ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ARTHUR KORN

Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 529-583

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__529_0>

SUR L'ÉQUILIBRE

DES

PLAQUES ÉLASTIQUES ENCASTRÉES[1];

PAR M. ARTHUR KORN.

Dans ce Mémoire nous allons résoudre le problème proposé d'une manière générale pour un contour quelconque, sous la seule supposition qu'il possède en chacun de ses points une tangente unique et un rayon de courbure bien déterminé et différent de zéro.

Nous nous servirons de la méthode des approximations successives, et nous résoudrons d'abord à l'aide de cette méthode le problème suivant :

Trouver deux fonctions U *et* V *continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur du contour* σ *et satisfaisant aux conditions :*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta U &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i f \log\frac{1}{r}\,d\omega \\ \Delta V &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i f \log\frac{1}{r}\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur,}$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i \left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \\ V &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i \left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma,$$

---

[1] Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Prix Vaillant, 1907).

et à la condition que

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

soit harmonique à l'intérieur de σ.

Ce problème résolu, on trouvera sans difficulté que les fonctions

$$(3)\qquad \begin{cases} u = U - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega, \\ v = V + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \end{cases}$$

sont les dérivées d'une fonction $\varphi(x, y)$:

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases}, \qquad \varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,$$

satisfaisant à l'équation

$$(5)\qquad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = f, \qquad \text{à l'intérieur,}$$

et aux conditions limites

$$(6)\qquad \begin{cases} \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \nu} = 0 \end{cases} \qquad \text{au contour } \sigma.$$

Quant à la fonction donnée $f(x, y)$, nous la supposerons finie et intégrable et telle que

$$(7)\qquad \Delta\int_i f\log\frac{1}{r}\,d\omega = -2\pi f \quad (^1).$$

---

(1) Cette condition sera remplie, par exemple, si f est continue (ou continue par intervalles), de manière que, pour deux points 1 et 2 quelconques du domaine (ou de ses intervalles) dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(7')\qquad |f_2 - f_1| \leqq \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Dans les Chapitres I et II, nous donnerons la solution générale du problème et nous démontrerons que cette solution est unique; nous ajouterons quelques remarques concernant le cas où le contour n'est pas de courbure continue, par exemple pour le cas d'un contour rectangulaire.

Dans le Chapitre III, nous nous occuperons d'un problème hydrodynamique tout à fait analogue au problème proposé, du problème d'équilibre d'un liquide doué de frottement au cas de deux dimensions.

Nous terminerons ce Mémoire par un aperçu sur les mêmes problèmes dans l'espace à trois dimensions.

CHAPITRE PREMIER.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES; LES INTÉGRALES I_j.

1. Pour résoudre le problème (1) et (2), nous nous proposons de trouver deux fonctions U et V continues avec leurs dérivées premières à l'intérieur du contour σ et satisfaisant aux conditions

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta U &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i f\log\frac{1}{r}\,d\omega \\ \Delta V &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i f\log\frac{1}{r}\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \sigma,$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{\bar\lambda}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \\ V &= -\frac{\bar\lambda}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma,$$

en désignant par $\bar\lambda$ un paramètre réel, et à la condition que

$$\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$$

soit harmonique à l'intérieur de σ.

Nous formerons successivement les fonctions U_j, V_j ($j=0, 1, 2, \ldots$)

définies par les équations suivantes :

$$(10\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta U_0 &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i f\log\frac{1}{r}\,d\omega \\ \Delta V_0 &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i f\log\frac{1}{r}\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \sigma;$$

$$(10\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} U_0 &= 0 \\ V_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma;$$

$$(11\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta U_j &= 0 \\ \Delta V_j &= 0 \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, \ldots \text{ à l'intérieur de } \sigma;$$

$$(11\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} U_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega, \\ V_j &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \\ & (j = 1, 2, \ldots \text{ au contour } \sigma). \end{aligned}\right.$$

Il est évident que les séries

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= U_0 + \bar\lambda U_1 + \bar\lambda^2 U_2 + \ldots, \\ V &= V_0 + \bar\lambda V_1 + \bar\lambda^2 V_2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

seront les solutions du problème (8) et (9), si l'on peut démontrer la convergence absolue et uniforme de ces séries et de leurs dérivées premières dans l'intérieur du contour σ et la propriété de

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

d'être harmonique à l'intérieur de σ.

Nous démontrerons ces propositions pour le cas où

$$(13)\qquad |\bar\lambda| \leqq 1.$$

Le cas spécial

$$(14)\qquad \bar\lambda = 1$$

nous conduira aux solutions

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= U_0 + U_1 + U_2 + \ldots, \\ V &= V_0 + V_1 + V_2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

du problème proposé (1) et (2).

Nous examinerons d'abord les propriétés des fonctions successives U_j, V_j et surtout les intégrales

$$(16)\qquad I_j = \int_\omega \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y} \right)^2 \right] d\omega,$$

pour lesquelles nous démontrerons dans ce Chapitre les inégalités

$$(17)\qquad I_j \overline{\gtrless} \text{const. fin. } L^j,$$

où

$$(18)\qquad 0 \overline{\gtrless} L < 1.$$

2. Pour examiner les propriétés de continuité des fonctions successives U_j, V_j et de leurs dérivées, rappelons quelques théorèmes connus :

I (¹). *Les premières dérivées d'un potentiel*

$$V = \int_\omega E \log \frac{1}{r} d\omega,$$

dont la densité E *est supposée finie et intégrable, sont continues de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *du plan quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\text{abs.} \left\{ \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right|_2 - \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right|_1 \right\} \overline{\gtrless} \text{ const. fin. max. abs. } E r_{12}^\lambda,$$

où λ *est un nombre positif quelconque satisfaisant à l'inégalité*

$$0 < \lambda < 1,$$

et où la constante finie ne dépend que du contour σ *et du choix de* λ, *h désignant une direction quelconque; on aura toujours*

$$\left| \frac{\partial V}{\partial h} \right| \overline{\gtrless} \text{ const. fin. max. abs. } E,$$

où la constante finie ne dépend que du contour σ.

(¹) *Cf.* A. Korn, *Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der Potentiale von Flächen und Räumen* (*Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, t. XXXVI, 1906, p. 25). On trouvera dans ce Mémoire le théorème analogue pour l'espace à trois dimensions. *Voir* aussi mon Mémoire *Sur les équations de l'élasticité* (*Ann. de l'Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. XXIV, 1907).

II (¹). *Les secondes dérivées d'un potentiel*

$$V = \int_i E \log \frac{1}{r} d\omega,$$

dont la densité E *est supposée continue de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* ω *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$|E_2 - E_1| \leqq A r_{12}^\lambda, \qquad \text{A représentant une constante finie, } 0 < \lambda < 1,$$

sont continues et à l'intérieur et à l'extérieur de σ, *de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *quelconques de l'intérieur et deux points* 1 *et* 2 *quelconques de l'extérieur de* σ *dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\text{abs.}\left\{ \left|\frac{\partial^2 V}{\partial h\, \partial h'}\right|_2 - \left|\frac{\partial^2 V}{\partial h\, \partial h'}\right|_1 \right\} \leqq (\text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs. E}) r_{12}^\lambda,$$

où les deux constantes finies ne dépendent que du contour σ *et du nombre* λ, *h et h' désignant deux directions quelconques; on aura toujours*

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial h\, \partial h'}\right| \leqq \text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs. E},$$

où de nouveau les deux constantes finies ne dépendent que du contour σ *et du nombre* λ.

III (²). *Soit* θ *une fonction quelconque continue sur le contour* σ *dont les dérivées premières sont continues sur* σ *de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* σ *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\text{abs.}\left\{ \left|\frac{\partial \bar\theta}{\partial \sigma}\right|_2 - \left|\frac{\partial \bar\theta}{\partial \sigma}\right|_1 \right\} \leqq A r_{12}^\lambda, \qquad \text{A représentant une constante finie, } 0 < \lambda < 1;$$

alors la fonction harmonique θ *de l'intérieur de* σ *possédant les valeurs limites* θ *au contour* σ *aura des dérivées premières dans* ω *continues de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *quelconques de* ω *dont nous dési-*

(¹) A. KORN, *Ibid.*, p. 22.

(²) *Ib.*, p. 19; la constante λ' figurant dans ce théorème peut être posée = λ.

gnons la distance par r_{12},

$$\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial\theta}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial\theta}{\partial h}\right|_1\right\} \leqq (\text{const. fin.}\,A + \text{const. fin. max. abs.}\,\bar{\theta})\, r_{12}^{\lambda},$$

où les deux constantes finies ne dépendent que du contour σ *et du nombre* λ, h *désignant une direction quelconque.*

Les fonctions U_0, V_0 définies par les équations ($10a$) et ($10b$) auront, en raison des théorèmes I et III, des dérivées premières continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(19)\qquad \begin{cases} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial U_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial U_0}{\partial h}\right|_1\right\} \leqq \text{const. fin. max. abs.}\, f r_{12}^{\lambda}, \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial V_0}{\partial h}\right|_1\right\} \leqq \text{const. fin. max. abs.}\, f r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

où λ est un nombre positif quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$(20)\qquad 0 < \lambda < 1,$$

et où la constante finie ne dépend que du contour σ et du choix de λ, h désignant une direction quelconque.

De plus, il est évident, en raison des équations ($10a$) et ($10b$) qui définissent U_0, V_0, que la fonction

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

est harmonique à l'intérieur de σ et

$$(21)\qquad \left|\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial U_0}{\partial y}\right| \leqq \text{const. fin. max. abs.}\, f,$$

la constante finie ne dépendant que du contour σ.

On déduira maintenant des équations ($11a$), ($11b$), qui définissent U_j, V_j ($j = 1, 2, \ldots$) à l'aide des théorèmes II et III successivement, que pour un j quelconque fini les fonctions U_j et V_j auront des dérivées premières continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω

quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial U_j}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial U_j}{\partial h}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\, C_j \text{ max. abs.} f r_{12}^{\lambda} \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V_j}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial V_j}{\partial h}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\, C_j \text{ max. abs.} f r_{12}^{\lambda} \end{array}\right\} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

où la constante C_j est finie pour un j fini quelconque et ne dépend que du contour σ, du choix de λ et de j.

De la même manière que U_j, V_j $(j = 1, 2, \ldots)$, les fonctions

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}$$

sont harmoniques à l'intérieur de σ, et l'on a

$$(23)\quad \left|\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right| \overline{\overline{<}}\, c_j \text{ max. abs.} f,$$

où la constante c_j est finie pour un j fini quelconque et ne dépend que du contour σ et de j.

