, $\varpi_{0,0}$, $\varpi_{i,j}$ ne sont liées par aucune relation.

Cherchons d'abord ceux de ces sous-groupes pour lesquels il existe au moins une relation entre ω_0, ω_i, $\varpi_{0,0}$, $\varpi_{i,j}$ et $\varpi_{i,0}$. Formons pour cela les équations de structure du prolongement normal du groupe (13); elles s'obtiennent en ajoutant aux équations (13) les suivantes :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi'_{0,0} &= -\tfrac{1}{2}(\omega_1\varpi_{1,0}+\omega_2\varpi_{2,0}+\ldots+\omega_{2n}\varpi_{2n,0})+\omega_0\varpi_{0,0,0},\\ \varpi'_{i,j} &= \tfrac{1}{2}(-1)^{i+1}\omega_{i'}\varpi_{j,0}+\tfrac{1}{2}(-1)^{j+1}\omega_{j'}\varpi_{i,0}\\ &\quad+\sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_{i,2\rho}\varpi_{j,2\rho-1}+\varpi_{j,2\rho}\varpi_{i,2\rho-1})+\sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,j,k}+\omega_0\varpi_{i,j,0},\\ \varpi'_{i,0} &= \varpi_{0,0}\varpi_{i,0}+\sum_{\rho=1}^{\rho=n}(\varpi_{i,2\rho}\varpi_{2\rho-1,0}+\varpi_{2\rho,0}\varpi_{i,2\rho-1})\\ &\quad+(-1)^i\omega_{i'}\varpi_{0,0,0}+\omega_0\varpi_{i,0,0}+\sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,k,0}. \end{aligned}\right.$$

On a, dans ces équations, fait la convention de désigner par i' l'indice $i+1$ si i est impair, et $i-1$ si i est pair.

Cela étant, on montre, comme dans le cas D, que l'existence d'une relation

$$\sum A_i\varpi_{i,0}+\ldots=0,$$

où les termes non écrits ne dépendent que des ω_0, ω_i, $\varpi_{0,0}$, $\varpi_{i,j}$, entraîne l'existence de $2n$ relations indépendantes de cette nature : on considère pour cela, dans le covariant $\sum A_i\varpi_{i,0}$, les coefficients des différentes expressions $\varpi_{i,j}$.

Soient donc

$$(16)\quad \varpi_{i,0}=\sum_{j,k}a_{i,j,k}\varpi_{j,k}+a_{i,0}\varpi_{0,0}+\sum_k a_{i,k}\omega_k+a_i\omega_0 \qquad (i=1, 2, \ldots, 2n)$$

les $2n$ relations cherchées. Il résulte de la théorie des sous-groupes et du fait que $\varpi'_{i,0}$ contient le terme $\varpi_{0,0}\varpi_{i,0}$ qu'on peut supposer tous les coefficients $a_{i,0}$ nuls. On voit alors, en prenant dans le covariant du premier membre de l'une quelconque des équations (16) les termes en $\varpi_{0,0}$, que *tous les coefficients $a_{i,j,k}$ sont nuls*. Le groupe a donc ses équations de structure de la forme

$$(17)\quad \begin{cases} \omega'_0 = 2\omega_0\,\varpi_{0,0} + \omega_1\omega_2 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n}, \\ \omega'_{2i-1} = \omega_{2i-1}\varpi_{0,0} + \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\varpi_{2i,k} + \sum_{k=1}^{k=2n} a_{2i,k}\,\omega_0\omega_k, \\ \omega'_{2i} = \omega_{2i}\,\varpi_{0,0} - \sum_{k=1}^{k=2n} \omega_k\varpi_{2i-1,k} - \sum_{k=1}^{k=2n} a_{2i-1,k}\,\omega_0\omega_k, \end{cases}$$

et l'on démontre, comme tout à l'heure, qu'on peut ajouter aux expressions ϖ_0 et $\varpi_{i,j}$ des expressions $\alpha_0\omega_0$, $\alpha_{i,j}\omega_0$, de manière à annuler *tous les coefficients $a_{i,k}$*.

Le groupe ainsi obtenu n'est pas primitif, car le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n} = 0$$

est complètement intégrable.

Pour tout groupe primitif, fini ou infini, satisfaisant aux conditions E, *le groupe linéaire* Γ *est donc d'ordre* $(n+1)(2n+1)$, *et les* $(n+1)(2n+1)$ *expressions* $\varpi_{0,0}$, $\varpi_{i,j}$, $\varpi_{i,0}$ *sont indépendantes entre elles et indépendantes de* ω_0 *et des* ω_i.

Cela étant, formons les prolongements normaux successifs du groupe (13). Le premier prolongement normal a introduit les expressions, de degré 3,

$$\varpi_{0,0,0}, \quad \varpi_{i,0,0}, \quad \varpi_{i,j,0}, \quad \varpi_{i,j,k};$$

le deuxième prolongement normal introduira les expressions de degré 4

$$\varpi_{0,0,0,0}, \quad \varpi_{i,0,0,0}, \quad \varpi_{i,j,0,0}, \quad \varpi_{i,j,k,0} \quad \varpi_{i,j,k,h},$$

et ainsi de suite.

On aura, en particulier pour les expressions du troisième degré,

$$
(18)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\varpi'_{0,0,0} &= 2\varpi_{0,0}\varpi_{0,0,0} + \varpi_{1,0}\varpi_{2,0} + \ldots + \varpi_{2n-1,0}\varpi_{2n,0} \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}(\omega_1\varpi_{1,0,0} + \ldots + \omega_{2n}\varpi_{2n,0,0}) + \omega_0\varpi_{0,0,0,0}, \\
\varpi'_{i,0,0} &= 3\varpi_{0,0}\varpi_{i,0,0} + 2\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}\varpi_{\rho,0}\varpi_{i,\rho',0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}\varpi_{i,\rho}\varpi_{\rho',0,0} \\
&\qquad + (-1)^{i}\omega_{i'}\varpi_{0,0,0,0} + \omega_0\varpi_{i,0,0,0} + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,k,0,0}, \\
\varpi'_{i,j,0} &= 2\varpi_{0,0}\varpi_{i,j,0} - \tfrac{1}{2}(-1)^{i}\omega_{i'}\varpi_{j,0,0} - \tfrac{1}{2}(-1)^{j}\omega_{j'}\varpi_{i,0,0} \\
&\qquad + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}(\varpi_{\rho,0}\varpi_{i,j,\rho'} + \varpi_{i,\rho}\varpi_{j,\rho',0} + \varpi_{j,\rho}\varpi_{i,\rho',0}) \\
&\qquad + \omega_0\varpi_{i,j,0,0} + \sum_{k=1}^{k=2n}\omega_k\varpi_{i,j,k,0}, \\
\varpi'_{i,j,k} &= \varpi_{0,0}\varpi_{i,j,k} - \tfrac{1}{2}(-1)^{i}\omega_{i'}\varpi_{j,k,0} \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}(-1)^{j}\omega_{j'}\varpi_{i,k,0} - \tfrac{1}{2}(-1)^{k}\omega_{k'}\varpi_{i,j,0} \\
&\qquad + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}(\varpi_{i,\rho}\varpi_{j,k,\rho'} + \varpi_{j,\rho}\varpi_{i,k,\rho'} + \varpi_{k,\rho}\varpi_{i,j,\rho'}) \\
&\qquad + \omega_0\varpi_{i,j,k,0} + \sum_{h=1}^{h=2n}\omega_h\varpi_{i,j,k,h}.
\end{aligned}
\right.
$$

Quant aux expressions de degré h supérieur au troisième, on a

$$
(19)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\varpi'_{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{h}} &= (2h-4)\varpi_{0,0}\varpi_{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{h}} \\
&\qquad + (h-1)(h-4)\varpi_{0,0,0}\varpi_{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{h-1}} + \ldots, \\
\varpi'_{i,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-1}} &= (2h-3)\varpi_{0,0}\varpi_{i,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-1}} \\
&\qquad + (h-1)(h-3)\varpi_{0,0,0}\varpi_{i,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-2}} + \ldots, \\
\varpi'_{i,j,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-2}} &= (2h-4)\varpi_{0,0}\varpi_{i,j,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-2}} \\
&\qquad + (h-2)(h-3)\varpi_{0,0,0}\varpi_{i,j,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-3}} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\varpi'_{i_1,i_2,\ldots,i_q,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-q}} &= (2h-q-2)\varpi_{0,0}\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_q,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-q}} \\
&\qquad + (h-q)(h-3)\varpi_{0,0,0}\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_q,\underbrace{0,\ldots,0}_{h-q-1}} + \ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

On a négligé d'écrire dans les seconds membres les produits partiels qui ne contiennent ni $\varpi_{0,0}$ ni $\varpi_{0,0,0}$, et de plus ceux pour lesquels la somme des degrés des facteurs ne dépasse pas $h+1$.

Cela étant, supposons que pour le groupe cherché il n'y ait pas de relations contenant d'expressions de degré inférieur à h, mais qu'il y en ait au moins une contenant une expression de degré h. Si h est supérieur à 3, en prenant dans le covariant bilinéaire du premier membre de la relation les produits partiels de degré total $h+2$ et, parmi eux, ceux qui contiennent $\varpi_{0,0,0}$, on voit, d'après les formules (19), que la relation ne peut contenir que $\varpi_{0,0,\ldots,0}$ comme expressions de degré h, et alors $h=4$, à moins qu'elle ne contienne que des expressions de la forme $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$, et, si l'on calcule complètement $\varpi'_{0,0,0,0}$, on trouve

$$\varpi'_{0,0,0,0} = 4\varpi_{0,0}\varpi_{0,0,0,0} - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{i=2n}(-1)^i\varpi_{i,0,0}\varpi_{i',0} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2n}\omega_i\varpi_{i,0,0,0} + \omega_0\varpi_{0,0,0,0,0}.$$

De quelque manière que $\varpi_{0,0,0,0}$ s'exprime au moyen des expressions de degré inférieur, les termes en $\varpi_{i,0,0}\varpi'_{i,0}$ ne peuvent disparaître dans le covariant. Quant au cas où la relation contiendrait des expressions $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$, on en montre l'impossibilité comme dans le cas C. L'hypothèse $h>3$ est donc impossible.

Tout groupe cherché G est donc défini par des relations linéaires entre les expressions de degré 3, 2 et 1. Comme dans la discussion du cas D, on voit qu'on peut attribuer à chaque expression de degré 3 un *poids* qui est

$2r_0$	pour	$\varpi_{0,0,0}$,
$3r_0+r_i$	»	$\varpi_{i,0,0}$,
$2r_0+r_i+r_j$	»	$\varpi_{i,j,0}$,
$r_0+r_i+r_j+r_k$	»	$\varpi_{i,j,k}$,

en désignant par $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$ des indéterminées liées par les relations

$$r_1+r_2=r_3+r_4=\ldots=r_{2n-1}+r_{2n}=0.$$

Toute relation peut être supposée ne contenir que des expressions du troisième degré de même poids. Elle sera donc de l'une des formes suivantes :

$$\begin{gathered}
\varpi_{0,0,0}+\ldots=0, \\
\varpi_{i,0,0}+\ldots=0, \\
\varpi_{i,j,0}+\ldots=0 \qquad (i+j\neq 0), \\
A_0\varpi_{0,0,0}+A_1\varpi_{1,2,0}+A_2\varpi_{3,4,0}+\ldots+A_n\varpi_{2n-1,2n,0}+\ldots=0, \\
\varpi_{i,j,k}+\ldots=0 \qquad [(i+j)(i+k)(j+k)\neq 0], \\
A_1\varpi_{i,1,2}+A_2\varpi_{i,3,4}+\ldots+A_n\varpi_{i,2n-1,2n}+\ldots=0,
\end{gathered}$$

les termes non écrits ne dépendant que des ω_i et des $\varpi_{i,j}$.

