S. SANIELEVICI

Sur les équations différentielles des cordes et des membranes vibrantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 26 (1909), p. 19-91

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__19_0>

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES CORDES

ET

DES MEMBRANES VIBRANTES;

PAR M. S. SANIELEVICI.

INTRODUCTION.

L'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u + \lambda A u = 0, \tag{1}$$

où $\Delta u = 0$ est l'équation de Laplace dans un espace à deux ou trois dimensions, A une fonction d'un point dans cet espace et λ un paramètre, joue un rôle considérable dans un grand nombre de questions de Physique mathématique ([1]). Il en est de même de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x) y = 0 \tag{2}$$

qui est l'analogue de l'équation (1) dans le cas d'une seule variable.

On est conduit à des équations de ce type, en Acoustique, dans le problème des cordes et des membranes vibrantes et dans la théorie des résonnateurs.

([1]) H. POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Circolo matematico di Palermo*, 1894).

Soient δ la densité superficielle et τ la tension en un point quelconque (x, y) d'une membrane limitée par un contour C, u l'écart de ce point de sa position d'équilibre dans le mouvement de vibration transversale dont la membrane est animée; u est une fonction des variables x, y et du temps t, vérifiant l'équation

$$\frac{\delta}{\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et *s'annulant* le long du contour C.

Si la membrane est susceptible de variations *périodiques*, l'équation précédente doit admettre des solutions de la forme

$$u = v(x, y)\sin\mu t,$$

v satisfaisant à l'équation

$$(3) \qquad \Delta v+\mu^2\frac{\delta}{\tau}v=0$$

et prenant la valeur zéro sur le contour.

L'équation (3) n'admet *en général* aucune solution continue s'annulant sur le contour, sauf l'intégrale banale $v = 0$ qui correspond au repos; si, pour des valeurs exceptionnelles et bien déterminées de μ, de pareilles intégrales existent, elles caractérisent les *sons propres* de la membrane. Ces valeurs exceptionnelles sont les *constantes caractéristiques* de l'équation (3); la plus petite, qui correspond à la plus longue période, caractérise le *son fondamental;* les suivantes correspondent aux diverses *harmoniques* de la membrane.

Physiquement on est donc assuré de l'existence de *constantes caractéristiques* en nombre infini; cependant on conçoit la nécessité d'une démonstration analytique rigoureuse.

La membrane étant supposée homogène et également tendue, le rapport $\frac{\delta}{\tau}$ est constant et peut être rendu égal à l'unité. Dans ces conditions Schwarz [1] a démontré, par une analyse extrêmement ingénieuse, l'existence du son fondamental. La méthode de Schwarz a été

---

(1) *Gesammelte mathematische Abhandlungen,* t. I, p. 141.

reprise en 1893 par M. Picard ([1]) pour établir l'existence du premier son harmonique; et, en 1894, dans son Mémoire célèbre *Sur les équations de la Physique mathématique* ([2]), M. Poincaré a établi l'existence des autres harmoniques en nombre infini.

Dans ce Mémoire, M. Poincaré démontre notamment que la fonction $u(x, y)$ définie par les relations

$$\Delta u + \xi u = f(x, y), \qquad u = 0 \qquad \text{sur C}$$

est une fonction *méromorphe* du paramètre complexe ξ, résultat capital qui a certainement guidé M. Fredholm dans sa belle découverte concernant les équations intégrales.

Dans l'espace à trois dimensions, quand on cherche les *sons propres* d'une masse gazeuse enfermée dans un vase clos S, on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda \mathrm{A}(x, y, z) u = 0,$$

u étant le *potentiel des vitesses* et devant satisfaire à la condition

$$\frac{du}{dn} = 0 \qquad \text{sur S.}$$

Ce problème a aussi été traité par M. Poincaré, mais sans être résolu rigoureusement.

Le Mémoire de M. Fredholm ([3]), *rapidement devenu classique*, selon M. Picard, a jeté une lumière nouvelle et éclatante sur toutes ces questions. A l'aide des théorèmes généraux que cet auteur a découverts dans la théorie des équations intégrales linéaires de *seconde espèce* (Hilbert), on retrouve facilement, comme l'ont montré MM. Picard ([4]) et Plemelj ([5]) une grande partie des résultats connus dans tous les domaines de la Physique mathématique. En particulier, l'existence en nombre infini des *constantes caractéristiques* de l'équation (3) est une consé-

---

([1]) *Comptes rendus*, 1893.
([2]) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894.
([3]) *Acta mathematica*, t. XXVII, 1903.
([4]) *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 1906.
([5]) *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1904.

quence immédiate d'un théorème de MM. Hilbert [1] et Schmidt [2] concernant les équations intégrales de seconde espèce à noyau *fermé* de la forme $G(x, y; \xi, \eta) A(\xi, \eta)$, G étant *symétrique* par rapport aux points (ξ, η) et (x, y) et A une fonction *positive*.

Dans ce travail, nous nous proposons d'étendre les résultats précédents au cas où dans l'équation (1) la fonction A n'est plus constamment positive dans le domaine où elle est définie. Cette hypothèse semble essentielle dans tous les travaux que nous venons de citer. Dans un Mémoire publié en 1904 (*Journal de M. Jordan*), M. Mason s'affranchit, il est vrai, de cette hypothèse restrictive; mais sa méthode, fondée sur le principe de Dirichlet rendu rigoureux par M. Hilbert, se borne à la démonstration de l'existence des constantes caractéristiques, sans en permettre le calcul régulier comme le faisait la méthode Schwarz-Picard. C'est en modifiant cette méthode, de manière à en rendre encore plus évidente la liaison étroite avec la théorie de l'équation de Fredholm, que nous éliminons des raisonnements toute hypothèse sur le signe de la fonction A. En même temps, nous l'étendons aux conditions à la limite $\frac{du}{dn} - ku = 0$ et $\frac{du}{dn} = 0$, en mettant en évidence, pour ce dernier problème, les diverses circonstances qui peuvent se présenter autour de la valeur singulière $\lambda = 0$.

L'étude de l'équation différentielle (2) est naturellement beaucoup plus facile. Cette étude a été commencée déjà par Sturm [3], à l'aide d'une méthode qui n'offre pas toute la rigueur qu'on exige aujourd'hui. Il est clair que tous les résultats obtenus relativement à l'équation aux dérivées partielles (1) sont immédiatement transposables dans le cas d'une seule dimension; mais ici on peut obtenir des résultats plus précis, par exemple en ce qui concerne le nombre de zéros des intégrales dans un intervalle donné [4]. Nous avons étendu ces résultats au cas où la fonction $A(x)$ est de signe quelconque, et la connaissance du nombre des zéros nous a permis de généraliser la démonstration *directe* de M. Picard concernant la définition des valeurs singulières du

---

(1) *Integralgleichungen*, *Göttinger Nachrichten*, 1904 et 1905.

(2) *Mathematische Annalen*, Vol. LXIII.

(3) *Journal de Liouville*, t. I.

(4) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, 1908, p. 120.

paramètre à l'aide de certains problèmes du calcul des variations.

La méthode dont nous nous sommes servi nous a encore permis d'établir facilement l'existence d'intégrales *périodiques* pour l'équation (2), dans laquelle $A(x)$ serait une fonction périodique, et de séparer en quelque sorte les valeurs exceptionnelles correspondantes du paramètre.

L'étude des intégrales *doublement périodiques* de l'équation (1), où $A(x, y)$ admet les deux périodes ω et ω' pour x et y respectivement, revient à l'étude de l'équation de Beltrami généralisée

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial U}{\partial u} - F\frac{\partial U}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial U}{\partial v} - F\frac{\partial U}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \lambda B(u, v)U = 0$$

sur un tore. L'existence de pareilles intégrales partout continues dans un rectangle de périodes n'est autre chose que l'existence d'intégrales de l'équation (4) continues sur tout le tore. D'une manière générale on peut se proposer d'étudier l'équation (4) au point de vue de l'existence d'intégrales continues sur une surface fermée quelconque à p trous. En nous inspirant des recherches de M. Picard à ce sujet, qu'il a développées en partie dans son cours de 1908 à la Faculté des Sciences, nous avons appliqué à ce problème aussi une généralisation de la méthode de Schwarz-Picard.

PREMIÈRE PARTIE.

L'EQUATION DIFFÉRENTIELLE $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = 0$.

I. — **Intégrales nulles aux extrémités d'un intervalle.**

1. Lorsqu'on veut déterminer une intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = 0,$$

où $A(x)$ est une fonction finie et intégrable dans un certain intervalle ab, par ses valeurs $y(a)$ et $y(b)$ aux extrémités de cet intervalle, on est conduit ([1]) à une équation de Fredholm

$$(2)\qquad y(x)-\lambda\int_a^b G(x,\xi)\,A(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = y(a)\frac{b-x}{b-a}+y(b)\frac{x-a}{b-a},$$

la fonction $G(x, \xi)$ *symétrique* en x et ξ, étant définie de la manière suivante :

$$G(x,\xi)=\frac{(\xi-a)(b-x)}{b-a} \qquad \text{pour} \qquad \xi\leqq x,$$

$$G(x,\xi)=\frac{(x-a)(b-\xi)}{b-a} \qquad \text{pour} \qquad \xi> x.$$

La théorie des équations intégrales de ce type nous apprend que l'équation (2) admettra *en général* une solution unique. Il peut y avoir exception pour certaines valeurs singulières du paramètre λ. Ces valeurs, si elles existent, sont les racines d'une fonction entière $D(\lambda)$, polynome ou fonction transcendante, que la méthode de M. Fredholm apprend à développer en série de Taylor. Quand on remplace λ par une telle valeur singulière, l'équation (2) n'a pas de solution, à moins qu'il n'y ait une certaine relation entre les deux constantes $y(a)$ et $y(b)$. Au contraire, *l'équation intégrale sans second membre, obtenue en supposant*

$$y(a)=y(b)=0,$$

qui, en général, n'est vérifiée que par la solution $y\equiv 0$, *admet des solutions non identiquement nulles lorsqu'on attribue au paramètre une valeur singulière;* nous désignerons ces solutions par le nom d'*intégrales singulières*.

La fonction définie par l'équation (2) est en général une fonction *méromorphe* de λ, dont les pôles sont précisément les valeurs singulières du paramètre. Suivant que $D(\lambda)$ a un nombre fini ou infini de zéros, les pôles sont en nombre fini ou infini ; mais, la formation effective de la fonction $D(\lambda)$ exigeant des calculs impraticables, on est

---

(1) Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, 1908, p. 100; Hilbert, *Integralgleichungen*, I.

obligé, pour reconnaître l'existence et le nombre des pôles, de recourir à d'autres considérations.

Lorsque la fonction $A(x)$ est *positive* dans l'intervalle ab, l'existence d'un nombre infini de valeurs singulières est assurée grâce au théorème de M. Hilbert. En effet, en posant, avec M. Schmidt,

$$y(x)\sqrt{A(x)} = z(x),$$

l'équation (2) sans second membre est ramenée à une équation intégrale au *noyau* symétrique et *ferme*

$$z(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi)\sqrt{A(x)}\sqrt{A(\xi)}\, z(\xi)\, d\xi = 0.$$

Ce théorème est en défaut quand $A(x)$ peut changer de signe dans l'intervalle ab. C'est ce cas-là que nous nous proposons d'examiner.

2. Tout d'abord il ne peut y avoir de valeurs singulières *complexes*. Nous avons vu qu'à une valeur singulière du paramètre, $\lambda = \lambda_0$, correspond une intégrale singulière de l'équation (1), continue dans l'intervalle ab et s'annulant pour $x = a$ et $x = b$. Cette intégrale satisfait à l'équation

$$y(x) - \lambda_0 \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, A(\xi)\, d\xi = 0.$$

Elle admet par conséquent une dérivée continue dans tout l'intervalle ab, *les extrémités comprises*, puisqu'on a

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_0 \left[\int_x^b \frac{b-\xi}{b-a} A(\xi)\, y(\xi)\, d\xi - \int_a^x \frac{\xi - a}{b-a} A(\xi)\, y(\xi)\, d\xi\right].$$

Cela posé, soient $\alpha + i\beta$ une valeur singulière complexe et $u + iv$ l'intégrale singulière correspondante. On aura

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha A(x) u - \beta A(x) v = 0,$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \beta A(x) u + \alpha A(x) v = 0,$$

d'où l'on tire par une combinaison facile

$$\left[v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right]_a^b - \beta\int_a^b \mathrm{A}(x)(u^2+v^2)\,dx = 0,$$

$$\left[u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx}\right]_a^b - \int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]dx + \alpha\int_a^b \mathrm{A}(x)(u^2+v^2)\,dx = 0.$$

Les parties tout intégrées disparaissent en vertu des conditions aux limites et l'on voit de suite que β est nécessairement nul, puisque l'égalité

$$\int_a^b \mathrm{A}(x)(u^2+v^2)\,dx = 0$$

entraînerait

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} \equiv 0$$

et, par conséquent,

$$u = v = 0.$$

Montrons encore que la fonction $y(x; \lambda)$, en mettant en évidence le paramètre, définie par l'équation (2) ne peut avoir que des pôles *simples*. Soit, en effet,

$$y(x,\lambda) = \frac{y_m(x)}{(\lambda-\lambda_0)^m} + \frac{y_{m-1}(x)}{(\lambda-\lambda_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{y_1(x)}{\lambda-\lambda_0} + \mathrm{Y}(x,\lambda)$$

le développement de cette fonction autour du pôle $\lambda = \lambda_0$ supposé multiple. En portant ce développement dans l'équation (2), il vient, pour $m > 1$,

$$y_m(x) - \lambda_0\int_a^b \mathrm{G}(x,\xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,y_m(\xi)\,d\xi = 0,$$

$$y_{m-1}(x) - \lambda_0\int_a^b \mathrm{G}(x,\xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,y_{m-1}(\xi)\,d\xi = \int_a^b \mathrm{G}(x,\xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,y_m(\xi)\,d\xi,$$

relations équivalentes à

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y_m}{dx^2} + \lambda_0\,\mathrm{A}(x)\,y_m = 0, & y_m(a) = y_m(b) = 0, \\[2mm] \dfrac{d^2y_{m-1}}{dx^2} + \lambda_0\,\mathrm{A}(x)\,y_{m-1} + \mathrm{A}(x)\,y_m = 0, & y_{m-1}(a) = y_{m-1}(b) = 0. \end{cases}$$

On tire de là

$$\left[y_{m-1}\frac{dy_m}{dx} - y_m\frac{dy_{m-1}}{dx}\right]_a^b - \int_a^b A(x)\,y_m^2\,dx = 0,$$

c'est-à-dire simplement

$$\int_a^b A(x)\,y_m^2\,dx = 0.$$

Or, en vertu de la première des équations (3), on a

$$\lambda_0\int_a^b A(x)\,y_m^2\,dx = \int_a^b \left(\frac{dy_m}{dx}\right)^2 dx,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy_m}{dx} \equiv 0;$$

et, comme y_m s'annule pour $x = a$, cette fonction est identiquement nulle. C'est ce que nous avons voulu démontrer.

Ajoutons que, lorsque $A(x) > 0$ pour $a \leqq x \leqq b$, les valeurs singulières ne peuvent pas être négatives; c'est ce qui résulte de la relation

$$\lambda_0\int_a^b A(x)\,y^2\,dx = \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

où y représente l'intégrale singulière correspondant à la valeur singulière $\lambda = \lambda_0$.

3. Nous allons maintenant établir une formule qui nous sera très utile dans la suite.

Considérons une intégrale de l'équation (1), nulle pour une certaine valeur $x = \alpha$ de l'intervalle ab et prenant en un autre point $x = \beta$ du même intervalle une valeur donnée qu'on peut même supposer être fonction continue de λ. Cette intégrale est fournie par l'équation

$$y(x) - \lambda\int_\alpha^\beta G_{\alpha\beta}(x,\xi)\,A(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = y(\beta,\lambda)\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \quad (1).$$

---

(1) Je désigne par $G_{\alpha\beta}(x, \xi)$ la fonction G correspondant à l'intervalle $\alpha\beta$.