3. Formons les intégrales

$$(24)\quad I_j = \int_{\omega}\left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)^2\right] d\omega;$$

alors une transformation de Green (¹) nous donnera

$$\begin{aligned} I_j = -\int_{\omega}\Big\{ & U_j\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)\right] \\ & + V_j\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)\right]\Big\} d\omega \\ -\int_{\sigma}\Big\{ & U_j\left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right)\cos(\nu x) - \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)\cos(\nu y)\right] \\ & + V_j\left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right)\cos(\nu y) + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)\cos(\nu x)\right]\Big\} d\sigma; \end{aligned}$$

(¹) Pour procéder en toute rigueur, on fera d'abord la transformation pour l'intégrale I'_j étendue sur l'intérieur d'un contour σ' tout intérieur de σ, et on laissera σ' s'approcher indéfiniment de σ.

donc, d'après (11 a) et (11 b),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_j = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Bigg\{ & \left(\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial y}\right)\Bigg[\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\cos(\nu x) \\
& \qquad - \frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\cos(\nu y)\Bigg] \\
& - \left(\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \Bigg\}\,d\sigma,
\end{aligned}
$$

en désignant par ν la normale intérieure de σ, ou, à l'aide d'une nouvelle transformation de Green,

$$
(25) \qquad \mathrm{I}_j = \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)d\omega.
$$

De cette identité nous conclurons, en nous servant de l'inégalité de Schwartz,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_j^2 & \leqq \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial y}\right)^2 d\omega \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega, \\
& \leqq \mathrm{I}_j \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega;
\end{aligned}
$$

donc

$$
(26) \qquad \mathrm{I}_j \leqq \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega.
$$

Si nous pouvons démontrer l'inégalité

$$
(27) \qquad \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega \leqq c\int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega,
$$

où la constante finie c ne dépend que du contour σ, on aura

$$
(28) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega & \leqq \frac{c}{1+c}\mathrm{I}_{j-1}, \\
& \leqq \mathrm{L}.\mathrm{I}_{j-1},
\end{aligned}
\right.
$$

où L est un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$
(29) \qquad 0 \leqq \mathrm{L} < 1
$$

et ne dépendant que du contour σ. Alors on aura, en raison de (26),

$$I_j \overline{\underset{<}{=}} L . I_{j-1}$$

et

$$I_j \overline{\underset{<}{=}} I_0 L^j \overline{\underset{<}{=}} \text{const. fin. } (\text{max. abs.} f)^2 L^j, \tag{30}$$

où la constante finie ne dépend que du contour σ, nullement de j.

Nous n'avons donc, pour démontrer l'inégalité importante (30), qu'à démontrer l'inégalité (27), ce que nous ferons dans le numéro suivant.

4. Nous démontrerons le lemme suivant :

Lemme. — *Soient* U, V *deux fonctions harmoniques de l'intérieur* ω *de* σ *dont les dérivées premières soient continues de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* ω *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{abs.} \left\{ \left| \dfrac{\partial U}{\partial h} \right|_2 - \left| \dfrac{\partial U}{\partial h} \right|_1 \right\} \overline{\underset{<}{=}} \text{const. fin.} \, r_{12}^{\lambda} \\ \text{abs.} \left\{ \left| \dfrac{\partial V}{\partial h} \right|_2 - \left| \dfrac{\partial V}{\partial h} \right|_1 \right\} \overline{\underset{<}{=}} \text{const. fin.} \, r_{12}^{\lambda} \end{array} \right\} \qquad 0 < \lambda < 1, \tag{31}$$

h désignant une direction quelconque, et supposons

$$\int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) d\omega = 0; \tag{32}$$

alors on aura toujours

$$\int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 d\omega \overline{\underset{<}{=}} c \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 d\omega, \tag{33}$$

où la constante finie c ne dépend que du contour σ.

Voyons d'abord que l'inégalité (33) est vraie pour un cercle de rayon R ayant son centre dans l'origine. En raison des suppositions (31), nous pourrons représenter les fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$$

en séries trigonométriques :

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} = \displaystyle\sum_1^\infty j r^j (A_j \cos j\varphi + B_j \sin j\varphi), \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} = A_0 + \displaystyle\sum_1^\infty j r^j (A_j \sin j\varphi - B_j \cos j\varphi), \end{cases}$$

en posant

$$(35)\quad \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

où les A_j, B_j sont des constantes en ayant égard à (32) et aux identités

$$(36)\quad \left.\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) = +\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) \end{cases}\right\} \quad \text{dans l'intérieur de } \sigma.$$

On conclura de (34)

$$\int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 d\omega = \sum_1^\infty j \frac{\pi}{2j+2} R^{2j+2}(A_j^2 + B_j^2),$$

$$\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 d\omega = \sum_1^\infty j \frac{\pi}{2j+2} R^{2j+2}(A_j^2 + B_j^2) + \pi R^2 A_0^2;$$

donc

$$(37)\quad \int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 d\omega \leqq \int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 d\omega;$$

la constante c est pour le cercle égale à l'unité.

Procédons maintenant à un contour σ quelconque, sous la seule supposition qu'il possède en chacun de ses points une tangente unique et un rayon de courbure bien déterminé et différent de zéro. Il est toujours possible de trouver une transformation (1) par laquelle l'inté-

---

(1) M. Poincaré s'est servi de pareilles transformations dans son Mémoire : *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, t. XX, 1895). On ne saurait pas toujours trouver ces transformations dans l'espace à trois dimensions, mais ces difficultés n'existent pas dans le plan; l'existence de ces transformations dans le plan peut être rigoureusement démontrée (A. Korn, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, II, 6e Partie; Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung, Berlin, 1901).

rieur de σ est transformé dans l'intérieur d'un cercle Σ de rayon fini R dont le centre est situé dans l'intérieur de σ, une transformation

$$(38) \qquad \begin{cases} X = X(x, y), \\ Y = Y(x, y), \end{cases}$$

jouissant des propriétés suivantes :

X et Y sont des fonctions de x, y continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur de σ, et les premières dérivées sont continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(39) \qquad \begin{cases} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial X}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial X}{\partial h}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\, r_{12}^{\lambda}, \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial Y}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial Y}{\partial h}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\, r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

où λ est un nombre positif quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$(40) \qquad 0 < \lambda < 1,$$

et où la constante finie ne dépend que du contour σ et du choix de λ, h désignant une direction quelconque.

x et y sont des fonctions de X, Y continues avec leurs premières dérivées, et les premières dérivées sont continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de Ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(41) \qquad \begin{cases} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial x}{\partial H}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial x}{\partial H}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\, r_{12}^{\lambda}, \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial y}{\partial H}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial y}{\partial H}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\, r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

H désignant une direction quelconque.

$\dfrac{\partial X}{\partial x}, \dfrac{\partial X}{\partial y}, \dfrac{\partial Y}{\partial x}, \dfrac{\partial Y}{\partial y}$ ne peuvent s'annuler en même temps dans aucun point de ω.

$\dfrac{\partial x}{\partial X}, \dfrac{\partial x}{\partial Y}, \dfrac{\partial y}{\partial X}, \dfrac{\partial y}{\partial Y}$ ne peuvent s'annuler en aucun point de Ω en même temps.

Chaque fonction harmonique de ω est transformée en une fonction harmonique de Ω, et *vice versa*.

La transformation satisfaisant à toutes ces conditions est la transformation conforme

$$X + iY = f(x + iy), \tag{42 a}$$

où

$$f(x + iy) = [x - a + i(y - b)]\, e^{-\int_\sigma H_c \log[x - \xi + i(y - \eta)]\, d\sigma}, \tag{42 b}$$

a, b représentant les coordonnées du centre de Σ, et ξ, η les coordonnées de l'élément $d\sigma$, H_c la densité de Green [1] du contour σ correspondant au point a, b [2].

On sait que cette transformation satisfait à toutes les conditions citées ci-dessus, si nous supposons, une supposition qu'on fait, du reste, pour toutes les investigations de la théorie du potentiel, qu'aucune droite ne peut couper σ dans un nombre indéfini de points.

Soient maintenant U et V deux fonctions harmoniques de ω qui sont transformées en deux fonctions $\overline{U}$ et $\overline{V}$ également harmoniques de Ω ; supposons que U et V satisfont aux conditions (31); alors $\overline{U}$ et $\overline{V}$ satisferont à de pareilles conditions à l'intérieur du cercle Σ; supposons encore l'égalité (32); nous ne pourrons pas conclure qu'on aura aussi

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{U}}{\partial Y}\right) \overline{d\omega} = 0,$$

parce que l'élément $\overline{d\omega}$ transformé d'un élément $d\omega$ de l'intérieur

---

(1) La densité de Green H_c est définie par l'équation

$$\int_\sigma H_c \log \frac{1}{r}\, d\sigma = \log \frac{1}{\mathfrak{R}}$$

pour chaque point ξ, η de σ, si nous désignons par $\mathfrak{R}$ la distance

$$(a, b) - (\xi, \eta).$$

(2) *Cf.* A. KORN, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, II, p. 275.

de ω n'est pas égal à $d\omega$, mais on aura

$$d\omega = k^2\,\overline{d\omega}, \tag{43}$$

où

$$k^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 \tag{44}$$

est fini et différent de zéro pour tout l'intérieur de σ.

Soit C une constante choisie de manière que

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} + C\right)\overline{d\omega} = 0, \tag{45}$$

et posons

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} + C \equiv C + \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{U}}{\partial Y}\right)\frac{\partial X}{\partial x} - \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial X} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial Y}\right)\frac{\partial X}{\partial y} = \Phi, \tag{46a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \equiv \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial X} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial Y}\right)\frac{\partial X}{\partial x} + \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{U}}{\partial Y}\right)\frac{\partial X}{\partial y} = \Psi; \tag{46b}$$

alors on aura, pour l'intérieur du cercle Σ,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial X} &= \frac{\partial \Phi}{\partial Y}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial X}, \end{aligned}\right. \tag{47}$$

$$\int_\Omega \Phi^2\,\overline{d\omega} = 0, \tag{48}$$

et l'on conclura comme auparavant (p. 539)

$$\int_\Omega \Phi^2\,\overline{d\omega} \lesseqgtr \int_\Omega \Psi^2\,\overline{d\omega}. \tag{49}$$

L'égalité (32) entraîne l'inégalité suivante :

$$\left\{\begin{aligned} &\int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 d\omega \lesseqgtr \int_\omega \Phi^2\,d\omega, \\ &\int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 d\omega \lesseqgtr g\int_\Omega \Phi^2\,\overline{d\omega} \lesseqgtr g\int_\Omega \Psi^2\,\overline{d\omega}, \end{aligned}\right. \tag{50}$$

si nous désignons par g le maximum de k^2. D'autre part, on a

$$\text{(51)} \qquad \int_\Omega \Psi^2 \, \overline{d\omega} \leqq g' \int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 d\omega,$$

si nous désignons par g' le maximum de $\frac{1}{k^2}$; donc

$$\text{(52)} \qquad \int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 d\omega \leqq c \int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 d\omega,$$

où

$$\text{(53)} \qquad c = gg'$$

est une constante finie ne dépendant que du contour σ.

C. Q. F. D.

5. Pour démontrer l'inégalité (27), de laquelle nous avions besoin pour arriver au résultat (30), il nous reste à prouver que les fonctions successives U_j, V_j satisfont à la condition

$$\text{(54)} \qquad \int_\omega \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) d\omega = 0.$$

D'après ($10\,b$), U_0 et V_0 s'annulent au contour σ; on a donc

$$\int_\omega \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) d\omega = \int_\sigma [U_0 \cos(\nu y) - V_0 \cos(\nu x)] \, d\sigma = 0,$$

et l'on aura, d'après ($11\,b$),

$$\int_\omega \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) d\omega = \int_\sigma [U_j \cos(\nu y) - V_j \cos(\nu x)] \, d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \int_\omega \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Bigg[& -\cos(\nu y) \frac{\partial}{\partial y} \int_\omega \left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \right) \log \frac{1}{r} \, d\omega \\ & + \cos(\nu x) \frac{\partial}{\partial x} \int_\omega \left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \right) \log \frac{1}{r} \, d\omega \Bigg] d\sigma, \end{aligned}$$

ou

$$\int_\omega \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) d\omega = \int_\omega \left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \right) d\omega;$$

on trouvera donc en effet, successivement,

$$\int_\omega \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right) d\omega = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

la démonstration des inégalités (30) est complète.