L'existence d'une relation de la deuxième forme entraîne (d'après la nature de $\varpi'_{i,0,0}$) celle de $2n$ relations de cette forme, puis celle de $n(2n+1)$ relations de la troisième forme, puis celle de $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ relations de la forme

$$\varpi_{i,j,k}+\ldots=0.$$

L'existence d'une relation de la troisième forme ou de la quatrième entraîne l'existence de relations de la cinquième ou de la sixième forme; l'existence d'une relation de la cinquième ou de la sixième forme entraîne l'existence des $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ relations

$$\varpi_{i,j,k}+\ldots=0 \qquad (i, j, k=1, 2, \ldots, 2n).$$

En définitive, il existe toujours :

Soit une relation de la forme

$$\varpi_{0,0,0}+\ldots=0,$$

Soit $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ relations de la forme

$$\varpi_{i,j,k}+\ldots=0 \qquad (i, j, k=1, 2, \ldots, 2n).$$

La première hypothèse est impossible, car, dans le covariant du premier membre de la relation considérée, les termes

$$\varpi_{1,0}\varpi_{2,0}+\ldots+\varpi_{2n-1,0}\varpi_{2n,0}$$

ne peuvent disparaître.

Dans la seconde hypothèse, on peut toujours supposer que les relations s'écrivent

$$\varpi_{i,j,k}+\sum A_{i,j,k}^{\alpha,\beta}\varpi_{\alpha,\beta}+\sum A_{i,j,k}^{\alpha,0}\varpi_{\alpha,0}+\sum A_{i,j,k}^{\alpha}\omega_\alpha+A_{i,j,k}^{0}\omega_0=0,$$

l'expression $\varpi_{0,0}$ n'entrant pas dans le premier membre. En prenant le covariant bilinéaire et, dans ce covariant, les termes en $\varpi_{0,0}$, on voit immédiatement que tous les coefficients $A^{\alpha,\beta}_{i,j,k}$ sont nuls. On a ensuite, en prenant dans le covariant les termes en $\varpi_{\alpha,0}$,

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho(A^{\alpha,0}_{j,k,\rho'}\varpi_{i,\rho}+A^{\alpha,0}_{k,i,\rho'}\varpi_{j,\rho}+A^{\alpha,0}_{i,j,\rho'}\varpi_{k,\rho})=(-1)^\alpha\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}A^{\rho,0}_{i,j,k}\varpi_{\rho,\alpha'},$$

et cette relation montre, en faisant d'abord $i=j=k$, puis $i=j$, puis $i\neq j\neq k$ successivement, que tous les coefficients $A^{\alpha,0}_{i,j,k}$ sont nuls.

La comparaison des coefficients de $\omega_{k'}$ et de ω_k dans les covariants des deux équations relatives à $\varpi_{i,j,k}$ et $\varpi_{i,j,k'}$ montre alors que $\varpi_{i,j,0}$ s'exprime au moyen de $\varpi_{\alpha,\beta}$, ω_α. On voit, comme pour $\varpi_{i,j,k}$, que $\varpi_{i,j,0}$ ne dépend que des ω_α. On montre de même que les $\varpi_{i,0,0}$ s'expriment au moyen des ω_α. Soient donc

$$(20)\qquad\left\{\begin{aligned}\varpi_{i,0,0}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n}A^{\alpha}_{i,0,0}\,\omega_\alpha,\\ \varpi_{i,j,0}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n}A^{\alpha}_{i,j,0}\,\omega_\alpha,\\ \varpi_{i,j,k}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n}A^{\alpha}_{i,j,k}\,\omega_\alpha.\end{aligned}\right.$$

On peut, sans changer les formules de structure (15), supposer que ω_0 n'entre pas dans les seconds membres de ces relations et, de plus, ajouter à ces seconds membres des expressions

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n}a_{i,\alpha,0,0}\,\omega_\alpha,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=2n}a_{i,j,\alpha,0}\,\omega_\alpha,$$

$$\sum^{\alpha=2n}a_{i,j,k,\alpha}\,\omega_\alpha,$$

à condition que dans les coefficients $a_{i,j,k,h}$ on puisse intervertir d'une manière quelconque l'ordre des indices.

En écrivant que dans le covariant

$$\varpi'_{i,0,0} - \sum A^{\alpha}_{i,0,0}\,\omega'_{\alpha}$$

le coefficient de ω_j est nul, et que dans l'expression

$$\varpi'_{j,0,0} - \sum A^{\alpha}_{j,0,0}\,\omega'_{\alpha}$$

le coefficient de ω_i est nul, on obtient, par comparaison,

$$\begin{aligned}
4(A^{j}_{i,0,0} - A^{i}_{j,0,0})\varpi_{0,0} &+ 2\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}(A^{j}_{i,\rho',0} - A^{i}_{j,\rho',0})\varpi_{\rho,0} \\
&+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}(A^{j}_{\rho',0,0} - A^{\rho'}_{j,0,0})\varpi_{i,\rho} \\
&+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}(A^{i}_{\rho',0,0} - A^{\rho'}_{i,0,0})\varpi_{j,\rho} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega_{\alpha}) \\
&\qquad (j + i \neq 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4(A^{i'}_{i,0,0} - A^{i}_{i',0,0})\varpi_{0,0} &+ 2\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}(A^{i'}_{i,\rho',0} - A^{i}_{i',\rho',0})\varpi_{\rho,0} \\
&+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}(A^{i'}_{\rho',0,0} - A^{\rho'}_{i',0,0})\varpi_{i,\rho} \\
&+ \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^{\rho}(A^{i}_{\rho',0,0} - A^{\rho'}_{i,0,0})\varpi_{i',\rho} + 2(-1)^{i}\varpi_{0,0,0,0} \equiv 0 \\
&\qquad (\operatorname{mod} \omega_{\alpha}).
\end{aligned}$$

De la première relation on déduit, si $j + i$ est différent de zéro,

$$A^{j}_{i,0,0} = A^{i}_{j,0,0}, \qquad A^{j}_{i,k,0} = A^{i}_{j,k,0},$$
$$A^{i'}_{i,0,0} - A^{i}_{i',0,0} = A^{j'}_{j,0,0} - A^{j}_{j',0,0} = A^{j}_{j',0,0} - A^{j'}_{j,0,0} = 0.$$

On peut, par suite, déjà supposer tous les $A^{\alpha}_{i,0,0}$ *nuls.*

La seconde relation donne

$$(-1)^i \varpi_{0,0,0,0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho (A^{i'}_{i,\rho',0} - A^{i}_{i',\rho',0}) \varpi_{\rho,0} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}),$$

soit

$$(21) \qquad \varpi_{0,0,0,0} = \alpha_1 \varpi_{1,0} + \alpha_2 \varpi_{2,0} + \ldots + \alpha_{2n} \varpi_{2n,0} + \beta_1 \omega_1 + \ldots + \beta_{2n} \omega_{2n}.$$

On déduit, en prenant dans le covariant les termes en $\varpi_{0,0}$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2n} = 0,$$

d'où l'on tire

$$A^{i'}_{i,k,0} = A^{i}_{i',k,0}.$$

Par suite, *on peut supposer tous les coefficients $A^{\alpha}_{i,j,0}$ nuls.*

En exprimant maintenant que $\varpi'_{i,j,0}$ est nul, on obtient

$$\sum_{\rho,\alpha} (-1)^\rho A^{\alpha}_{i,j,\rho'} \omega_\alpha \varpi_{\rho,0} = \omega_0 \varpi_{i,0,0,0} + \sum_\alpha \omega_\alpha \varpi_{i,j,\alpha,0};$$

cela montre que

$$A^{\alpha}_{i,j,\rho'} = A^{j}_{i,\alpha,\rho'},$$

par suite, que tous les coefficients $A^{\alpha}_{i,j,h}$ peuvent être supposés nuls.

Enfin on déduit de là que les $\varpi_{i,0,0,0}$, $\varpi_{i,j,0,0}$, $\varpi_{i,j,h,0}$ s'expriment au moyen des ω. De là résulte, en prenant dans les covariants des deux membres de (21) les termes en $\varpi_{0,0}$,

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{2n} = 0.$$

Finalement, on arrive aux relations suivantes :

$$(22) \qquad \begin{cases} \varpi_{i,0,0} = 0, \\ \varpi_{i,j,0} = 0, \\ \varpi_{i,j,k} = 0, \\ \varpi_{0,0,0,0} = 0, \end{cases}$$

qui conduisent à un groupe fini à $(n+1)(2n+3)$ paramètres.

Les équations de structure de ce groupe fini sont

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
\omega'_0 &= 2\omega_0\varpi_{0,0} + \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n},\\
\omega'_i &= \omega_i\varpi_{0,0} + (-1)^{i+1}\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}\omega_\rho\varpi_{i',\rho} + (-1)^{i+1}\omega_0\varpi_{i',0},\\
\varpi'_{0,0} &= -\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=2n}\omega_\rho\varpi_{\rho,0} + \omega_0\varpi_{0,0,0},\\
\varpi'_{i,0} &= \varpi_{0,0}\varpi_{i,0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho\varpi_{i,\rho}\varpi_{\rho',0} + (-1)^i\omega_{i'}\varpi_{0,0,0},\\
\varpi'_{i,j} &= \tfrac{1}{2}(-1)^{i+1}\omega_{i'}\varpi_{j,0} + \tfrac{1}{2}(-1)^{j+1}\omega_{j'}\varpi_{i,0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n}(-1)^\rho\varpi_{i,\rho}\varpi_{j,\rho'},\\
\varpi'_{0,0,0} &= 2\varpi_{0,0}\varpi_{0,0,0} + \varpi_{1,0}\varpi_{2,0} + \ldots + \varpi_{2n-1}\varpi_{2n,0}.
\end{aligned}\right.$$

C'est le plus grand groupe projectif qui laisse invariante l'équation

$$dx_0 + x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0.$$

En résumé, nous avons le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Il existe dans l'espace à $2n+1$ dimensions deux groupes primitifs pour lesquels le groupe adjoint* Γ *satisfait à l'équation* E :

1° *Le groupe infini le plus général qui laisse invariante une équation de Pfaff*

$$dx_0 + x_1dx_2 - x_2dx_1 + \ldots + x_{2n-1}dx_{2n} - x_{2n}dx_{2n-1} = 0;$$

2° *Le groupe projectif le plus général, d'ordre $(n+1)(2n+3)$, qui laisse invariante la même équation de Pfaff.*

Nous sommes donc arrivé à la détermination complète des groupes infinis primitifs.

Théorème IX. — *Il existe six classes de groupes infinis primitifs :*

1° *Le groupe général à n variables ;*

2° *Le groupe à n variables qui reproduit les volumes dans un rapport constant ;*

3° *Le groupe à n variables qui laisse invariants les volumes ;*

4° *Le groupe à* $2n$ *variables* ($n \geqq 2$) *qui reproduit, à un facteur constant près, l'expression différentielle bilinéaire*

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n};$$

5° *Le groupe à* $2n$ *variables* ($n \geqq 2$) *qui laisse invariante l'expression différentielle bilinéaire*

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n};$$

6° *Le groupe à* $2n+1$ *variables qui laisse invariante une équation de Pfaff*

$$dx_0 + x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{n-1} dx_n - x_n dx_{n-1} = 0$$

(*groupe général des transformations de contact de l'espace à* $n+1$ *dimensions*).

