ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE BOREL

Les « paradoxes » de la théorie des ensembles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 443-448
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__443_0>

LES « PARADOXES »

DE

LA THÉORIE DES ENSEMBLES;

PAR M. ÉMILE BOREL.

Nous prendrons comme type de ces paradoxes le raisonnement bien connu de M. J. Richard relatif aux nombres (fractions décimales) qui peuvent être définis au moyen d'un nombre fini de mots. L'ensemble de ces nombres est dénombrable, et de plus peut être ordonné : il suffit de ranger les définitions d'après le nombre de lettres qu'exige leur énoncé, celles qui emploient le même nombre de lettres étant classées alphabétiquement, comme les mots dans un dictionnaire. Mais d'autre part, étant donné un ensemble dénombrable ordonné de fractions décimales,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots, \tag{1}$$

il est aisé de définir une fraction α bien déterminée et distincte de chacune d'elles; il suffit de supposer que le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de α se déduit suivant une loi déterminée du $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de α_n, cette loi étant telle que ces deux chiffres soient sûrement distincts; on peut, par exemple, aux chiffres 0, 1, 2, 3, ..., 9, faire correspondre respectivement 9, 8, 7, ..., 0, ou bien 1, 2, 3, ..., 9, 0, etc. La fraction α est bien définie au moyen d'un nombre fini de mots (puisque sa définition complète vient d'être donnée) et cependant elle n'appartient pas à la suite (1); il y a donc contradiction.

Les diverses explications données de cette contradiction ne me paraissant pas satisfaisantes ([1]), je voudrais reprendre la question en me plaçant sur le terrain des réalités, sans y mêler aucune considération métaphysique ni de logique pure. Pour cela, je préciserai tout d'abord que *je considère les nombres décimaux qui sont définis d'une manière précise et sans ambiguïté possible au moyen d'un nombre fini de mots*. Si en effet, à une définition correspondait une infinité de nombres, l'ensemble de ces nombres, à supposer même qu'il fût dénombrable, ne se rangerait pas dans une suite telle que (1) et le nombre α ne pourrait donc être déterminé.

Ainsi, je considère les suites de lettres présentant, en langue française, un sens bien déterminé et définissant d'une manière précise un nombre unique. Pour former toutes ces suites, on pourra procéder comme il suit : on considérera un nombre déterminé N de caractères, choisis parmi les quarante lettres de l'alphabet ou signes divers de ponctuation; leurs combinaisons possibles sont au nombre de N^{40} parmi lesquelles, bien évidemment, la plupart n'ont aucun sens; on conservera uniquement celles de ces combinaisons qui, non seulement ont un sens mathématique, mais définissent un nombre unique et bien déterminé; l'ensemble de ces nombres est sûrement dénombrable, puisque les définitions le sont; je dis que *cet ensemble* E *renferme tout nombre α qui peut, au moyen d'un nombre fini de mots, être défini sans ambiguïté possible*, ce qui signifie que deux mathématiciens quelconques, à chacun desquels on communiquerait la définition, construiront le même nombre, c'est-à-dire trouveront la même valeur pour chacune des décimales : c'est là le criterium concret auquel on doit recourir, sous peine de s'égarer dans des distinctions purement théoriques, peut-être intéressantes pour les philosophes, mais sans aucune valeur pratique. Il pourrait sembler inutile de démontrer ce fait, puisque l'ensemble E a été construit précisément de manière à renfermer tous les nombres α; mais il est nécessaire de répondre à l'objection de M. Richard. Ne peut-on, de l'ensemble dénombrable E précédemment défini, déduire un nombre β par la méthode qui vient d'être rappelée à propos de la suite (1); ce nombre β serait bien défini

---

([1]) *Voir* notamment : SCHOENFLIES, *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, zweiter Teil, § 7.

par un nombre limité de caractères, à savoir ceux qui viennent d'être écrits depuis le commencement de cette Note, et cependant il n'appartiendrait pas à l'ensemble E. Voilà l'objection. La réponse est aisée : lorsque la définition d'un nombre β fait, *comme* la précédente, intervenir une infinité de nombres α précédemment définis, il faut, pour que β soit défini sans ambiguïté, que la suite des α soit elle-même définie sans aucune ambiguïté possible. Or, ce n'est manifestement pas le cas pour la définition précédente, vu qu'il est douteux si le nombre β fait ou non partie de la suite des α; les deux pages qui précèdent ne peuvent donc être regardées comme définissant sans ambiguïté un nombre β au moyen d'un nombre fini de mots : par suite, la contradiction signalée n'existe pas.