Par conséquent, lorsque λ varie entre deux valeurs qui ne comprennent aucune valeur singulière du paramètre, l'intégrale considérée, ainsi que sa dérivée $\frac{dy}{dx}$, sont des fonctions continues de x et λ, pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Nous désignerons cette intégrale par $y(x, \lambda)$ et nous poserons

$$y'(x, \lambda) = \frac{dy}{dx}.$$

Donnons maintenant au paramètre deux valeurs voisines λ et λ'. On aura

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 y(x, \lambda')}{dx^2} + \lambda' \mathrm{A}(x) y(x, \lambda') = 0, \\ (4) \qquad &\frac{d^2 y(x, \lambda)}{dx^2} + \lambda \mathrm{A}(x) y(x, \lambda) = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire par la combinaison déjà employée

$$\begin{aligned} &[y(x, \lambda) y'(x, \lambda') - y(x, \lambda') y'(x, \lambda)]_\alpha^\beta \\ &\quad + (\lambda' - \lambda) \int_\alpha^\beta \mathrm{A}(x) y(x, \lambda) y(x, \lambda')\, dx = 0. \end{aligned}$$

En vertu des hypothèses faites, cette relation peut encore s'écrire

$$(5) \qquad \frac{\dfrac{y'(\beta, \lambda')}{y(\beta, \lambda')} - \dfrac{y'(\beta, \lambda)}{y(\beta, \lambda)}}{\lambda' - \lambda} + \frac{1}{y(\beta, \lambda) y(\beta, \lambda')} \int_\alpha^\beta \mathrm{A}(x) y(x, \lambda) y(x, \lambda')\, dx = 0.$$

Faisons maintenant tendre λ' vers λ; l'intégrale $y(x, \lambda)$ étant *unique*, on aura à la limite

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{y'(\beta, \lambda)}{y(\beta, \lambda)}\right] + \frac{1}{y^2(\beta, \lambda)} \int_\alpha^\beta \mathrm{A}(x) y^2(x, \lambda)\, dx = 0.$$

D'autre part, on a, en vertu de (4),

$$\lambda \int_\alpha^\beta \mathrm{A}(x) y^2(x, \lambda)\, dx = -y(\beta, \lambda) y'(\beta, \lambda) + \int_\alpha^\beta y'^2(x, \lambda)\, dx.$$

Il vient donc finalement, en supposant $\lambda \neq 0$,

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}\frac{y'(\beta,\lambda)}{y(\beta,\lambda)}\right] + \frac{1}{\lambda^2 y^2(\beta,\lambda)}\int_\alpha^\beta y'^2(x,\lambda)\,dx = 0, \tag{6}$$

formule que nous voulions établir.

4. En nous appuyant sur cette formule, nous allons maintenant démontrer l'existence des valeurs singulières et des intégrales qui s'annulent aux extrémités de l'intervalle ab.

Supposons, en premier lieu, que la fonction $A(x)$ change une seule fois de signe dans cet intervalle et qu'on ait, pour préciser,

$$A(x) < 0 \quad \text{pour} \quad a \leqq x \leqq c, \qquad A(x) > 0 \quad \text{pour} \quad c < x < b \qquad (a < c < b).$$

Au point $x = c$ la fonction $A(x)$ s'annule si elle est continue en ce point; mais cette hypothèse n'est pas nécessaire et l'on peut avoir

$$\lim_{\varepsilon=0} A(c-\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon=0} A(c+\varepsilon),$$

pourvu que ces deux limites soient *finies*.

Relativement à chacun de ces intervalles partiels il existe une infinité de valeurs singulières, *négatives* pour l'intervalle ac, positives pour cb. Désignons les premières par l_{-n}, les secondes par l_n $(n = 1, 2, \ldots)$, en les supposant rangées par ordre de grandeur

$$\ldots l_{-n} < \ldots < l_{-2} < l_{-1} < 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_n < \ldots. \tag{7}$$

Faisons la remarque préliminaire qu'une intégrale singulière de l'équation (1) n'est déterminée qu'à un facteur constant près, puisqu'elle satisfait à l'équation *homogène*

$$y(x) - \lambda \int_a^b G(x,\xi)\,A(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = 0.$$

Soit $Cy(x)$ cette intégrale; on pourra disposer du coefficient arbitraire C de manière à attribuer à l'intégrale une valeur donnée quelconque, par exemple *un*, pour $x = c$. En effet, on ne peut avoir $y(c) = 0$, la valeur de λ ne pouvant être en même temps singulière pour ac et cb. On est donc conduit à examiner s'il existe des intégrales nulles en a et en b et prenant la valeur *un* pour $x = c$.

Lorsque λ varie entre deux termes consécutifs de la suite (7), il existe pour chaque valeur de ce paramètre une intégrale et une seule s'annulant en a et égale à *un* pour $x = c$; désignons-la par $\varphi(x, \lambda)$. Soit de même $\psi(x, \lambda)$ l'intégrale parfaitement déterminée qui s'annule pour $x = b$ et prend la valeur *un* au point $x = c$.

La fonction $u(x, \lambda)$ définie de la façon suivante,

$$\begin{aligned} u(x,\lambda) &= \varphi(x,\lambda) \qquad \text{pour} \qquad a \leqq x \leqq c, \\ u(x,\lambda) &= \psi(x,\lambda) \qquad \text{pour} \qquad c \leqq x \leqq b, \end{aligned}$$

représente une intégrale de l'équation (1) continue dans l'intervalle ab et admettant dans cet intervalle une dérivée continue, *sauf pour* $x = c$. Nous voulons démontrer qu'entre deux termes consécutifs de la suite (7) *il existe une valeur de* λ *et une seule telle que la fonction* $u(x, \lambda)$ *correspondante ait sa dérivée continue même au point* $x = c$.

En effet, appliquons la formule (6) aux fonctions $\varphi(x, \lambda)$ et $\psi(x, \lambda)$; il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\varphi'(c,\lambda)}{\lambda}\right] + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^c \varphi'^2(x,\lambda)\,dx = 0, \\ \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\psi'(c,\lambda)}{\lambda}\right] - \frac{1}{\lambda^2}\int_c^b \psi'^2(x,\lambda)\,dx = 0, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{d}{d\lambda}\,\frac{\psi'(c,\lambda) - \varphi'(c,\lambda)}{\lambda} > 0. \tag{8}$$

La fonction

$$\frac{\psi'(c,\lambda) - \varphi'(c,\lambda)}{\lambda}$$

est donc constamment croissante avec λ; je dis qu'elle est continue lorsque λ varie dans un intervalle de la suite (7), qu'elle passe de $-\infty$ à $+\infty$ et que par conséquent *elle s'annule une fois et une seule* dans cet intervalle.

Supposons, pour fixer les idées, $\lambda > 0$ et compris entre l_{n-1} et l_n. La fonction $\varphi(x, y)$ est finie et continue par rapport à λ, pour $a \leqq x \leqq c$, et la formule

$$\varphi'(c,\lambda) = \frac{1}{c-a} - \frac{\lambda}{c-a}\int_a^c \mathrm{A}(\xi)(\xi-a)\varphi(\xi,\lambda)\,d\xi$$

montre que $\varphi'(c,\lambda)$ reste finie et continue pour $l_{n-1} \leqq \lambda \leqq l_n$.

Il en est de même de $\psi(x,\lambda)$ et par conséquent de $\psi'(c,\lambda)$ tant que λ diffère des valeurs singulières l_{n-1} et l_n.

Étudions maintenant $\psi'(c,\lambda)$ dans le voisinage d'une valeur singulière λ_0. Cette valeur étant un pôle *simple* de $\psi(x,\lambda)$, on a autour de $\lambda = \lambda_0$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\Psi(x)}{\lambda-\lambda_0} + \psi_0(x) + (\lambda-\lambda_0)\Psi_1(x,\lambda).$$

En portant ce développement dans la relation

$$\psi(x,\lambda) - \lambda\int_c^b \mathrm{G}_{cb}(x,\xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,\psi(\xi,\lambda)\,d\xi = \frac{b-x}{b-c},$$

il vient

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \lambda_0\mathrm{A}(x)\Psi = 0, \qquad \Psi(c) = \Psi(b) = 0,$$

$$\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + \lambda_0\mathrm{A}(x)\psi_0 + \mathrm{A}(x)\Psi = 0, \qquad \psi_0(c) = 1, \qquad \psi_0(b) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\Psi'(c) = -\int_c^b \mathrm{A}(x)\,\Psi^2(x)\,dx < 0 \quad (^1);$$

on a d'ailleurs

$$\psi'(c,\lambda) = \frac{\Psi'(c)}{\lambda-\lambda_0} + \psi_0'(c) + (\lambda-\lambda_0)\Psi_1'(c,\lambda),$$

ce qui prouve que $\psi'(c,\lambda)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant que $\lambda-\lambda_0$ tend vers zéro par valeurs négatives ou positives.

Notre proposition est donc démontrée.

Remarque. — Si la fonction $\mathrm{A}(x)$ est discontinue au point $x = c$, il en est de même de la dérivée seconde $y''(x,\lambda)$ en ce point. L'intégrale

(1) Il est essentiel de remarquer que $\Psi(x)$ n'est pas identiquement nulle; en effet, il ne peut exister, pour $\lambda = \lambda_0$, une intégrale prenant la valeur *un* en c et nulle en b, car, en désignant par $z(x)$ l'intégrale singulière de l'intervalle cb correspondant à λ_0, on devrait avoir $z'(c) = 0$ et par conséquent $z \equiv 0$.

singulière aura une tangente unique au point c, mais non une courbure déterminée.

5. Nous allons maintenant nous affranchir de toute hypothèse sur le signe de la fonction $A(x)$.

Soit c un point compris entre a et b. Supposons qu'on ait établi l'existence de valeurs singulières h_n ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) pour l'intervalle ac et de valeurs singulières k_n ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) pour cb. Avec tous ces nombres et avec le nombre zéro, rangés par ordre de grandeur croissante, formons une suite unique; une analyse toute semblable à celle qui précède nous permettra de démontrer qu'entre deux termes consécutifs de cette suite il existe une valeur singulière relative à l'intervalle total ab et une seule

En effet, le paramètre λ variant entre deux termes consécutifs de la suite formée par les h_n et les k_n, les intégrales désignées précédemment par $\varphi(x, \lambda)$ et $\psi(x, \lambda)$ existent et vérifient la relation

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\psi'(c, \lambda) - \varphi'(c, \lambda)}{\lambda}\right] > 0.$$

La fonction de λ

$$\frac{\psi'(c, \lambda) - \varphi'(c, \lambda)}{\lambda}$$

continue tant que λ diffère des h_n et des k_n est donc croissante avec λ. Pour connaître les valeurs qu'elle prend aux extrémités de l'intervalle de variation du paramètre, il nous faut distinguer plusieurs cas :

1° Cet intervalle est limité par deux nombres de la même espèce, par exemple les deux nombres h_{n-1} et h_n. La quantité $\psi'(c, \lambda)$ reste alors finie; et l'on a pour $\varphi'(c, \lambda)$ le développement

$$\varphi'(c, \lambda) = \frac{\Phi'(c)}{\lambda - h_n} + \varphi'_0(c) + \ldots$$

avec

$$\Phi'(c) = \int_a^c A(x)\,\Phi^2(x)\,dx.$$

Comme d'autre part la fonction $\Phi(x)$ satisfait aux relations

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + h_n A(x)\Phi = 0, \qquad \Phi(a) = \Phi(c) = 0,$$

on pourra écrire

$$\Phi'(c) = \frac{1}{h_n}\int_a^c \Phi'^2(x)\,dx,$$

ce qui prouve que $\Phi'(c)$ est du signe de h_n, c'est-à-dire de même signe que λ. La quantité

$$-\frac{\varphi'(c,\lambda)}{\lambda} = -\frac{\Phi'(c)}{\lambda}\,\frac{1}{\lambda - h_n} + \ldots$$

est donc très grande en valeur absolue et *positive* pour $\lambda = h_n - \varepsilon$, ε étant un infiniment petit positif; on verra de la même façon que $-\frac{\varphi'(c,\lambda)}{\lambda}$ est voisine de $-\infty$ pour $\lambda = h_{n-1} + \varepsilon$.

2° L'intervalle de variation du paramètre est limité par deux nombres d'espèce différente : $h_n < \lambda < k_m$. Dans le voisinage de h_n, $\psi'(c,\lambda)$ reste finie et $-\frac{\varphi'(c,\lambda)}{\lambda}$ est très grande et négative ; au contraire, dans le voisinage de $k_m(\lambda = k_m - \varepsilon)$, c'est $\varphi'(c,\lambda)$ qui reste finie, tandis que $\frac{\psi'(c,\lambda)}{\lambda}$ tend vers $+\infty$.

3° L'intervalle est limité par le nombre *zéro* et par h_1. Lorsque λ a une valeur positive et très petite, la différence $\psi'(c,\lambda) - \varphi'(c,\lambda)$ est sensiblement égale à $-\frac{1}{b-c} - \frac{1}{c-a}$ et le rapport $\frac{\psi'(c,\lambda) - \varphi'(c,\lambda)}{\lambda}$ est voisin de $-\infty$. D'ailleurs nous venons de voir qu'il tend vers $+\infty$ pour $\lambda = h_1 - \varepsilon$.

On voit donc que dans tous les cas ce rapport, constamment croissant avec λ, passe de $-\infty$ à $+\infty$ quand le paramètre décrit l'intervalle considéré ; il s'annule par conséquent une fois et une seule dans cet intervalle, pour une valeur $\lambda = \lambda_n$: λ_n est une valeur singulière relativement à l'intervalle total ab [1].

Les propositions établies dans les n^{os} 4 et 5 *démontrent l'existence d'une infinité de valeurs singulières relatives à l'intervalle ab, pourvu que*

[1] Nous faisons abstraction du cas où l'on aurait $h_m = k_n$, qui peut être considéré comme cas limite; il est clair que h_m est alors une valeur singulière pour ab.

la fonction $A(x)$, *finie et intégrable dans cet intervalle, n'y change de signe qu'un nombre limité de fois.*

6. Quant au calcul des valeurs singulières, le fait que la fonction $A(x)$ peut avoir un signe quelconque dans ab n'y apporte pas de difficulté sérieuse.

Reprenons la fonction $y(x, \lambda)$ définie par l'équation (2), c'est-à-dire l'intégrale de (1) déterminée par ses valeurs $y(a), y(b)$ à l'extrémité de l'intervalle considéré. Cette intégrale est une fonction méromorphe de λ dont les pôles, réels et simples, se trouvent exclusivement parmi les valeurs singulières dont l'existence a été établie. Réciproquement, toute valeur singulière est un pôle de $y(x, \lambda)$. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, les valeurs $y(a)$ et $y(b)$ devraient vérifier une certaine relation ([1]) qu'on peut toujours supposer non satisfaite. Il s'ensuit que le développement autour de $\lambda = 0$ de la fonction $y(x, \lambda)$

$$(9) \qquad y(x, \lambda) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \ldots + \lambda^n u_n(x) + \ldots$$

aura pour rayon de convergence la plus petite des quantités λ_1 et $|\lambda_{-1}|$, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les valeurs singulières positives et par $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \ldots, \lambda_{-n}, \ldots$ les valeurs singulières négatives de ab. Le développement (9) étant uniformément convergent pour $a \leqq x \leqq b$, lorsque λ est moindre en valeur absolue que le rayon de convergence de cette série, portons-le dans l'équation (2). On aura alors, pour calculer les coefficients $u_n(x)$, les relations récurrentes

$$u_0(x) = y(a)\frac{b-x}{b-a} + y(b)\frac{x-a}{b-a},$$

$$u_1(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, A(\xi)\, u_0(\xi)\, d\xi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_n(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, A(\xi)\, u_{n-1}(\xi)\, d\xi.$$

([1]) On devrait avoir $y(a)\, z'(a) = y(b)\, z'(b)$, z étant l'intégrale singulière correspondante.

Il y a deux cas à distinguer :

1° Les deux nombres λ_1 et $|\lambda_{-1}|$ sont inégaux; soit, pour fixer les idées, $\lambda_1 < |\lambda_{-1}|$. Comparons le développement (9) avec le suivant,

$$y(x,\lambda) - \frac{y_1(x)}{1-\frac{\lambda}{\lambda_1}} = v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \ldots,$$

qui converge dans un cercle plus grand. On a d'une manière générale

$$u_n(x) = \frac{y_1(x)}{\lambda_1^n} + v_n(x), \tag{10}$$

d'où l'on déduit (¹)

$$\frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)} = \lambda_1 \frac{y_1(x) + \lambda_1^n v_n(x)}{y_1(x) + \lambda_1^{n+1} v_{n+1}(x)}.$$

Faisons maintenant tendre n vers l'infini. Comme la série dont le terme général est $\lambda_1^n v_n(x)$ est convergente, cette expression tend vers zéro et l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)} = \lambda_1.$$

Le rapport $\frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)}$ tend donc vers une limite indépendante de x, et qui est précisément la valeur singulière λ_1.

De la formule (10) on tire d'ailleurs

$$\lim_{n=\infty} \lambda_1^n u_n(x) = y_1(x),$$

$y_1(x)$ n'étant autre chose que l'intégrale singulière correspondant à λ_1.

2° Supposons au contraire qu'on ait $\lambda_{-1} = -\lambda_1$. En retranchant de $y(x,\lambda)$ les parties principales relatives aux pôles simples λ_1 et λ_{-1},

---

(¹) On ne peut supposer $u_n(x) \equiv 0$, car cette hypothèse entraînerait $u_0(x) \equiv 0$.

on a

$$y(x,\lambda) - \frac{y_1(x)}{1-\frac{\lambda}{\lambda_1}} - \frac{y_{-1}(x)}{1+\frac{\lambda}{\lambda_1}} = w_0(x) + \lambda w_1(x) + \ldots + \lambda^n w_1(x) + \ldots$$

cette dernière série convergeant pour $|\lambda| > \lambda_1$. Il vient donc

$$u_{2n}(x) \quad = \frac{y_1(x) + y_{-1}(x)}{\lambda_1^{2n}} + w_{2n}(x),$$

$$u_{2n+1}(x) = \frac{y_1(x) - y_{-1}(x)}{\lambda_1^{2n+1}} + w_{2n+1}(x)$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{2n}(x)}{u_{2n+2}(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{u_{2n+1}(x)}{u_{2n+3}(x)} = \lambda_1^2$$

et

$$\lim_{n=\infty} \lambda_1^{2n} u_{2n}(x) \quad = y_1(x) + y_{-1}(x),$$

$$\lim_{n=\infty} \lambda_1^{2n+1} u_{2n+1}(x) = y_1(x) - y_{-1}(x),$$

relations qui font connaître les valeurs singulières et les intégrales correspondantes.