Nous avons en même temps démontré, pour les trois dernières classes, le théorème suivant, généralisation d'un théorème démontré par S. Lie pour la première et la troisième classe :

Théorème X. — *Si un groupe transforme les éléments linéaires issus d'un point arbitraire de la même manière que le groupe 4°, il est fini et semblable au groupe linéaire (non homogène) le plus général qui reproduit, à un facteur constant près, l'expression*

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n}.$$

Si un groupe transforme les éléments linéaires issus d'un point arbitraire de la même manière que le groupe 5°, il est fini et semblable au groupe linéaire (non homogène) le plus général qui laisse invariante l'expression différentielle

$$dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n}.$$

Si un groupe transforme les éléments linéaires issus d'un point arbi-

traire de la même manière que le groupe 6°, il est fini et semblable au groupe projectif le plus général qui laisse invariante l'équation

$$dx_0 + x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{2n-1} dx_{2n} - x_{2n} dx_{2n-1} = 0.$$

Enfin, si nous remarquons que, des six groupes infinis énumérés dans le théorème IX, les groupes 1°, 3°, 5° et 6° sont simples, les groupes 2° et 4° composés, nous arrivons au théorème suivant :

THÉORÈME XI. — *Il existe quatre classes de groupes transitifs infinis simples. Les groupes de chaque classe sont respectivement isomorphes :*

1° *Au groupe général à n variables;*

2° *Au groupe à n variables qui laisse invariants les volumes;*

3° *Au groupe à 2n variables qui laisse invariante l'expression différentielle bilinéaire*

$$dx_1 dx_2 + dx_3 dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} dx_{2n};$$

4° *Au groupe à 2n + 1 variables qui laisse invariante une équation de Pfaff*

$$dx_0 + x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \ldots + x_{2n-1} dx_{2n} - x_{2n} dx_{2n-1} = 0.$$

IV. — Les groupes infinis intransitifs simples.

Considérons un groupe intransitif infini G. Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p; \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

les variables transformées par ce groupe, les p premières étant les invariants du groupe. Désignons par $\overline{\mathrm{G}}$ le groupe obtenu en donnant, dans les équations finies de G, aux invariants $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des valeurs numériques fixes. Ce groupe continu $\overline{\mathrm{G}}$ à n variables est infini ou fini. Dans tous les cas il existe au moins un groupe $\overline{g}$ *simple*, qui lui est isomorphe (holoédrique ou mériédrique). Nous pouvons toujours supposer ce groupe $\overline{g}$ simplement transitif, s'il est fini; primitif, s'il est infini; nous pouvons, de plus, supposer que les variables qu'il transforme sont certaines des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par exemple

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\nu.$$

Appelons g le groupe (intransitif) qui indique comment G transforme les variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p; \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\nu.$$

Ce groupe g est isomorphe (holoédrique ou mériédrique) de G. C'est, d'autre part, un sous-groupe du groupe obtenu en regardant les éléments arbitraires de $\overline{g}$ comme des fonctions arbitraires de u_1, $u_2, \ldots, u_p$.

Les considérations précédentes nous conduisent au théorème suivant :

THÉORÈME XII. — *Tout groupe infini intransitif simple peut s'obtenir en partant d'un groupe transitif simple fini ou infini, et en faisant dépendre de p nouvelles variables invariantes $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les éléments arbitraires qui entrent dans les équations finies de ce groupe.*

Nous allons donc passer en revue les différents groupes transitifs simples connus (simplement transitifs s'ils sont finis, primitifs s'ils sont infinis) et chercher à faire dépendre leurs éléments arbitraires de p nouvelles variables indépendantes de manière à obtenir encore un groupe simple.

I. *Groupes intransitifs simples qui se déduisent de groupes transitifs simples finis.* — Soit g un groupe transitif simple fini (simplement transitif), d'ordre $r > 1$. (Nous examinerons en dernier lieu le cas $r = 1$.) Soient

$$\omega'_s = \sum^{1,\ldots,r} c_{i,k,s}\,\omega_i\,\omega_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, r)$$

les équations de structure de ce groupe. En regardant les paramètres de g comme des fonctions arbitraires de $u_1, u_2, \ldots, u_p$, on obtient un groupe infini G dont les équations de structure sont les suivantes :

$$(1) \qquad \omega'_s = \sum_{(i,k)}^{1,\ldots,r} c_{i,k,s}\,\omega_i\,\omega_k + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho\,\varpi_{s,\rho} \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Ce groupe intransitif G est manifestement simple; il dépend de r fonctions arbitraires de p arguments $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Il nous faut chercher s'il n'admet pas de sous-groupes également simples; mais nous pouvons évidemment supposer que ces sous-groupes ont exactement p invariants *essentiels*.

Formons les prolongements normaux successifs de G ; on les obtient en ajoutant aux équations (1), successivement, les suivantes :

$$\varpi'_{s,i} = \sum_{(\rho,\sigma)} c_{\rho,\sigma,s}(\omega_\rho\,\varpi_{\sigma,i} + \varpi_{\rho,i}\,\omega_\sigma) + \sum_\rho du_\rho\,\varpi_{s,i,\rho},$$

$$\varpi'_{s,i,j} = \sum_{(\rho,\sigma)} c_{\rho,\sigma,s}(\omega_\rho\,\varpi_{\sigma,i,j} + \varpi_{\rho,i}\,\varpi_{\sigma,j} + \varpi_{\rho,j}\,\varpi_{\sigma,i} + \varpi_{\rho,i,j}\,\omega_\sigma) + \sum_\rho du_\rho\,\varpi_{s,i,j,\rho},$$

$$\begin{aligned}\varpi'_{s,i,j,k} = \sum_{(\rho,\sigma)} c_{\rho,\sigma,s}(&\omega_\rho\,\varpi_{\sigma,i,j,k} + \varpi_{\rho,i}\,\varpi_{\sigma,j,k} + \varpi_{\rho,j}\,\varpi_{\sigma,i,k} + \varpi_{\rho,k}\,\varpi_{\sigma,i,j} \\ &+ \varpi_{\rho,i,j}\,\varpi_{\sigma,k} + \varpi_{\rho,i,k}\,\varpi_{\sigma,j} + \varpi_{\rho,j,k}\,\varpi_{\sigma,i} + \varpi_{\rho,i,j,k}\,\omega_\sigma) + \sum_\rho du_\rho\,\varpi_{s,i,j,k,\rho},\end{aligned}$$

....

Tout sous-groupe de G s'obtiendra en établissant entre les ω_s, $\varpi_{s,i}$, $\varpi_{s,i,j}$, ... des relations linéaires à coefficients fonctions des u, mais sans qu'il y ait de relations entre les ω seuls. Supposons qu'il n'y ait pas de relations ne contenant que les ϖ à moins de $h+1$ indices, mais qu'il y en ait au moins une contenant les ϖ à $h+1$ indices, et supposons d'abord $h \geqq 2$; soit

$$\sum A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h}\,\varpi_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h} + \ldots = 0$$

une telle relation. En prenant dans le covariant bilinéaire du premier membre le terme en

$$\varpi_{\rho,i_1}\varpi_{\sigma,i_2,\ldots,i_h},$$

où ρ, σ, i_1, i_2, $\ldots$, i_h sont des indices donnés, on voit qu'on doit avoir

$$\sum_{s=1}^{s=r} A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h} c_{\rho,\sigma,s} = 0.$$

De là on déduit

$$\sum_{s=1}^{s=r} A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h} \omega'_s = 0,$$

ce qui n'est possible que si tous les coefficients $A_{s,i_1,i_2,\ldots,i_h}$ sont nuls. On arrive donc à une impossibilité.

Soit donc

$$h = 1,$$

et supposons qu'on ait une relation de la forme

$$\sum_{s=1}^{s=r} \sum_{i=1}^{i=p} A_{s,i}\varpi_{s,i} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits ne dépendant que des ω, les coefficients $A_{s,i}$ étant des fonctions des u. La forme du covariant $\varpi'_{s,i}$ montre que l'existence de la relation précédente entraîne celle de toutes les relations

$$\sum_{\rho,s,i} c_{k,s,\rho} A_{\rho,i}\varpi_{s,i} + \ldots = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots r).$$

Si nous ne conservons dans les relations considérées qui existent entre les $\varpi_{s,i}$ et les ω que les termes qui ne contiennent pas les ω, ces relations définissent une multiplicité plane (les coordonnées étant $\varpi_{1,i}$, $\varpi_{2,i}$, $\ldots$, $\varpi_{r,i}$). Cette multiplicité plane est invariante par le groupe linéaire dont les transformations infinitésimales sont

$$\sum_{s,\rho,i} c_{k,s,\rho}\varpi_{s,i}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{\rho,i}} \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,r).$$

Or le groupe Γ linéaire en $t_1, t_2, \ldots, t_r$,

$$\sum_{s,\rho} c_{k,s,\rho}\,t_s\frac{\partial f}{\partial t_\rho} \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,r),$$

ne laisse invariante aucune multiplicité plane. De là résulte que, si tous les $A_{s,1}$ ne sont pas nuls, le système de relations cherché contient au moins r relations de la forme

$$\varpi_{1,1}+\sum_{s=1}^{s=r}\sum_{i=2}^{i=p} A_{s,i}^{(1)}\varpi_{s,i}+\ldots=0,$$

$$\varpi_{2,1}+\sum_{s=1}^{s=r}\sum_{i=2}^{i=p} A_{s,i}^{(2)}\varpi_{s,i}+\ldots=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varpi_{r,1}+\sum_{s=1}^{s=r}\sum_{i=2}^{i=p} A_{s,i}^{(r)}\varpi_{s,i}+\ldots=0.$$

S'il n'en contient pas plus de r, le groupe linéaire Γ laisse invariante la multiplicité plane

$$\sum A_{s,2}^{(1)}t_s-\rho\,t_1=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum A_{s,2}^{(r)}t_s-\rho\,t_r=0,$$

où ρ désigne une constante quelconque; en prenant pour ρ l'une des racines du déterminant des coefficients des t dans ces équations, on voit que ces équations doivent se réduire à des identités; par suite, on a

$$A_{s,i}^{(j)}=0 \quad \text{si} \quad i\neq j, \qquad A_{s,1}^{(1)}=A_{s,2}^{(2)}=\ldots=A_{s,r}^{(r)}.$$

Finalement les relations cherchées sont de la forme

$$\begin{array}{l} a_1\varpi_{1,1}+a_2\varpi_{1,2}+a_3\varpi_{1,3}+\ldots+a_p\varpi_{1,p}+\ldots=0, \\ a_1\varpi_{2,1}+a_2\varpi_{2,2}+a_3\varpi_{2,3}+\ldots+a_p\varpi_{2,p}+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1\varpi_{r,1}+a_2\varpi_{r,2}+a_3\varpi_{r,3}+\ldots+a_p\varpi_{r,p}+\ldots=0. \end{array}$$

S'il y avait plus de r relations, on arriverait à un résultat analogue : il existerait un certain nombre de groupes de r relations de la forme précédente.

Du résultat précédent on déduit, faisant un changement de variables sur les u_ρ, qu'on peut supposer

$$\varpi_{s,1}+\ldots=0 \qquad (s=1, 2, \ldots, r);$$

par suite, le nombre des invariants essentiels du sous-groupe considéré de G est inférieur à p.

Donc finalement *tout sous-groupe de* G *qui admet le même nombre d'invariants essentiels se confond avec* G.

