ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE BOUTROUX

Sur l'indétermination d'une fonction uniforme au voisinage d'une singularité transcendante

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 319-370
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__319_0>

SUR

L'INDÉTERMINATION D'UNE FONCTION UNIFORME

AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITÉ TRANSCENDANTE;

Par M. Pierre BOUTROUX.

I. — Le théorème de M. Schottky.

Il y a deux ans, j'ai cherché à démontrer le théorème suivant (*Comptes rendus*, 31 juillet 1905, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXVI, 1905) :

Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

une fonction qui, pour $|x| < r$, *est holomorphe et ne prend ni la valeur* 0, *ni la valeur* 1 : *alors, dans le cercle de centre* 0 *et de rayon* $\theta r (\theta < 1)$, *le module* $|F(x)|$ *reste inférieur à une fonction finie* $M(a_0)$ *du coefficient* a_0.

Je croyais ce théorème nouveau lorsque je l'énonçai et lorsque j'en parlai, pour la première fois, à M. Carathéodory qui en trouva aussitôt une fort élégante démonstration. Cependant, ce même théorème avait été obtenu quelques mois auparavant par M. Schottky. Depuis lors, il a été repris et précisé sous diverses formes par MM. Landau et Carathéodory. Je n'aurais donc pas à revenir sur ma démonstration si je ne devais y rectifier quelques erreurs que M. Landau m'a obligeamment signalées.

Au dernier paragraphe (§ 10) de mon Mémoire de 1906, j'ai énoncé sans démonstration une généralisation du théorème de M. Schottky, que je croyais facile, et qui avait trait au cas où la fonction $F(x)$ prendrait un nombre fini de fois les valeurs 0 et 1 pour $|x| < r$. Cette généralisation n'est pas exacte, ainsi que l'a montré M. Landau. Il faut en rectifier l'énoncé et supposer que, pour $|x| < r$, $F(x)$ ne prend que p fois la valeur 1 et jamais la valeur 0.

D'autre part, je me suis appuyé, pour démontrer le théorème de M. Schottky, sur trois lemmes préliminaires, dont le troisième (§ 5) doit être ainsi corrigé :

Lemme III. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans un cercle C de rayon R, et soient $M(r)$ le module maximum de cette fonction et $M_1(r)$ la plus grande valeur négative de sa partie réelle pour $|x| < r$. On aura pour une infinité de valeurs r_0 de r comprises entre $\frac{3R}{4}$ et $\frac{7R}{8}$ l'inégalité*

$$(1) \qquad M(r) < M_1^2(r_0) \qquad \textit{pour} \qquad r < r_0 + \frac{r_0}{\sqrt{M_1(r_0)}}.$$

D'ailleurs, il existera pour $\frac{3R}{4} < |x| \leqq r_0$ des points $\bar{x}$ où la partie réelle de $f(x)$ sera négative et où l'on aura

$$|f'(\bar{x})| \leqq \frac{M_1(r_0) - f(0)}{|\bar{x}|}$$

avec

$$M(|x|) < M_1^2(r_0) \qquad \textit{pour} \qquad |x - \bar{x}| \leqq \frac{r_0}{\sqrt{M_1(r_0)}}.$$

Le grand intérêt du théorème de M. Schottky réside dans ce fait : faisons décrire au point F (dans son plan) un chemin quelconque issu de x_0 et évitant deux points particuliers au plus : nous saurons tracer un cercle duquel la fonction $x(F)$ (partie de 0) ne sortira pas lorsque F décrira le chemin considéré.