Nous avons démontré rigoureusement que les fonctions successives U_j, V_j *définies par les équations* (10) *et* (11) *satisfont aux inégalités*

$$(55)\quad I_j \equiv \int_\omega \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)^2\right] d\omega \overset{=}{<} I_0 L^j \overset{=}{<} B(\text{max. abs.} f)^2 L^j,$$

où B *est une constante finie ne dépendant que du contour* σ *et ne dépendant nullement de* j, *et* L *un nombre positif satisfaisant à l'inégalité*

$$0 \overset{=}{<} L < 1.$$

CHAPITRE II.

SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME PROPOSÉ POUR UN CONTOUR σ QUELCONQUE, SOUS LA SEULE SUPPOSITION QU'IL POSSÈDE DANS CHACUN DE SES POINTS UNE TANGENTE UNIQUE ET UN RAYON DE COURBURE BIEN DÉTERMINÉ ET DIFFÉRENT DE ZÉRO.

1. Pour tirer de (55) des conclusions concernant la convergence des séries (15), nous aurons besoin des théorèmes suivants, dont la démonstration est connue pour l'espace de trois dimensions :

I [1]. *Soit* k *une fonction continue sur* σ *de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* σ *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12} [1],

$$|k_2 - k_1| \overset{=}{<} A r_{12}^{\lambda}, \qquad \text{A représentant une constante finie, } 0 < \lambda < 1,$$

et posons

$$W = \int_\sigma k \frac{\cos(r\nu)}{r} d\sigma;$$

---

[1] *Cf.* le Mémoire cité auparavant (p. 533).

alors la fonction

$$W_1 = \frac{1}{2}\int_\sigma (W_a + W_i)\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma$$

aura déjà des dérivées premières continues dans tout l'intérieur de σ, *de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* ω *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial W_1}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial W_1}{\partial h}\right|_1\right\} \leqq (c_1 A + c_2 \max.\text{abs.}\,k)\,r_{12}^\lambda,$$

où c_1, c_2 *sont des constantes finies ne dependant que du contour* σ *et de* λ, *en désignant par* h *une direction quelconque.*

II (¹). *Soit* $\bar\theta$ *une fonction quelconque continue sur* σ *de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* σ *quelconques* (¹),

$$|\bar\theta_2 - \bar\theta_1| \leqq A\,r_{12}^\lambda, \qquad \text{A représentant une constante finie, } 0 < \lambda < 1,$$

et soit θ *la fonction harmonique de* ω *ayant les valeurs limites* $\bar\theta$ *au contour* σ; *alors la fonction*

$$f = \bar\theta - \frac{2}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\omega \theta \log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_c$$

sera continue sur σ *de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* σ *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$|f_2 - f_1| \leqq \left(\varepsilon A + \frac{c}{\varepsilon}\max.\text{abs.}\,\theta\right) r_{12}^\lambda,$$

ε *étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, et en désignant par* c *une constante finie ne dépendant que du contour* σ *et de* λ.

Les démonstrations de ces théorèmes sont absolument identiques aux démonstrations des théorèmes analogues pour l'espace à trois dimensions; nous n'avons qu'à expliquer pourquoi nous devons

---

(¹) *Cf.* le Mémoire cité auparavant (p. 533).

poser, pour le plan,

$$f = \bar{\theta} - \frac{2}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\omega \theta \log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_e,$$

pendant qu'on doit poser

$$f = \bar{\theta} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta\frac{d\tau}{r}\right|_e$$

pour l'espace à trois dimensions.

Il suffit, pour s'assurer de cette modification, de démontrer le théorème pour un cercle; l'extension à un contour σ quelconque, qui ne suffit qu'aux conditions qu'il possède en chacun de ses points une tangente unique et un rayon de courbure bien déterminé et différent de zéro, est absolument identique à l'extension du théorème analogue pour l'espace à trois dimensions d'une sphère à des surfaces plus générales.

Dans le cas du cercle de rayon R, nous pouvons développer θ en série de Fourier pour chaque point $(r_1\varphi_1)$ de l'intérieur :

$$\theta = \alpha_0 + \sum_1^\infty{}_j \left(\frac{r_1}{\mathrm{R}}\right)^j (\alpha_j\cos j\varphi_1 + \beta_j\sin j\varphi_1),$$

en posant

$$x = r_1\cos\varphi_1,$$
$$y = r_1\sin\varphi_1,$$

et en prenant l'origine pour centre du cercle.

Alors, on aura

$$\int_\omega \theta\log\frac{1}{r}\,d\omega = \pi\mathrm{R}^2\alpha_0\log\frac{1}{\rho} + \pi\sum_1^\infty{}_j \frac{\mathrm{R}^2}{2j(j+1)}\left(\frac{\mathrm{R}}{\rho}\right)^j(\alpha_j\cos j\varphi + \beta_j\sin j\varphi)$$

pour chaque point $(\rho\varphi)$ extérieur;

donc

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\omega \theta\log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_e = \pi\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty{}_j(\alpha_j\cos j\varphi + \beta_j\sin j\varphi),$$

$$\bar{\theta} - \frac{2}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\omega \theta\log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_e = -\pi\alpha_0;$$

on arrive donc au résultat remarquable que l'expression

$$\theta - \frac{2}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\omega \theta \log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_e$$

est constante au cas de la sphère, si θ est harmonique à l'intérieur, et le théorème est démontré pour le cercle; l'extension aux contours plus généraux se fait absolument de la même manière que, dans l'espace à trois dimensions, l'extension du théorème analogue à des surfaces plus générales.

2. Nous allons démontrer maintenant qu'en posant

$$P_j = \frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}, \tag{56}$$

$$P = \sum_{0}^{\infty}{}_j P_j, \tag{57}$$

la série P est absolument et uniformément convergente dans tout l'intérieur de σ et qu'elle représente une fonction continue de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques,

$$|P_2 - P_1| \leqq \alpha \,\text{max. abs.} f r_{12}^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1), \tag{58}$$

en désignant par α une constante finie ne dépendant que du contour σ $\left(\text{et du choix de } \lambda \text{ qu'on peut poser par exemple } = \frac{1}{2}\right)$.

La convergence de la série P dans l'intérieur de σ, à une distance finie, mais aussi petite qu'on veut de σ, peut être tirée directement de l'inégalité (55), d'après laquelle

$$\int_\omega P_j^2\,d\omega \leqq \text{const. fin. } (\text{max. abs.} f)^2 L^j \qquad (0 < L < 1).$$

Car nous n'avons qu'à construire, autour d'un tel point (x, y) séparé de σ par une distance finie, un cercle de rayon R tout intérieur de σ; alors on aura

$$P_j(x, y) = \frac{1}{\pi R^2}\int P_j\,d\omega,$$

où l'intégrale doit être étendue sur l'intérieur du cercle; donc

$$|P_j(x,y)| \overline{\overline{<}} \frac{1}{\pi R^2}\sqrt{\int P_j^2\,d\omega \int d\omega} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\pi R^2}\sqrt{\int_\omega P_j^2\,d\omega\,\pi R^2},$$

$$(59)\qquad |P_j| \overline{\overline{<}} \frac{\beta}{\mathrm{r}}\,\text{max. abs.} f A^j \qquad (o = A = \sqrt{L} < 1),$$

si nous désignons par r la distance la plus petite du point en question au contour σ, et par β une constante finie ne dépendant que du contour σ. La série P est donc, en effet, convergente pour chaque point séparé de σ par une distance finie.

Mais cela ne suffit pas; il faut démontrer aussi cette convergence quand on s'approche indéfiniment du contour σ.

D'après la définition (11) et la méthode de la moyenne arithmétique de M. Neumann, on aura

$$(60)\qquad \begin{cases} U_j = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma + X_{j1}, \\ V_j = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma + X_{j2}, \end{cases}$$

en posant

$$(61)\qquad \Psi_j = \frac{1}{2\pi}\int_\omega \left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,$$

où les intégrales $\int_\sigma$ doivent être étendues sur tous les éléments $d\sigma(\xi,\eta)$ du contour σ et où X_{j1}, X_{j2} sont des fonctions continues avec leurs premières dérivées, de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(62)\qquad \left.\begin{aligned} &\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial X_{j1}}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial X_{j1}}{\partial h}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin. max. abs. } P_{j-1}\, r_{12}^\lambda \\ &\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial X_{j2}}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial X_{j2}}{\partial h}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin. max. abs. } P_{j-1}\, r_{12}^\lambda \end{aligned}\right\} \quad o < \lambda < 1,$$

où la constante finie ne dépend que du contour σ et du choix de λ, h désignant une direction quelconque. En effet, d'après la définition (61), les dérivées $\dfrac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}$ sont continues sur σ de manière que, pour deux points 1 et 2 de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi}\right|_2 - \left|\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi}\right|_1\right\} \leqq \text{const. fin. max. abs. } P_{j-1}\, r_{12}^{\lambda},$$
$$\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial\Psi_j}{\partial\eta}\right|_2 - \left|\frac{\partial\Psi_j}{\partial\eta}\right|_1\right\} \leqq \text{const. fin. max. abs. } P_{j-1}\, r_{12}^{\lambda},$$

d'après le théorème I (p. 533); on tire, de ces inégalités, les inégalités (62), à l'aide du théorème III (p. 534) et des équations (60).

D'autre part, $\frac{\partial\Psi_j}{\partial x}$, $\frac{\partial\Psi_j}{\partial y}$ sont les fonctions harmoniques de l'extérieur possédant les valeurs limites $\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\Psi_j}{\partial\eta}$ au contour σ; on a donc aussi, d'après la méthode de M. Neumann,

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Psi_j}{\partial y} &= -\frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{\partial\Psi_j}{\partial\eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma + Y_{j1} \\ -\frac{\partial\Psi_j}{\partial x} &= \frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma + Y_{j2} \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'extérieur de } \sigma,$$

où les fonctions Y_{j1}, Y_{j2} jouissent des mêmes propriétés (62) de continuité à l'extérieur que les fonctions X_{j1}, X_{j2} à l'intérieur de σ.