Comme ces deux cas sont les seuls possibles, on voit que les réciproques des propositions que nous venons d'établir sont exactes.

Le même procédé sert à calculer les valeurs singulières suivantes et les intégrales qui s'y rapportent.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait $\lambda_1 < |\lambda_{-1}|$. Posons

$$(11) \quad v(x,\lambda) = y(x,\lambda) - \frac{y_1(x)}{1-\frac{\lambda}{\lambda_1}} = v_0(x) + \lambda v_1(x) + \ldots + \lambda^n v_n(x) + \ldots.$$

La fonction $v(x,\lambda)$, holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que λ_1, satisfait à l'équation intégrale

$$v(x,\lambda) - \lambda \int_a^b \mathrm{G}(x,\xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,v(\xi,\lambda)\,d\xi = y(a)\frac{b-x}{b-a} + y(b)\frac{x-a}{b-a} - y_1(x).$$

On pourra donc calculer les fonctions $v_n(x)$ par les relations de récurrence

$$v_0(x) = \frac{(b-x)y(a)+(x-a)y(b)}{b-a} - y_1(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$v_n(x) = \int_a^b G(x,\xi)A(\xi)v_{n-1}(\xi)\,d\xi.$$

La fonction $v_n(x)$ n'est pas identiquement nulle, parce que $v_0(x)$ ne l'est pas; on peut donc appliquer à la série (11) la discussion précédente. L'un des deux rapports

$$\frac{v_n(x)}{v_{n+1}(x)}, \qquad \frac{v_{2n}(x)}{v_{2n+2}(x)}$$

aura une limite bien déterminée quand u augmentera indéfiniment; cette limite fournira la valeur singulière (ou les valeurs singulières) de module immédiatement supérieur à λ_1. On trouvera ensuite, comme précédemment, la ou les intégrales correspondantes.

Il est clair qu'on pourra ainsi continuer indéfiniment.

7. Nous allons maintenant établir une propriété importante des intégrales de l'équation (1).

Désignons par $Y(x,\lambda)$ celle de ces intégrales qui s'annule pour $x=a$ et dont la dérivée prend en ce point la valeur *un* (1).

Cherchons le nombre des zéros de $Y(x,\lambda)$ compris entre $x=a$ et $x=b$. Ce nombre dépend évidemment de la valeur attribuée à λ.

Tout d'abord il est clair que, si l'on fait varier infiniment peu ce paramètre, le nombre de ces zéros ne peut changer, sauf lorsque λ traverse une valeur singulière. En effet, soit λ_0 une valeur non singulière et faisons varier λ de $\lambda_0-\varepsilon$ à $\lambda_0+\varepsilon$. Comme $Y(b,\lambda_0)$ est différent de zéro et que $Y(b,\lambda)$ est continue par rapport à λ, on pourra prendre ε

---

(1) Cette intégrale est la solution de *l'équation de Volterra*

$$Y+\lambda\int_a^x A(\xi)(x-\xi)Y(\xi)\,d\xi = x-a.$$

est donc une fonction *entière* de λ.

suffisamment petit pour que $Y(b, \lambda)$ garde un signe constant. Si donc le nombre dont il s'agit a changé, il n'a pu varier que d'un nombre pair; il y aurait donc une valeur λ_1 comprise entre $\lambda_0 - \varepsilon$ et $\lambda_0 + \varepsilon$ à laquelle correspondrait une intégrale $Y(x, \lambda_1)$ ayant une *racine double* [1], ce qui est impossible.

En second lieu, lorsque λ traverse en croissant une valeur singulière positive, le nombre des zéros *augmente* d'une unité. En effet, dans le voisinage d'une valeur singulière λ_n, la dérivée $\left(\frac{dY}{dx}\right)_{x=b} = Y'(b, \lambda)$ est différente de zéro. On aura donc la formule suivante, analogue à l'égalité (6) et qu'on établit d'une manière semblable,

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda \frac{Y(b,\lambda)}{Y'(b,\lambda)}\right] = \frac{1}{Y'^2(b,\lambda)} \int_a^b Y'^2(x,\lambda)\, dx,$$

qui montre que le rapport $\frac{Y(b,\lambda)}{Y'(b,\lambda)}$ passe en croissant par la valeur zéro quand λ traverse la valeur singulière positive λ_n; ce qui démontre notre proposition.

La même formule montre que le nombre des zéros augmente encore d'une unité, lorsque λ traverse en décroissant une valeur singulière négative.

Or, pour $\lambda = 0$, on a $Y = x - a$; il résulte donc de ce qui précède que *l'intégrale* $Y(x, \lambda)$ *s'annule n fois dans l'intervalle ab* (extrémités exclues) *quand* λ *est compris entre* λ_n *et* λ_{n+1} *ou entre* λ_{-n} *et* $\lambda_{-(n+1)}$.

Voici une conséquence immédiate de cette proposition.

Tant qu'on a $\lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1$, l'équation (1) admet une intégrale positive et différente de zéro dans tout l'intervalle ab. Désignons, en effet, par u et v deux intégrales déterminées par les conditions

$$u(a) = 0, \qquad u'(a) = 1,$$
$$v(a) = 1, \qquad v'(a) = 0,$$

---

(1) Une intégrale nulle ainsi que sa dérivée en un point $x = c$ vérifierait l'équation de Volterra *sans second membre*

$$Y + \lambda \int_c^x A(\xi)(x - \xi) Y(\xi)\, d\xi = 0.$$

Elle est donc *identiquement nulle*.

et considérons l'intégrale

$$y = u(x) + \varepsilon v(x) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Comme $u(x)$ reste positive (et différente de zéro, sauf pour $x = a$) dans l'intervalle ab et que $v(x)$ est finie dans le même intervalle, il est clair qu'on pourra prendre ε assez petit pour que y reste positive et différente de zéro pour $a \leqq x \leqq b$.

Il n'en est plus de même quand λ atteint la valeur λ_1 (ou λ_{-1}). Dans ce cas $u(x)$ s'annule pour $x = b$, et il résulte des propriétés bien connues des équations différentielles du second ordre que toute autre intégrale de (1) a alors un zéro et un seul dans l'intervalle ab [1].

8. Ces remarques faites, nous allons montrer que les intégrales singulières de l'équation (1) peuvent être considérées comme solutions de certains problèmes du calcul des variations [2].

Posons

$$J_0 = \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx, \qquad J_1 = \int_a^b A(x) y^2 dx,$$

et considérons l'ensemble des fonctions $y(x)$, continues ainsi que leur dérivée première dans l'intervalle ab, s'annulant aux extrémités de cet intervalle et rendant *positive* l'intégrale définie J_1. Je dis que, parmi toutes ces fonctions, c'est l'intégrale singulière $y_1(x)$ qui donnera au rapport $\frac{J_0}{J_1}$ la plus petite valeur, et que cette valeur minima est précisément λ_1.

Comme $\frac{J_0}{J_1}$ ne change pas quand on multiplie y par un facteur constant, on peut supposer $J_1 = 1$; et l'on est conduit à chercher le minimum de J_0 dans l'ensemble des fonctions qui s'annulent pour $x = a$ et $x = b$ et qui donnent à J_1 la valeur *un*.

L'équation d'Euler qui fournit les *extrémales* [3] de ce problème n'est autre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x) y = 0,$$

---

(1) STURM, *Journal de Liouville*, t. I.

(2) *Voir* MASON, *Journal de Jordan*, 1904.

(3) *Voir* par exemple BOLZA, *Calculus of variations*.

λ étant une constante ; pour qu'il y ait des extrémales s'annulant en a et en b, on doit attribuer à λ l'une des valeurs singulières dont l'existence a été établie. Comme on a d'autre part, y étant l'extrémale convenable,

$$\lambda = \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

on voit que le minimum de J_0 ne peut être que λ_1.

Pour l'établir rigoureusement [1], considérons la différence $J_0 - k$, étant un nombre positif inférieur à λ_1 et aussi voisin qu'on veut de cette quantité. Pour toute fonction y satisfaisant aux conditions énumérées, on peut écrire

$$J_0 - k = \int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - kA(x)y^2\right] dx.$$

Or, on a identiquement

$$\left[\frac{d(pu)}{dx}\right]^2 - kA(x)(pu)^2 = \frac{d}{dx}\left(p^2 u\frac{du}{dx}\right) + \left(u\frac{dp}{dx}\right)^2 - p^2 u\left(\frac{d^2 u}{dx^2} + kA(x)u\right),$$

p et u étant des fonctions continues, ainsi que leur dérivée, et u admettant une dérivée seconde dans l'intervalle ab.

Prenons dès lors pour u une intégrale positive et différente de zéro dans ab de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + kA(x)u = 0$$

(nous avons vu que la chose est possible tant que $k < \lambda_1$) ; et déterminons p par la relation $pu = y$. La fonction p est continue dans ab et s'annule aux extrémités de cet intervalle. On a par conséquent, en intégrant,

$$J_0 - k = \int_a^b \left(u\frac{dp}{dx}\right)^2 dx = \int_a^b \left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{u}\frac{du}{dx}\right)^2 dx > 0,$$

c'est-à-dire

$$J_0 > k.$$

Le minimum de J_0 est donc bien la valeur singulière λ_1.

---

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, 1908, p. 111.

9. Avant de passer aux valeurs singulières suivantes, nous devons faire une digression concernant un théorème du calcul des variations.

Supposons qu'on ait à chercher l'*extremum* (maximum ou minimum) de l'intégrale définie

$$J_0 = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right),$$

la fonction inconnue y étant assujettie à prendre des valeurs données pour $x = a$ et $x = b$ et à vérifier en outre les conditions

$$(12) \qquad J_i \equiv \int_a^b G_i(x, y, y')\,dx = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les a_i étant des constantes.

On sait que les *extrémales* de ce problème, c'est-à-dire les fonctions y pouvant donner lieu à un extremum de J_0, sont fournies par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left[\frac{\partial G_i}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G_i}{\partial y'}\right)\right] = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle du second ordre dépend des $n+2$ constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, c_1, c_2$, qu'on détermine en général en écrivant que cette intégrale satisfait à toutes les conditions du problème. Soit $y = f(x)$ l'extrémale ainsi déterminée. Considérons la *seconde variation* de J_0,

$$\delta^2 J_0 = \int_a^b [P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2]\,dx,$$

où l'on a posé

$$\eta = \delta y, \qquad \eta' = \frac{d\eta}{dx} = \delta y',$$

$$P = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{\substack{y=f(x)\\ y'=f'(x)}}, \qquad Q = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\right]_{\substack{y=f(x)\\ y'=f'(x)}}, \qquad R = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right]_{\substack{y=f(x)\\ y'=f'(x)}}.$$

Pour que $y = f(x)$ fournisse effectivement un *minimum* de J_0, il est *nécessaire*, et en général non suffisant, qu'on ait

$$\delta^2 J_0 > 0$$

pour toute fonction η satisfaisant aux conditions

$$(12') \qquad \eta(a) = \eta(b) = 0, \qquad \delta J_i = \int_a^b U_i \eta \, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en posant

$$U_i = \left[\frac{\partial G_i}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G_i}{\partial y'}\right)\right]_{\substack{y=f(x)\\ y'=f'(x)}}.$$

Or, en prenant pour η une fonction deux fois dérivable et en posant $S = P - \frac{dQ}{dx}$, la seconde variation peut être mise sous la forme

$$\delta^2 J_0 = \int_a^b \left[S\eta - \frac{d}{dx}(R\eta')\right]\eta \, dx,$$

ou encore, en vertu des conditions (12'),

$$\delta^2 J_0 = \int_a^b \eta\left[S\eta - \frac{d}{dx}(R\eta') + \sum_{i=1}^{n} \nu_i U_i\right] dx \qquad (\nu_i = \text{const.}).$$

Si donc on pouvait trouver une intégrale η_0 de l'équation

$$(13) \qquad \frac{d}{dx}(R\eta') - S\eta = \sum \nu_i U_i$$

s'annulant en a et en un point $x_0 \leqq b$, et satisfaisant en outre aux conditions

$$\int_a^{x_0} U_i \eta_0 \, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

il est clair qu'on pourrait annuler $\delta^2 J_0$ en prenant

$$\eta = \eta_0 \quad \text{pour} \quad a \leqq x \leqq x_0, \qquad \eta = 0 \quad \text{pour} \quad x_0 \leqq x \leqq b,$$

les conditions (12') étant ainsi satisfaites [1].

---

[1] On démontre que dans ces conditions on peut aussi rendre $\delta^2 J_0 < 0$ (*voir* Kneser, *Mathematische Annalen*, Vol. LV).

Désignons par u_i une intégrale, nulle en a, de l'équation

$$\frac{d}{dx}(R\eta') - S\eta = U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et par u_{n+1} une intégrale, pareillement nulle en a, de l'équation

$$\frac{d}{dx}(R\eta') - S\eta = 0.$$

L'intégrale la plus générale, qui s'annule en a, de l'équation (13), où l'on attribue aux constantes ν_i des valeurs *arbitraires*, est de la forme

$$\eta = \sum_{k=1}^{n+1} \nu_k u_k.$$

Pour qu'on ne puisse avoir

$$\partial^2 J_0 \leqq 0,$$

les conditions (12) étant satisfaites, il est donc *nécessaire* que le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n+1} \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_{n+1} \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$\alpha_{ij} = \int_a^x U_i u_j \, dx,$$

ne s'annule pas pour $a < x \leqq b$. Le système

$$\sum_{k=1}^{n+1} \nu_k u_k(x_0) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \nu_k \int_a^{x_0} U_j u_k \, dx = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (x_0 \leqq b)$$

ne sera alors satisfait que pour $\nu_k \equiv 0$ (¹).

(¹) La condition $\Delta_1 \neq 0$ pour $a < x \leqq b$, jointe à $R > 0$ dans ab, est aussi suffisante pour qu'on ait $\partial^2 J_0 > 0$ (*voir* Mayer, *Mathematische Annalen*, Vol. XIII).

10. Voici une propriété remarquable du déterminant Δ_1. Posons

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \alpha_{pp} & \alpha_{p,p+1} & \ldots & \alpha_{p,n+1} \\ \alpha_{p+1,p} & \alpha_{p+1,p+1} & \ldots & \alpha_{p+1,n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ u_p & u_{p+1} & \ldots & u_{n+1} \end{vmatrix} = \sum_{r=p}^{n+1} u_r U_r^{(p)}.$$

On aura, en posant

$$\Delta'_i = \frac{d\Delta_i}{dx} = \sum_{s=i}^{n+1} u'_s U_s^{(i)},$$

$$\Delta'_p \Delta_{p+1} - \Delta'_{p+1}\Delta_p = \sum_{r=p}^{n+1} \sum_{s=p+1}^{n+1} U_r^{(p)} U_s^{(p+1)} \left(u_s \frac{du_r}{dx} - u_r \frac{du_s}{dx} \right);$$

et comme, d'autre part,

$$R\left(u_s \frac{du_r}{dx} - u_r \frac{du_s}{dx} \right) = \alpha_{rs} - \alpha_{sr},$$

il vient

$$(14) \qquad R(\Delta'_p \Delta_{p+1} - \Delta_p \Delta'_{p+1}) = \sum_{r=p}^{n+1} \sum_{s=p+1}^{n+1} U_r^{(p)} U_s^{(p+1)} (\alpha_{rs} - \alpha_{sr}).$$

D'un autre côté, remarquons qu'on a

$$\sum_{r=p}^{n+1} \alpha_{sr} U_r^{(p)} = 0 \qquad (s = p,\ p+1,\ \ldots,\ n+1) \quad (^1),$$

$$\sum_{s=p+1}^{n+1} \alpha_{rs} U_s^{(p+1)} = 0 \qquad (r = p+1,\ \ldots,\ n+1),$$

$$\sum_{s=p+1}^{n+1} \alpha_{ps} U_s^{(p+1)} = - U_p^{(p)}.$$

La relation (14) devient, par conséquent,

$$R(\Delta'_p \Delta_{p+1} - \Delta'_{p+1}\Delta_p) = \sum_{r=p}^{n+1} U_r^{(p)} \sum_{s=p+1}^{n+1} \alpha_{rs} U_s^{(p+1)} - \sum_{s=p+1}^{n+1} U_s^{(p+1)} \sum_{r=p}^{n+1} \alpha_{sr} U_r^{(p)},$$

---

[1] On doit faire $U_{n+1} = 0$ et $\alpha_{n+1,i} = 0$.

c'est-à-dire simplement

$$R(\Delta'_p \Delta_{p+1} - \Delta'_{p+1} \Delta_p) = -(U_p^{(p)})^2. \tag{15}$$

C'est la formule que nous voulions établir.