Théorème XIII. — *De chaque groupe transitif simple fini g, on ne peut déduire qu'un groupe intransitif infini simple* G, *admettant un nombre donné p d'invariants essentiels; c'est le groupe obtenu en regardant les paramètres de g comme des fonctions arbitraires de ces p invariants.*

II. *Groupes intransitifs simples qui se déduisent de groupes transitifs simples infinis.* — Nous allons passer successivement en revue les quatre classes de groupes transitifs infinis simples :

1° *Le groupe g est le groupe général à n variables.* Le groupe G a alors pour équations de structure

$$\omega'_s=\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\omega_\rho\omega_{s,\rho}+\sum_{\rho=1}^{\rho=p}du_\rho\varpi_s^{(\rho)} \qquad (s=1, 2, \ldots, n).$$

Formons les prolongements normaux successifs de G. On les obtient en ajoutant aux équations précédentes les suivantes :

$$\omega'_{s,i} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{\rho,i}\omega_{s,\rho} + \omega_\rho \omega_{s,i,\rho}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i}^{(\rho)},$$

$$\omega'_{s,i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{\rho,i,j}\omega_{s,\rho} + \omega_{\rho,i}\omega_{s,j,\rho} + \omega_{\rho,j}\omega_{s,i,\rho} + \omega_\rho \omega_{s,i,j,\rho}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i,j}^{(\rho)},$$

$$\begin{aligned}\omega'_{s,i,j,k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (&\omega_{\rho,j,i,k}\omega_{s,\rho} + \omega_{\rho,i,j}\omega_{s,k,\rho} + \omega_{\rho,i,k}\omega_{s,j,\rho} + \omega_{\rho,j,k}\omega_{s,i,\rho} \\ &+ \omega_{\rho,i}\omega_{s,j,k,\rho} + \omega_{\rho,j}\omega_{s,i,k,\rho} + \omega_{\rho,k}\omega_{s,i,j,\rho} + \omega_\rho \omega_{s,i,j,k,\rho}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i,j,k}^{(\rho)},\end{aligned}$$

. . . . ,

$$\varpi_s^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\varpi_\rho^{(\alpha)}\omega_{s,\rho} + \omega_\rho \varpi_{s,\rho}^{(\alpha)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_s^{(\alpha,\rho)},$$

$$\varpi_{s,i}^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\varpi_{\rho,i}^{(\alpha)}\omega_{s,\rho} + \omega_{\rho,i}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha)} + \varpi_\rho^{(\alpha)}\omega_{s,i,\rho} + \omega_\rho \varpi_{s,i,\rho}^{(\alpha)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i}^{(\alpha,\rho)},$$

$$\begin{aligned}\varpi_{s,i,j}^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (&\varpi_{\rho,i,j}^{(\alpha)}\omega_{s,\rho} + \omega_{\rho,i,j}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha)} + \varpi_{\rho,i}^{(\alpha)}\omega_{s,j,\rho} + \varpi_{\rho,j}^{(\alpha)}\omega_{s,i,\rho} \\ &+ \omega_{\rho,i}\varpi_{s,j,\rho}^{(\alpha)} + \omega_{\rho,j}\varpi_{s,i,\rho}^{(\alpha)} + \varpi_\rho^{(\alpha)}\omega_{s,i,j,\rho} + \omega_\rho \varpi_{s,i,j,\rho}^{(\alpha)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i,j}^{(\alpha,\rho)},\end{aligned}$$

. . . . ,

$$\varpi_s^{(\alpha,\beta)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\varpi_\rho^{(\alpha,\beta)}\omega_{s,\rho} + \varpi_\rho^{(\alpha)}\varpi_{s,\rho}^{(\beta)} + \varpi_\rho^{(\beta)}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha)} + \omega_\rho \varpi_{s,\rho}^{(\alpha,\beta)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_s^{(\alpha,\beta,\rho)},$$

$$\begin{aligned}\varpi_{s,i}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (&\varpi_{\rho,i}^{(\alpha,\beta)}\omega_{s,\rho} + \varpi_{\rho,i}^{(\alpha)}\varpi_{s,\rho}^{(\beta)} + \varpi_{\rho,i}^{(\beta)}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha)} + \omega_{\rho,i}\varpi_{s,\rho}^{(\alpha,\beta)} \\ &+ \varpi_\rho^{(\alpha,\beta)}\omega_{s,i,\rho} + \varpi_\rho^{(\alpha)}\varpi_{s,i,\rho}^{(\beta)} + \varpi_\rho^{(\beta)}\varpi_{s,i,\rho}^{(\alpha)} + \omega_\rho \varpi_{s,i,\rho}^{(\alpha,\beta)}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{s,i}^{(\alpha,\beta,\rho)},\end{aligned}$$

. . . .

Appelons *degré* d'une expression ω ou ϖ le nombre de ses indices. Parmi les relations entre ces expressions qui définissent un des sous-groupes cherchés de G, supposons qu'il n'y en ait pas de degré inférieur à h, mais qu'il y en ait au moins une de degré h. Supposons d'abord $h \geqq 4$. Soit alors

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{A}_{s,i_1,i_2,\ldots,i_{h-1}}\omega_{s,i_1,\ldots,i_{h-1}} + \sum \mathrm{A}^{(\alpha)}_{s,i_1,\ldots,i_{h-2}}\varpi^{(\alpha)}_{s,i_1,\ldots,i_{h-2}} \\ + \mathrm{A}^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{s,i_1,\ldots,i_{h-3}}\varpi^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{s,i_1,\ldots,i_{h-3}} + \ldots \\ + \mathrm{A}^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})}_{s}\varpi^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})}_{s} + \ldots = 0\end{aligned}$$

une des relations considérées, les termes non écrits étant tous de degré inférieur à h. La considération dans le covariant bilinéaire du premier membre des termes de la forme

$$\begin{aligned}&\omega_{s,\rho,i_1}\,\omega_{\rho,i_2,\ldots,i_{h-1}},\\ &\varpi^{(\alpha)}_{s,\rho}\;\;\omega_{\rho,i_1,\ldots,i_{h-2}},\\ &\varpi^{(\alpha_1)}_{s,\rho}\;\;\varpi^{(\alpha_2)}_{\rho,i_1,\ldots,i_{h-3}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\varpi^{(\alpha_1)}_{s,\rho}\;\;\varpi^{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})}_{\rho}\end{aligned}$$

montre, sans difficultés, que tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être si $n = 1$, $h = 4$; dans ce dernier cas, on devrait avoir

$$\omega_{1,1,1,1} + \sum \mathrm{A}_\alpha \varpi^{(\alpha)}_{1,1,1} + \sum \mathrm{A}_{\alpha,\beta}\varpi^{(\alpha,\beta)}_{1,1} + \sum \mathrm{A}_{\alpha,\beta,\gamma}\varpi^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{1} = 0,$$

et l'on se rend facilement compte qu'une telle relation est impossible.

Si $h = 3$ et si l'on ne considère dans les relations cherchées que les termes en $\omega_{s,i,j}$, $\varpi^{(\alpha)}_{j,i}$, $\varpi^{(\alpha,\beta)}_{s}$, $\varpi^{(\alpha)}_{s}$, on peut supposer que dans chaque relation tous ces termes sont de même *poids*, en convenant que

$\omega_{s,i,j}$	est de poids	$r_s - r_i - r_j$,
$\varpi^{(\alpha)}_{s,i}$	»	$r_s - r_i$,
$\varpi^{(\alpha,\beta)}_{s}$	»	r_s,
$\varpi^{(\alpha)}_{s}$	»	r_s.

Par suite, les expressions $\omega_{s,i,j}$ n'entrent dans aucune de ces relations. La considération du terme en $\varpi^{(\alpha)}_{\rho}\,\omega_{s,i,\rho}$ dans le covariant bilinéaire du premier membre de la relation montre de même qu'il n'entre dans cette relation aucune expression $\varpi^{(\alpha)}_{s,i}$; de même la considération des termes en $\varpi^{(\alpha)}_{\rho}\varpi^{(\beta)}_{s,\rho}$ montre qu'il n'entre aucune expression $\varpi^{(\alpha,\beta)}_{s}$. Il est donc impossible que h soit égal à 3.

Si enfin h est égal à 2, l'existence d'une relation

$$\sum_{s,\alpha} A_s^{(\alpha)} \varpi_s^{(\alpha)} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits ne dépendant que des ω_{si} et des ω_s, entraîne l'existence de toutes les relations obtenues en prenant dans la précédente les termes pour lesquels s a une même valeur donnée; de plus, l'existence de la relation

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} a_\alpha \varpi_s^{(\alpha)} + \ldots = 0$$

entraîne celle des n relations

$$\sum a_\alpha \varpi_1^{(\alpha)} + \ldots = \sum a_\alpha \varpi_2^{(\alpha)} + \ldots = \ldots = \sum a_\alpha \varpi_n^{(\alpha)} + \ldots = 0.$$

On peut supposer d'ailleurs, en faisant un changement de variables sur les u, qu'on a

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_p = 0.$$

Enfin la forme de $\varpi_1^{(1)\prime}$ montre, d'après la théorie des sous-groupes, qu'on peut supposer les relations de la forme

$$\varpi_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j,1}\,\omega_{i,j} + \ldots,$$
$$\varpi_2^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j,2}\,\omega_{i,j} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varpi_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j,n}\,\omega_{i,j} + \ldots,$$

les termes non écrits ne dépendant que de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. La forme du covariant de $\varpi_1^{(1)}$ montre alors que tous les coefficients $a_{i,j,1}$ sont nuls, ainsi que ceux des coefficients $a_{i,j,2}, \ldots, a_{i,j,n}$ pour lesquels i est différent de 1, que de plus $a_{1,j,k} = a_{1,k,j}$; les covariants de $\varpi_2^{(1)}, \ldots, \varpi_n^{(1)}$ montrent ensuite que tous ces coefficients aussi sont nuls. Les expressions $\varpi_1^{(1)}, \ldots, \varpi_n^{(1)}$ ne dépendant que de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, on voit immédiatement que le sous-groupe cherché de G admet, contrairement à l'hypothèse, moins de p invariants essentiels.

Théorème XIV. — *Du groupe général à n variables on ne peut déduire qu'un groupe intransitif simple à p invariants essentiels; ce groupe est défini par les équations*

$$u'_1 = u_1, \quad \ldots, \quad u'_p = u_p,$$
$$x'_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_p), \quad \ldots, \quad x'_n = f_n(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_p),$$

où les f_i sont n fonctions arbitraires de leurs $n+p$ arguments.

2° *Le groupe g est le groupe à n variables qui laisse invariants les volumes.* Ce cas se traite d'une manière analogue au précédent. Les notations employées peuvent être conservées à condition de lier les expressions introduites par les relations

$$\begin{aligned}
&\omega_{1,1} + \omega_{2,2} + \ldots + \omega_{n,n} = 0,\\
&\omega_{1,1,i_1,\ldots,i_h} + \omega_{2,2,i_1,\ldots,i_h} + \ldots + \omega_{n,n,i_1,\ldots,i_h} = 0,\\
&\varpi_{1,1,i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} + \varpi_{2,2,i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} + \ldots + \varpi_{n,n,i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} = 0.
\end{aligned}$$

On montre, comme tout à l'heure, que l'entier désigné par h ne peut dépasser 3. Si h est égal à 3, on peut attribuer encore des poids aux différentes expressions, mais les n indéterminées $r_1, \ldots, r_n$ sont maintenant liées par la relation

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 0.$$

Les $\omega_{s,i,j}$ ne peuvent entrer dans les relations cherchées que si $n = 2$, et alors il n'entre que $\omega_{1,1,1}$ et $\omega_{1,1,2}$, ce qu'on démontre facilement être impossible, en négligeant tous les termes en $\varpi_\rho^{(\alpha)}, \varpi_{\rho,i}^{(\alpha)}, \ldots$. On montre alors, comme auparavant, qu'aucune des expressions $\varpi_{s,i}^{(\alpha)}, \varpi_s^{(\alpha,\beta)}$ ne peut exister dans les relations cherchées, c'est-à-dire, enfin, que h ne peut être égal à 3.

Si h est égal à 2, le raisonnement fait plus haut conduit à la même conclusion.