Envisageons, en particulier, une fonction entière $Y(x)$. Il existe des chemins x s'éloignant indéfiniment sur lesquels Y tend vers l'infini. Considérons deux tels chemins, entre lesquels se trouvent d'autres chemins infinis sur lesquels Y devient indéterminée. Du théorème de

M. Schottky on déduira sans peine que, sur l'ensemble de ces derniers chemins, Y prendra une infinité de fois toutes les valeurs, sauf une au plus. Ainsi se trouve amorcée l'*étude systématique des fonctions inverses d'une fonction entière*, étude dont divers savants, MM. Hurwitz [1], Denjoy [2], Rémoundos [3], se sont préoccupés récemment. A mon tour, je voudrais aborder cette étude en la rattachant aux recherches que la théorie des équations différentielles m'a conduit à faire sur les points singuliers transcendants des fonctions multiformes [4].

II. — Les fonctions inverses des fonctions entières.

Je me propose d'étudier avec précision l'allure d'une fonction entière $Y(x)$ sur les chemins d qui s'éloignent vers l'infini dans le plan des x. Il existe sûrement des chemins d sur lesquels Y devient infinie et des chemins d sur lesquels Y est indéterminée. Il peut exister aussi des chemins d sur lesquels Y tend vers une limite déterminée Y_1; le point Y_1 est alors [5] un point critique transcendant de la fonction $x(Y)$ inverse de la fonction Y. Ainsi, en nous proposant d'étudier le groupement des différents chemins d, nous serons conduits à analyser les singularités de la fonction $x(Y)$.

Je limite la présente étude aux fonctions entières, afin de la rendre plus claire. Je renvoie donc à plus tard l'examen du cas général où Y est méromorphe.

---

(1) *Comptes rendus*, 3 décembre 1906.

(2) *Comptes rendus*, 8 juillet 1907.

(3) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IX.

(4) Faisons observer en passant que le théorème de M. Schottky sera encore applicable à l'étude de l'indétermination d'une fonction uniforme au voisinage d'une ligne singulière : soit une fonction uniforme $F(x)$ admettant, par exemple, une droite singulière et présentant sur les chemins qui convergent vers un point x_0 de cette droite (du côté où F est définie) une valeur exceptionnelle au sens de M. Picard (c'est-à-dire d'une valeur que la fonction ne prend pas au voisinage de x_0, mais vers laquelle elle tend sur certains des chemins convergeant vers x_0) : la fonction prend nécessairement, au voisinage de x_0, toutes les autres valeurs, sauf une au plus.

(5) C. Hurwitz et Denjoy, *loc. cit.*

III. — Points critiques transcendants de la fonction $x(\mathrm{Y})$.

Commençons par faire quelques remarques *a priori* sur les points critiques transcendants (η) de la fonction $x(\mathrm{Y})$.

En premier lieu, ces points transcendants sont isolés (ils ne peuvent former ni une ligne continue, ni un ensemble parfait discontinu). C'est là un fait qu'on pourrait établir directement et qui résulte également des théorèmes généraux donnés par M. Zoretti ([1]).

D'autre part, les points transcendants (η) peuvent être répartis entre diverses catégories que je me suis efforcé de définir ailleurs ([2]) :

Un point η peut être *directement critique* [une infinité de déterminations s'échangent alors directement ([3]) autour de η].

([1]) Thèse : *Sur les fonctions analytiques*, etc., p. 49.

([2]) Cf. mes *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, Chap. III.