11. Revenons maintenant aux valeurs singulières λ_n.

D'une façon générale, y_m étant l'intégrale singulière correspondant à λ_m, disposons du facteur arbitraire qui entre dans l'expression de cette intégrale de manière à avoir

$$\int_a^b A(x)\, y_m^2\, dx = 1;$$

il est clair qu'on a en outre

$$\int_a^b A(x)\, y_i y_j\, dx = 0 \qquad (i \neq j).$$

Posons

$$J_0 = \int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx, \qquad J_1 = \int_a^b A(x)\, y^2\, dx, \qquad \ldots, \qquad J_i = \int_a^b A(x)\, y y_{i-1}\, dx.$$

Nous allons démontrer que, parmi toutes les fonctions y satisfaisant aux conditions

$$y(a) = y(b) = 0, \qquad J_1 = 1, \qquad J_2 = \ldots = J_{n+1} = 0, \tag{E}$$

c'est la fonction y_{n+1} qui donne à l'intégrale J_0 sa valeur minima, laquelle est précisément λ_{n+1}.

Tout d'abord, l'équation des extrémales

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)\, y + A(x) \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i = 0 \tag{16}$$

se réduit ici simplement à

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)\, y = 0, \tag{17}$$

les constantes μ_i étant nulles ; c'est ce qu'on voit de suite, en remarquant que la fonction y_i satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} + \lambda_i \mathrm{A}(x) y_i = 0.$$

De cette équation et de (16) on tire, en tenant compte des conditions imposées à y,

$$\left(y_i \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_i}{dx}\right)_a^b + \mu_i \int_a^b \mathrm{A}(x) y_i^2 \, dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mu_i = 0.$$

Or, pour que l'équation (17) admette une intégrale *s'annulant* en a et en b et satisfaisant aux conditions (E), il faut nécessairement attribuer à λ l'une des valeurs singulières $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$; et il est clair que, pour avoir le *minimum* de J_0, c'est λ_{n+1} qu'il faut choisir.

Démontrons maintenant en toute rigueur que, pour toute fonction y satisfaisant aux conditions (E), on a

$$\int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx > k,$$

k étant inférieur à λ_{n+1} mais aussi voisin qu'on veut de ce nombre.

Ceci revient à démontrer que l'expression

$$\int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - k\mathrm{A}(x) y^2\right] dx$$

est positive, pour toute fonction y satisfaisant aux conditions

$$\int_a^b \mathrm{A}(x) y_1 y \, dx = 0, \quad \int_a^b \mathrm{A}(x) y_2 y \, dx = 0, \quad \ldots, \quad \int_a^b \mathrm{A}(x) y_n y \, dx = 0.$$

C'est le problème traité au n° 19; il suffit d'y faire

$$\eta = y, \quad \mathrm{Q} = 0, \quad \mathrm{R} = 1, \quad \mathrm{P} = -k\mathrm{A}(x), \quad \mathrm{U}_i = \mathrm{A}(x) y_i.$$

L'équation (13) devient ici

$$\frac{d^2 y}{dx} + k\mathrm{A}(x) y = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \mathrm{A}(x) y_i.$$

L'intégrale, nulle en a, de cette équation a la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{k-\lambda_i} y_i + cz \qquad (c = \text{const.}),$$

z vérifiant les relations

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + k\mathrm{A}(x)z = 0, \qquad z(a) = 0.$$

On aura donc

$$u_i = \frac{y_i}{k-\lambda_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad u_{n+1} = z, \qquad \alpha_{ij} = \frac{1}{k-\lambda_j}\int_a^x \mathrm{A}(x) y_i y_j \, dx,$$

$$\alpha_{i,n+1} = \int_a^x \mathrm{A}(x) y_i z \, dx,$$

$$\Delta_p = \frac{1}{(k-\lambda_p)(k-\lambda_{p+1})\ldots(k-\lambda_n)} \delta_p,$$

en posant

$$\delta_p = \begin{vmatrix} \int_a^x \mathrm{A}(x) y_p^2 \, dx & \int_a^x \mathrm{A}(x) y_p y_{p+1} \, dx & \ldots & \int_a^x \mathrm{A}(x) y_p z \, dx \\ \int_a^x \mathrm{A}(x) y_{p+1} y_p \, dx & \int_a^x \mathrm{A}(x) y_{p+1}^2 \, dx & \ldots & \int_a^x \mathrm{A}(x) y_{p+1} z \, dx \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \int_a^x \mathrm{A}(x) y_n y_p \, dx & \int_a^x \mathrm{A}(x) y_n y_{p+1} \, dx & \ldots & \int_a^x \mathrm{A}(x) y_n z \, dx \\ y_p & y_{p+1} & \ldots & z \end{vmatrix}.$$

La formule (15) devient

$$\delta'_p \delta_{p+1} - \delta'_{p+1} \delta_p = -(k-\lambda_p) \begin{vmatrix} \int_a^x \mathrm{A}(x) y_p y_{p+1} \, dx & \ldots & \int_a^x \mathrm{A}(x) y_p z \, dx \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \int_a^x \mathrm{A}(x) y_n y_{p+1} \, dx & \ldots & \int_a^x \mathrm{A}(x) y_n z \, dx \end{vmatrix}^2,$$

qu'on peut écrire, tant que $\delta_{p+1} \neq 0$ et pourvu que $\lambda_n < k < \lambda_{n+1}$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_p}{\delta_{p+1}}\right) < 0.$$

Tout revient maintenant à établir que la fonction δ_1, qui est nulle pour $x = a$, ne s'annule plus dans l'intervalle ab.

A cet effet, supposons que δ_{p+1} s'annule en q points situés entre a et b. Si δ_p ne s'annule en aucun de ces points, δ_p aura exactement $q - 1$ zéros dans ab (a exclu). En effet, le rapport *toujours décroissant* $\frac{\delta_p}{\delta_{p+1}}$ varie alors de $+\infty$ à $-\infty$ dans chaque intervalle partiel déterminé par deux zéros consécutifs de δ_{p+1}, sauf le premier, où il varie de zéro [1] à $-\infty$, et le dernier, où il varie de $+\infty$ à 1.

Si au contraire δ_p a un ou plusieurs zéros communs avec δ_{p+1}, le nombre des zéros de δ_p, dans ab, pourrait être moindre que $q - 1$.

Or, la fonction z s'annule exactement n fois entre a et b (n° 7); il en résulte que δ_n s'annule au plus $n - 1$ fois et, de proche en proche, que δ_1 ne s'annule pas du tout pour $a < x \leqq b$ [2].

12. Il est clair que d'une manière analogue on peut définir les valeurs singulières négatives λ_{-n} et les intégrales correspondantes. Parmi toutes les fonctions y, continues ainsi que leur dérivée dans ab, et vérifiant les conditions

$$y(a) = y(b) = 0,$$

$$\int_a^b A(x) y^2 \, dx = -1, \qquad \int_a^b A(x) y_{-i} y \, dx = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

celle qui donne à l'intégrale

$$\int_a^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

---

(1) Pour $x - a$ très petit, les mineurs de δ_p correspondant aux éléments de la première ligne sont tous du même ordre infinitésimal; par conséquent, l'ordre infinitésimal du rapport $\frac{\delta_p}{\delta_{p+1}}$ est au moins égal à celui de

$$\int_a^x A(x) y_p^2 \, dx.$$

(2) Le raisonnement prouve que δ_q s'annule exactement $q - 1$ fois entre a et b, car, si δ_2 ne s'annulait pas dans ab, le rapport $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ devrait varier en *décroissant* de *zéro* à *un*.

sa valeur minima est l'intégrale singulière $y_{-(n+1)}$ et ce minimum est $-\lambda_{-(n+1)}$.

II. — Autres conditions aux limites.

13. Dans la théorie de la propagation de la chaleur on est conduit à chercher plus généralement des intégrales de l'équation (1) satisfaisant aux conditions

$$(18)\qquad \begin{cases} y(a) - h\,y'(a) = 0, \\ y(b) + \mathrm{H}\,y'(b) = 0, \end{cases}$$

h, H étant des constantes *positives*. En faisant $h = \mathrm{H} = 0$, on retombe sur le problème traité.

L'intégrale de l'équation (1) satisfaisant aux extrémités de l'intervalle *ab* aux conditions

$$\begin{aligned} y(a) - h\,y'(a) &= \alpha, \\ y(b) + \mathrm{H}\,y'(b) &= \beta, \end{aligned}$$

α, β étant des constantes données, résout l'équation intégrale

$$(19)\qquad y(x) - \lambda \int_a^b \mathrm{G}_1(x, \xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = \frac{\alpha(b + \mathrm{H} - x) + \beta(x - a + h)}{b + \mathrm{H} - a + h},$$

où la fonction $\mathrm{G}_1(x, \xi)$ est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_1(x, \xi) &= \frac{(b + \mathrm{H} - \xi)(x - a + h)}{b + \mathrm{H} - a + h} \qquad \text{pour } \xi \geqq x, \\ \mathrm{G}_1(x, \xi) &= \frac{(b + \mathrm{H} - x)(\xi - a + h)}{b + \mathrm{H} - a + h} \qquad \text{pour } \xi \leqq x. \end{aligned}$$

Si dans l'équation (19) on fait $\alpha = \beta = 0$, on est donc conduit à une équation de Fredholm sans second membre n'ayant de solution que lorsqu'on attribue au paramètre λ des valeurs exceptionnelles. La fonction y définie par l'équation (19) est méromorphe en λ et, α et β étant *quelconques*, admet *toutes* ces valeurs exceptionnelles comme pôles.

On démontre, comme au n° 2 du premier Chapitre, que ces pôles ne peuvent être que *réels* et *simples*. S'il y avait une valeur exceptionnelle complexe $\lambda' + i\lambda''$ on aurait, en désignant par $u + iv$ l'intégrale correspondante,

$$\lambda'' \int_a^b A(x)(u^2 + v^2)\, dx = 0,$$

$$\lambda' \int_a^b A(x)(u^2 + v^2)\, dx - \int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2\right] dx$$
$$- h[u'^2(a) + v'^2(a)] - H[u'^2(b) + v'^2(b)] = 0,$$

d'où l'on déduit que λ'' est nécessairement nul.

De même, si la solution y de l'équation (19) admettait un pôle multiple λ_0, on serait conduit, en désignant par $\varphi(x)$ le coefficient de la plus haute puissance de $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$ dans le développement de y autour de ce pôle, à l'équation

$$\int_a^b \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx + H\varphi'^2(b) + h\varphi'^2(a) = 0,$$

ce qui entraîne $\varphi(x) \equiv 0$.

Démontrons maintenant l'existence effective de ces valeurs exceptionnelles.

A cet effet, considérons d'abord le cas particulier $H = 0$, c'est-à-dire proposons-nous de rechercher les intégrales z de l'équation (1) satisfaisant aux conditions

$$(20) \qquad \begin{cases} z(a) - h z'(a) = 0, \\ z(b) = 0. \end{cases}$$

Comme une pareille intégrale n'est déterminée qu'à un facteur constant près, nous pouvons écrire ces conditions

$$z(a) = h, \qquad z'(a) = 1, \qquad z(b) = 0.$$

Faisons d'abord abstraction de la dernière de ces conditions; les deux premières déterminent une intégrale z.

Désignons encore par y l'intégrale déterminée par les conditions

$$y(a) = 0, \qquad y'(a) = 1.$$

Entre ces intégrales on a la relation facile à établir

$$\left(y\frac{dz}{dx} - z\frac{dy}{dx}\right)_a^b = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des conditions initiales et en mettant en évidence le paramètre λ dont dépendent les intégrales y et z,

$$(21) \qquad y(b, \lambda)\, z'(b, \lambda) - z(b, \lambda)\, y'(b, \lambda) = -h.$$

Donnons à λ successivement deux valeurs *singulières* λ_n et λ_{n+1}, dont nous avons établi l'existence dans le Chapitre précédent. On aura

$$y(b, \lambda_n) = y(b, \lambda_{n+1}) = 0.$$

D'autre part, en vertu de ce que nous avons établi au nº 7, les dérivées $y'(b, \lambda_n)$ et $y'(b, \lambda_{n+1})$ *sont de signe contraire;* il en est donc de même des quantités $z(b, \lambda_n)$ et $z(b, \lambda_{n+1})$. Or, $z(b, \lambda)$ étant une fonction continue de λ, cette fonction doit par conséquent s'annuler *au moins* une fois pour $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$. D'ailleurs, la même formule (21) montre qu'entre deux valeurs consécutives de λ annulant $z(b, \lambda)$, il existe au moins une valeur *singulière* [c'est-à-dire une valeur de λ annulant $y(b, \lambda)$]; de sorte qu'entre λ_n et λ_{n+1} il existe une valeur et une seule de λ pour laquelle on a $z(b, \lambda) = 0$ (¹).

Le problème particulier $H = 0$ étant ainsi résolu, soient

$$\lambda'_{-m}, \quad \ldots, \quad \lambda'_{-2}, \quad \lambda'_{-1}, \quad \lambda'_1, \quad \lambda'_2, \quad \ldots, \quad \lambda'_m, \quad \ldots$$

les valeurs qu'il faut attribuer au paramètre pour que l'équation (1) admette une intégrale satisfaisant aux conditions (20); et revenons au cas général.

La formule (6), convenablement modifiée et appliquée à l'intégrale z déterminée par les conditions initiales $z(a) = h$, $z'(a) = 1$, devient

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}\frac{z'(b)}{z(b)}\right] + \frac{1}{\lambda^2 z^2(b)}\left[\int_a^b \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx + h\right] = 0,$$

(¹) Il y a exception pour l'intervalle $(\lambda_{-1}, \lambda_1)$ dans lequel se trouvent deux valeurs pareilles, l'une positive, l'autre négative.

qu'on peut encore écrire

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{1}{\lambda}\left[\frac{z'(b)}{z(b)}+\frac{1}{\mathrm{H}}\right]\right\}+\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{1}{\mathrm{H}}+\frac{h}{z^2(b)}+\frac{1}{z^2(b)}\int_a^b\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx\right]=0.$$

Cette formule, valable tant que $z(b)\neq 0$, c'est-à-dire pour $\lambda\neq\lambda'_n(n=\pm 1,\pm 2,\ldots)$, prouve que l'expression

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{z'(b)}{z(b)}+\frac{1}{\mathrm{H}}\right]$$

décroît constamment lorsque λ varie de λ'_m à λ'_{m+1}, par exemple; comme elle devient infinie aux limites de cet intervalle et qu'elle est continue pour $\lambda'_m<\lambda<\lambda'_{m+1}$, il est clair ([1]) qu'elle varie de $+\infty$ à $-\infty$ et que, par conséquent, elle s'annule une fois et une seule. Ceci établit l'existence, en nombre infini, des valeurs exceptionnelles auxquelles correspondent des intégrales satisfaisant aux conditions (18).

Quant au calcul de ces valeurs exceptionnelles, il est clair que la méthode développée au n° 6 est encore applicable.

14. Proposons-nous encore d'intégrer l'équation (1) moyennant les conditions aux limites

$$y'(a)=0,\qquad y'(b)=0, \tag{22}$$

qui correspondent, dans le problème de propagation de la chaleur auquel nous faisions allusion au commencement du n° 13, au cas où il n'y a pas de rayonnement vers le dehors.

On peut considérer les conditions (22) comme la limite des conditions (18) pour $h=\mathrm{H}=\infty$.

Remarquons tout d'abord qu'il n'y aurait aucune difficulté à traiter le cas où l'une de ces quantités, soit H, tendrait vers l'infini; on n'au-

---

([1]) Il est d'ailleurs aisé de le vérifier directement. Dans le voisinage de $\lambda=\lambda'_n$ la fonction z admet le développement $z=z_0+(\lambda-\lambda'_n)z_1+\ldots$, les fonctions $z_0, z_1, \ldots$ vérifiant les conditions initiales $z_0(a)=h$, $z'_0(a)=1$, $z_0(b)=0$, $z_1(a)=z'_1(a)=0$, et l'on trouve facilement

$$z_1(b)\,z'_0(b)=-\frac{h+\int_a^b\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}{\lambda'_n},\qquad \frac{1}{\lambda}\frac{z'(b)}{z(b)}=\frac{1}{\lambda(\lambda-\lambda'_n)}\,\frac{z'_0(b)+\ldots}{z_1(b)+\ldots}.$$

rait qu'à remplacer, dans l'équation (19), la fonction $G_1(x, \xi)$ et le second membre par leurs limites pour $H = \infty$.

Il n'en est pas ainsi lorsque h et H tendent simultanément vers l'infini, puisque la fonction $G_1(x, \xi)$ cesse d'exister.

Pour traiter ce cas, nous supposerons $H = h$ et nous ferons augmenter h indéfiniment.