Ceci ne veut pas dire que nous excluons, de l'ensemble des définitions renfermant un nombre fini de mots, celles qui supposent une infinité dénombrable d'opérations préalables : cette exclusion serait entièrement arbitraire; mais il faut que cette infinité dénombrable puisse être formée ([1]) et classée sans aucune ambiguïté possible. Voici, par exemple, une définition correcte :

Formons tous les nombres algébriques réels α_n, c'est-à-dire les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers; on sait les classer dans un ordre *déterminé* : pour cela, l'équation à coefficients entiers s'écrivant

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

on considère la somme

$$n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$$

qui est un nombre entier et qu'on appellera *rang de* α_n; il existe un nombre limité de α_n ayant un rang donné; on peut les ranger par ordre de grandeur croissante; il est donc aisé d'écrire les α_n sans ambiguïté sous la forme d'une suite telle que (1); le nombre α qui s'en déduit d'après la règle indiquée plus haut est donc bien déterminé; tout mathématicien peut le calculer avec une approximation indéfinie ([2]).

([1]) Je ne répète pas que cette formation est entièrement définie par un nombre fini de mots.

([2]) J'omets, pour abréger, quelques détails qu'il serait utile de préciser : on pourra

Il est inutile de donner d'autres exemples; les définitions peuvent être indéfiniment variées et compliquées : lorsqu'on parle d'un nombre fini de mots, on n'exclut pas le cas où il faudrait cent mille volumes in-folio pour définir un nombre : l'essentiel est que la définition n'entraîne aucune ambiguïté et, par suite, que chacune des séries dénombrables qui peuvent y figurer soit elle-même définie avec une entière précision. Si l'on imagine la complication que prennent forcément de telles définitions dès qu'on veut introduire un grand nombre de séries dénombrables, on se rend compte combien la prétendue *définition* qui conduit au *paradoxe* de M. Richard est incomplète et insuffisante : si l'on voulait la *réaliser*, on serait arrêté par de nombreuses difficultés : elle n'a donc aucune valeur pratique. Pour la mettre en œuvre, en effet, il faudrait tout d'abord avoir résolu tous les problèmes mathématiques qui pourront jamais être posés : car, parmi les définitions possibles, il en est qui supposent la solution de problèmes; on peut en imaginer des exemples très variés; j'attirerai particulièrement l'attention sur les définitions telles que la suivante : le nombre π étant écrit sous forme de fraction décimale, on remplace partout le chiffre 7 par le chiffre 8 et inversement, et l'on ne conserve le nombre ainsi obtenu que si ce n'est pas un nombre algébrique.

Cette dernière restriction, quelque vraisemblable que soit la solution négative, introduit une difficulté insurmontable dans l'état actuel de la Science; si elle est surmontée demain, on imaginera aisément des énoncés plus compliqués; on peut conclure que la formation effective de l'ensemble E des nombres qui peuvent être définis au moyen d'un nombre fini de mots n'est pas réalisable; ceci ne doit pas nous empêcher d'affirmer que cet ensemble est dénombrable au sens classique du mot, car il fait partie d'un ensemble dénombrable, à savoir l'ensemble des combinaisons qu'on peut former au moyen d'un nombre fini de lettres ou signes de ponctuation.