A l'aide du théorème II (p. 534) et des inégalités (22), on s'assurera facilement de la validité des formules

$$\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\int_\sigma \frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma\right|_e = \left|\frac{\partial}{\partial\nu}\int_\sigma \frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma\right|_i,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\int_\sigma \frac{\partial\Psi_j}{\partial\eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma\right|_e = \left|\frac{\partial}{\partial\nu}\int_\sigma \frac{\partial\Psi_j}{\partial\eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma\right|_i,$$

et l'on trouvera ainsi, à l'aide des équations (60) et (63),

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial\nu} &= -\left|\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial y\,\partial\nu}\right|_e + Z_{j1}, \\ \frac{\partial V_j}{\partial\nu} &= +\left|\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x\,\partial\nu}\right|_e + Z_{j2}, \end{aligned}\right.$$

où les fonctions

$$Z_{j1} = \left|\frac{\partial X_{j1}}{\partial\nu}\right|_i + \left|\frac{\partial Y_{j1}}{\partial\nu}\right|_e,$$
$$Z_{j2} = \left|\frac{\partial X_{j2}}{\partial\nu}\right|_i + \left|\frac{\partial Y_{j2}}{\partial\nu}\right|_e$$

sont continues sur σ de manière que, pour deux points 1 et 2 de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left\{|Z_{j1}|_2 - |Z_{j1}|_1\right\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin. max. abs.} P_{j-1} r_{12}^{\lambda},\\ &\left\{|Z_{j2}|_2 - |Z_{j2}|_1\right\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin. max. abs.} P_{j-1} r_{12}^{\lambda}. \end{aligned}\right.$$

Comme on a

$$\left.\begin{aligned} &V_j + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega = 0\\ &U_j - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega = 0 \end{aligned}\right\}\quad \text{au contour } \sigma,$$

on aura du côté intérieur de σ

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[V_j + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right]\\ &\quad = \cos(\nu x)\left[\frac{\partial V_j}{\partial \nu} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right],\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left[U_j - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right]\\ &\quad = \cos(\nu y)\left[\frac{\partial U_j}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right]; \end{aligned}$$

donc, sur σ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y} = \frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} &+ \frac{\partial V_j}{\partial \nu}\cos(\nu x) - \frac{\partial U_j}{\partial \nu}\cos(\nu y)\\ &+ \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_i, \end{aligned}$$

ou, d'après (64),

$$\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y} = \frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} + \left|\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \nu}\right|_e + \left|\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \nu^2}\right|_i + Z_{j2}\cos(\nu x) - Z_{j1}\cos(\nu y),$$

$$(66)\qquad P_j = \frac{1}{2}P_{j-1} - \frac{1}{2}\left\{P_{j-1} - \frac{2}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\omega P_{j-1}\log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_e\right\} + Z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

où la fonction Z_j est continue sur σ de manière que, pour deux points 1 et 2 de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

(67) $$\text{abs.}\{|Z_j|_2 - |Z_j|_1\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin. max. abs.} P_{j-1} r_{12}^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1),$$

la constante finie ne dépendant que du contour σ et de λ.

3. Nous savons, d'après (22), que

$$\left.\begin{array}{lr} (68) & \text{abs.}\{|P_j|_2 - |P_j|_1\} \overline{\overline{<}} b_j \,\text{max. abs.} f . r_{12}^{\lambda} \\ \text{et} & \\ (69) & |P_j| \overline{\overline{<}} a_j \,\text{max. abs.} f \end{array}\right\} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

où a_j et b_j sont des constantes finies pour chaque j fini, ne dépendant que du contour σ et de j; à l'aide de (66), (67) et du théorème II (p. 545), nous allons démontrer les inégalités

(70) $$\begin{cases} a_j \overline{\overline{<}} \gamma l^j, \\ b_j \overline{\overline{<}} \gamma l^j, \end{cases}$$

où γ est une constante finie ne dépendant que du contour σ et de λ, et où

(71) $$0 \overline{\overline{<}} l < 1.$$

Nous tirons de (66), à l'aide de (67) et du théorème II (p. 545), l'inégalité suivante :

(72) $$b_j \overline{\overline{<}} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) b_{j-1} + \frac{c}{\varepsilon} a_{j-1},$$

où c est une constante finie ne dépendant que du contour σ et de λ, et où ε peut être choisi aussi petit qu'on veut. Nous choisissons ε assez petit pour que

(73) $$\mu = \frac{1}{2} + \varepsilon < 1;$$

alors on aura

(74) $$b_j \overline{\overline{<}} \mu b_{j-1} + \nu a_{j-1},$$

où ν représente une constante finie ne dépendant que du contour σ et de λ.

Soient maintenant O un point quelconque de σ, O′ un point de sa normale intérieure séparé de O par la distance r_j; alors on aura, à cause de l'identité

$$|\mathrm{P}_j|_0 = |\mathrm{P}_j|_{0'} + \{|\mathrm{P}_j|_0 - |\mathrm{P}_j|_{0'}\}$$

et en ayant égard à (59), (68) et (74),

$$a_j \overline{\overline{<}} \frac{\beta}{r_j}\Lambda^j + (\mu b_{j-1} + \nu a_{j-1}) r_j^\lambda. \tag{75}$$

Choisissons un nombre positif m de manière que

$$\Lambda < m = \Lambda^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} < 1, \tag{76}$$

et posons

$$r_j = \left(\Lambda^{\frac{1}{1+\lambda}}\right)^j; \tag{77}$$

alors nous pourrons écrire l'inégalité (75) de la manière suivante :

$$a_j \overline{\overline{<}} [\beta + (\mu b_{j-1} + \nu a_{j-1})] m^j. \tag{78}$$

Additionnons (74) et (78), après avoir multiplié (78) par $\frac{\nu}{\mu}$; alors on trouvera

$$b_j + \frac{\nu}{\mu} a_j \overline{\overline{<}} \mu\left(b_{j-1} + \frac{\nu}{\mu} a_{j-1}\right) + \left[\frac{\nu\beta}{\mu} + \nu\left(b_{j-1} + \frac{\nu}{\mu} a_{j-1}\right)\right] m^j, \tag{79}$$

ou, en désignant par l un nombre satisfaisant à l'inégalité,

$$\left.\begin{matrix}\mu \\ m\end{matrix}\right\} < l < 1, \tag{80}$$

et en posant

$$g_j = \frac{1}{l^j}\left(b_j + \frac{\nu}{\mu} a_j\right), \qquad l' = \frac{m}{l} < 1, \tag{81}$$

$$g_j \overline{\overline{<}} g_{j-1} + (\mathrm{A} + \mathrm{B} g_{j-1}) l'^j, \tag{82}$$

où nous désignons par A et B deux constantes finies ne dépendant que du contour σ et de λ.

Après avoir obtenu l'inégalité (82), nous nous servirons d'une méthode employée par M. Liapounoff [1] à une occasion semblable ; nous écrirons (82) dans la forme suivante :

$$g_j + \frac{A}{B} \leqq \left(g_{j-1} + \frac{A}{B}\right)(1 + B\,l'^j),$$

et nous en tirons

$$g_j + \frac{A}{B} \leqq \left(g_0 + \frac{A}{B}\right)(1 + B\,l')(1 + B\,l'^2)\ldots(1 + B\,l'^j).$$

Le produit

$$Q = (1 + B\,l')(1 + B\,l'^2)\ldots$$

est convergent, puisque $l' < 1$, et l'on aura

$$g_j + \frac{A}{B} \leqq \left(g_0 + \frac{A}{B}\right) Q;$$

donc

$$g_j \leqq \Gamma, \tag{83}$$

où Γ est une constante finie ne dépendant que du contour σ [1], et l'on trouve, d'après (81),

$$b_j + \frac{\nu}{\mu} a_j \leqq \Gamma\, l^j,$$

$$\left.\begin{array}{l} a_j \leqq \Gamma_1 l^j \\ b_j \leqq \Gamma_2 l^j \end{array}\right\} \qquad (0 \leqq l < 1), \tag{84}$$

où Γ_1 et Γ_2 sont des constantes finies ne dépendant que du contour σ; donc

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial V_j}{\partial x} - \dfrac{\partial U_j}{\partial y}\right| \leqq \Gamma_1 \,\text{max. abs.} f\, l^j, \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V_j}{\partial x} - \dfrac{\partial U_j}{\partial y}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial V_j}{\partial x} - \dfrac{\partial U_j}{\partial y}\right|_1\right\} \leqq \Gamma_2 \,\text{max. abs.} f\, l^j r_{12}^{\lambda} \quad (^1). \end{array}\right. \tag{85}$$

Ce résultat obtenu, nous trouvons, à l'aide des théorèmes I, II

(1) Liapounoff, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journ. de Math.*, 1898, p. 278).

(p. 533-534) et d'après les définitions de U_j, V_j,

$$(86)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} |U_j| \\ |V_j| \end{array}\right\} \leqq C \max.\,\mathrm{abs.}\, f\, U, \\ \left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial U_j}{\partial h}\right| \\ \left|\dfrac{\partial V_j}{\partial h}\right| \end{array}\right\} \leqq C \max.\,\mathrm{abs.}\, f\, U, \\ \left.\begin{array}{l} \mathrm{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial U_j}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial U_j}{\partial h}\right|_1\right\} \\ \mathrm{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V_j}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial V_j}{\partial h}\right|_1\right\} \end{array}\right\} \leqq C \max.\,\mathrm{abs.}\, f\, U\, r_{12}^{\lambda} \quad [1], \end{cases}$$

où h est une direction quelconque, C une constante finie ne dépendant que du contour σ.

4. Nous avons ainsi obtenu le résultat :

Soit $f(x, y)$ une fonction donnée à l'intérieur de σ, finie et intégrable, et telle [2] que

$$\Delta \int_\omega f \log\frac{1}{r}\, d\omega = -2\pi f;$$

alors on peut toujours trouver deux fonctions U et V continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur de σ et satisfaisant aux conditions

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\omega f \log\frac{1}{r}\, d\omega \\ \Delta V = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\omega f \log\frac{1}{r}\, d\omega \end{array}\right\} \text{ à l'intérieur de } \sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} U = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\, d\omega \\ V = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\, d\omega \end{array}\right\} \text{ au contour } \sigma,$$

---

[1] Nous pouvons choisir, par exemple, $\lambda = \frac{1}{2}$ pour ne plus avoir toujours à répéter que Γ est aussi dépendante de λ.

[2] *Cf.* la remarque page 530.

et à la condition que

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

soit harmonique à l'intérieur de σ. Pour trouver ces fonctions on doit former successivement les fonctions U_0, V_0, V_j, U_j ($j = 1, 2, \ldots$) définies par les équations

$$\left.\begin{aligned}
\Delta U_0 &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega f \log\frac{1}{r}\,d\omega \\
\Delta V_0 &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega f \log\frac{1}{r}\,d\omega
\end{aligned}\right\} \text{ à l'intérieur de } \sigma,$$

$$\left.\begin{aligned}
U_0 &= 0 \\
V_0 &= 0
\end{aligned}\right\} \text{ au contour } \sigma,$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{aligned}
\Delta U_j &= 0 \\
\Delta V_j &= 0
\end{aligned}\right\} \text{ à l'intérieur de } \sigma, \\
\left.\begin{aligned}
U_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \\
V_j &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega
\end{aligned}\right\} \text{ au contour } \sigma
\end{array}\right\} (j = 1, 2, \ldots);$$

alors les séries

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots,$$
$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$$

seront les solutions du problème proposé.

La convergence est absolue et uniforme pour ces séries, ainsi que pour les séries

$$\frac{\partial U}{\partial h} = \frac{\partial U_0}{\partial h} + \frac{\partial U_1}{\partial h} + \frac{\partial U_2}{\partial h} + \ldots,$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial V_0}{\partial h} + \frac{\partial V_1}{\partial h} + \frac{\partial V_2}{\partial h} + \ldots,$$

h désignant une direction quelconque, et les fonctions

$$\frac{\partial U}{\partial h}, \quad \frac{\partial V}{\partial h}$$

sont continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$\left.\begin{array}{l}\text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial U}{\partial h}\right|_2-\left|\dfrac{\partial U}{\partial h}\right|_1\right\}\\[2ex] \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_2-\left|\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_1\right\}\end{array}\right\}\lesseqgtr \text{const. fin. max. abs.} f\, r_{12}^{\lambda},$$

où λ est un nombre positif quelconque satisfaisant à la condition

$$0<\lambda<1,$$

et où la constante finie ne dépend que du contour σ et de λ [1].