Les expressions qui définissent la fonction $G_1(x, \xi)$ peuvent s'écrire

$$G_1(x, \xi) = \frac{h}{2} + \frac{\dfrac{(b-x)(\xi-a)}{h} + \dfrac{b-a}{2} - (x-\xi)}{2 + \dfrac{b-a}{h}} \qquad \text{pour } \xi \leqq x,$$

$$G_1(x, \xi) = \frac{h}{2} + \frac{\dfrac{(b-\xi)(x-a)}{h} + \dfrac{b-a}{2} - (\xi-x)}{2 + \dfrac{b-a}{h}} \qquad \text{pour } \xi \geqq x.$$

Cela étant, l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0,$$

vérifiant les conditions $u(a) - hu'(a) = \alpha h$, $u(b) + hu'(b) = \beta h$, est donnée par la formule

$$u = \int_a^b G_1(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi + \frac{\alpha(b-x) + \beta(x-a) - \dfrac{\alpha+\beta}{2}(b-a)}{\dfrac{b-a}{h} + 2} + h\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Si maintenant la fonction donnée $f(x)$ satisfait à la relation

$$\int_a^b f(x)\, dx + \alpha + \beta = 0,$$

on pourra retrancher de la fonction $G_1(x, \xi)$ la quantité $\frac{h}{2}$ qui est sa partie principale dans le développement autour de $h = \infty$; dans l'expression qui reste on pourra alors faire croître h indéfiniment.

Le résultat auquel on parvient ainsi est le suivant :

L'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0,$$

vérifiant les conditions aux limites

$$u'(a) = -\alpha, \qquad u'(b) = \beta,$$

et en supposant satisfaite la relation

$$\int_a^b f(x)\, dx + \alpha + \beta = 0,$$

est donnée par la formule

$$u = \int_a^b G'_1(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \frac{\alpha(b - x) + \beta(x - a)}{2} + C,$$

où l'on a posé

$$G'_1(x, \xi) = -\frac{x - \xi}{2} \qquad \text{pour } \xi \leqq x,$$

$$G'_1(x, \xi) = -\frac{\xi - x}{2} \qquad \text{pour } \xi \geqq x.$$

On a ajouté la constante C qui ne change évidemment rien, ni à l'équation, ni aux conditions sur le bord.

Ce résultat nous permet maintenant de ramener à une équation intégrale le problème posé au début de ce numéro. Il est clair, en effet, que l'intégration de l'équation (1) satisfaisant aux conditions

$$y'(a) = -\alpha, \qquad y'(b) = \beta$$

sera donnée par l'équation

$$(23) \quad y(x) - \lambda \int_a^b G'_1(x, \xi) A(\xi) y(\xi)\, d\xi = \frac{\alpha(b - x) + \beta(x - a)}{2} + C,$$

C n'étant plus cette fois une constante arbitraire, *mais choisie de façon que y satisfasse à la condition*

$$(24) \qquad \lambda \int_a^b A(x) y(x)\, dx + \alpha + \beta = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$\int_a^b \mathrm{A}(x)\,dx = \mathrm{M}, \qquad \frac{\alpha(b-x)+\beta(x-a)}{2} = k(x),$$

$$\mathrm{G}'_1(x,\xi) - \frac{1}{\mathrm{M}}\int_a^b \mathrm{G}'_1(x,\xi)\,\mathrm{A}(x)\,dx = \mathrm{H}(x,\xi),$$

$$k(x) - \frac{1}{\mathrm{M}}\int_a^b k(x)\,\mathrm{A}(x)\,dx = l(x).$$

En déterminant la constante C par la relation (24), *on sera conduit finalement à l'équation intégrale*

$$(25) \qquad y(x) - \lambda\int_a^b \mathrm{H}(x,\xi)\,\mathrm{A}(\xi)\,y(\xi)\,d\xi = l(x) - \frac{\alpha+\beta}{\mathrm{M}\lambda} \quad [1].$$

Il est facile de voir que le second membre de cette équation ne s'annule, quel que soit x, que lorsqu'on a $\alpha = \beta = 0$. Les pôles de $y(x)$ coïncident donc avec les valeurs exceptionnelles de λ auxquelles correspondent des intégrales satisfaisant aux conditions (22). Ces pôles sont réels et simples; ils forment une suite infinie. La démonstration est entièrement semblable à celle que nous avons développée au n° 13.

Remarquons cependant que, pour démontrer qu'un pôle λ_0 est simple, on doit supposer $\lambda_0 \neq 0$. Or $\lambda = 0$ est évidemment un pôle; c'est un pôle simple, comme il résulte de la forme du second membre de (25); mais ceci exige essentiellement qu'on ait $\mathrm{M} \neq 0$, comme nous l'avons tacitement supposé en établissant la formule (25).

Il résulte de ce qui précède que, pour calculer les valeurs exceptionnelles et les intégrales satisfaisant aux conditions (22), on doit partir du développement suivant de la fonction y définie par l'équation intégrale (25) :

$$y = -\frac{\alpha+\beta}{\mathrm{M}\lambda} + y_0(x) + \lambda y_1(x) + \ldots.$$

Qu'arrive-t-il lorsque M est nul? La formule (24) ne déterminera

---

[1] Réciproquement, il est aisé de remonter de l'équation (25) à l'équation (1) et aux conditions sur le bord.

plus C; en y remplaçant $y(x)$ par sa valeur tirée de (23), on lui donnera simplement la forme nouvelle

$$(24') \quad \alpha+\beta+\lambda\int_a^b A(x)k(x)\,dx+\lambda^2\int_a^b\int_a^b G'_1(\xi,x)\,A(x)\,A(\xi)\,y(x)\,dx\,d\xi=0.$$

C'est sous cette forme qu'elle déterminera la constante C, *si la quantité*

$$M_1=\int_a^b\int_a^b G'_1(x,\xi)\,A(x)\,A(\xi)\,dx\,d\xi$$

est différente de zéro. En posant

$$H_1(x,\xi)=G'_1(x,\xi)-\frac{1}{M_1}\int_a^b\int_a^b G'_1(x,\xi')\,G'_1(\xi',\xi)\,A(x)\,A(\xi')\,dx\,d\xi',$$

$$k(x)-\frac{1}{M_1}\int_a^b\int_a^b G'_1(x,\xi)\,A(x)\,A(\xi)\,k(\xi)\,dx\,d\xi=l_1(x),$$

on sera conduit à l'équation intégrale

$$y(x)-\lambda\int_a^b H_1(x,\xi)\,A(\xi)\,y(\xi)\,d\xi=l_1(x)-\frac{\displaystyle\int_a^b A(x)\,k(x)\,dx}{\lambda M_1}-\frac{\alpha+\beta}{M_1\lambda^2}.$$

La valeur $\lambda=0$ est donc cette fois un *pôle double* de $y(x)$; et l'on devra tenir compte de cette circonstance dans le calcul des pôles.

On continuera de la même façon si l'on a aussi $M_1=0$; et ainsi de suite.

15. Une méthode entièrement pareille nous permettra de traiter le problème des intégrales *périodiques* de l'équation (1).

Notre point de départ sera l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2}+f(x)=0,$$

moyennant les conditions

$$(26) \qquad \begin{cases} u(a)=u(b), \\ u'(a)=u'(b)+k \qquad (k=\text{const.}). \end{cases}$$

Il est clair que le problème ne sera possible que si la fonction $f(x)$

satisfait à la relation

$$\int_a^b f(x) = k.$$

Cette relation étant supposée remplie, l'intégrale cherchée est donnée par la formule ([1])

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + C \qquad (\text{C const. arbitraire}).$$

Il suffira maintenant d'énoncer le résultat :

L'intégrale de l'équation (1) *satisfaisant aux conditions* (26) *est la solution d'une équation de Fredholm, dont le second membre s'annule avec* k. *Le point* $\lambda = 0$ *est un pôle de cette solution, dont l'ordre de multiplicité dépend de la fonction* $A(x)$.

En particulier, si la quantité

$$\int_a^b A(x)\, dx$$

est différente de zéro, le pôle $\lambda = 0$ est simple. Quant aux autres pôles, ils ne peuvent être que *réels* et *simples*.

A ces pôles, que nous appellerons valeurs *caractéristiques*, correspondent des intégrales satisfaisant aux relations

$$y(a) = y(b),$$
$$y'(a) = y'(b).$$

Par conséquent, *si la fonction* $A(x)$ *admet la période* $b - a$, *ces intégrales admettront la même période*.

Pour démontrer l'existence d'une infinité de valeurs caractéristiques, établissons brièvement une formule analogue à (6).

Tant que λ est différent des valeurs *singulières* λ_n du premier Chapitre, il existe une intégrale et une seule de l'équation (1) prenant la valeur *un* pour $x = a$ et $x = b$. Désignons-la par $z(x, \lambda)$; c'est une fonction continue de λ, pour $\lambda \neq \lambda_n$. La marche suivie au n° 3 conduit

([1]) La fonction $G(x, \xi)$ est celle que nous avons définie au n° 1.

ici à la relation

$$\frac{d}{d\lambda}[z'(b,\lambda)-z'(a,\lambda)]+\int_a^b A(x)z^2(x,\lambda)\,dx=0.$$

Comme d'autre part on tire de l'équation (1)

$$z'(b,\lambda)-z'(a,\lambda)-\int_a^b z'^2(x,\lambda)\,dx+\lambda\int_a^b A(x)z^2(x,\lambda)\,dx=0,$$

il vient finalement

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{z'(b,\lambda)-z'(a,\lambda)}{\lambda}\right]=-\frac{1}{\lambda^2}\int_a^b z'^2(x,\lambda)\,dx. \tag{27}$$

Il est clair que z satisfait à l'équation de Fredholm

$$z(x)-\lambda\int_a^b G(x,\xi)A(\xi)z(\xi)\,d\xi=1. \tag{28}$$

Étudions cette fonction dans le voisinage d'une valeur *singulière* λ_n. On a

$$z=\frac{\psi(x)}{\lambda-\lambda_n}+\psi_0(x)+\ldots.$$

En portant ce développement dans l'équation fonctionnelle (28), on trouve

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\lambda_n A(x)\psi=0, \qquad \psi(a)=\psi(b)=0,$$

$$\frac{d^2\psi_0}{dx_2}+\lambda_n A(x)\psi_0+A(x)\psi=0, \qquad \psi_0(a)=\psi_0(b)=1,$$

d'où l'on tire aisément

$$\psi'(b)-\psi'(a)=\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b \psi'^2(x)\,dx.$$

D'autre part,

$$z'(b,\lambda)-z'(a,\lambda)=\frac{\psi'(b)-\psi'(a)}{\lambda-\lambda_n}+\psi'_0(b)-\psi'_0(a)+\ldots,$$

d'où l'on conclut que le rapport $\frac{z'(b,\lambda)-z'(a,\lambda)}{\lambda}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

suivant que $\lambda - \lambda_n$ tend vers zéro par valeurs positives ou négatives, *pourvu toutefois que* $\psi(x)$ *ne soit pas identiquement nulle.*

Or il est facile de se rendre compte sous quelle condition se présentera la dernière circonstance. Si l'on désigne par $u_n(x)$ la solution de l'équation *associée* à (28), sans second membre, pour $\lambda = \lambda_n$,

$$u_n(x) - \lambda_n \mathrm{A}(x) \int_a^b \mathrm{G}(\xi, x)\, u_n(\xi)\, d\xi = 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$\int_a^b u_n(x)\, dx = 0.$$

Or, comme on a manifestement

$$\mathrm{G}(\xi, x) = \mathrm{G}(x, \xi),$$

cette dernière condition revient à

$$\int_a^b \mathrm{A}(x)\, y_n(x)\, dx = 0,$$

c'est-à-dire à

$$y'_n(b) - y'_n(a) = 0,$$

$y_n(x)$ étant l'intégrale singulière correspondant à λ_n.

L'intégrale singulière $y_n(x)$ *serait donc en même temps une intégrale périodique* et λ_n serait une valeur *caractéristique*.

Écartons cette circonstance qui est évidemment d'une nature exceptionnelle et supposons que λ varie entre deux valeurs *singulières* consécutives λ_n et λ_{n+1}, dont aucune n'est *caractéristique*. La formule (27) prouve alors que, entre ces deux nombres, *il y a une valeur caractéristique et une seule.*

Remarquons qu'une valeur singulière d'indice *impair* ne saurait être en même temps une valeur caractéristique. Il résulte en effet, de la propriété des intégrales de l'équation (1) établie au n° 7, que les valeurs de la dérivée d'une intégrale singulière d'indice impair aux points a et b sont de signe contraire.

Supposons maintenant que la valeur singulière d'indice pair λ_{2n} soit en même temps une valeur caractéristique; la fonction $z(x, \lambda)$ est alors holomorphe autour de $\lambda = \lambda_{2n}$ et l'on a

$$z(x, \lambda) = \psi_0(x) + (\lambda - \lambda_{2n})\psi_1(x) + \ldots,$$

$\psi_0(x)$ étant évidemment une intégrale de l'équation (1), pour $\lambda = \lambda_{2n}$, prenant la valeur *un* en a et b. La formule (27) reste valable pour $\lambda = \lambda_{2n}$ et l'on doit distinguer deux cas :

1° $\psi'_0(a) - \psi'_0(b) \neq 0$. — Le rapport $\dfrac{z'(b, \lambda) - z'(a, \lambda)}{\lambda}$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque λ varie de λ_{2n-1} à λ_{2n+1} et par conséquent s'annule pour une valeur de λ *différente* de λ_{2n}.

2° $\psi'_0(a) - \psi'_0(b) = 0$. — L'intégrale $\psi_0(x)$ est *périodique* et il en est par conséquent de même de *toutes* les intégrales de l'équation (1) pour $\lambda = \lambda_{2n}$.

En résumé, entre deux valeurs singulières consécutives d'indice impair il existe en général *deux* valeurs caractéristiques; si ces deux valeurs se confondent, elles deviennent égales à la valeur singulière d'indice *pair* respective et alors toutes les intégrales de l'équation (1) sont périodiques.

Quant au calcul des valeurs caractéristiques, on appliquera la méthode du n° 6, en tenant compte, bien entendu, que $\lambda = 0$ est un pôle.

DEUXIÈME PARTIE.

L'ÉQUATION $\Delta u + \lambda A(x, y) u = 0$.

I. — Intégrales nulles sur le bord.

1. Le premier problème fondamental qu'on se propose sur l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda A(x, y) u = 0 \qquad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

est d'en trouver une intégrale, continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre à l'intérieur d'une aire simplement connexe (R) limitée par un contour fermé C (¹), et s'*annulant* sur le bord.

Soit $G(x, y; \xi, \eta)$ la *fonction de Green* attachée au contour C, c'est-à-dire la fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

Elle vérifie l'équation de Laplace à l'intérieur de C;

Elle est continue dans (R), sauf au point $x = \xi$, $y = \eta$, où elle devient infinie comme $\log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$;

Elle s'*annule* le long du contour C.

On sait que l'existence de cette fonction, que les conditions énoncées déterminent complètement, est une conséquence du célèbre problème de Dirichlet.

La fonction de Green jouit de plusieurs propriétés importantes, entre autres d'être *symétrique* par rapport aux deux couples de variables x, y et ξ, η.

Cela étant, considérons d'abord l'équation

$$\Delta u + f(x, y) = 0, \tag{2}$$

où $f(x, y)$ est une fonction donnée admettant des dérivées partielles dans (R) et sur C; cette équation admet une intégrale parfaitement déterminée, continue et ayant des dérivées premières continues à l'intérieur de C, et prenant la valeur zéro sur le bord. C'est la fonction

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\int G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire (R). Cette fonction vérifie en effet l'équation (2); c'est une conséquence de la formule de Poisson. D'autre part, elle s'annule sur la frontière comme la fonction G elle-même (²). Il est clair que cette intégrale est unique, puisque la fonction harmonique nulle sur le bord est identiquement nulle.

(¹) Nous supposons que le contour donné est de ceux par rapport auxquels on peut résoudre le problème de Dirichlet; pour plus de simplicité, nous le supposons formé d'arcs de courbes analytiques et ayant partout une tangente déterminée.

(²) La difficulté relative au point $\xi = x$, $\eta = y$ se lève facilement.

De même, soient $u_0(s)$ une fonction continue donnée le long du contour C et $u_0(x, y)$ la fonction *harmonique* prenant sur ce contour la succession de valeurs $u_0(s)$. La fonction

$$(3)\qquad u(x, y) = u_0(x, y) + \frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

vérifie l'équation (2) et prend sur le bord les valeurs $u_0(s)$; c'est d'ailleurs la seule intégrale de (2), continue ainsi que ses dérivées du premier ordre dans (R), qui prend ces valeurs sur la frontière.

Si maintenant nous nous proposons d'intégrer l'équation (1) moyennant la condition

$$u(x, y) = u_0(s) \qquad (\text{sur C}),$$

nous serons conduit à une équation intégrale

$$(4)\qquad u(x, y) - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = u_0(x, y).$$

Réciproquement, la solution de cette équation intégrale satisfera à l'équation (1); il *suffit* pour cela que $A(x, y)$ soit dérivable dans (R).