Mais l'ensemble E n'est pas *effectivement énumérable*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas indiquer, au moyen d'un nombre fini de mots, un

---

convenir de ne prendre que les nombres algébriques compris entre 0 et 1 et de considérer pour chacun d'eux, parmi l'infinité d'équations qu'il vérifie, celle dont le rang est le moins élevé.

procédé sûr pour attribuer sans ambiguïté un rang déterminé à chacun de ses éléments. Il se présente, en effet, pour certains éléments, des difficultés particulières, dont la plupart, peut-être toutes, peuvent aisément être tournées au moyen de conventions [1]; mais l'ensemble des conventions nécessaires exigerait, pour être entièrement formulé, une infinité de mots, car les difficultés se présentent évidemment une infinité de fois sous une infinité de formes différentes. Telle est la réponse qu'on doit faire au paradoxe de M. Richard et à tous les paradoxes analogues : il est impossible de discuter effectivement sur un problème dont tous les termes ne sont pas explicitement définis; car, dans les cas où la définition explicite exigerait une infinité de mots, elle est en dehors du domaine des Mathématiques.

Les considérations précédentes ne tendent à rien moins qu'à nier l'existence des ensembles qui ne sont pas dénombrables; il me semble en effet, comme je l'ai dit dans une communication faite au IV^e Congrès international des mathématiciens (Rome, avril 1908), que c'est là une notion *purement négative*. Il me paraît ressortir clairement de ce qui précède que l'ensemble des points d'une droite qui peuvent être effectivement définis d'une manière individuelle est un ensemble *dénombrable*, mais non *effectivement énumérable*.

Il n'est pas possible d'indiquer le moyen de fixer sur la droite un point unique et bien déterminé qui n'appartienne pas à cet ensemble; la proposition d'après laquelle *il y a* de tels points est vraie ou fausse suivant qu'on admet ou non la possibilité d'une infinité dénombrable de choix successifs arbitraires; mais c'est là une question *métaphysique*, en ce sens que la réponse positive ou négative n'aura jamais aucune influence sur le développement de la Science : tous les points dont on pourra jamais avoir besoin dans les raisonnements auront été définis au moyen d'un nombre fini de mots; ils constituent le *continu pratique* qu'utilisent les mathématiciens.

La distinction des ensembles en ensembles dénombrables et non dénombrables me paraît donc sans valeur pratique, car tous les ensembles qu'on pourra jamais considérer sont dénombrables, *au sens*

---

(1) D'autres questions exigeraient, en outre, la solution de problèmes compliqués, qu'on peut cependant concevoir comme résolus dans l'avenir; je laisse de côté cette difficulté-là.

classique du terme, puisqu'ils sont des parties aliquotes d'ensembles dénombrables; mais ils ne sont pas tous *effectivement énumérables* : pour certains d'entre eux l'attribution d'un rang déterminé à chacun de leurs éléments exigerait une infinité de choix et, par suite, ne pourrait être réalisée effectivement au moyen d'un nombre limité de mots. On doit donc distinguer, au point de vue pratique, deux classes d'ensembles : les ensembles effectivement énumérables et ceux qui ne le sont pas. Une partie aliquote d'un ensemble effectivement énumérable n'est pas nécessairement effectivement énumérable : l'ensemble E considéré plus haut en fournit un exemple. C'est là la différence essentielle entre la notion d'ensemble effectivement énumérable et la notion classique d'ensemble dénombrable. La nouvelle notion me paraît avoir le grand avantage d'être moins métaphysique, c'est-à-dire de s'appuyer exclusivement sur les réalités observables (1).

Tous les prétendus paradoxes de la théorie des ensembles proviennent de ce qu'on a admis comme évidente la proposition suivante : *Tout ensemble dénombrable est effectivement énumérable*. Or, il résulte clairement de ce qui précède que cette proposition est inexacte.

---

(1) Je ne puis entrer ici dans tous les détails qui seraient nécessaires pour faire voir que, partout où l'on croit utiliser la notion d'ensemble non dénombrable pour un but concret, le raisonnement peut être modifié de manière à n'utiliser que la notion d'ensemble *effectivement énumérable*; j'en donnerai cependant un exemple. On sait qu'on utilise fréquemment le fait qu'une série ne peut pas être convergente si l'ensemble de ses termes n'est pas dénombrable; on peut ajouter que cet ensemble est alors *effectivement énumérable*; car, les termes dont la valeur absolue dépasse un nombre fixe étant forcément en nombre limité, on peut indiquer au moyen d'un nombre fini de mots le moyen de les énumérer effectivement.