Théorème XV. — *Du groupe infini à n variables qui conserve les volumes, on peut déduire un seul groupe intransitif simple à p invariants* *essentiels ; ce groupe est défini par les équations*

$$u'_1 = u_1, \qquad u'_2 = u_2, \qquad \ldots, \qquad u'_p = u_p;$$
$$x'_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n;\, u_1, \ldots, u_p), \qquad \ldots, \qquad x'_n = f_n(x_1, \ldots, x_n;\, u_1, \ldots, u_p),$$

où les f_i sont assujetties à la seule condition

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1.$$

3° *Le groupe g est le groupe à $2n$ variables qui laisse invariante l'expression*

$$dx_1\, dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}\, dx_{2n}.$$

Le groupe G a ici pour équations de structure

$$\omega'_i = (-1)^{i+1} \left(\sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i',\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_i^{(\rho)} \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1, 2n),$$

où l'on a désigné par i' le nombre $i+1$ ou $i-1$ suivant que i est impair ou pair. Les expressions $\varpi_{i,j}$ sont liées par les relations

$$\varpi_{j,i} = \varpi_{i,j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Les équations de structure des prolongements normaux successifs de G s'obtiendront en ajoutant aux équations précédentes les suivantes :

$$\varpi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho \varpi_{i,\rho} \varpi_{i,\rho'} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,j,\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{i,j}^{(\rho)},$$

$$\varpi'_{i,j,k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho (\varpi_{i,\rho} \varpi_{j,k,\rho'} + \varpi_{j,\rho} \varpi_{i,k,\rho'} + \varpi_{k,\rho} \varpi_{i,j,\rho'}) + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,j,k,\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{i,j,k}^{(\rho)},$$

. . . .,

$$\varpi_i^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho \varpi_\rho^{(\alpha)} \varpi_{i,\rho'} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,\rho}^{(\alpha)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_i^{(\alpha,\rho)},$$

$$\varpi_{i,j}^{(\alpha)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho \left(\varpi_{i,\rho}^{(\alpha)} \varpi_{j,\rho'} + \varpi_{j,\rho}^{(\alpha)} \varpi_{i,\rho'} + \varpi_\rho^{(\alpha)} \varpi_{i,j,\rho'}\right) + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,j,\rho}^{(\alpha)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_{i,j}^{(\alpha,\rho)},$$

. . . .,

$$\varpi_i^{(\alpha,\beta)\prime} = \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} (-1)^\rho \left(\varpi_\rho^{(\alpha,\beta)} \varpi_{i,\rho'} + \varpi_\rho^{(\alpha)} \varpi_{i,\rho'}^{(\beta)} + \varpi_\rho^{(\beta)} \varpi_{i,\rho'}^{(\alpha)}\right) + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho \varpi_{i,\rho}^{(\alpha,\beta)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_i^{(\alpha,\beta,\rho)},$$

. . . .

Tout sous-groupe cherché de G sera défini par certaines relations linéaires entre les expressions ϖ relatives à l'un des prolongements normaux de G. De la discussion faite au paragraphe précédent résulte que si, dans ces relations, on supprimait tous les termes en $\varpi_{i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha)}$, $\varpi_{i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1\alpha_2)}$, ..., les relations restantes, ou bien ne contiendraient que les ω et les ϖ_{ij}, ou bien contiendraient aussi les $\varpi_{i,j,k}$, mais alors il y aurait au moins autant de relations distinctes que d'expressions $\varpi_{i,j,k}$, chacune de ces expressions entrant seule dans l'une de ces relations.

Cela étant, appelons *degré d'une relation* le nombre maximum des indices des expressions qui entrent dans cette relation et supposons que h soit le degré minimum des relations cherchées. Si d'abord h est au moins égal à 4, aucune expression $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$ n'entre dans ces relations, d'après ce qui a été dit plus haut. La considération successive, dans le covariant bilinéaire du premier membre de la relation considérée des termes en

$$\begin{gathered}
\varpi_\rho^{(\alpha)}\ \omega_{i_1,i_2,\ldots,i_{h-1},\rho'},\\
\varpi_\rho^{(\alpha_1)}\varpi_{i_1,\ldots,i_{h-2},\rho'}^{(\alpha_2)},\\
\varpi_\rho^{(\alpha_1)}\varpi_{i_1,\ldots,i_{h-3},\rho'}^{(\alpha_2,\alpha_3)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varpi_\rho^{(\alpha_1)}\varpi_{i,\rho'}^{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})},
\end{gathered}$$

montre qu'aucune des expressions de degré h ne peut entrer dans cette relation.

Si h est égal à 3, on peut s'arranger pour que dans chaque relation n'entrent que des expressions $\varpi_{i,j,k}$, $\varpi_{i,j}^{(\alpha)}$, $\varpi_i^{(\alpha\beta)}$, $\varpi_i^{(\alpha)}$ de même *poids*. Si certaines expressions $\varpi_{i,j,k}$ entraient, elles entreraient toutes, d'après ce qui a été dit plus haut; l'une par exemple des relations serait de la forme

$$\varpi_{1,1,3}+\sum A_i^{(\alpha)}\varpi_i^{(\alpha)}+\ldots=0,$$

mais aucune des expressions $\varpi_i^{(\alpha)}$ n'a son poids r_i égal à celui $2r_1+r_3$ de $\varpi_{1,1,3}$; on aurait donc une relation entre $\varpi_{1,1,3}$, les $\varpi_{i,j}$ et les ω, ce qui est impossible. Le raisonnement fait pour $h\geqq 4$ peut alors se répéter pour $h=3$.

Si h est égal à 2, la considération des poids montre qu'on peut supposer chaque relation de la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} A_i^{(\alpha)} \varpi_i^{(\alpha)} + \sum_{j,k}^{1,2,\ldots,2n} A_{j,k} \varpi_{j,k} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} B_\rho \omega_\rho = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

l'indice i conservant la même valeur dans tous les termes de la relation; on voit, de plus, en prenant dans le covariant bilinéaire du premier membre les termes qui contiennent $\varpi_{i,j}$, que la relation précédente entraine $2n$ relations de la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} A_i^{(\alpha)} \varpi_j^{(\alpha)} + \ldots = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Finalement, en faisant un changement de variables sur les u, on peut supposer l'existence de $2n$ relations

$$\varpi_i^{(1)} + \sum_{j,k}^{1,\ldots,2n} A_{i,j,k} \varpi_{j,k} + \sum_{j=1}^{j=2n} B_{i,j} \omega_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

La forme du covariant de $\varpi_1^{(1)}$ montre, d'après la théorie des sous-groupes, qu'on peut supposer les coefficients $A_{i,j,k}$ nuls dès que l'un des indices j, k est égal à 1. Le covariant bilinéaire de la première relation montre alors que tous les $A_{i,j,k}$ sont nuls et que, de plus, les $A_{i,j,k}$ pour lesquels i, j et k sont tous les trois différents de 1 sont tous nuls. On montre ensuite que tous les coefficients $A_{i,j,k}$ sont nuls.

On voit donc que tous les $\varpi_i^{(1)}$ ne dépendent que des ω; par suite, le sous-groupe cherché de G admet $p-1$ invariants essentiels au plus.

Théorème XVI. — *Du groupe infini à $2n$ variables qui laisse invariante l'expression bilinéaire $dx_1\,dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}\,dx_{2n}$, on ne peut déduire qu'un groupe infini intransitif simple à p invariants essentiels $u_1, u_2, \ldots, u_p$; c'est celui qui satisfait à la congruence*

$$dx'_1\,dx'_2 + \ldots + dx'_{2n-1}\,dx'_{2n} \equiv dx_1\,dx_2 + \ldots + dx_{2n-1}\,dx_{2n}$$
$$(\operatorname{mod} du_1, \ldots, du_p).$$

4° *Le groupe g est le groupe général des transformations de contact de l'espace à $n+1$ dimensions.*

Le groupe G a pour équations de structure

$$\omega_0' = 2\omega_0\varpi_{0,0} + \omega_1\omega_2 + \ldots + \omega_{2n-1}\omega_{2n} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho \varpi_0^{(\rho)},$$

$$\omega_i' = \omega_i\varpi_{0,0} + (-1)^{i+1}\left(\varpi_0\varpi_{i',0} + \sum_{\rho=1}^{\rho=2n} \omega_\rho\varpi_{i',\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} du_\rho\varpi_{i'}^{(\rho)}\right).$$

Les prolongements normaux successifs de G introduisent des expressions

$$\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_h}, \quad \varpi_{i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha)}, \quad \ldots, \quad \varpi_{i_1,\ldots,i_h}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)},$$

où les indices inférieurs i peuvent prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2n$; les indices supérieurs α les valeurs $1, 2, \ldots, p$.

On montre que, pour tout sous-groupe cherché de G, le degré minimum h des relations qui le définissent est au plus égal à 3. Si, en effet, $h \geqq 4$, les relations de degré h ne peuvent contenir aucune des expressions $\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$, d'après la discussion faite au paragraphe précédent dans l'étude du groupe g. La considération successive, dans le covariant bilinéaire du premier membre de l'une des relations, des termes en

$$\begin{array}{l} \varpi_\rho^{(\alpha)}\varpi_{i_1,i_2,\ldots,i_{h-1},\rho'}, \\ \varpi_\rho^{(\alpha_1)}\varpi_{i_1,\ldots,i_{h-2},\rho'}^{(\alpha_2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi_\rho^{(\alpha_1)}\varpi_{i,\rho'}^{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1})} \end{array}$$

montre qu'aucun terme de degré h ne peut entrer dans cette relation.

Si h est égal à 3, la considération des poids

$2r_0$	pour	$\varpi_{0,0,0}$,
$3r_0 + r_i$	»	$\varpi_{i,0,0}$,
$2r_0 + r_i + r_j$	»	$\varpi_{i,j,0}$,
$r_0 + r_i + r_j + r_k$	»	$\varpi_{i,j,k}$,
0	»	$\varpi_{0,0}^{(\alpha)}$,
$r_0 + r_i$	»	$\varpi_{i,0}^{(\alpha)}$,
$r_i + r_j$	»	$\varpi_{i,j}^{(\alpha)}$,
$-2r_0$	»	$\varpi_0^{(\alpha,\beta)}$,
$-r_i$	»	$\varpi_i^{(\alpha,\beta)}$

montre que dans chaque relation on peut supposer qu'il n'entre que celles des expressions précédentes qui ont le même poids. Comme d'autre part aucune de ces relations ne peut contenir que des expressions $\varpi_{0,0,0}$, $\varpi_{i,0,0}$, $\varpi_{i,j,0}$, $\varpi_{i,j,k}$, on voit que $\varpi_{1,1,3}$, par exemple, n'entre nulle part. Par suite, d'après la discussion faite à propos du groupe g, aucune des expressions $\varpi_{0,0,0}$, $\varpi_{i,0,0}$, $\varpi_{i,j,0}$, $\varpi_{i,j,k}$ n'entre dans les relations cherchées. La considération, dans le covariant bilinéaire du premier nombre de l'une des relations, des termes en

$$\varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{0,0,0},\quad \varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{i,0,0},\quad \varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{i,j,0},\quad \varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{0,0}^{(\beta)},\quad \varpi_0^{(\alpha)}\varpi_{i,0}^{(\beta)}$$

montre qu'aucune des expressions de degré 3 ne peut entrer dans cette relation.

Supposons enfin

$$h = 2.$$

La présence d'une relation

$$\sum_{\alpha} A_0^{(\alpha)}\varpi_0^{(\alpha)} + \sum_{i,\alpha} A_i^{(\alpha)}\varpi_i^{(\alpha)} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits ne contenant que les $\varpi_{i,j}$, $\varpi_{i,0}$, $\varpi_{0,0}$, ω_i, ω_0, entraîne, en prenant le covariant bilinéaire, celle des relations

$$\sum_{\alpha} A_0^{\alpha}\ \varpi_0^{\alpha}\ + \ldots = 0,$$

$$\sum_{\alpha} A_1^{\alpha}\ \varpi_1^{\alpha}\ + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{\alpha} A_{2n}^{(\alpha)}\varpi_{2n}^{(\alpha)} + \ldots = 0,$$

$$\sum_{\alpha} A_i^{(\alpha)}\varpi_0^{(\alpha)} + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

$$\sum_{\alpha} A_i^{(\alpha)}\varpi_j^{(\alpha)} + \ldots = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

On peut, par suite, toujours supposer l'existence d'une relation de la forme

$$\varpi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{i=2n} A_{i,0}\varpi_{i,0} + \sum_{i,j}^{1,\ldots,2n} A_{i,j}\varpi_{i,j} + \sum_{i=1}^{i=2n} B_i\omega_i = 0;$$

on n'a pas écrit de terme en $\varpi_{0,0}$ à cause de la présence dans le covariant de $\varpi_0^{(1)}$ du terme $2\varpi_0^{(1)}\varpi_{0,0}$. On voit alors immédiatement, en prenant le covariant bilinéaire, que tous les coefficients $A_{i,0}$ et $A_{i,j}$ sont nuls et, de plus, que tous les $\varpi_i^{(1)}$ doivent s'exprimer en fonctions linéaires de $\varpi_{0,0}$, $\varpi_{i,0}$, $\varpi_{i,j}$, ω_0, ω_i. La présence dans le covariant de $\varpi_i^{(1)}$ du terme $\varpi_i^{(1)}\varpi_{0,0}$ montre qu'on peut supposer $\varpi_i^{(1)}$ indépendant de $\varpi_{0,0}$. Il en résulte facilement que les $\varpi_i^{(1)}$ ne dépendent que des ω.