L'intégrale de l'équation (1) qui prend sur le contour C les valeurs données $u_0(s)$ est donc une fonction méromorphe du paramètre λ; ses pôles sont les valeurs de λ pour lesquelles l'équation sans second membre

$$(5)\qquad u(x, y) - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0$$

admet des solutions non identiquement nulles. Or on est conduit à l'équation (5) en supposant $u_0(x, y) \equiv 0$; il faut et il suffit pour cela qu'on ait $u_0(s) \equiv 0$. Les solutions de l'équation (5) représentent donc des intégrales de (1) s'*annulant* sur le bord, et l'on voit ainsi que de pareilles intégrales n'existent que, peut-être, pour des valeurs exceptionnelles de λ. Nous appellerons ces valeurs les *constantes caractéristiques* de l'équation (1).

2. Les constantes caractéristiques ne peuvent être que *réelles*.

Soient en effet $\alpha + i\beta$ une constante caractéristique complexe et $v + iw$ une intégrale correspondante, de manière qu'on ait, en séparant les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned}\Delta v + \alpha A(x, y) v - \beta A(x, y) w &= 0,\\ \Delta w + \alpha A(x, y) w + \beta A(x, y) v &= 0.\end{aligned}$$

De ces équations on tire

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\iint (w\,\Delta v - v\,\Delta w)\,dx\,dy - \beta \iint A(x, y)(v^2 + w^2)\,dx\,dy = 0,\\ &\iint (v\,\Delta v + w\,\Delta w)\,dx\,dy + \alpha \iint A(x, y)(v^2 + w^2)\,dx\,dy = 0.\end{aligned}\right.$$

Or, les formules classiques de Green donnent

$$\iint (w\,\Delta v - v\,\Delta w)\,dx\,dy = -\int_C \left(w\frac{dv}{dn} - v\frac{dw}{dn}\right) ds,$$

$$\iint v\,\Delta v\,dx\,dy = -\int_C v\frac{dv}{dn}\,ds - \iint \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

$\frac{d}{dn}$ désignant la dérivée suivant la normale intérieure et ds l'élément linéaire de C. Par conséquent, comme v et w s'annulent le long du contour, les relations (6) se réduisent à

$$\beta \iint A(x, y)(v^2 + w^2)\,dx\,dy = 0,$$

$$\begin{aligned}&\iint \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy\\ &+ \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - \alpha \iint A(x, y)(v^2 + w^2)\,dx\,dy = 0.\end{aligned}$$

On a donc nécessairement $\beta = 0$, car autrement la fonction $v + iw$ serait *constante;* et comme elle s'annule sur le contour, elle serait identiquement nulle [1].

---

[1] La démonstration suppose l'existence des dérivées normales sur le contour. Or, remarquons qu'une intégrale singulière satisfait à l'équation (5); elle aura donc des dérivées normales sur le contour, si la *fonction de Green* attachée au contour en a. Dans le cas où le contour se réduit à un cercle, il en est bien ainsi; la démonstration que nous venons de donner est donc valable pour un cercle et par conséquent *pour tout contour qu'on peut représenter conformément sur un cercle.*

Démontrons encore que la fonction $u(x, y; \lambda)$ (nous mettons en évidence le paramètre) définie par l'équation (4) ne peut avoir que des pôles *simples*.

Soit en effet λ_0 un pôle d'ordre n ($n > 1$) de cette fonction, de telle façon qu'on ait, dans le voisinage de ce pôle,

$$u(x, y; \lambda) = \frac{p(x, y)}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \frac{q(x, y)}{(\lambda - \lambda_0)^{n-1}} + \ldots.$$

En portant ce développement dans l'équation (4) et en égalant les coefficients des plus hautes puissances négatives de $\lambda - \lambda_0$, il vient

$$p(x, y) - \frac{\lambda_0}{2\pi} \int\int G(x, y; \xi, \eta) A(\xi, \eta) p(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = 0,$$

$$q(x, y) - \frac{\lambda_0}{2\pi} \int\int G(x, y; \xi, \eta) A(\xi, \eta) q(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$
$$- \frac{1}{2\pi} \int\int G(x, y; \xi, \eta) A(\xi, \eta) p(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = 0,$$

relations qui reviennent à

$$\begin{aligned} &\Delta p + \lambda_0 A(x, y) p = 0, \\ &\Delta q + \lambda_0 A(x, y) q + A(x, y) p = 0 \end{aligned} \qquad (p = q = 0 \text{ sur } C).$$

On tire de là, comme tout à l'heure,

$$\int_C \left(q \frac{dp}{dn} - p \frac{dq}{dn} \right) ds + \int\int A(x, y) p^2 \, dx \, dy = 0,$$

$$\int_C p \frac{dp}{dn} ds + \int\int \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy - \lambda_0 \int\int A(x, y) p^2 \, dx \, dy = 0.$$

Comme p et q s'annulent le long du contour, il en résulte qu'on a identiquement $p(x, y) = 0$.

3. Cela posé, nous allons établir l'existence effective d'une infinité de constantes caractéristiques.

La fonction $u(x, y; \lambda)$ étant holomorphe autour du point $\lambda = 0$, qui n'est pas un pôle puisque $u(x, y; 0) = u_0(x, y)$, développons-la autour de ce point.

Soit

$$u(x, y; \lambda) = u_0(x, y) + \lambda u_1(x, y) + \ldots + \lambda^n u_n(x, y) + \ldots \tag{7}$$

ce développement, qui est évidemment absolument et uniformément convergent, lorsque λ varie dans son plan à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre et passant par le pôle le plus voisin, le point (x, y) ayant une position quelconque dans (R). Portons le développement (7) dans l'équation (4). En annulant les coefficients de toutes les puissances de λ, il vient

$$u_n(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, u_{n-1}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Les fonctions u_0, u_1, ... se déterminent donc de proche en proche par les relations récurrentes

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u_0 = 0, \\ \Delta u_1 + A(x, y)\, u_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta u_n + A(x, y)\, u_{n-1} = 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

et moyennant les conditions sur le bord

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = u_0(s) \\ u_1 = 0 \\ \dots\dots \\ u_n = 0 \end{array}\right\} \text{(sur C).}$$

S'il n'existait pas de constantes caractéristiques, la fonction $u(x, y; \lambda)$ serait holomorphe dans tout le plan de la variable complexe λ et la convergence de la série (7) serait illimitée. Si donc on démontre que le cercle de convergence de cette série est limité, on sera assuré qu'il existe au moins une constante caractéristique.

Nous allons maintenant remplacer cette série, où les coefficients des différentes puissances de λ dépendent de x et de y, par une autre à coefficients constants. Considérons à cet effet la fonction

$$\Phi_1(\lambda) = \int\int A(x, y)\, u_0(x, y)\, u(x, y; \lambda)\, dx\, dy.$$

Il est clair que cette fonction est elle-même méromorphe et qu'elle ne saurait admettre d'autre pôle que ceux de $u(x, y; \lambda)$. Il suffit donc, pour le but que nous nous sommes proposé, de démontrer que $\Phi_1(\lambda)$ n'est pas holomorphe dans tout le plan de la variable λ.

Posons

$$\varpi_n = \int\int A(x, y)\, u_0(x, y)\, u_n(x, y)\, dx\, dy.$$

Les constantes ϖ_n ont été introduites par Schwarz.

Le développement de la fonction $\Phi_1(\lambda)$ dans le domaine de l'origine est alors

$$\Phi_1(\lambda) = \varpi_0 + \lambda\varpi_1 + \ldots + \lambda^n\varpi_n + \ldots. \tag{9}$$

Montrons que ce développement n'est pas valable dans tout le plan.

On a, en vertu des relations (8),

$$\int\int A(x, y) u_p u_q\, dx\, dy = -\int\int u_q\, \Delta u_{p+1}\, dx\, dy.$$

D'autre part, la formule de Green donne

$$\int\int (u_{p+1}\Delta u_q - u_q\, \Delta u_{p+1})\, dx\, dy + \int_C \left(u_{p+1}\frac{du_q}{dn} - u_q\frac{du_{p+1}}{dn}\right) ds = 0.$$

Par conséquent, en supposant $q \geqq 1$, comme u_{p+1} et u_q s'annulent sur le contour C, on a

$$-\int\int u_q\, \Delta u_{p+1}\, dx\, dy = -\int\int u_{p+1}\, \Delta u_q\, dx\, dy,$$

c'est-à-dire

$$\int\int A(x, y) u_p u_q\, dx\, dy = \int\int A(x, y) u_{p+1} u_{q-1}\, dx\, dy.$$

Il résulte de cette égalité qu'on peut écrire

$$\varpi_{2n+1} = \int\int A(x, y)\, u_n(x, y)\, u_{n+1}(x, y)\, dx\, dy. \tag{10}$$

Transformons encore cette formule à l'aide des relations (8); on a

$$w_{2n+1} = -\int\int u_{n+1}\,\Delta u_{n+1}\,dx\,dy,$$

et, par l'application d'une formule de Green,

$$w_{2n+1} = \int\int\left[\left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Les constantes de Schwarz à indice impair sont donc essentiellement positives et différentes de zéro [1].

On a de même

$$w_{2n+1} = \int\int \mathrm{A}(x,y)\,u_n u_{n+1}\,dx\,dy = -\int\int u_n\,\Delta u_{n+2}\,dx\,dy$$

et, par conséquent,

$$w_{2n+1} = \int\int\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\,\frac{\partial u_{n+2}}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y}\,\frac{\partial u_{n+2}}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Cela posé, considérons la forme quadratique définie positive en α et β

$$\int\int\left[\left(\alpha\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \beta\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right)^2 + \left(\alpha\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + \beta\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy > 0,$$

inégalité qui s'écrit simplement, en vertu de ce qui précède,

$$w_{2n-3}\,\alpha^2 + 2\,w_{2n-1}\,\alpha\beta + w_{2n+1}\,\beta^2 > 0 \quad [2].$$

On a donc

$$w_{2n-1}^2 < w_{2n-3}\,w_{2n+1},$$

---

(1) En effet, w_{2n+1} ne peut s'annuler que si u_{n+1} se réduit à une constante, mais alors $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_0$ seraient nulles en vertu de (8). Remarquons encore qu'on a

$$w_{2n} = \int\int \mathrm{A}(x,y)\,u_n^2\,dx\,dy.$$

Par conséquent, pour $\mathrm{A}(x,y) > 0$, les constantes à indice pair seraient aussi positives.

(2) Il est essentiel de remarquer que la forme ne peut s'annuler que pour $\alpha = \beta = 0$.

et, puisque ces nombres sont positifs,

$$\frac{w_{2n-1}}{w_{2n-3}} < \frac{w_{2n+1}}{w_{2n-1}}.$$

La suite d'inégalités

$$\frac{w_3}{w_1} < \frac{w_5}{w_3} < \ldots < \frac{w_{2n+1}}{w_{2n-1}} < \ldots$$

montre que le rapport $\frac{w_{2n+1}}{w_{2n-1}}$ tend vers une limite finie et *plus grande que zéro*. En effet, ce rapport ne saurait augmenter au delà de toute limite, puisque la série (9) aurait un rayon de convergence nul, ce qui n'est pas.

Il résulte de ce qui précède que la convergence de la série (9) est *limitée*.

En effet, si la série

$$w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \ldots + \lambda^n w_n + \ldots$$

convergeait pour toute valeur de λ, il en serait évidemment de même de la série

$$\lambda w_1 + \lambda^3 w_3 + \lambda^5 w_5 + \ldots + \lambda^{2n+1} w_{2n+1} + \ldots,$$

où l'on n'a conservé que les puissances impaires de λ; mais alors on devrait avoir

$$\lim_{n=\infty} \frac{w_{2n+1}}{w_{2n-1}} = 0.$$

4. Il existe donc au moins une constante caractéristique.

Réciproquement, soit λ_1 la constante caractéristique la plus petite en valeur absolue et soit

$$(11) \qquad z_{11}, \quad z_{12}, \quad \ldots, \quad z_{1p}$$

un système d'intégrales linéairement indépendantes correspondantes, c'est-à-dire les fonctions satisfaisant aux relations

$$(12) \qquad \begin{gathered} \Delta z_{1k} + \lambda_1 \mathrm{A}(x, y) z_{1k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \\ z_{1k} = 0 \qquad (\text{sur C}). \end{gathered}$$

Je dis que, si la fonction $u_0(s)$ n'a pas été choisie d'une façon particulière, les séries (7) et (9) ne sauraient converger au delà du cercle de rayon $|\lambda_1|$.

En effet, pour que $\lambda = \lambda_1$ ne soit pas un pôle de $u(x, y; \lambda)$, c'est-à-dire pour qu'on puisse résoudre l'équation

$$u(x, y) - \frac{\lambda_1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\,A(\xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = u_0(x, y),$$

il faut et il suffit que son second membre satisfasse aux relations

$$\int\int Z_{1k}(x, y)\,u_0(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

Z_{1k} étant solution de l'équation *associée,* sans second membre,

$$Z(x, y) - \frac{\lambda_1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta; x, y)\,A(x, y)\,Z(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Grâce à la symétrie de la fonction de Green, on vérifie immédiatement qu'on a

$$Z_{1k} = A(x, y)\,z_{1k} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

puisque la relation

$$z_{1k}(x, y) - \frac{\lambda_1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\,A(\xi, \eta)\,z_{1k}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = 0$$

est équivalente aux relations (12).

La valeur $\lambda = \lambda_1$ sera donc certainement un pôle de $u(x, y; \lambda)$, si les égalités

$$\int\int A(x, y)\,z_{1k}(x, y)\,u_0(x, y)\,dx\,dy = 0$$

ne sont pas vérifiées par la fonction $u_0(x, y)$, c'est-à-dire, en vertu de (12), si l'on n'a pas

$$\int\int u_0(x, y)\,\Delta z_{1k}\,dx\,dy = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\int_C u_0(s)\frac{dz_{1k}}{dx}\,ds = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{13}$$

Or, $u_0(s)$ est une fonction arbitraire; on peut donc supposer que ces relations ne sont pas satisfaites et par conséquent la *convergence de la série* (7) *s'arrêtera au cercle de rayon* $|\lambda_1|$.

La fonction $u(x, y; \lambda)$, admettant le pôle *simple* $\lambda = \lambda_1$, aura dès lors autour de ce pôle un développement de la forme

$$u(x, y; \lambda) = \frac{z_{11}}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}} + \text{partie régulière autour de } \lambda = \lambda_1.$$

Nous avons désigné le coefficient de $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}}$ par z_{11}, parce que ce coefficient est une intégrale singulière correspondant à la constante caractéristique λ_1, comme on le voit de suite en portant le développement précédent dans l'équation (4); et l'on peut évidemment prendre cette intégrale pour la première du système (11).

Le coefficient de $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}}$ dans le développement de la fonction $\Phi_1(\lambda)$ autour du pôle $\lambda = \lambda_1$ sera par conséquent

$$\iint A(x, y)\, z_{11}(x, y)\, u_0(x, y)\, dx\, dy,$$

expression qui n'est pas nulle. *La série*

$$w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \ldots + \lambda^n w_n + \ldots$$

diverge au delà du cercle de rayon $|\lambda|$, ce que nous avons voulu démontrer.

5. L'étude de cette série va nous faire connaître les diverses circonstances qui peuvent se présenter.

Si le rapport $\dfrac{w_n}{w_{n-1}}$ tend vers une limite bien déterminée lorsque n

augmente indéfiniment, il y a un seul pôle sur le cercle de convergence des séries (7) et (9). Désignons-le par λ_1 et soit $z_{11}(x, y)$ le coefficient de $\dfrac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_1}}$ dans le développement de $u(x, y; \lambda)$ autour de $\lambda = \lambda_1$. On aura alors, comme au n° 6 de la première Partie,

$$\lim_{n=\infty} \frac{w_n}{w_{n-1}} = \frac{1}{\lambda_1},$$
$$\lim_{n=\infty} \lambda_1^n u_n(x, y) = z_{11}(x, y).$$

Si au contraire le rapport $\dfrac{w_n}{w_{n-1}}$ ne tend vers aucune limite bien déterminée pour n infini, nous sommes certain qu'il y a *deux pôles*. égaux et de signe contraire, sur le cercle de convergence de séries (7) et (9). Désignons-les par λ_1 et $\lambda_2 = -\lambda_1$, et appelons z_{11} et z_{21} les coefficients de $\dfrac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_1}}$ et $\dfrac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_2}}$ respectivement. On a, dans ce cas,

$$u(x, y; \lambda) = \frac{z_{11}(x, y)}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_1}} + \frac{z_{21}(x, y)}{1+\dfrac{\lambda}{\lambda_1}} + v(x, y; \lambda),$$

la fonction $v(x, y; \lambda)$ étant holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que $|\lambda_1|$. On calculera alors λ_1, z_{11} et z_{21} par les formules

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \lim_{n=\infty} \frac{w_{2n+1}}{w_{2n-1}},$$
$$z_{11}(x, y) - z_{21}(x, y) = \lim_{n=\infty} \lambda_1^{2n+1} u_{2n+1}(x, y),$$
$$z_{11}(x, y) + z_{21}(x, y) = \lim_{n=\infty} \lambda_1^{2n} \quad u_{2n} \quad (x, y).$$

6. D'une manière générale, supposons qu'on ait établi l'existence et calculé la valeur des constantes caractéristiques rangées par ordre de modules non décroissants

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p,$$

dont la valeur absolue est au plus égale à un nombre donné N, et que l'on ait en même temps calculé les *résidus* correspondants

$$z_{11}, \quad z_{21}, \quad \ldots, \quad z_{p1}.$$

On pourra écrire, dès lors,

$$u(x, y; \lambda) = \frac{z_{11}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} + \frac{z_{21}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}} + \ldots + \frac{z_{p1}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \mathrm{U}(x, y; \lambda),$$

la fonction $\mathrm{U}(x, y; \lambda)$ étant holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que N. Portons cette expression de $u(x, y; \lambda)$ dans l'équation (4); il vient

$$\begin{aligned} &\frac{z_{11}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} + \ldots + \frac{z_{p1}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \mathrm{U}(x, y; \lambda) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2\pi} \int\!\!\int \mathrm{G}(x, y; \xi, \eta)\, \mathrm{A}(\xi, \eta) \left[\frac{z_{11}(\xi, \eta)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} + \ldots + \mathrm{U}(\xi, \eta; \lambda) \right] d\xi\, d\eta = u_0(x, y). \end{aligned}$$

Or, les fonctions z_{k1} satisfont aux relations

$$z_{k1} = \frac{\lambda_k}{2\pi} \int\!\!\int \mathrm{G}(x, y; \xi, \eta)\, \mathrm{A}(\xi, \eta)\, z_{k1}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Il vient donc finalement

$$\begin{aligned} (14) \qquad &\mathrm{U}(x, y; \lambda) - \frac{\lambda}{2\pi} \int\!\!\int \mathrm{G}(x, y; \xi, \eta)\, \mathrm{A}(\xi, \eta)\, \mathrm{U}(\xi, \eta; \lambda)\, d\xi\, d\eta \\ &= u_0(x, y) - z_{11} - z_{21} - \ldots - z_{p1}. \end{aligned}$$

Le mécanisme des constantes de Schwarz nous permettra alors d'établir l'existence d'une nouvelle constante caractéristique, ainsi que d'en calculer la valeur.