5. Deux fonctions quelconques u, v continues à l'intérieur de σ, s'annulant au contour σ, peuvent être représentées de la manière suivante :

$$(87)\quad \left\{\begin{array}{l} u=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,\\[2ex] v=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_{\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,\end{array}\right.$$

si les premières dérivées de u, v sont continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$\left.\begin{array}{l}\text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial u}{\partial h}\right|_2-\left|\dfrac{\partial u}{\partial h}\right|_1\right\}\leqq \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda}\\[2ex] \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial v}{\partial h}\right|_2-\left|\dfrac{\partial v}{\partial h}\right|_1\right\}\leqq \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda}\end{array}\right\}\qquad (0<\lambda<1)$$

donc, si nous posons

$$(88)\quad \left\{\begin{array}{l} u=U-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_{\omega}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,\\[2ex] v=V+\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{\omega}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,\end{array}\right.$$

---

[1] Si f remplit la condition

$$|f_2-f_1|\lesseqgtr \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda},\qquad (0<\lambda<1),$$

on peut même démontrer la continuité des deuxièmes dérivées $\dfrac{\partial^2 U}{\partial h\,\partial h'}$ $\dfrac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial h'}$; mais nous n'insisterons pas sur ce point.

on aura

$$(89) \qquad \begin{cases} u = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\omega \left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right)\log\dfrac{1}{r}\,d\omega, \\ v = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\omega \left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right)\log\dfrac{1}{r}\,d\omega, \end{cases}$$

$$(90) \qquad \left.\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \end{array}\right\} \quad \text{au contour } \sigma.$$

Puisque les premières dérivées de

$$\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega$$

ne sont pas discontinues en passant σ, on a aussi

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega = 0, \qquad \text{au contour } \sigma;$$

donc

$$(91) \qquad \int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega = 0, \qquad \text{au contour } \sigma.$$

Enfin on a, d'après (88),

$$(92) \qquad \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \Delta\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right) = f.$$

La fonction

$$(93) \qquad \varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega$$

satisfait donc aux conditions

$$(94) \qquad \Delta\Delta\varphi = f, \qquad \text{à l'intérieur de } \sigma,$$

$$(95) \qquad \left.\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{au contour } \sigma,$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit $f(x, y)$ une fonction donnée à l'intérieur de σ,* *finie et intégrable, et telle* (1) *que*

$$\Delta\int_\omega f\log\frac{1}{r}d\omega = -2\pi f;$$

alors on peut toujours trouver une fonction continue avec ses dérivées premières et deuxièmes à l'intérieur de σ *et satisfaisant aux conditions*

$$\Delta\Delta\varphi = f, \quad \text{à l'intérieur de } \sigma,$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= 0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma.$$

Pour trouver cette fonction, on doit former successivement les fonctions définies par les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}\Delta U_0 &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega f\log\frac{1}{r}d\omega\\ \Delta V_0 &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega f\log\frac{1}{r}d\omega\end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \sigma,\\
&\left.\begin{aligned}U_0 &= 0\\ V_0 &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma;\\
&\left.\begin{aligned}\Delta U_j &= 0\\ \Delta V_j &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \sigma,\\
&\left.\begin{aligned}U_j &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial x}\right)\log\frac{1}{r}d\omega\\ V_j &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega\left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}d\omega\end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma
\end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots);$$

alors la fonction

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_\omega\sum_0^\infty{}_j\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}d\omega$$

représentera la solution du problème, et ses dérivées secondes seront continues à l'intérieur de σ *de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de l'inté-*

(1) *Cf.* la remarque page 530.

rieur quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial h\, \partial h'}\right|_2 - \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial h\, \partial h'}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin. max. abs.} f\, r_{12}^{\lambda},$$

où λ *est un nombre positif quelconque satisfaisant à l'inégalité*

$$0 < \lambda < 1,$$

et où la constante finie ne dépend que du contour σ *et du choix* λ, hh' *désignant deux directions quelconques* (¹).

6. Voyons enfin si le problème proposé peut avoir une autre solution que celle donnée en haut.

Supposons que φ_1 et φ_2 soient deux fonctions continues à l'intérieur de σ avec leurs dérivées premières et deuxièmes, et qu'on ait

$$(96)\qquad \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) \text{ harmonique à l'intérieur de } \sigma,$$

$$(97)\qquad \left\{\begin{array}{c} \varphi_2 - \varphi_1 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{au contour } \sigma;$$

alors on aura

$$(98)\qquad \int_{i'} [\Delta(\varphi_2 - \varphi_1)]^2\, d\omega = -\int_{i'}\left[\frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial x}\,\frac{\partial \Delta(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial y}\,\frac{\partial \Delta(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial y}\right] d\omega - \int_{\sigma'} \frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial \nu}\,\Delta(\varphi_2 - \varphi_1)\, d\sigma,$$

ou

$$(99)\qquad \int_{i'} [\Delta(\varphi_2 - \varphi_1)]^2\, d\omega = \int_{\sigma'}\left[(\varphi_2 - \varphi_1)\,\frac{\partial \Delta(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial \nu} - \frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial \nu}\,\Delta(\varphi_2 - \varphi_1)\right] d\sigma,$$

si i' est l'intérieur d'un contour σ' tout intérieur de σ.

(¹) Si f remplit la condition

$$|f_2 - f_1| \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1),$$

on peut même démontrer la continuité des troisièmes dérivées de φ à l'intérieur de σ.

Supposons le contour σ' construit de telle manière qu'on marque sur toutes les normales intérieures de σ les points ayant la distance ρ de σ, en choisissant ρ assez petit; alors on aura sur σ

$$(\varphi_2-\varphi_1)_{\sigma'}=(\varphi_2-\varphi_1)_{\sigma}+\rho\left\{\left|\frac{\partial(\varphi_2-\varphi_1)}{\partial\nu}\right|_{\sigma}+\varepsilon\right\}$$

ou

$$(\varphi_2-\varphi_1)_{\sigma'}=\varepsilon\rho, \tag{100 a}$$

où ε sera aussi petit qu'on voudra, si l'on choisit ρ assez petit; d'autre part, comme $\Delta(\varphi_2-\varphi_1)$ est harmonique à l'intérieur de σ, on aura sur σ'

$$\left|\frac{\partial\Delta(\varphi_2-\varphi_1)}{\partial\nu}\right| \overline{\gtrless} \text{const. fin.} \frac{\text{max. abs. } \Delta(\varphi_2-\varphi_1)}{\rho}, \tag{100 b}$$

où la constante finie ne dépend que du contour σ. Approchons maintenant σ' indéfiniment de σ; alors on tirera de (99), en ayant égard à (100 a) et (100 b),

$$\int_\omega [\Delta(\varphi_2-\varphi_1)]^2\,d\omega=0; \tag{101}$$

donc

$$\Delta(\varphi_2-\varphi_1)=0, \tag{102}$$

$$\varphi_2-\varphi_1=0. \tag{103}$$

Corollaire de I. — *Il n'y a qu'une seule fonction $\varphi(x,y)$ continue avec ses dérivées premières et secondes à l'intérieur de σ satisfaisant aux conditions*

$$\Delta\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_\omega f\log\frac{1}{r}\,d\omega \qquad \text{harmonique à l'intérieur de } \sigma,$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma;$$

la solution du problème proposé donnée par le théorème I *est unique.*

7. Nous ne ferons qu'une courte remarque concernant le cas

où le contour ne sera pas de courbure continue, par exemple le cas d'un contour rectangulaire. Une démonstration complète des théorèmes analogues pour ces cas demanderait préalablement une extension des théorèmes II (p. 534), du lemme (p. 538) et des théorèmes I et II (p. 544 et 545) pour les contours possédant des sommets; on verra sans difficulté qu'on ne pourra plus demander que les premières dérivées des solutions U et V, c'est-à-dire les deuxièmes dérivées de φ, restent continues dans tout l'intérieur, mais on devra permettre à ces dérivées de devenir infiniment grandes en s'approchant des sommets, mais de manière que toutes les intégrales étendues sur l'intérieur de σ dont on a besoin dans la démonstration donnée ci-dessus soient convergentes. En tenant compte de la représentation conforme

$$dZ = \frac{dz}{\sqrt{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)(z-c_4)}}$$

(c_1, c_2, c_3, c_4 représentant des constantes complexes de même module),

par laquelle l'intérieur d'un contour rectangulaire peut être transformé dans l'intérieur d'un cercle, on peut prédire que le théorème I avec son corollaire sera aussi vrai pour un contour rectangulaire, avec la seule différence qu'on doit permettre aux deuxièmes dérivées de φ de devenir infinies, mais d'une certaine manière, en s'approchant indéfiniment des sommets.

CHAPITRE III.

SOLUTION D'UN PROBLÈME HYDRODYNAMIQUE, ANALOGUE AU PROBLÈME PROPOSÉ.

1. Supposons un liquide doué de frottement dont l'état ne dépend que de x, y, mais qui se trouve tout à fait indépendant de z; soit le contour σ la frontière du liquide dans chaque plan parallèle au plan des x, y.

Le problème classique du mouvement stationnaire, pour le cas où des forces données X, Y agissent sur chaque particule (x, y), se ramène au problème analytique suivant :

Trouver deux fonctions u et v continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur du contour σ et une fonction p continue à l'intérieur du contour satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(104\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} k\Delta u &= \frac{\partial p}{\partial x} - \mathrm{X} \\ k\Delta v &= \frac{\partial p}{\partial y} - \mathrm{Y} \end{aligned}\right. \qquad \text{à l'intérieur de } \sigma,$$

$$(104\,b)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(105)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= u_0 \\ v &= v_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{au contour } \sigma.$$

Ici X, Y représentent les forces agissant sur chaque particule (x, y), u, v les vitesses, p la pression hydrodynamique, u_0, v_0 les valeurs données de u, v au contour σ, et l'on néglige tous les termes qui sont de second ordre par rapport aux vitesses et à leurs dérivées; k est une constante inhérente du liquide en question.

Nous supposerons les fonctions X, Y finies et intégrables, et telles [1] que

$$(106)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta \int_\omega \mathrm{X} \log\frac{1}{r}\, d\omega &= -2\pi \mathrm{X}, \\ \Delta \int_\omega \mathrm{Y} \log\frac{1}{r}\, d\omega &= -2\pi \mathrm{Y}; \end{aligned}\right.$$

quant aux fonctions u_0, v_0, nous supposerons qu'elles soient continues avec leurs premières dérivées sur σ, et que les premières dérivées soient continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de σ quelconques,

$$(107)\qquad \left\{\begin{aligned} &\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial u_0}{\partial \sigma}\right|_2 - \left|\frac{\partial u_0}{\partial \sigma}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\, \mathrm{A}\, r_{12}^{\lambda} \\ &\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial v_0}{\partial \sigma}\right|_2 - \left|\frac{\partial v_0}{\partial \sigma}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}}\, \mathrm{A}\, r_{12}^{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad \text{A représentant une constante finie } (0 < \lambda < 1).$$

Nous résoudrons ce problème d'une manière générale et complète

---

[1] *Cf.* la remarque page 530.

pour le cas d'un contour σ quelconque, sous la seule supposition qu'il possède en chacun de ses points une tangente unique et un rayon de courbure bien déterminé et différent de zéro.