Les expressions $\varpi_0^{(1)}$, $\varpi_1^{(1)}$, ..., $\varpi_{2n}^{(1)}$ ne dépendant que de ω_0, ω_1, ..., ω_{2n}, le sous-groupe considéré du groupe G n'admet que $p-1$ invariants essentiels au plus.

Théorème XVII. — *Du groupe infini des transformations de contact de l'espace à n dimensions on ne peut déduire qu'un groupe infini intransitif simple à p invariants essentiels $u_1, \ldots, u_p$; il est formé de l'ensemble des transformations qui laissent invariante la congruence*

$$dx_0 - x_2 dx_1 - x_4 dx_3 - \ldots - x_{2n} dx_{2n-1} \equiv 0 \qquad (\bmod\, du_1, \ldots, du_p).$$

III. *Groupes intransitifs simples improprement dits.* — Il nous reste à examiner le cas où le groupe transitif g est fini et à un paramètre. Dans ce cas, le groupe G est défini par les équations

$$u'_1 = u_1, \qquad u'_2 = u_2, \qquad \ldots, \qquad u'_p = u_p,$$
$$x' = x + f(u_1, u_2, \ldots, u_p).$$

Les groupes intransitifs simples correspondants sont, outre le groupe G, certains de ses sous-groupes. La fonction f, au lieu d'être une fonction arbitraire de ses p arguments, peut satisfaire alors à un certain système d'équations aux dérivées partielles linéaires, les coefficients étant des fonctions données des invariants $u_1, \ldots, u_p$. La discussion des conditions auxquelles doit satisfaire ce système d'équations aux dérivées partielles pour que le groupe correspondant mérite encore le nom de *simple* est en dehors de notre sujet. Remarquons simplement que tous ces groupes admettent des sous-groupes invariants (car tous leurs sous-groupes sont invariants). On dira que l'un d'eux, $\mathcal{G}$, est un groupe simple improprement dit si, $\mathcal{G}_1$ étant l'un quelconque de ses sous-groupes invariants, il existe un sous-groupe $\mathcal{G}_2$ de $\mathcal{G}_1$ (pouvant se réduire à la transformation identique) tel que le groupe $\mathcal{G}_1|\mathcal{G}_2$ soit isomorphe holoédrique de $\mathcal{G}$. Il se peut d'ailleurs que $\mathcal{G}|\mathcal{G}_1$ ne soit pas lui-même isomorphe holoédrique de $\mathcal{G}$. Il sera naturel dans ce cas de convenir de dire que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}|\mathcal{G}_1$ sont isomorphes holoédriques *au sens étendu*. Ces deux groupes sont, en effet, absolument *équivalents* au point de vue des applications à l'intégration des systèmes différentiels.

Citons, comme exemple, le groupe $\mathcal{G}$:

$$(1) \qquad \begin{cases} u' = u, \\ v' = v, \\ x' = x + f(u, v), \end{cases}$$

où $f(u, v)$ est la solution la plus générale de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Prenons pour $\mathcal{G}_1$ le sous-groupe à deux paramètres

$$\begin{aligned} u' &= u, \\ v' &= v, \\ x' &= x + a(u^2 + 2v) + b, \end{aligned}$$

défini par la condition

$$\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Le groupe $\mathcal{G}|\mathcal{G}_1$ a pour équations

$$(3) \qquad \begin{cases} u' = u, \\ v' = v, \\ \xi' = \xi + \varphi(u, v), \end{cases}$$

où l'on pose

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial u} - u \frac{\partial f}{\partial v},$$

c'est-à-dire où φ est la solution la plus générale de l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{2}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Les groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G} | \mathcal{G}_1$ ne sont pas isomorphes holoédriques, on le démontre sans difficulté, les équations (2) et (4) n'étant pas réductibles l'une à l'autre par un changement de variables. Néanmoins, si l'on considère le sous-groupe $\mathcal{G}_2$ de $\mathcal{G}_1$ défini par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,$$

et dont les équations sont

$$(5) \qquad \begin{cases} u' = u, \\ v' = v, \\ \xi' = \xi + a, \end{cases}$$

le groupe $\mathcal{G}_1 | \mathcal{G}_2$ a pour équations

$$u' = u,$$
$$v' = v,$$
$$X' = X + \psi(u, v),$$

où

$$\psi = \frac{-1}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \, \partial v},$$

c'est-à-dire où ψ est la solution la plus générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Le groupe $\mathcal{G}_1 | \mathcal{G}_2$ est donc isomorphe holoédrique de $\mathcal{G}$. Les deux groupes (1) et (3) sont donc isomorphes holoédriques *au sens étendu*. Cela tient, au fond, à ce que la solution générale de chacune des équations (2) et (4) peut se déduire *par différentiation* de la solution générale de l'autre.

V. — Détermination des groupes linéaires semi-involutifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.

Il nous reste à démontrer le théorème III énoncé au début du paragraphe II. A cet effet, quelques remarques sur la structure des groupes linéaires et homogènes qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane sont nécessaires.

S. Lie a démontré qu'un groupe linéaire et homogène *intégrable* Γ laisse invariante au moins une multiplicité plane à une dimension (droite) M_1, au moins une multiplicité plane à deux dimensions M_2 contenant M_1, au moins une multiplicité plane à trois dimensions M_3 contenant M_2, et ainsi de suite. On peut ajouter que, si une multiplicité (non plane) continue (C) est engendrée par des droites toutes invariantes par Γ, la plus petite multiplicité plane M contenant (C) est invariante par Γ et que *toutes les droites qui l'engendrent sont également invariantes par* Γ.

Cette dernière propriété tient au fond à ce que chaque droite invariante correspond à une racine déterminée de l'*équation caractéristique* du groupe linéaire, et à ce que toutes les droites qui engendrent (C) doivent, par raison de continuité, correspondre à *la même racine* de cette équation caractéristique.

Cela étant, si un groupe linéaire et homogène ne laisse invariante aucune multiplicité plane, il ne saurait être intégrable. Il peut alors être ou non *semi-simple*.

Si le groupe Γ n'est pas semi-simple, il admet un plus grand sous-groupe invariant intégrable γ; considérons une des droites M_1 invariantes par γ et considérons le lieu (C) des transformées de M_1 par le groupe total Γ; cette multiplicité (C) est évidemment formée de droites toutes invariantes par Γ; or, la plus petite multiplicité plane qui contient (C) est, d'une part, invariante par le groupe total Γ; d'autre part, formée de droites toutes invariantes par γ. La première propriété n'est possible que si cette plus petite multiplicité plane comprend tout l'espace; la seconde propriété montre, par suite, que γ laisse invariantes toutes les droites de l'espace; autrement dit γ est formé de la seule transformation infinitésimale

$$Uf = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Le groupe Γ se décompose, par suite, dans le groupe à un paramètre des transformations homothétiques et dans un groupe simple ou semi-simple, celui qui est formé des transformations de Γ à déterminant égal à 1.

Théorème XVIII. — *Si un groupe linéaire et homogène ne laisse invariante aucune multiplicité plane,*

Ou bien il est simple ou semi-simple,

Ou bien il se décompose en un groupe simple ou semi-simple et dans le groupe à un paramètre des transformations homothétiques.

Ce théorème ramène la recherche des groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane à l'étude des groupes linéaires *semi-simples*.

Rappelons les théorèmes suivants sur la structure des groupes simples ou semi-simples.

Étant donné un groupe simple ou semi-simple Γ de *rang* l et d'ordre r, on peut toujours choisir r transformations infinitésimales indépendantes de la manière suivante :

1° l transformations $Y_1 f, Y_2 f, \ldots, Y_l f$ échangeables entre elles;

2° $r - l = L$ transformations $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_L f$, telles que $(Y_i X_j)$ reproduise $X_j f$ à un facteur constant près.

A chaque transformation $X_i f$ on peut faire correspondre un *poids* r_i qui est une forme linéaire de l indéterminée. Les L poids r_i sont deux à deux égaux et de signes contraires; à un poids donné ne correspond qu'une transformation Xf.

Il existe un système de L^2 entiers $a_{i,j}$ jouissant de la propriété qu'il existe, en même temps qu'une transformation $X_i f$ de poids r_i et une transformation $X_j f$ de poids r_j, une transformation $X_l f$ de poids

$$r_k = r_i + a_{i,j} r_j;$$

de plus, si a_{ij} est différent de zéro et de ± 1, il existe une transformation de poids $r_i + mr_j$, m désignant un entier quelconque compris entre zéro et a_{ij}.

Le crochet de deux transformations $(X_i X_j)$ est nul s'il n'existe aucune transformation de poids $r_i + r_j$, sinon il est égal, à un facteur constant près, à la transformation de poids $r_i + r_j$. Si $r_i + r_j$ est nul, $(X_i X_j)$ est égal à une combinaison linéaire des transformations Yf.

On peut supposer les transformations $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_l f$ choisies de manière que les poids r_1, r_2, ..., r_l soient linéairement indépendants et, de plus, que les $L - l$ autres poids soient des combinaisons linéaires à coefficients *entiers* de r_1, r_2, ..., r_l. Si l'on a

$$r_{l+i} = m_{i,1} r_1 + m_{i,2} r_2 + \ldots + m_{i,l} r_l \qquad (i = 1, 2, \ldots, L - l),$$

on a

$$a_{l+i,j} = m_{i,1} a_{1,j} + m_{i,2} a_{2,j} + \ldots + m_{i,l} a_{l,j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, L - l; j = 1, 2, \ldots, L).$$

On peut aussi choisir en même temps $Y_1 f$, $Y_2 f$, ..., $Y_l f$, de manière qu'on ait

$$(Y_i X_j) = a_{j,i} X_j f \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Si un groupe simple ou semi-simple est linéaire et homogène, à n variables x_1, x_2, ..., x_n, on peut supposer les variables choisies de manière à satisfaire aux propriétés suivantes :

A chaque variable x_α on peut attribuer un poids ρ_α, combinaison linéaire à coefficients rationnels des poids r_1, r_2, ..., r_l des transformations $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_l f$:

$$\rho_\alpha = m_{\alpha,1} r_1 + m_{\alpha,2} r_2 + \ldots + m_{\alpha,l} r_l.$$

Deux variables différentes peuvent avoir le même poids.

Si l'on pose

$$b_{\alpha,i} = m_{\alpha,1} a_{1,i} + m_{\alpha,2} a_{2,i} + \ldots + m_{\alpha,l} a_{l,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, L),$$

les entiers $b_{\alpha,i}$ jouissent de la propriété qu'il existe autant de variables de poids $\rho_\alpha + b_{\alpha,i} r_i$ que de variables de poids ρ_α; de plus, si $b_{\alpha,i}$ n'est égal ni à zéro ni à ± 1, il y a *au moins* autant de variables de poids

$\rho_\alpha + mr_i$ que de poids ρ_α. Nous appellerons l'entier $b_{\alpha,i}$ le *poids relatif* de la variable x_α par rapport à la transformation $X_i f$.