Soit en effet

$$\mathrm{U}(x, y; \lambda) = \mathrm{U}_0(x, y) + \lambda\, \mathrm{U}_1(x, y) + \ldots + \lambda^n\, \mathrm{U}_n(x, y) + \ldots$$

le développement de la fonction $\mathrm{U}(x, y; \lambda)$ autour de l'origine. La fonction

$$\Phi_{p+1}(\lambda) = \int\!\!\int \mathrm{A}(x, y)\, \mathrm{U}_0(x, y)\, \mathrm{U}(x, y; \lambda)\, dx\, dy$$

aura autour de $\lambda = 0$ un développement dont *la convergence sera limitée.*

La démonstration est identique à celle que nous avons développée au n° 4.

Réciproquement, soit λ_{p+1} une constante caractéristique de module immédiatement supérieur à N, et soit

$$z_{p+1,1}, \quad \ldots, \quad z_{p+1,q}, \quad \ldots$$

un système linéairement indépendant d'intégrales correspondant à λ_{p+1}. La fonction $U(x, y; \lambda)$ admet le pôle $\lambda = \lambda_{p+1}$ si l'on n'a pas

$$\int\int [u_0(x, y) - z_{11}(x, y) - \ldots - z_{p1}(x, y)]\, A(x, y)\, z_{p+1,k}\, dx\, dy = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q).$$

Cette relation se réduit, en vertu de l'orthogonalité des intégrales singulières [1], à

$$(15) \qquad \int\int A(x, y) z_{p+1,k}\, u_0(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

c'est-à-dire à

$$\int_C u_0(s) \frac{dz_{p+1,k}}{dn}\, ds = 0.$$

Il est clair que, pour $u_0(s)$ quelconque, ces relations ne seront pas vérifiées. De même, pour que la fonction $\Phi_{p+1}(\lambda)$ admette le pôle $\lambda = \lambda_{p+1}$, il faut et il suffit qu'on n'ait pas

$$(16) \qquad \int\int A(x, y) z_{p+1,1}\, U_0(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

---

[1] Des relations

$$\left.\begin{array}{l} \Delta z_i + \lambda_i A(x,y) z_i = 0 \\ \Delta z_k + \lambda_k A(x,y) z_k = 0 \end{array}\right\} \quad z_i = z_k = 0 \text{ sur C}$$

l'on déduit

$$\int\int A(x, y) z_i z_j dx\, dy = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq j.$$

en supposant qu'on ait pris pour première intégrale du système $z_{p+1,k}$ le coefficient de $\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_{p+1}}}$ dans le développement de $U(x, y; \lambda)$. Or, en faisant $\lambda = 0$ dans l'équation (14), on trouve

$$U_0(x, y) = u_0(x, y) - z_{11} - z_{21} - \ldots - z_{p1}.$$

La condition (16) n'est donc que l'une des conditions (15) supposées non vérifiées.

II. — Autres conditions aux limites.

7. Au lieu de chercher des intégrales de l'équation (1) qui s'annulent sur la frontière, on est conduit, dans certaines questions de Physique mathématique, à examiner s'il existe des intégrales satisfaisant sur le contour donné à la condition

$$\frac{du}{dn} - ku = 0,$$

k étant une constante positive [1] et $\frac{du}{dn}$ désignant la dérivée suivant la normale intérieure au contour C.

Ce problème peut être traité d'une manière tout à fait semblable.

Désignons par $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ la fonction harmonique en (x, y) à l'intérieur de C, sauf au point $x = \xi, y = \eta$, où elle se comporte comme $\log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$, et vérifiant sur la frontière la relation

$$\frac{d\Gamma}{dn} - k\Gamma = 0.$$

Il est facile de démontrer que cette fonction existe et est bien déterminée. Posons en effet

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta) = \log\frac{1}{r} - \omega(x, y; \xi, \eta),$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

---

[1] Ou même une fonction positive le long de C.

La fonction $\omega(x, y; \xi, \eta)$ sera partout harmonique dans C et satisfera, sur le contour, à la relation

$$\frac{d\omega}{dn} - k\omega = \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - k \log \frac{1}{r}. \tag{17}$$

Si l'on représente cette fonction harmonique comme un potentiel dû à une simple couche de densité ρ étalée sur C, en écrivant

$$\omega = \int_C \rho_\sigma \log \frac{1}{r'} d\sigma, \qquad r' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

$[x', y'$ coordonnées du point (σ) sur C$]$,

les propriétés bien connues de ces potentiels, jointes à la relation (17), fourniront, pour trouver ρ, l'équation intégrale

$$\int_C \rho_\sigma \left(\frac{\cos \psi}{r'} - k \log \frac{1}{r'} \right) d\sigma - \pi \rho_s = \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - k \log \frac{1}{r}, \tag{18}$$

x, y désignant ici les coordonnées du point fixe (s) du contour, et ψ l'angle de r' avec la normale intérieure en ce point.

La densité ρ sera ainsi parfaitement déterminée ; en effet, on ne se trouve pas ici dans un cas singulier, puisque la fonction harmonique V satisfaisant sur C à la relation

$$\frac{dV}{dn} - kV = 0$$

est identiquement nulle (¹). La dernière partie du raisonnement démontre aussi que ω est bien déterminée.

(¹) Cela résulte de la formule de Green

$$\int V \frac{dV}{dn} ds + \int \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = 0,$$

qui devient ici

$$k \int_C V^2 ds + \int \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = 0.$$

Cela posé, la fonction

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\int \Gamma(x, y;\ \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

vérifie dans C l'équation

$$\Delta u + f(x, y) = 0, \tag{19}$$

et satisfait sur C à la condition

$$\frac{du}{dn} - ku = 0.$$

De même, si l'on désigne par $\bar{u}$ une fonction continue du point sur le contour C et par $u_0(x, y)$ la fonction harmonique vérifiant sur C la relation

$$\frac{du_0}{dn} - ku_0 = \bar{u},$$

l'intégrale *unique* de l'équation (19), vérifiant sur la frontière la relation $\frac{du}{dn} - ku = \bar{u}$, sera donnée par la formule

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\int \Gamma(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + u_0(x, y). \tag{20}$$

8. Revenons maintenant à l'équation (1). La recherche d'une intégrale de cette équation satisfaisant sur la frontière à la relation

$$\frac{du}{dn} - ku = \bar{u}$$

nous conduira à l'équation de Fredholm

$$u - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int \Gamma(x, y;\ \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = u_0(x, y). \tag{21}$$

On peut donc répéter ici tout ce qu'on a dit aux n^{os} **2** et **3**. Avec de très légères modifications, les raisonnements restent valables; les *constantes caractéristiques*, c'est-à-dire les valeurs de λ auxquelles correspondent des intégrales vérifiant sur C la relation

$$\frac{du}{dn} - ku = 0,$$

sont *réelles*, et ce sont des pôles d'ordre au plus égal à *un* pour la fonction définie par l'équation (21).

L'origine $\lambda = 0$ n'est pas un pôle, puisque pour $\lambda = 0$ on a

$$u = u_0(x, y).$$

En écrivant donc comme précédemment

$$(22) \qquad u(x, y; \lambda) = u_0(x, y) + \lambda\, u_1(x, y) + \ldots + \lambda^n\, u_n(x, y) + \ldots,$$

les fonctions $u_n(x, y)$ se calculeront par récurrence au moyen des formules

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u_0 = 0, & \dfrac{du_0}{dn} - ku_0 = \bar{u} \\ \Delta u_1 + \mathrm{A}(x, y)\, u_0 \quad = 0, & \dfrac{du_1}{dn} - ku_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u_n + \mathrm{A}(x, y)\, u_{n-1} = 0, & \dfrac{du_n}{dn} - ku_n = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(sur C)}.$$

La série (22) est à *convergence limitée;* on le voit, comme au n° 4, en considérant le développement autour de l'origine de la fonction

$$\Psi_1(\lambda) = \int\!\!\int \mathrm{A}(x, y)\, u_0(x, y)\, u(x, y; \lambda)\, dx\, dy = \mathrm{W}_0 + \lambda \mathrm{W}_1 + \ldots + \lambda^n \mathrm{W}_n + \ldots.$$

Les constantes W à indice impair

$$\mathrm{W}_{2n+1} = k \int_{\mathrm{C}} u_{n+1}^2\, d\sigma + \int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

sont essentiellement positives et vérifient les relations

$$\frac{\mathrm{W}_{2n-1}}{\mathrm{W}_{2n-3}} < \frac{\mathrm{W}_{2n+1}}{\mathrm{W}_{2n-1}} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

qui résultent de la considération de la forme quadratique définie positive

$$\iint\left[\left(\alpha\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+\beta\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right)^2+\left(\alpha\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+\beta\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$
$$+k\int_C(\alpha u_{n-1}+\beta u_{n+1})^2\,d\sigma>0.$$

On démontrera aussi, de la même façon que précédemment, que, si l'on désigne par λ_1 la constante caractéristique la plus petite en valeur absolue, $\lambda=\lambda_1$ sera un pôle de $u(x,y;\lambda)$ et de $\Psi_1(\lambda)$. Il faut et il suffit pour cela que $\overline{u}$ ne satisfasse pas aux relations

$$\int\overline{u}\,z\,d\sigma=0,$$

z étant une quelconque des intégrales singulières correspondant à la constante caractéristique λ_1.

On continuera comme aux n^{os} 5 et 6.

9. On pourrait croire que la condition aux limites $\frac{du}{dn}=0$ n'est qu'un cas particulier du problème précédent, où l'on fait $k=0$. En réalité, cette condition est beaucoup moins facile à traiter [1].

Reprenons la *fonction de Green* généralisée $\Gamma(x,y;\xi,\eta;k)$, en mettant en évidence le paramètre k dont elle dépend évidemment.

Nous avons posé

$$\Gamma(x,y;\xi,\eta;k)=\log\frac{1}{r}-\omega(x,y;\xi,\eta;k),$$
$$\omega=\int\rho_\sigma\log\frac{1}{r'}\,d\sigma$$

et nous avons été conduit, pour calculer ρ, à l'équation de Fredholm (18).

Le *noyau* de cette équation, ainsi que le second membre, étant des fonctions rationnelles *entières* de k, il résulte de la manière de construire la solution de (18) que ρ est une fonction *méromorphe* de k, ne

---

[1] Une méthode différente de celle que nous donnons ici a été proposée par M. Picard *Annales de l'École Normale*, 1907).

pouvant admettre d'autres discontinuités que des pôles. Or il arrive précisément que $k = 0$ en est un, puisque, en faisant $k = 0$ dans l'équation (18) sans second membre, on retombe sur *l'équation de Robin* qu'on sait posséder des solutions non identiquement nulles ([1]).

La fonction $\omega(x, y; \xi, \eta; k)$ est donc elle-même *méromorphe* en k, et admettra le point $k = 0$ comme pôle. Je dis que c'est un pôle du *premier* ordre. En effet, supposons pour le moment qu'on ait autour de $k = 0$

$$\omega(x, y; \xi, \eta; k) = \frac{\omega_n}{k^n} + \frac{\omega_{n-1}}{k^{n-1}} + \ldots + \omega'(x, y; \xi, \eta; k) \qquad (n > 1),$$

ω' étant fini pour $k = 0$. On devra alors avoir, le long de C,

$$\frac{d\omega_n}{dn} = 0, \qquad \frac{d\omega_{n-1}}{dn} - \omega_n = 0, \qquad \ldots,$$

les fonctions ω_n, ω_{n-1}, ... étant d'ailleurs harmoniques à l'intérieur du contour. Il en résulte d'abord que ω_n est une constante; et comme on doit avoir

$$\int \frac{d\omega_{n-1}}{dn}\, d\sigma = 0,$$

ω_n est *identiquement nulle*.

Par conséquent, on pourra écrire

$$\omega(x, y; \xi, \eta; k) = \frac{\alpha}{k} + \omega'(x, y; \xi, \eta; k).$$

Pour calculer la valeur de la *constante* α, remarquons que

$$\omega'(x, y; \xi, \eta; k)$$

([1]) Le second membre de (18) devient $\dfrac{d \log \frac{1}{r}}{dn}$. Cette expression ne satisfait pas à la condition de compatibilité qui est ici $\displaystyle\int \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds = 0$, puisque le point (ξ, η) est à l'intérieur de C et qu'on a par conséquent $\displaystyle\int \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds = 2\pi$.

est harmonique dans C, holomorphe pour $k = 0$, et satisfait quel que soit k à la relation

$$\frac{d\omega'}{dn} - k\omega' - \alpha = \frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - k\log\frac{1}{r} \qquad \text{(sur C)}.$$

En y faisant $k = 0$, on trouve

$$\frac{d\omega'(x, y; \xi, \eta; 0)}{dn} = \alpha + \frac{d\log\frac{1}{r}}{dn},$$

d'où l'on déduit

$$\int\left(\alpha + \frac{d\log\frac{1}{r}}{dn}\right) ds = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = -\frac{2\pi}{S},$$

S désignant la longueur du contour C.

En posant donc

$$\Gamma'(x, y; \xi, \eta; k) = \log\frac{1}{r} - \omega'(x, y; \xi, \eta; k),$$

on aura

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta; k) = \frac{2\pi}{kS} + \Gamma'(x, y; \xi, \eta; k).$$

De même, la fonction V, partout harmonique dans C et vérifiant sur la frontière la relation

$$\frac{dV}{dn} - kV = \overline{u},$$

admettra le pôle simple $k = 0$, et l'on aura

$$V(x, y; k) = -\frac{1}{kS}\int_C \overline{u}\, d\sigma + V'(x, y; k),$$

V' étant harmonique dans C et holomorphe pour $k = 0$.