2. Pour résoudre ce problème, nous nous proposons d'abord de trouver à l'aide de la méthode des approximations successives deux fonctions U et V continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur de σ et satisfaisant aux conditions

$$(108)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta U &= -\frac{1}{k}X \\ \Delta V &= -\frac{1}{k}Y \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \sigma,$$

$$(109)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= u_0 - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \\ V &= v_0 - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma.$$

Ce problème résolu, on trouvera sans difficulté que les fonctions

$$(110)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= U + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega, \\ v &= V + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega, \\ p &= -k\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right) \end{aligned}\right.$$

représenteront les solutions de notre problème hydrodynamique, si l'on peut encore vérifier l'identité

$$(111)\qquad \Delta\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega = -2\pi\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

ce qui ne présentera aucune difficulté pour les solutions que nous donnerons.

Nous formerons successivement les fonctions U_j, V_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$)

définies par les équations suivantes :

$$(112\,a)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta U_0 &= -\frac{1}{k}X \\ \Delta V_0 &= -\frac{1}{k}Y \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \sigma,$$

$$(112\,b)\quad \left\{\begin{aligned} U_0 &= u_0 \\ V_0 &= v_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma,$$

$$(113\,a)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta U_j &= 0 \\ \Delta V_j &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \sigma,$$

$$(113\,b)\quad \left\{\begin{aligned} U_j &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \\ V_j &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \end{aligned}\right\} \quad \text{au contour } \sigma.$$

Il est évident que les séries

$$(114)\quad \left\{\begin{aligned} U &= U_0 + U_1 + U_2 + \ldots, \\ V &= V_0 + V_1 + V_2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

seront les solutions du problème (108) et (109), si l'on peut démontrer la convergence absolue et uniforme de ces séries et de leurs dérivées premières dans l'intérieur du contour σ et la propriété (111) de la fonction

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Pour résoudre ces questions de convergence, nous nous occuperons d'abord, comme au Chapitre I, des intégrales

$$(115)\quad I_j = \int_\omega \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)^2\right] d\omega;$$

nous démontrerons les inégalités

$$(116)\quad I_j \leqq \text{const. fin.}\, L^j,$$

où

$$0 \leqq L < 1. \tag{117}$$

3. Les fonctions U_0, V_0, définies par les équations (112a), (112b), auront, en raison des théorèmes I et III (p. 533 et 534), des dérivées premières continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$\left.\begin{array}{l} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial U_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial U_0}{\partial h}\right|_1\right\} \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial V_0}{\partial h}\right|_1\right\} \end{array}\right\} \leqq C_0 C r_{12}^{\lambda}, \tag{118}$$

où la constante finie C_0 ne dépend que du contour σ et de λ, et où la constante finie C dépend des fonctions X, Y, u_0, v_0 [1], h désignant une direction quelconque.

On déduira maintenant des équations (113a), (113b), qui définissent $U_j, V_j (j = 1, 2, \ldots)$ à l'aide des théorèmes II et III (p. 534) successivement, que pour un j quelconque fini les fonctions U_j et V_j auront des dérivées premières continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$\left.\begin{array}{l} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial U_j}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial U_j}{\partial h}\right|_1\right\} \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V_j}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial V_j}{\partial h}\right|_1\right\} \end{array}\right\} \leqq C_j C r_{12}^{\lambda} \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{119}$$

où la constante C_j est finie pour un j fini quelconque et ne dépend que du contour σ, de λ et de j.

Formons les intégrales

$$I_j = \int_\omega \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)^2\right] d\omega; \tag{120}$$

---

[1] On peut poser C égal au maximum absolu de X, Y, u_0, v_0, $\dfrac{\partial u_0}{\partial \sigma}$, $\dfrac{\partial v_0}{\partial \sigma}$ et de la constante A figurant dans les inégalités 107, page 562.

alors une transformation de Green (¹) nous donnera

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_j = & -\int_\omega \Big\{ \mathrm{U}_j\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial y}\right)\right] \\
& \qquad + \mathrm{V}_j\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial y}\right)\right]\Big\}\, d\omega \\
& -\int_\sigma \Big\{ \mathrm{U}_j\left[\left(\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial y}\right)\cos(\nu x)-\left(\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial y}\right)\cos(\nu y)\right] \\
& \qquad + \mathrm{V}_j\left[\left(\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial y}\right)\cos(\nu y)+\left(\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial y}\right)\cos(\nu x)\right]\Big\}\, d\sigma;
\end{aligned}$$

donc, d'après (113 *a*), (113 *b*),

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_j = + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ & \left(\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial \nu}\int_\omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\, d\omega \\
& -\left(\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial y}\right)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\, d\omega\cos(\nu y) \\
& \qquad -\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\, d\omega\cos(\nu x)\Big]\Big\}\, d\sigma,
\end{aligned}$$

en désignant par ν la normale intérieure de σ, ou, à l'aide d'une nouvelle transformation de Green,

$$\mathrm{I}_j = \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial y}\right) d\omega. \tag{121}$$

De cette identité nous conclurons, en nous servant de l'inégalité de Schwartz,

$$\mathrm{I}_j^2 \leqq \int\left(\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial y}\right)^2 d\omega \int_\omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega,$$

$$\mathrm{I}_j^2 \leqq \mathrm{I}_j \int_\omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega\,;$$

donc

$$\mathrm{I}_j \leqq \int_\omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_{j-1}}{\partial y}\right)^2 d\omega. \tag{122}$$

(¹) *Cf.* la remarque page 536.

Si nous pouvons démontrer l'inégalité

$$\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y} \right)^2 d\omega \leqq c \int_\omega \left(\frac{\partial V_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \right)^2 d\omega, \tag{123}$$

où la constante finie c ne dépend que du contour σ, on aura

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y} \right)^2 d\omega \leqq \frac{c}{1+c} I_{j-1}, \\ &\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y} \right)^2 d\omega \leqq L I_{j-1}, \end{aligned} \right. \tag{124}$$

où L est un nombre satisfaisant à l'inégalité

$$0 \leqq L < 1 \tag{125}$$

et ne dépend que du contour σ. Alors on aura, en raison de (122),

$$I_j \leqq L I_{j-1}$$

et

$$I_j \leqq I_0 L^j \leqq \text{const. fin. } C^2 L^j, \tag{126}$$

où la constante finie ne dépend que du contour σ, nullement de j.

Nous n'avons donc, pour démontrer l'inégalité importante (126), qu'à démontrer l'inégalité (123), ce que nous ferons dans le numéro suivant.

4. Nous démontrerons le lemme suivant :

Soient U, V *deux fonctions harmoniques de l'intérieur* ω *de* σ *dont les dérivées premières soient continues de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* ω *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{abs.} \left\{ \left| \frac{\partial U}{\partial h} \right|_2 - \left| \frac{\partial U}{\partial h} \right|_1 \right\} \leqq \text{const. fin. } r_{12}^\lambda \\ &\text{abs.} \left\{ \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right|_2 - \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right|_1 \right\} \leqq \text{const. fin. } r_{12}^\lambda \end{aligned} \right\} \qquad 0 < \lambda < 1, \tag{127}$$

h désignant une direction quelconque, et supposons

$$\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\omega = 0; \tag{128}$$

alors on aura toujours

$$\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 d\omega \overline{\gtrless} c \int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 d\omega, \tag{129}$$

où la constante finie c ne dépend que du contour σ.

Voyons d'abord que l'inégalité (129) est vraie pour un cercle de rayon R ayant son centre dans l'origine. En raison des suppositions (127), nous pourrons représenter les fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$$

en séries trigonométriques

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} &= -\sum_1^\infty j\, r^j (A_j \cos j\varphi + B_j \sin j\varphi), \\ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} &= A_0 + \sum_1^\infty j\, r^j (A_j \sin j\varphi - B_j \cos j\varphi), \end{aligned}\right. \tag{130}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}\right. \tag{131}$$

où les A_j, B_j sont des constantes, en ayant égard à (128) et aux identités

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) &= +\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \text{ dans l'intérieur de } \sigma. \tag{132}$$

On conclura de (130)

$$\int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 d\omega = \sum_1^\infty j \frac{\pi}{2j+2} R^{2j+2}(A_j^2 + B_j^2),$$

$$\int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 d\omega = \sum_1^\infty j \frac{\pi}{2j+2} R^{2j+2}(A_j^2 + B_j^2) + \pi R^2 A_0^2;$$

donc

$$(133)\qquad \int_\omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 d\omega \leqq \int_\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 d\omega;$$

la constante c est pour le cercle égale à l'unité.

L'extension du théorème à tous les contours σ se fait de la même manière que l'extension du lemme (p. 538), sous la seule supposition que le contour possède en chacun de ses points une tangente unique et un rayon de courbure bien déterminé et différent de zéro.

5. Pour démontrer l'inégalité (123), de laquelle nous avions besoin pour arriver au résultat (126), il nous reste à prouver que les fonctions successives U_j, V_j satisfont à la condition

$$(134)\qquad \int_\omega \left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right) d\omega = 0 \qquad (j=0, 1, 2, \ldots).$$

On a d'abord

$$\int_\omega \left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right) dx = -\int_\sigma [U_0 \cos(\nu x) + V_0 \cos(\nu y)]\, d\sigma = 0;$$

les fonctions données u_0, v_0 doivent naturellement obéir à cette condition, à cause de l'incompressibilité du liquide.

D'autre part, on a, d'après (113 b),

$$\int_\omega \left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right) d\omega = -\int_\sigma [U_j \cos(\nu x) + V_j \cos(\nu y)]\, d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\int_\omega \left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Bigg[& \cos(\nu x)\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\, d\omega \\ & + \cos(\nu y)\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\, d\omega\Bigg] d\sigma,\end{aligned}$$

ou

$$(135)\qquad \int_\omega \left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right) d\omega = \int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right) d\omega;$$

on trouvera donc en effet, successivement,

$$(136)\qquad \int_\omega \left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right) d\omega = 0 \qquad (j=0, 1, 2, \ldots);$$

la démonstration des inégalités (126) est complète.

Nous avons démontré rigoureusement que les fonctions successives U_j, V_j définies par les équations (112), (113) satisfont aux inégalités

$$(137)\qquad I_j \equiv \int_\omega \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y}\right)^2\right] d\omega \leqq B C^2 L^j,$$

où C est la constante finie définie dans la remarque (p. 565) et B une constante finie ne dépendant que du contour σ et ne dépendant nullement de j, enfin L un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$0 \leqq L < 1$$

ne dépendant que du contour σ.

6. Nous allons démontrer maintenant qu'en posant

$$(138)\qquad \theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y},$$

$$(139)\qquad \theta = \sum_0^\infty {}_j\, \theta_j,$$

la série θ est absolument et uniformément convergente dans tout l'intérieur de σ et qu'elle représente une fonction continue de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques,

$$(140)\qquad |\theta_2 - \theta_1| \leqq \alpha C r_{12}^\lambda,$$

en désignant par α une constante finie ne dépendant que du contour σ et de λ.

La convergence de la série θ dans l'intérieur de σ, à une distance finie mais aussi petite qu'on veut de σ, peut être tirée directement de l'inégalité (137), d'après laquelle

$$\int_\omega \theta_j^2\, d\omega \leqq \text{const. fin.}\, C^2 L^j \qquad (0 \leqq L < 1);$$

car nous n'avons qu'à construire autour d'un tel point (x, y) séparé de σ par une distance finie un cercle de rayon R tout intérieur de σ; alors on aura

$$\theta_j(x, y) = \frac{1}{\pi R^2} \int \theta_j \, d\omega,$$

où l'intégrale doit être étendue sur l'intérieur du cercle; donc

$$|\theta_j(x, y)| \overline{\leq} \frac{1}{\pi R^2} \sqrt{\int \theta_j^2 \, d\omega \int d\omega} \overline{\leq} \frac{1}{\pi R^2} \sqrt{\int_\omega \theta_j^2 \, d\omega \, \pi R^2},$$

(141) $$|\theta_j| \overline{\leq} \frac{\beta}{r} C A^j \qquad (0 < A = \sqrt{L} < 1),$$

si nous désignons par r la distance la plus petite du point en question au contour σ, et par β une constante finie ne dépendant que du contour σ. La série θ est donc en effet convergente pour chaque point séparé de σ par une distance finie.