([3]) Ces déterminations s'échangent entre elles lorsque Y décrit un lacet élémentaire fermé l, renfermant le point η et ne contournant aucun autre point critique. On suppose d'ailleurs essentiellement que *le lacet l* (lequel se compose d'un chemin deux fois parcouru et d'une boucle infiniment petite) *ne s'enroule pas une infinité de fois autour du point η*. C'est là une condition que nous ne devons pas oublier, car elle va jouer un rôle important dans l'étude que nous allons faire. A ce propos, nous ferons observer qu'il serait très désirable d'adopter une terminologie précise permettant de distinguer nettement les différents chemins qu'une théorie des fonctions multiformes est tenue de considérer. J'ai eu occasion de proposer, à l'occasion des équations différentielles, une définition qui est relative à la *longueur* d'un chemin comparée à la distance de ses extrémités : supposant donné une fois pour toutes un nombre fini K, j'ai appelé *chemin direct* tout chemin dont un arc *quelconque* $\overline{xx'}$ satisfait à l'inégalité $\dfrac{\text{arc } \overline{xx'}}{\text{corde } \overline{xx'}} < \mathrm{K}$. Dans cette définition, je le répète, je n'ai tenu compte que de la longueur du chemin $\overline{xx'}$ et non de sa forme; ainsi, d'après ma définition, un arc infini de spirale logarithmique s'enroulant autour d'un point doit être considéré comme un chemin direct (exemple : un arc infini de la spirale dont l'équation, en coordonnées polaires, est $r = e^{-\mu\omega}$). Cependant, il peut y avoir intérêt à ne pas confondre sous un même nom les chemins directs qui s'enroulent une infinité de fois autour d'un point, et ceux qui ne s'enroulent pas. C'est pourquoi, sans modifier ma définition des chemins directs qui est souvent suffisante, j'appellerai *chemins simples directs* les chemins qui ne s'enroulent pas, et *chemins spirales directs* ceux qui s'enroulent. Je continuerai à appeler *caractéristique* toute branche de fonction suivie à partir d'une valeur initiale donnée le long d'un chemin *rectiligne*.

Un point η peut être *indirectement critique* [η est alors point-limite de points critiques algébriques η_j, autour [1] desquels se permutent une infinité de déterminations].

Enfin, un point η peut être à la fois *directement* et *indirectement critique*.

Demandons-nous par quels caractères ces différents cas vont se distinguer les uns des autres du point de vue de la fonction entière $Y(x)$.

IV. — Premier cas : Point directement critique.

Soit le point η directement critique sans être indirectement critique.

J'ai montré ailleurs [2] que cette hypothèse n'exclut pas le cas où le point critique transcendant η serait point-limite de points critiques algébriques. Voici ce qu'elle signifie : Prenons un point $\overline{Y}$ voisin de η, et joignons $\overline{Y}$ et η par un chemin invariable (*simple direct*) qui ne traverse aucun point critique. A l'ensemble des déterminations confondues en η correspond, au point $\overline{Y}$, une suite unilinéaire de déterminations $\overline{x}_{j-1}$, $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$, ... Il est possible qu'à partir de la détermination $\overline{x}_j$, on puisse, au voisinage de η, opérer des permutations élémentaires qui donnent des déterminations nouvelles distinctes de $\overline{x}_{j-1}$ et $\overline{x}_{+j}$, mais ces permutations constituent des impasses [3] :

---

[1] Je rappelle ce que j'entends par *tourner autour d'un point critique* η_j ou *opérer la permutation élémentaire* η_j. Soit Γ un cercle de centre η qui ne contienne aucun point transcendant autre que η. Je suppose que, d'une manière quelconque, on ait construit un système de coupures joignant respectivement au contour de Γ les points critiques situés dans Γ, ces coupures ne s'enroulant pas une infinité de fois (c'est-à-dire étant des *chemins simples directs*) et ne se coupant pas entre elles. Tourner autour de η_j, ou opérer la permutation élémentaire η_j, c'est décrire un lacet fermé (échangeant deux déterminations différentes) qui franchisse *une fois* la coupure η_j et ne rencontre aucune autre coupure.

En théorie, on admettra toujours que chaque point critique algébrique permute deux déterminations seulement. S'il n'en était pas ainsi, on considérerait que plusieurs points critiques sont confondus en un seul, et l'on affecterait d'indices différents les diverses permutations opérées autour des points critiques multiples.

[2] *Leçons*, etc., p. 70.