L'accroissement $\frac{\partial x_\alpha}{\partial t}$ d'une variable de poids ρ_α par la transformation infinitésimale

$$Y_i f \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

est égal à $b_{\alpha,i} x_\alpha$; par la transformation

$$X_i f \qquad (i = 1, 2, \ldots, L),$$

cet accroissement est nul si aucune variable n'est de poids $\rho_\alpha + r_i$, sinon il est une combinaison linéaire des variables de poids $\rho_\alpha + r_i$; cette combinaison linéaire n'est certainement pas identiquement nulle si $b_{\alpha,i}$, c'est-à-dire le poids relatif de la variable x_α par rapport à la transformation $X_i f$, est positif.

Si le groupe Γ ne laisse invariante aucune multiplicité plane, tous les poids ρ_α doivent pouvoir se déduire de l'un d'entre eux par additions successives des poids $r_1, r_2, \ldots, r_L$.

Nous voulons déterminer tous les groupes semi-simples linéaires et homogènes qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont *semi-involutifs*. Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs qui conduisent à cette détermination, ces calculs étant assez longs et fastidieux. Nous nous contenterons de donner des indications permettant au lecteur de les faire lui-même.

On peut d'abord commencer par résoudre le problème plus général de la détermination des groupes linéaires et homogènes qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et *pour lesquels le groupe déduit ne se réduit pas à la transformation identique*; on peut même supposer que ces groupes contiennent la transformation Uf que nous appellerons $Y_0 f$.

Le groupe déduit est à $n + r + 1$ variables, d'abord les variables primitives $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puis les variables

$$y_0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_l$$

que nous ferons correspondre à

$$Y_0 f, \quad Y_1 f, \quad \ldots, \quad Y_l f,$$

enfin les variables

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_L,$$

que nous ferons correspondre à

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad \ldots, \quad X_L f.$$

Si nous appelons

$$e_0 Y_0 f + e_1 Y_1 f + \ldots + e_l Y_l f + \eta_1 X_1 f + \ldots + \eta_L X_L f$$

la transformation infinitésimale générale du groupe donné Γ, le groupe déduit sera à $n+r+1$ variables, d'abord les variables primitives

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

puis les $l+1$ variables

$$y_0, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_l \qquad \text{correspondant à} \qquad e_0, \quad e_1, \quad \ldots, \quad e_l,$$

enfin les L variables

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_L \qquad \text{correspondant à} \qquad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_L.$$

L'accroissement d'une variable x_α par la transformation infinitésimale générale du groupe donné Γ est de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = (e_0 + b_{\alpha,1} e_1 + \ldots + b_{\alpha,l} e_l) x_\alpha + \sum_{i=1}^{i=L} \eta_i X_{\alpha_i},$$

en désignant par X_{α_i}, suivant les cas, zéro ou une combinaison linéaire des variables de poids $\rho_\alpha + r_i$.

On peut d'abord voir facilement que, dans le groupe déduit Γ_1, l'un au moins des accroissements $\frac{\partial z_1}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial z_L}{\partial t}$ doit être différent de zéro; si en effet tous ces accroissements étaient nuls, la formule (1) montre que

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} + b_{\alpha,1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \ldots + b_{\alpha,l} \frac{\partial y_l}{\partial t}$$

ne dépendrait que de x_α. En donnant à α les valeurs $1, 2, \ldots, n$, on obtiendrait certainement au moins $l+1$ combinaisons linéaires indépendantes de $\frac{\partial y_0}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial y_l}{\partial t}$; mais, si le nombre n des variables x

dépasse $l+1$, tous ces accroissements sont nécessairement nuls. Or, c'est ce que le calcul vérifie; chaque fois que les $\frac{\partial z_i}{\partial t}$ sont tous nuls, le nombre des poids ρ_α distincts est au moins égal à $l+2$.

Il suffit donc d'exprimer que l'un des $\frac{\partial z_i}{\partial t}$ n'est pas nul.

On peut s'aider pour cela des remarques suivantes.

Supposons que $\frac{\partial z_i}{\partial t}$ ne soit pas nul par le groupe Γ_1, et qu'il existe au moins deux poids distincts ρ_α et ρ_β tels qu'il existe des variables x de poids $\rho_\alpha + r_i$ et des variables x de poids $\rho_\beta + r_i$.

Alors la formule (1) montre que $\frac{\partial z_i}{\partial t}$ ne peut dépendre que des variables de poids

$$\rho_\alpha, \quad \rho_\alpha + r_1, \quad \rho_\alpha + r_2, \quad \ldots, \quad \rho_\alpha + r_L;$$

de même $\frac{\partial z_i}{\partial t}$ ne peut dépendre que des variables de poids

$$\rho_\beta, \quad \rho_\beta + r_1, \quad \rho_\beta + r_2, \quad \ldots, \quad \rho_\beta + r_L.$$

Il est donc nécessaire que dans ces deux suites il existe au moins deux poids égaux, soit

$$\rho_\alpha + r_j = \rho_\beta + r_k \qquad (j, k = 0, 1, 2, \ldots, L)$$

(on convient de poser $r_0 = 0$).

Autrement dit, la différence $\rho_\alpha - \rho_\beta$ est égale à la différence de deux des poids $r_0 = 0, r_1, r_2, \ldots, r_L$.

THÉORÈME. — *Si l'accroissement* $\frac{\partial z_i}{\partial t}$ *de la variable* z_i *par le groupe déduit* Γ_1 *n'est pas nul et s'il existe deux poids distincts* ρ_α *et* ρ_β *tels qu'il existe des variables* x *de poids* $\rho_\alpha + r_i$ *et* $\rho_\beta + r_i$, *il est nécessaire que la différence* $\rho_\alpha - \rho_\beta$ *puisse se mettre sous la forme de la différence de deux des poids* $r_0 = 0, r_1, \ldots, r_L$. *Si* $\rho_\alpha - \rho_\beta$ *peut se mettre de* p *manières différentes sous la forme*

$$\rho_\alpha - \rho_\beta = r_{k_1} - r_{j_1} = r_{k_2} - r_{j_2} = \ldots = r_{k_p} - r_{j_p},$$

l'accroissement $\frac{\partial z_i}{\partial t}$ *ne dépend que des variables* x *de poids*

$$\rho_\beta + r_{k_1}, \quad \rho_\beta + r_{k_2}, \quad \ldots, \quad \rho_\beta + r_{k_p}.$$

Ce théorème permet, pour chaque structure de groupe simple ou semi-simple, de former tous les systèmes possibles de poids correspondant aux variables transformées par les groupes linéaires cherchés. Certains systèmes de poids compatibles avec l'usage de ce théorème seront d'ailleurs exclus si le groupe déduit Γ_1 se réduit à la transformation identique.

Nous allons passer en revue toutes les classes de groupes simples et semi-simples, et indiquer, pour chacune d'elles, quels sont les groupes Γ correspondants (contenant tous la transformation Uf).

Il y a six classes de groupes simples, désignées par les lettres A, B, C, D, E, F, G.

Groupes simples de la classe A. — Dans les groupes de cette classe on peut, en changeant un peu les notations, mettre les poids des transformations $X_{ij}f$ sous la forme

$$r_i - r_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l+1).$$

Le poids ρ_α d'une quelconque des variables x_α peut se mettre sous la forme

$$\rho_\alpha = m_{\alpha,1} r_1 + m_{\alpha,2} r_2 + \ldots + m_{\alpha,l+1} r_{l+1},$$

les coefficients $m_{\alpha,i}$ étant des nombres rationnels liés par la relation

$$m_{\alpha,1} + m_{\alpha,2} + \ldots + m_{\alpha,l+1} = 0.$$

Il existe, pour cette classe, quatre groupes linéaires et homogènes qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et dont le groupe déduit ne se réduit pas à la transformation identique :

1° Un groupe correspondant au système de poids

$$\frac{1}{l+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l+1} r_\lambda - r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l+1);$$

c'est le groupe linéaire et homogène général à $l+1$ variables; il est involutif.

2° Un groupe correspondant au système de poids

$$\frac{2}{l+1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l+1} r_\lambda - 2r_i, \qquad \frac{2}{l+1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l+1} r_\lambda - r_i - r_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l+1) \qquad (l \geqq 2);$$

c'est le groupe linéaire et homogène qui indique comment sont transformés les coefficients de la forme quadratique

$$x_{1,1}t_1^2 + \ldots + x_{l+1,l+1}t_{l+1}^2 + 2x_{1,2}t_1t_2 + \ldots + 2x_{l,l+1}t_lt_{l+1},$$

lorsqu'on soumet les indéterminées $t_1, \ldots, t_{l+1}$ aux transformations du groupe linéaire et homogène général. On a

$$\frac{\partial x_{i,j}}{\partial t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=l+1} (e_{i,\rho}x_{j,\rho} + e_{j,\rho}x_{i,\rho}).$$

Le groupe déduit est défini par les formules

$$\frac{\partial z_{i,j}}{\partial t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=l+1} a_{j,\rho}x_{i,\rho} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l+1) \qquad (a_{i,j} = a_{j,i});$$

quant au deuxième groupe déduit, il se réduit à la transformation identique.

3° Un groupe correspondant au système de poids

$$\frac{2}{l+1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l+1} r_\lambda - r_i - r_j \qquad (l \geqq 3);$$

c'est le groupe linéaire et homogène qui indique comment sont transformés les coefficients

$$x_{i,j} = - x_{j,i}$$

de la forme bilinéaire alternée

$$x_{1,2}(t_1dt_2 - t_2dt_1) + x_{1,3}(t_1dt_3 - t_3dt_1) + \ldots + x_{l,l+1}(t_ldt_{l+1} - t_{l+1}dt_l),$$

quand les variables t sont transformées par le groupe linéaire et homogène général. Ce groupe Γ est défini par les formules

$$\frac{\partial x_{i,j}}{\partial t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=l+1} (e_{i,\rho} x_{\rho,j} + e_{j,\rho} x_{i,\rho}) \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l+1).$$

Son groupe déduit Γ_1 est défini par les formules

$$\frac{\partial z_{i,j}}{\partial t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=l+1} a_{j,\rho} x_{i,\rho} \qquad (a_{i,i} = 0,\ a_{i,j} = -a_{j,i};\ i, j = 1, \ldots, l+1).$$

Le deuxième groupe déduit Γ_2 se réduit à la transformation identique.

4° Un groupe correspondant au système de poids

$$0, \quad r_i - r_j;$$

c'est celui qui indique comment les paramètres de la transformation infinitésimale la plus générale d'un groupe simple G de classe A sont transformés par le groupe G (*groupe linéaire adjoint* au sens de S. Lie). Son groupe déduit Γ_1 se réduit à la transformation identique si $l \geqq 2$; pour $l = 1$, il est défini par les formules

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = a x_1 + 2 b x_2 + c x_3,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \tfrac{1}{2} a x_1 - \tfrac{1}{2} c x_3,$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} = a x_1 + b x_3,$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial t} = b x_1 + c x_2.$$

Le deuxième groupe Γ_2 se réduit à la transformation identique.