Mais cela ne suffit pas; il faut démontrer aussi cette convergence quand on s'approche indéfiniment de σ.

D'après la définition (113) et la méthode de M. Neumann, on aura

(142) $$\left\{\begin{aligned} U_j &= -\frac{1}{\pi} \int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi} \frac{\cos(r\nu)}{r} \, d\sigma + X_{j1}, \\ V_j &= -\frac{1}{\pi} \int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta} \frac{\cos(r\nu)}{r} \, d\sigma + X_{j2}, \end{aligned}\right.$$

en posant

(143) $$\Psi_j = \frac{1}{2\pi} \int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y} \right) \log \frac{1}{r} \, d\omega,$$

où les intégrales $\int_\sigma$ doivent être étendues sur tous les éléments $d\sigma(\xi, \eta)$ du contour σ et où X_{j1} X_{j2} sont des fonctions continues avec leurs premières dérivées de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

(144) $$\left\{\begin{aligned} &\text{abs.} \left\{ \left| \frac{\partial X_{j1}}{\partial h} \right|_2 - \left| \frac{\partial X_{j1}}{\partial h} \right|_1 \right\} \\ &\text{abs.} \left\{ \left| \frac{\partial X_{j2}}{\partial h} \right|_2 - \left| \frac{\partial X_{j2}}{\partial h} \right|_2 \right\} \end{aligned}\right\} \overline{\leq} \text{const. fin. max. abs. } \theta_{j-1} r_{12}^\lambda,$$

où la constante finie ne dépend que du contour σ et de λ, h désignant une direction quelconque. En effet, d'après la définition (143), les dérivées $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}$ sont continues sur σ de manière que, pour deux points 1 et 2 de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}\right|_2 - \left|\frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin. max. abs. } \theta_{j-1} r_{12}^{\lambda},$$

$$\text{abs.}\left\{\left|\frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}\right|_2 - \left|\frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}\right|_1\right\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin. max. abs. } \theta_{j-1} r_{12}^{\lambda}$$

[d'après le théorème I (p. 533)];

on tire de ces inégalités les inégalités (144) à l'aide du théorème III (p. 534) et des équations (142).

D'autre part, $\frac{\partial \Psi_j}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi_j}{\partial y}$ sont les fonctions harmoniques de l'extérieur possédant les valeurs limites $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}$ au contour σ; on a donc aussi, d'après la méthode de M. Neumann,

$$(145)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} &= -\frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma + \mathrm{Y}_{j1} \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} &= -\frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma + \mathrm{Y}_{j2} \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'extérieur de } \sigma,$$

où les fonctions Y_{j1}, Y_{j2} jouissent des mêmes propriétés (144) de continuité à l'extérieur que les fonctions X_{j1}, X_{j2} à l'intérieur de σ.

A l'aide du théorème II (p. 534) et des inégalités (119), on s'assurera facilement des formules

$$\left|\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma\right|_i = \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma\right|_e,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma\right|_i = \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \eta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r}\,d\sigma\right|_e,$$

et l'on trouvera ainsi, à l'aide des équations (142) et (145),

$$(146)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial \nu} &= \left|\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x\,\partial \nu}\right|_e + \mathrm{Z}_{j1}, \\ \frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial \nu} &= \left|\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x\,\partial \nu}\right|_e + \mathrm{Z}_{j2}, \end{aligned}\right.$$

où les fonctions

$$Z_{j1} = \left|\frac{\partial X_{j1}}{\partial \nu}\right|_i - \left|\frac{\partial Y_{j1}}{\partial \nu}\right|_e,$$

$$Z_{j2} = \left|\frac{\partial X_{j2}}{\partial \nu}\right|_i - \left|\frac{\partial Y_{j2}}{\partial \nu}\right|_e$$

sont continues sur σ de manière que, pour deux points 1 et 2 de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(147)\qquad \left\{\begin{array}{l} |Z_{j1}|_2 - |Z_{j1}|_1 \leqq \text{const. fin. max. abs. } \theta_{j-1} r_{12}^{\lambda}, \\ |Z_{j2}|_2 - |Z_{j2}|_1 \leqq \text{const. fin. max. abs. } \theta_{j-1} r_{12}^{\lambda}. \end{array}\right.$$

Comme

$$\left.\begin{array}{l} U_j + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega = 0 \\ V_j + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega = 0 \end{array}\right\}\quad \text{au contour } \sigma,$$

on aura du côté intérieur de σ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U_j + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right]$$
$$= \cos(\nu x)\left[\frac{\partial U_j}{\partial \nu} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[V_j + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right]$$
$$= \cos(\nu y)\left[\frac{\partial V_j}{\partial \nu} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right];$$

donc, sur σ,

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} = \frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y} + \frac{\partial U_j}{\partial \nu}\cos(\nu x)$$
$$+ \frac{\partial V_j}{\partial \nu}\cos(\nu y) + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\omega \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_i$$

ou, d'après (146),

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} = \frac{\partial U_{j-1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{j-1}}{\partial y} + \left|\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \nu^2}\right|_e + \left|\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \nu^2}\right|_i + Z_{j1}\cos(\nu x) + Z_{j2}\cos(\nu y),$$

$$(148)\quad \theta_j = \frac{1}{2}\theta_{j-1} - \frac{1}{2}\left\{\theta_{j-1} - \frac{2}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\omega \theta_{j-1}\log\frac{1}{r}\,d\omega\right|_e\right\} + Z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

où la fonction Z_j est continue sur σ de manière que, pour deux points 1 et 2 de σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(149) \qquad \text{abs.}\left\{ |Z_j|_2 - |Z_j|_1 \right\} \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin. max. abs. } \theta_{j-1}\, r_{12}^{\lambda},$$

la constante finie ne dépendant que du contour σ et de λ.

7. En s'appuyant sur les inégalités (141) et les relations (148) et (149), on démontrera tout à fait de la même manière qu'au n° 3 du Chapitre II les inégalités suivantes :

$$(150) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left.\begin{matrix} |U_j| \\ |V_j| \end{matrix}\right\} \overline{\overline{<}}\ \mathfrak{C}\, C\, l^j, \\ &\left.\begin{matrix} \left|\dfrac{\partial U_j}{\partial h}\right| \\ \left|\dfrac{\partial V_j}{\partial h}\right| \end{matrix}\right\} \overline{\overline{<}}\ \mathfrak{C}\, C\, l^j, \\ &\text{abs.}\left\{ \left|\frac{\partial U_j}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial U_j}{\partial h}\right|_1 \right\} \overline{\overline{<}}\ \mathfrak{C}\, C\, l^j\, r_{12}^{\lambda}, \\ &\text{abs.}\left\{ \left|\frac{\partial V_j}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial V_j}{\partial h}\right|_1 \right\} \overline{\overline{<}}\ \mathfrak{C}\, C\, l^j\, r_{12}^{\lambda}, \end{aligned} \right.$$

l représentant un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$0 < l < 1$$

et ne dépendant que du contour σ,

où h est une direction quelconque et $\mathfrak{C}$ une constante finie ne dépendant que du contour σ.

De cette manière, nous voyons que les séries

$$(151) \qquad \left\{ \begin{aligned} U &= U_0 + U_1 + U_2 + \ldots, \\ V &= V_0 + V_1 + V_2 + \ldots \end{aligned} \right.$$

sont absolument et uniformément convergentes dans tout l'intérieur de σ, ainsi que les séries

$$(152) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial h} &= \frac{\partial U_0}{\partial h} + \frac{\partial U_1}{\partial h} + \frac{\partial U_2}{\partial h} + \ldots, \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= \frac{\partial V_0}{\partial h} + \frac{\partial V_1}{\partial h} + \frac{\partial V_2}{\partial h} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

h désignant une direction quelconque, et les fonctions

$$\frac{\partial U}{\partial h}, \quad \frac{\partial V}{\partial h}$$

sont continues de manière que, pour deux points 1 et 2 de ω quelconques dont nous désignons la distance par r_{12},

$$
(153)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial U}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial U}{\partial h}\right|_1\right\} \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_1\right\} \end{array}\right\} \leqq \mathfrak{C}\, C r_{12}^{\lambda}.
$$

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

II. *Soient* X *et* Y *deux fonctions de l'intérieur de* σ, *finies et intégrables, et telles que*

$$
\Delta\int_\omega X \log\frac{1}{r}\,d\omega = -2\pi X,
$$

$$
\Delta\int_\omega Y \log\frac{1}{r}\,d\omega = -2\pi Y,
$$

et soient u_0, v_0 *deux fonctions continues sur* σ *et possédant des dérivées premières continues de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* σ *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$
\left.\begin{array}{l} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial u_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial u_0}{\partial h}\right|_1\right\} \leqq A r_{12}^{\lambda} \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial v_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial v_0}{\partial h}\right|_1\right\} \leqq A r_{12}^{\lambda} \end{array}\right\} \quad \text{A représentant une constante finie, } 0 < \lambda < 1;
$$

alors on peut toujours trouver deux fonctions u, v *continues avec leurs dérivées premières à l'intérieur de* σ *et satisfaisant aux conditions*

$$
\left.\begin{array}{l} k\,\Delta u = \dfrac{\partial p}{\partial x} - X \\ k\,\Delta v = \dfrac{\partial p}{\partial y} - Y \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \sigma,
$$

$$
\left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \end{array}\right\} \quad \text{au contour } \sigma,
$$

ensemble avec une fonction p *continue dans tout l'intérieur de* σ. *Pour trouver les trois fonctions inconnues* u, v, p, *on doit successivement former* *les fonctions* U_j, V_j *définies par les équations suivantes :*

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_0 &= -\frac{1}{k} X \\ \Delta V_0 &= -\frac{1}{k} Y \end{aligned}\right\} \text{ à l'intérieur de } \sigma,$$

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= u_0 \\ V_0 &= v_0 \end{aligned}\right\} \text{ au contour } \sigma,$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \Delta U_j &= 0 \\ \Delta V_j &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ à l'intérieur de } \sigma \\ &\left.\begin{aligned} U_j &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{(\omega)}\left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \\ V_j &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{(\omega)}\left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial x}+\frac{\partial V_{j-1}}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \end{aligned}\right\} \text{ au contour } \sigma \end{aligned}\right\} (j = 1, 2, \ldots);$$

alors les fonctions

$$u = \sum_0^\infty{}_j \left\{ U_j + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{(\omega)}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \right\},$$

$$v = \sum_0^\infty{}_j \left\{ V_j + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{(\omega)}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega \right\},$$

$$p = -k\sum_0^\infty{}_j \left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right)$$

représenteront les solutions du problème.