10. Cela posé, l'intégrale de l'équation

$$\Delta u + f(x, y) = 0$$

satisfaisant sur la frontière à la condition

$$\frac{du}{dn} - ku = \bar{u}$$

est fournie par la formule

$$(23) \qquad u = \frac{1}{2\pi} \int\int \left[\frac{2\pi}{kS} + \Gamma'(x, y; \xi, \eta; k) \right] f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+ V'(x, y; k) - \frac{1}{kS} \int_C \bar{u}\, d\sigma.$$

Supposons maintenant que les fonctions données $f(x, y)$ et $\bar{u}$ satisfassent à la relation

$$(24) \qquad \int\int f(x, y)\, dx\, dy = \int_C \bar{u}\, d\sigma.$$

L'équation (23) se réduira alors à

$$(25) \qquad u = \frac{1}{2\pi} \int\int \Gamma'(x, y; \xi, \eta; k) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + V'(x, y; k).$$

On a ainsi le résultat suivant :

L'équation

$$\Delta u + f(x, y) = 0$$

intégrée moyennant la condition $\frac{du}{dn} - ku = \bar{u}$ *sur le contour, et en supposant qu'on ait*

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy = \int_C \bar{u}\, d\sigma,$$

fournit une fonction unique exprimée par la formule (25), *où* Γ' *est une fonction harmonique dans* C, *sauf au point* (ξ, η), *où elle se comporte comme*

$$\log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}};$$

vérifiant sur la frontière la relation

$$\frac{d\Gamma'}{dn} - k\Gamma' = \frac{2\pi}{S} \qquad \text{(S longueur du contour)},$$

et $V'(x, y; k)$ *une fonction partout harmonique dans* C *et satisfaisant sur* C *à la condition*

$$\frac{dV'}{dn} - kV' = \bar{u} - \frac{1}{S}\int_C \bar{u}\, d\sigma.$$

Les fonctions Γ' et V' sont holomorphes pour $k = 0$. En désignant par Γ'_0 et V'_0 leurs valeurs pour $k = 0$, nous pourrons énoncer la proposition suivante :

La fonction

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\int \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + V'_0(x, y)$$

est une intégrale de l'équation

$$\Delta u + f(x, y) = 0 \tag{26}$$

satisfaisant sur la frontière à la relation $\frac{du}{dn} = \bar{u}$, *en supposant remplie la condition*

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy = \int_C \bar{u}\, d\sigma.$$

Les fonctions Γ'_0 et V'_0 vérifient sur le contour les relations

$$\frac{d\Gamma'_0}{dn} = \frac{2\pi}{S} \quad \text{et} \quad \frac{dV'_0}{dn} = \bar{u} - \frac{1}{S}\int \bar{u}\, d\sigma.$$

Or, ces conditions, jointes à la propriété de ces fonctions d'être harmoniques dans C et, pour Γ'_0, d'avoir une discontinuité logarithmique en (ξ, η), ne déterminent ces fonctions qu'à une constante près; de sorte que, si on laisse aux fonctions Γ'_0 et V'_0 leur signification *précise* de tout à l'heure, l'intégrale générale de (26) satisfaisant à $\frac{du}{dn} = \bar{u}$ sur C sera donnée par

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\int \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + V'_0(x, y) + E,$$

E étant une constante arbitraire.

11. Nous pouvons maintenant aborder l'intégration de l'équation

$$\Delta u + \lambda A(x, y)\, u = 0 \tag{1}$$

avec la condition sur la frontière

$$\frac{du}{dn} = \overline{u}.$$

La fonction u devra satisfaire à la relation

$$u - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = V'_0(x, y) + E, \tag{27}$$

E étant cette fois, non plus une constante *arbitraire,* mais choisie de telle façon que u satisfasse encore à l'égalité

$$\lambda \int\int A(x, y)\, u(x, y)\, dx\, dy = \int_C \overline{u}\, d\sigma. \tag{28}$$

Portons la valeur tirée de (27) dans (28); il vient pour déterminer E

$$\lambda \int\int A(x, y)\, dx\, dy \left[\frac{\lambda}{2\pi}\int\int \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right.$$
$$\left. + V'_0(x, y)\right] + \lambda E \int\int A(x, y)\, dx\, dy = \int_C \overline{u}\, d\sigma;$$

d'où, en posant

$$a = \int\int A(x, y)\, dx\, dy,$$

constante que nous supposons différente de zéro,

$$E = \frac{1}{\lambda a}\int_C \overline{u}\, d\sigma$$
$$- \frac{1}{a}\int\int A(x, y)\left[V'_0(x, y) + \frac{\lambda}{2\pi}\int\int \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right] dx\, dy,$$

de sorte que l'équation (27) devient

$$u(x, y) - \frac{\lambda}{2\pi}\int\int H(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{29}$$
$$= V''_0(x, y) + \frac{1}{\lambda a}\int_C \overline{u}\, d\sigma$$

en posant

$$H(x, y; \xi, \eta) = \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta) - \frac{1}{a}\int\int A(x, y)\,\Gamma'_0(x, y; \xi, \eta)\,dx\,dy,$$

$$V''_0(x, y) = V'_0(x, y) - \frac{1}{a}\int\int A(x, y)\,V'_0(x, y)\,dx\,dy.$$

L'équation (29) est une équation de Fredholm. Il n'est pas difficile de démontrer, réciproquement, que la solution de cette équation satisfait aux conditions voulues.

L'intégrale cherchée est donc une fonction méromorphe du paramètre λ. Remarquons que, en faisant $\bar{u} = 0$, le second membre de (29) s'évanouit; de façon que les pôles de la fonction définie par cette équation sont précisément les *constantes caractéristiques* de l'équation (1), pour la condition aux limites $\frac{du}{dn} = 0$.

Il est essentiel de remarquer que $\lambda = 0$ *est un pôle*. Cela résulte de ce que $\lambda = 0$ est un pôle du second membre de (29); on le voit aussi directement, en remarquant que les relations

$$\Delta u = 0 \qquad \text{(dans C)},$$
$$\frac{du}{dn} = 0 \qquad \text{(sur C)}$$

sont vérifiées par $u = \text{const}$.

12. Les *constantes caractéristiques* sont réelles. Ce sont des pôles simples de la fonction u définie par (29). La démonstration est la même que pour les autres conditions aux limites, *si l'on suppose le pôle* $\lambda_0 \neq 0$. En effet, si λ_0 est supposé un pôle d'ordre n, $p(x, y)$ étant le coefficient de $\frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^n}$, on démontre comme précédemment que p est constant; et comme on a

$$\Delta p + \lambda_0 A(x, y)\,p = 0,$$

on voit que p est nul, si $\lambda_0 \neq 0$.

Le pôle $\lambda = 0$ est lui aussi simple si, comme nous l'avons supposé, la quantité

$$a = \int\int A(x, y)\, dx\, dy$$

est différente de zéro.

En effet, en écrivant

$$u(x, y; \lambda) = \frac{p}{\lambda^n} + \frac{q}{\lambda^{n-1}} + \ldots,$$

on déduit de l'équation (29)

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta p = 0, & \dfrac{dp}{dn} = 0 \\ \Delta q + A(x, y) p = 0, & \dfrac{dq}{dn} = 0 \end{array}\right\} \text{ sur C.}$$

Par conséquent, p est constant; et en appliquant la formule de Green, on tire de

$$\int\int \Delta q\, dx\, dy + p \int\int A(x, y)\, dx\, dy = 0$$

la relation

$$pa = \int_C \frac{dq}{dn} d\sigma = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $a \neq 0$,

$$p = 0.$$

Le développement autour de l'origine de la fonction $u(x, y; \lambda)$ définie par l'équation (29) sera donc de la forme

$$(30) \qquad u(x, y; \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} + u_0(x, y) + \lambda u_1(x, y) + \ldots.$$

En portant ce développement dans (29), il vient, pour calculer les fonctions u_n,

$$\begin{array}{ll} \alpha = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_C \overrightarrow{u}\, d\sigma, & \\ u_0(x, y) - \dfrac{\alpha}{2\pi} \displaystyle\int\int H(x, y; \xi, \eta) A(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta & = v''_0(x, y), \\ u_1(x, y) - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\int H(x, y; \xi, \eta) A(\xi, \eta)\, u_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ u_n(x, y) - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\int H(x, y; \xi, \eta) A(\xi, \eta)\, u_{n-1}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0. & \end{array}$$

D'après l'expression de la fonction $H(x, y; \xi, \eta)$, ces relations peuvent encore s'écrire

$$u_0(x, y) - \frac{\alpha}{2\pi}\int\int \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad = v'_0(x, y) + C_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_n(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int\int \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta)\, A(\xi, \eta)\, u_{n-1}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = C_n,$$

les C_i étant des constantes. Ces relations sont équivalentes aux suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Delta u_0 + \alpha A(x, y) \quad = 0, & \dfrac{du_0}{dn} = \bar{u} \\ \Delta u_1 + A(x, y)\, u_0 \quad = 0, & \dfrac{du_1}{dn} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots \\ \Delta u_n + A(x, y)\, u_{n-1} = 0, & \dfrac{du_n}{dn} = 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} \text{(sur C)},$$

la constante arbitraire qui entre dans l'expression de u_{n-1} étant déterminée de telle façon que les relations que doit vérifier u_n soient compatibles (n° 11).

Cela posé, la démonstration de l'existence de *constantes caractéristiques* autres que $\lambda = 0$ revient comme précédemment à la démonstration de la convergence limitée de la série (30).

On considérera la fonction

$$\Phi_1(\lambda) = \int\int A(x, y)\, u_0(x, y)\, u(x, y; \lambda)\, dx\, dy,$$

dont le développement autour de $\lambda = 0$ est [1]

$$(31) \qquad \Phi_1(\lambda) = W_0 + \lambda W_1 + \ldots + \lambda^n W_n + \ldots,$$

en posant

$$W_n = \int\int A(x, y)\, u_0(x, y)\, u_n(x, y)\, dx\, dy.$$

---

[1] $\Phi_1(\lambda)$ est holomorphe autour de l'origine, à cause de la relation

$$\int\int A(x, y)\, u_0(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

La série (31) et par conséquent aussi la série (30) ne convergent pas dans tout le plan ; il existe donc au moins une constante caractéristique. Réciproquement, soient λ_1 la première constante caractéristique et z une intégrale correspondante, de façon qu'on ait

$$(32) \qquad \Delta z + \lambda_1 A(x, y) z = 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{dz}{dn} = 0 \qquad (\text{sur } C).$$

Pour que λ_1 ne soit pas un pôle de $u(x, y; \lambda)$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction u vérifiant les relations

$$(33) \qquad \Delta u + \lambda_1 A(x, y) u = 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{du}{dn} = \bar{u} \qquad (\text{sur } C).$$

Or, de (32) et (33) on tire

$$\iint (u \Delta z - z \Delta u)\, dx\, dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_C \left(u \frac{dz}{dn} - z \frac{du}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

et enfin

$$\int_C z \bar{u}\, d\sigma = 0.$$

Supposons donc que la fonction arbitraire u ne satisfasse pas à ces conditions. $\Phi_1(\lambda)$ admettra alors le pôle $\lambda = \lambda_1$, puisque le résidu de $\Phi_1(\lambda)$ par rapport au pôle $\lambda = \lambda_1$ est

$$\iint A(x, y)\, u_0(x, y)\, z(x, y)\, dx\, dy,$$

quantité différente de zéro ([1]).

On continuera comme précédemment.

13. Indiquons succinctement ce qui arrive lorsque la quantité

$$\iint A(x, y)\, dx\, dy$$

([1]) En effet, cette quantité, après quelques transformations, se réduit à $\int_C \bar{u} z\, d\sigma$.

est nulle. La valeur de u tirée de (27) et portée dans (28) ne détermine plus E, mais fournit une nouvelle équation à satisfaire par u. En portant dans cette équation la valeur de u tirée de (27), on détermine E si l'on n'a pas

$$(34) \qquad \iiiint \mathrm{A}(x, y)\, \mathrm{A}(\xi, \eta)\, \Gamma'_0(x, y; \xi, \eta)\, d(xy)\, d(\xi\eta) = 0.$$

On aura ainsi pour calculer $u(x, y)$ une autre équation de Fredholm, dont le second membre admet le *pôle double* $\lambda = 0$. Il en est de même de $u(x, y; \lambda)$ et l'on aura un développement de la forme

$$u(x, y; \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{u_{-1}(x, y)}{\lambda} + u_0(x, y) + \lambda u_1(x, y) + \ldots.$$

Sauf ce détail, rien n'est changé à la suite des raisonnements.

De même, si l'égalité (34) est aussi remplie, on aura une fonction $u(x, y; \lambda)$ admettant l'origine comme *pôle triple*, etc.

14. Disons, en terminant, quelques mots d'une question de nature différente à laquelle on peut appliquer avec succès les méthodes que nous venons d'exposer.

Considérons une surface fermée à p trous, et soient

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

le carré de son élément linéaire et $d\sigma$ son élément superficiel. Posons

$$\mathrm{D}_1 \mathrm{U} = \frac{\mathrm{E}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} + \mathrm{G}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\right)^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2},$$

$$\mathrm{D}_1(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = \frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} - \mathrm{F}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right) + \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2},$$

$$\mathrm{D}_2 \mathrm{U} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\right).$$

Soit maintenant C un contour fermé entourant une portion connexe Σ

de cette surface; on aura la *formule de Green*

$$\iint_\Sigma D_1(U, V)\, d\sigma = -\int_C V \frac{dU}{dn}\, ds - \iint_\Sigma V \frac{D_2 U}{\sqrt{EG - F^2}}\, d\sigma. \tag{35}$$

Dans cette formule, U et V désignent des fonctions de (u, v) continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre dans Σ, et $\frac{d}{dn}$ la dérivée normale intérieure. Si les fonctions U, V satisfont à ces conditions sur toute la surface, on pourra prendre comme contour C l'ensemble des rétrosections K qui rendent cette surface simplement connexe; *l'intégrale curviligne de la formule précédente disparaît alors identiquement.*

Cela posé, considérons avec M. Picard [1] l'équation

$$D_2 U + \lambda c(u, v)\sqrt{EG - F^2}\, U = 0, \tag{36}$$

et proposons-nous d'en trouver une solution *continue*, avec ses dérivées du premier ordre, *sur la surface entière*.

Dans son cours de 1908 à la Faculté des Sciences, M. Picard a ramené ce problème à une équation de Fredholm sans second membre. Le problème n'est donc possible que pour des valeurs exceptionnelles du paramètre λ. De pareilles valeurs existent-elles effectivement? On en aperçoit une immédiatement. C'est la valeur $\lambda = 0$. En effet, l'équation de *Beltrami*

$$D_2 U = 0$$

admet bien une solution continue sur toute la surface; c'est la fonction $U = \text{const.}$

Pour établir l'existence d'autres valeurs singulières du paramètre λ, on partira de l'équation

$$D_2 U + \lambda c(u, v)\sqrt{EG - F^2}\, U = \sqrt{EG - F^2}\, f(u, v), \tag{37}$$

équivalente à une équation intégrale avec second membre. La solution de cette équation admet comme pôles les valeurs singulières en ques-

---

(1) *Comptes rendus*, juin 1908; *voir* aussi le Mémoire au commencement de ce Volume des *Annales*.

tion. En s'appuyant sur la formule de Green (35) et ses conséquences, on démontre facilement que ces pôles sont *réels* et *simples*, sauf le pôle $\lambda = 0$, qui peut être un pôle multiple.

Mettons-nous dans les circonstances les plus simples et supposons qu'on ait

$$\iint c(u, v)\, d\sigma \neq 0, \tag{38}$$

l'intégrale double étant étendue à toute la surface; alors le pôle $\lambda = 0$ est un pôle *simple* et la fonction U définie par l'équation (37) admettra autour de ce pôle le développement

$$U(u, v; \lambda) = \frac{\alpha}{\lambda} + U_0(u, v) + \lambda U_1(u, v) + \ldots \qquad (\alpha = \text{const.}). \tag{39}$$

Les fonctions $U_0, U_1, \ldots, U_n$ satisfont aux équations

$$\left\{\begin{array}{l} D_2 U_0 + \alpha c(u, v)\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{EG - F^2} f(u, v), \\ D_2 U_1 + c(u, v)\sqrt{EG - F^2}\, U_0 \quad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D_2 U_n + c(u, v)\sqrt{EG - F^2}\, U_{n-1} = 0, \end{array}\right. \tag{40}$$

et *sont continues sur toute la surface*. Chacune de ces fonctions n'est donc déterminée qu'à une constante additive près, dont on disposera de manière à rendre possible la solution de l'équation qui définit la fonction suivante. En effet, si dans l'équation (35) on fait $U = U_n$, $V = 1$, et si l'on choisit pour contour C l'ensemble des rétrosections K, elle devient

$$\iint \frac{D_2 U_n}{\sqrt{EG - F^2}}\, d\sigma = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface entière. Il résulte de là que la constante additive qui entre dans l'expression de U_{n-1} doit être choisie de manière qu'on ait

$$\iint c(u, v)\, U_{n-1}(u, v)\, d\sigma = 0.$$

Cette condition pourra être satisfaite si la condition (38) est remplie.

Envisageons maintenant la fonction de λ,

$$\Psi(\lambda) = \iint c(u, v)\, U_0(u, v)\, U(u, v; \lambda)\, d\sigma = W_0 + \lambda W_1 + \ldots + \lambda^n W_n + \ldots.$$

On établit facilement la relation

$$W_{2n+1} = \iint D_1 U_{n+1}\, d\sigma,$$

qui montre que les constantes W à indice impair sont *positives;* et la considération de la forme quadratique définie positive en p et q,

$$\iint \frac{\left\{ \begin{array}{l} E\left(p\dfrac{\partial U_{n-1}}{\partial v} + q\dfrac{\partial U_{n+1}}{\partial v}\right)^2 - 2F\left(p\dfrac{\partial U_{n-1}}{\partial v} + q\dfrac{\partial U_{n+1}}{\partial v}\right) \\ \quad \times \left(p\dfrac{\partial U_{n-1}}{\partial u} + q\dfrac{\partial U_{n+1}}{\partial u}\right) + G\left(p\dfrac{\partial U_{n-1}}{\partial u} + q\dfrac{\partial U_{n-1}}{\partial u}\right)^2 \end{array} \right\}}{EG - F^2}\, d\sigma > 0,$$

conduit aux inégalités

$$\frac{W_3}{W_1} < \frac{W_5}{W_3} < \ldots < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}} < \ldots,$$

qui prouvent l'existence d'une première valeur singulière différente de zéro.

La suite des raisonnements ne présente aucune difficulté.