Groupes simples de la classe B. — Dans ce cas, les poids des tranformations $X_i f$ peuvent se mettre sous la forme

$$r_i, \quad r_i + r_j \qquad (i^2 \neq j^2;\ i, j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l) \qquad (l \geqq 3),$$

avec la condition

$$r_i + r_{-i} = r_i + r_{i'} = 0 \qquad (i' = -i).$$

Nous trouvons ici un seul groupe Γ, correspondant au système de poids

$$o, \quad r_i \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l);$$

c'est le groupe linéaire et homogène qui laisse invariante l'équation

$$x_0^2 + 2x_1x_{1'} + 2x_2x_{2'} + \ldots + 2x_lx_{l'} = 0.$$

Il est défini par les formules

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = e_0x_0 - \sum_{\rho}^{\pm 1, \ldots, \pm l} e_{\rho,0}x_{\rho'},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = e_0x_i + \sum_{0}^{0, \pm 1, \ldots, \pm l} e_{i,\rho}x_{\rho'} \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l),$$

où les paramètres sont

$$e_0 \quad \text{et} \quad e_{i,j} = -e_{j,i}.$$

Le groupe déduit Γ_1 est défini par les formules

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = a_0x_0 + a_1x_1 + a_{1'}x_{1'} + \ldots + a_{l'}x_{l'},$$

$$\frac{\partial z_{i,j}}{\partial t} = a_jx_i - a_ix_j.$$

Le deuxième groupe réduit Γ_2 se réduit à la transformation identique.

Groupes simples de la classe C. — Ici les poids des transformations X_if peuvent se mettre sous la forme

$$r_i, \quad \tfrac{1}{2}r_i + \tfrac{1}{2}r_j \qquad (i^2 \neq j^2;\ i, j = 1, 2, \ldots, l) \qquad (l \geqq 2),$$

avec la condition

$$r_i + r_{-i} = r_i + r_{i'} = 0 \qquad (i' = -i).$$

Nous trouvons ici un seul groupe Γ correspondant au système de poids

$$\tfrac{1}{2}r_i \qquad (i = \pm 1, \ldots, \pm l);$$

c'est le groupe linéaire et homogène qui laisse invariante l'équation

$$x_1 dx_{1'} - x_{1'} dx_1 + x_2 dx_{2'} - x_{2'} dx_2 + \ldots + x_l dx_{l'} - x_{l'} dx_l = 0;$$

il est semi-involutif.

Groupes simples de la classe D. — Ici les poids des transformations $X_i f$ peuvent se mettre sous la forme

$$r_i + r_j \qquad (i^2 \neq j^2;\ i, j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l),$$

avec la condition

$$r_i + r_{-i} = r_i + r_{i'} = 0 \qquad (i' = -i).$$

Il existe un seul groupe Γ correspondant au système de poids

$$r_i \qquad (i = \pm 1, \ldots, \pm l);$$

c'est le groupe linéaire et homogène qui laisse invariante l'équation

$$x_1 x_{1'} + x_2 x_{2'} + \ldots + x_l x_{l'} = 0.$$

Il est défini par les formules

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = e_0 x_i + \sum_{\rho}^{\pm 1, \ldots, \pm l} e_{i,\rho} x_{\rho'} \qquad (i = \pm 1, \ldots, \pm l),$$

où les paramètres sont

$$e_0 \qquad \text{et} \qquad e_{i,j} = -e_{j,i}.$$

Le groupe déduit Γ_1 est donné par les formules

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = a_1 x_1 + a_{1'} x_{1'} + \ldots + a_{l'} x_{l'},$$

$$\frac{\partial z_{i,j}}{\partial t} = a_{j'} x_i - a_{i'} x_{j'}.$$

Le deuxième groupe déduit Γ_2 se réduit à la transformation identique.

Groupes simples des classes E, F, G. — Aucun groupe Γ n'existe.

Groupes semi-simples. — Pour qu'il existe un groupe Γ, il faut que le groupe semi-simple soit composé de deux groupes simples appartenant à la classe A. On a alors un groupe Γ, celui qui indique comment les coefficients $x_{i,j}$ de l'équation bilinéaire

$$\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} x_{i,j}u_i v_j = 0$$

sont transformés lorsqu'on soumet les variables u et les variables v à deux substitutions linéaires arbitraires indépendantes. Le groupe Γ est défini par les formules

$$\frac{\partial x_{i,j}}{\partial t} = e_0 x_{i,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} x_{\rho,i}x_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \eta_{\rho,j}x_{i,\rho} \qquad (i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n).$$

Les paramètres sont e_0, $e_{i,j}$, $\eta_{i,j}$; ils sont liés par les deux relations

$$e_{1,1}+e_{2,2}+\ldots+e_{m,m}=\eta_{1,1}+\eta_{2,2}+\ldots+\eta_{n,n}=0.$$

Le groupe déduit Γ_1 est défini par les équations

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = \frac{m+n}{mn}\sum_{\rho=1}^{\rho=m}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\rho,\sigma}x_{\rho,\sigma},$$

$$\frac{\partial z_{i,j}}{\partial t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{i,\rho}x_{j,\rho} - \frac{\varepsilon_{i,j}}{n}\sum_{\rho=1}^{\rho=m}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\rho,\sigma}x_{\rho,\sigma} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, m),$$

$$\frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial t} = \sum_{\rho=1}^{\rho=m} a_{\rho,i}x_{\rho,j} - \frac{\varepsilon_{i,j}}{m}\sum_{\rho=1}^{\rho=m}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\rho,\sigma}x_{\rho,\sigma} \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n),$$

où les paramètres sont les mn quantités $a_{\rho,\sigma}$, et où $\varepsilon_{i,j}$ désigne 0 si $i\neq j$, et 1 si $i=j$.

Le second groupe déduit Γ_2 se réduit à la transformation identique.

De cette discussion résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XIX. — *Il existe quatre classes de groupes linéaires et homogènes semi-involutifs ne laissant invariante aucune multiplicité plane :*

1° *Le groupe linéaire et homogène général à n variables ;*

2° *Le groupe linéaire et homogène spécial à n variables;*

3° *Le groupe linéaire et homogène à $2n \geqq 4$ variables qui laisse invariante l'équation*

$$x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 + x_3\,dx_4 - x_4\,dx_3 + \ldots + x_{2n-1}\,dx_{2n} - x_{2n}\,dx_{2n-1} = 0;$$

4° *Le groupe linéaire et homogène à $2n \geqq 4$ variables qui laisse invariante l'expression*

$$x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 + x_3\,dx_4 - x_4\,dx_3 + \ldots + x_{2n-1}\,dx_{2n} - x_{2n}\,dx_{2n-1}.$$

De plus il existe, outre les quatre classes précédentes, quatre classes de groupes linéaires et homogènes ne laissant invariante aucune multiplicité plane et jouissant de la propriété que leur groupe déduit ne se réduit pas à la transformation identique.

α. *Le groupe linéaire et homogène à $\frac{n(n+1)}{2} \geqq 6$ variables qui indique comment les coefficients de l'équation d'un cône dans l'espace à $n \geqq 3$ dimensions sont transformés par une substitution linéaire effectuée sur les coordonnées des points de l'espace.*

β. *Le groupe linéaire et homogène à $\frac{n(n+1)}{2} \geqq 10$ variables qui indique comment les coefficients de l'équation d'un complexe linéaire dans l'espace à $n-1 \geqq 4$ dimensions sont transformés lorsqu'on effectue sur les coordonnées homogènes des points de cet espace une substitution linéaire quelconque.*

γ. *Le groupe linéaire et homogène à $n \geqq 3$ variables qui laisse invariant un cône non dégénérescent de l'espace à n dimensions.*

δ. *Le groupe linéaire et homogène à $mn \geqq 6$ variables qui indique comment les coefficients de l'équation bilinéaire*

$$\sum x_{i,j}\,u_i v_j = 0 \qquad (i = 1, 2, m;\; j = 1, 2, \ldots, n)$$

sont transformés lorsqu'on effectue sur les variables u et sur les variables v des substitutions linéaires indépendantes arbitraires.

Chacun de ces quatre groupes contient la transformation infinitési-

male

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Enfin on peut, sans difficulté, déduire du théorème précédent le suivant :

Théorème XX. — *Si un groupe* G *fini à n variables transforme les éléments linéaires issus d'un point arbitraire par un groupe linéaire* Γ *d'ordre r ne laissant invariante aucune multiplicité plane, ou bien l'ordre de* G *est égal à* $n + r$, *ou bien* Γ *appartient à l'une des classes énoncées au théorème précédent.*

Si Γ *est le groupe* α *à* $\frac{n(n+1)}{2}$ *variables, le groupe* G *est à* $n(2n+1)$ *paramètres, simple, et appartient à la classe* C. *Ses équations de structure sont*

$$\omega'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{j,\rho}\varpi_{i,\rho} + \omega_{i,\rho}\varpi_{j,\rho}) \qquad (\omega_{i,j} = \omega_{j,i}),$$

$$\varpi'_{i,j} = -\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varpi_{i,\rho}\varpi_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_{i,\rho}\chi_{j,\rho},$$

$$\chi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\varpi_{\rho,i}\chi_{j,\rho} + \varpi_{\rho,j}\chi_{i,\rho}) \qquad (\chi_{i,j} = \chi_{j,i}).$$

Si Γ *est le groupe* β *à* $\frac{n(n-1)}{2}$ *variables, le groupe* G *est à* $n(2n-1)$ *variables, simple, et appartient à la classe* D. *Ses équations de structure sont :*

$$\omega'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{\rho,j}\varpi_{i,\rho} + \omega_{i,\rho}\varpi_{j,\rho}) \qquad (\omega_{i,i} = 0, \ \omega_{i,j} = -\omega_{j,i}),$$

$$\varpi'_{i,j} = -\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varpi_{i,\rho}\varpi_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_{i,\rho}\chi_{j,\rho},$$

$$\chi'_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (\omega_{\rho,i}\chi_{\rho,j} + \varpi_{\rho,j}\chi_{i,\rho}) \qquad (\chi_{i,i} = 0, \ \chi_{i,j} = -\chi_{j,i}).$$

Si Γ *est le groupe* γ *à n variables, le groupe* G *est à* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *va-*

riables (groupe conforme), simple, et appartient à la classe B *ou* D, *suivant que n est impair ou pair (ou* A *si $n = 4$). Ses équations de structure sont :*

$$\omega'_i = \omega_i \varpi_0 + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_\rho \varpi_{i,\rho},$$

$$\varpi'_0 = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_\rho \chi_\rho,$$

$$\varpi'_{i,j} = \omega_i \chi_j - \omega_j \chi_i + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varpi_{i,\rho} \varpi_{j,\rho} \qquad (\varpi_{i,i} = 0,\ \varpi_{i,j} = -\varpi_{j,i}),$$

$$\chi'_i = \varpi_0 \chi_i + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varpi_{\rho,i} \chi_\rho.$$

Si Γ *est le groupe* δ *à mn variables, le groupe* G *est à $(m+n)^2 - 1$ variables, simple, et appartient à la classe* A. *Ses équations de structure sont :*

$$\omega'_{i,j} = \omega_{i,j} \varpi_0 + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \omega_{\rho,j} \varpi_{\rho,i} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_{i,\rho} \overline{\varpi}_{\rho,j} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n),$$

$$\varpi'_0 = \frac{m+n}{mn} \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \omega_{\rho,\sigma} \chi_{\rho,\sigma},$$

$$\varpi'_{i,j} = -\sum_{\rho=1}^{\rho=m} \varpi_{i,\rho} \varpi_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \omega_{j,\rho} \chi_{i,\rho} - \frac{\varepsilon_{i,j}}{n} \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \omega_{\rho,\sigma} \chi_{\rho,\sigma} \qquad (i, j = 1, \ldots, m),$$

$$\overline{\varpi}'_{i,j} = -\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \overline{\varpi}_{i,\rho} \overline{\varpi}_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \omega_{\rho,j} \chi_{\rho,i} - \frac{\varepsilon_{i,j}}{m} \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \omega_{\rho,\sigma} \chi_{\rho,\sigma} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

$$\chi'_{i,j} = \varpi_0 \chi_{i,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \varpi_{i,\rho} \chi_{\rho,j} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \overline{\varpi}_{j,\rho} \chi_{i,\rho} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n),$$

$$(\varpi_{1,1} + \varpi_{2,2} + \ldots + \varpi_{m,m} = \overline{\varpi}_{1,1} + \overline{\varpi}_{2,2} + \ldots + \overline{\varpi}_{n,n} = 0).$$