8. Voyons enfin si le problème peut avoir une autre solution que celle donnée en haut.

Supposons que $u_1 v_1 p_1$ et $u_2 v_2 p_2$ soient deux systèmes de solutions de notre problème; alors on aura

$$(154) \qquad \left\{\begin{aligned} k\,\Delta(u_1-u_2) &= \frac{\partial(p_1-p_2)}{\partial x} \\ k\,\Delta(v_1-v_2) &= \frac{\partial(p_1-p_2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x} &+ \frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ à l'intérieur de } \sigma,$$

$$(155) \qquad \left\{\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0, \\ v_1 - v_2 &= 0. \end{aligned}\right.$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega'}\left\{\left[\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial y}\right]^2\right\}d\omega\\
&=-\int_{\omega'}[(u_1-u_2)\,\Delta(u_1-u_2)+(v_1-v_2)\,\Delta(v_1-v_2)]\,d\omega\\
&\quad-\int_{\sigma'}\left[(u_1-u_2)\,\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial\nu}+(v_1-v_2)\,\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial\nu}\right]d\sigma\\
&=\frac{1}{k}\int_{\sigma'}(p_1-p_2)[(u_1-u_2)\cos(\nu x)+(v_1-v_2)\cos(\nu y)]\,d\sigma\\
&\quad-\int_{\sigma'}\left[(u_1-u_2)\,\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial\nu}+(v_1-v_2)\,\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial\nu}\right]d\sigma,
\end{aligned}$$

si ω' est l'intérieur d'un contour σ' tout intérieur de σ. En approchant σ' indéfiniment de σ, on trouvera

$$\begin{aligned}
(156)\qquad &\int_{\omega}\left\{\left[\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}\right]^2\right.\\
&\qquad\left.+\left[\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial y}\right]^2\right\}d\omega=0;
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x}=\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial y}=\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}=\frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial y}=0,$$

$$(157)\qquad u_1=u_2,\qquad v_1=v_2,\qquad w_1=w_2.$$

Corollaire de II. — *Le problème hydrodynamique proposé n'a qu'une seule solution.*

CHAPITRE IV.

APERÇU SUR LES DEUX MÊMES PROBLÈMES, QUE NOUS AVONS RÉSOLUS POUR LE PLAN, DANS L'ESPACE DE TROIS DIMENSIONS.

On peut se proposer les deux mêmes problèmes que nous avons résolus pour le plan à l'aide des théorèmes I et II, pour l'espace à trois dimensions.

On trouvera à l'aide des méthodes analogues les deux théorèmes suivants :

I'. *Soit* ω *une surface fermée possédant en chacun de ses points un* *plan tangent unique et deux rayons de courbure bien déterminés et différents de zéro, et soit $f(x, y, z)$ une fonction donnée à l'intérieur de ω, finie et intégrable, et telle que*

$$\Delta \int_i f \frac{d\tau}{r} = -4\pi f;$$

alors on peut toujours trouver une fonction φ continue avec ses dérivées premières et deuxièmes à l'intérieur de ω et satisfaisant aux conditions

$$\Delta\Delta\varphi = f \qquad \text{à l'intérieur de } \omega,$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{à la surface } \omega.$$

Pour trouver cette fonction, posons

$$\left.\begin{aligned} \theta_j &= \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} + \frac{\partial W_j}{\partial z} \\ \mathfrak{u}_j &= \frac{\partial W_j}{\partial y} - \frac{\partial V_j}{\partial z} \\ \mathfrak{v}_j &= \frac{\partial U_j}{\partial z} - \frac{\partial W_j}{\partial x} \\ \mathfrak{w}_j &= \frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial U_j}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

et formons successivement les fonctions U_j, V_j, W_j *définies par les équations suivantes :*

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_0 &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i f\frac{d\tau}{r} \\ \Delta V_0 &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i f\frac{d\tau}{r} \\ \Delta W_0 &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_i f\frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right\} \qquad \text{à l'intérieur de } \omega,$$

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= 0 \\ V_0 &= 0 \\ W_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{à la surface } \omega,$$

et

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Delta U_j = 0\\ \Delta V_j = 0\\ \Delta W_j = 0\end{array}\right\} \text{ à l'intérieur de } \omega,\\ \left.\begin{array}{l} U_j = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int_i \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_i \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right)\\ V_j = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int_i \mathfrak{u}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\int_i \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right)\\ W_j = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_i \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial y}\int_i \mathfrak{u}_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right)\end{array}\right\} \text{ à la surface } \omega\end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots);$$

alors la fonction

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_i \sum_0^\infty{}_j\, \theta_j \frac{d\tau}{r}$$

représentera la solution du problème; la solution est unique, si nous voulons que

$$\Delta\varphi + \frac{1}{4\pi}\int_i f\frac{d\tau}{r}$$

soit harmonique à l'intérieur de ω.

II'. *Soient* X, Y, Z *trois fonctions de l'intérieur de* ω, *finies et intégrables, et telles que*

$$\Delta\int_i X\frac{d\tau}{r} = -4\pi X,$$

$$\Delta\int_i Y\frac{d\tau}{r} = -4\pi Y,$$

$$\Delta\int_i Z\frac{d\tau}{r} = -4\pi Z,$$

et soient u_0, v_0, w_0 *trois fonctions continues sur* ω *et possédant des derivees premières continues de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* ω *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{abs}\left\{\left|\frac{\partial u_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial u_0}{\partial h}\right|_1\right\}\\ \operatorname{abs}\left\{\left|\frac{\partial v_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial v_0}{\partial h}\right|_1\right\}\\ \operatorname{abs}\left\{\left|\frac{\partial w_0}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial w_0}{\partial h}\right|_1\right\}\end{array}\right\} \leqq A r_{12}^{\lambda} \quad \left\{\begin{array}{c}\text{A représentant une constante finie}\\ (0 < \lambda < 1);\end{array}\right.$$

alors on peut toujours trouver trois fonctions u, v, w continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur de ω et satisfaisant aux conditions

$$\left.\begin{aligned} k\,\Delta u &= \frac{\partial p}{\partial x} - X \\ k\,\Delta v &= \frac{\partial p}{\partial y} - Y \\ k\,\Delta w &= \frac{\partial p}{\partial z} - Z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \omega,$$

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ v &= v_0 \\ w &= w_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{à la surface } \omega,$$

ensemble avec une fonction p continue dans tout l'intérieur de ω. Pour trouver les quatre fonctions inconnues u, v, w, p, posons

$$\theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

et formons successivement les fonctions U_j, V_j, W_j définies par les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_0 &= -\frac{1}{k} X \\ \Delta V_0 &= -\frac{1}{k} Y \\ \Delta W_0 &= -\frac{1}{k} Z \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \omega$$

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= u_0 \\ V_0 &= v_0 \\ W_0 &= w_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{à la surface } \omega,$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \Delta U_j &= 0 \\ \Delta V_j &= 0 \\ \Delta W_j &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur de } \omega \\ &\left.\begin{aligned} U_j &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_i \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ V_j &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_i \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ W_j &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_i \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right\} \quad \text{à la surface } \omega \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots);$$

alors les fonctions

$$u = \sum_0^\infty{}_j \left(U_j + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_i \theta_j \frac{d\tau}{r} \right),$$

$$v = \sum_0^\infty{}_j \left(V_j + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_i \theta_j \frac{d\tau}{r} \right),$$

$$w = \sum_0^\infty{}_j \left(W_j + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_i \theta_j \frac{d\tau}{r} \right),$$

$$p = -k \sum_0^\infty{}_j \theta_j$$

représenteront les solutions du problème ; le problème n'admet pas d'autres solutions.

La seule difficulté qui reste à vaincre pour démontrer ces deux théorèmes d'une manière absolument analogue aux démonstrations des théorèmes I et II, c'est la démonstration des deux lemmes suivants, analogues aux lemmes des pages 538 et 567 :

Lemme I. — *Soient* U, V, W *trois fonctions harmoniques de l'intérieur de* ω *dont les dérivées premières soient continues de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* i *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\left.\begin{aligned} &\text{abs.}\left\{ \left|\frac{\partial U}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial U}{\partial h}\right|_1 \right\} \\ &\text{abs.}\left\{ \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|_1 \right\} \\ &\text{abs.}\left\{ \left|\frac{\partial W}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial W}{\partial h}\right|_1 \right\} \end{aligned}\right\} \overline{\overline{<}} A r_{12}^\lambda \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{A représentant une constante finie} \\ (0 < \lambda < 1), \end{array} \right.$$

h désignant une direction quelconque, et supposons

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu x) + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)\cos(\nu y) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\cos(\nu z) = 0 \qquad \text{à la surface } \omega;$$

alors on aura toujours

$$\int_i \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] d\tau$$
$$\overline{\overline{<}}\, c \int_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 d\tau,$$

où la constante finie c ne dépend que de la surface ω.

Lemme II. — *Soient* U, V, W *trois fonctions harmoniques de l'intérieur de* ω *dont les dérivées premières soient continues de manière que, pour deux points* 1 *et* 2 *de* i *quelconques dont nous désignons la distance par* r_{12},

$$\left.\begin{array}{l} \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial U}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial U}{\partial h}\right|_1\right\} \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_1\right\} \\ \text{abs.}\left\{\left|\dfrac{\partial W}{\partial h}\right|_2 - \left|\dfrac{\partial W}{\partial h}\right|_1\right\} \end{array}\right\} \overline{\overline{<}}\, A r_{12}^{\lambda} \qquad \left\{\begin{array}{c}\text{A représentant une constante finie} \\ (0 < \lambda < 1),\end{array}\right.$$

h désignant une direction quelconque, et supposons

$$\int_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) d\tau = 0;$$

alors on aura toujours

$$\int_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 d\tau$$
$$\overline{\overline{<}}\, c \int_i \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] d\tau,$$

où la constante finie c ne dépend que de la surface ω.

La démonstration des lemmes analogues pour le plan n'offrait pas de grandes difficultés, parce qu'après avoir démontré les lemmes pour un cercle nous pouvions les étendre aux contours plus généraux à l'aide de transformations qui permettaient de transformer l'intérieur de ces contours dans l'intérieur d'un cercle. Dans l'espace, la démonstration de ces lemmes est bien plus difficile, parce que l'extension des lemmes d'une sphère à des surfaces plus générales ne peut pas être faite de la même manière. Ces questions offrent une grande analogie avec la démonstration de la méthode de M. Neumann, dite *de la moyenne arithmétique*. Pendant que la démonstration de la méthode de M. Neumann dans le plan peut être donnée à l'aide des mêmes transformations qui permettent de transformer l'intérieur d'un contour plus général dans l'intérieur d'un cercle (1), la démonstration dans l'espace à trois dimensions a offert des difficultés bien plus grandes, et ce n'est que grâce à un théorème de M. Zaremba (2) que la difficulté a pu être vaincue. On peut prédire que nos deux lemmes pourront être démontrés à l'aide d'une méthode semblable à celle employée par M. Zaremba. Nous n'essayerons pas ici à entrer dans ces questions; nous voulions seulement, après avoir donné les solutions complètes pour le plan, du moins indiquer le chemin qu'il faudra suivre pour résoudre les deux problèmes analogues dans l'espace à trois dimensions (3).

---

(1) A. Korn, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Berlin, 1901, 2e Partie, p. 302.

(2) S. Zaremba, *Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin* (*Bull. de Cracovie*, 1901). — A. Korn, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*, Berlin, 1901-1902; 5. Abhandlung; *Ueber einen Satz von Zaremba und die Methode des arithmetischen Mittels im Raume*.

(3) Toutes ces questions ont été élucidées dans mes Mémoires : *Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume* (*Bull. de Cracovie*, 1907); *Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationaerer Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten* (*Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, 1908); *Ueber die Cosserat'schen Funktionentripel und ihre Anwendung in der Elasticitaets-Theorie* (*Acta matematica*, 1908).