[3] *Leçons*, etc., p. 96.

on ne peut, au voisinage de η et à partir de $\overline{x}_j$, obtenir *une infinité* de déterminations nouvelles, à moins de décrire *directement autour de* η la suite infinie de tours qui engendrent les déterminations $\overline{x}_{j+1}$, $\overline{x}_{j+2}$, ... ou $\overline{x}_{j-1}$, $\overline{x}_{j-2}$, ...

Arrêtons-nous ici pour faire quelques remarques.

Appelons $\eta_{j,1}, \ldots, \eta_{j,k}$ les points critiques algébriques (éventuels) qui permettent de déduire de $\overline{x}_j$ (sans tourner autour de η) des déterminations distinctes de $\overline{x}_{j-1}$ et $\overline{x}_{j+1}$; prenons, d'autre part, le point $\overline{Y}$ plus près de l'origine que les points $\eta_{j,1}, \ldots, \eta_{j,k}$. Par hypothèse, la *caractéristique* issue de $\overline{Y}$ avec la détermination $\overline{x}_j$ sera singulière au point η et admettra ce point comme point transcendant directement critique. Décrivons maintenant à partir de $\overline{Y}$ un lacet qui contourne un ou plusieurs des points $\eta_{j,1}, \ldots, \eta_{j,k}$, mais ne contourne pas η. Ce lacet nous ramène en $\overline{Y}$ avec une certaine détermination $\overline{\overline{x}}_j$. La définition des points directement, et non indirectement, critiques exige que *le point* η *ne soit pas transcendant pour la caractéristique issue de* $\overline{Y}$ *avec la détermination* $\overline{\overline{x}}_j$. Cette remarque conduit, dans le cas où $Y(x)$ est une fonction entière, à une conséquence qu'il faut retenir : *si l'infini est pour la fonction $x(Y)$ un point transcendant directement, non indirectement critique, les branches de $x(Y)$ qui se permutent directement entre elles autour de l'infini ne sauraient présenter des points critiques algébriques arbitrairement près de l'infini* (1). Cet énoncé résulte immédiatement du fait que *toute* caractéristique de $x(Y)$ prolongée jusqu'à l'*infini* admet l'*infini* comme point transcendant directement critique [puisque $Y(x)$ ne peut être infinie que pour $x = \infty$].

Nous remarquerons aussi que la définition donnée plus haut implique que le point η est [d'après la terminologie que j'ai adoptée (2)] un *point de première espèce*.

Considérons maintenant l'ensemble des *caractéristiques* issues du point $\overline{Y}$ (défini plus haut) avec une détermination $\overline{x}_j$: sur cet ensemble

---

(1) Si cette condition n'était pas satisfaite, on se trouverait en présence du cas que nous signalerons à la fin du § IX, en parlant des frontières des longues multiples.

(2) *Leçons*, etc., p. 95.

de caractéristiques, et au voisinage de η, nous ne pouvons rencontrer qu'un nombre fini de points critiques algébriques (car, si nous en rencontrions une infinité, on pourrait, autour de ces points critiques, opérer une infinité de permutations sans tourner autour de η, ce qui est contraire à nos hypothèses). De cette remarque on tirera aisément la conclusion suivante : Appelons Y' un point situé entre η et $\overline{Y}$ sur le chemin invariable $\eta\overline{Y}$ et, au point Y', désignons par $\ldots, x'_{j-1}, x'_j, \ldots$ les déterminations correspondant à $\ldots, \overline{x}_{j-1}, \overline{x}_j, \ldots$. *Quels que soient l'entier* J *et la détermination initiale* x'_j, *on peut prendre le point* Y' *assez près de* η *pour que, tant que* $|j'| < J$, *la caractéristique issue de* Y' *avec la détermination* $x'_{j+j'}$ *ne présente pas d'autre point critique que* η *dans le cercle* γ *de centre* η *mené par* Y'.

Cela dit, considérons, le long du rayon $Y'\eta$, la caractéristique issue de Y' avec la valeur x'_j. Cette caractéristique, admettant par hypothèse le point η comme point transcendant, devient infinie en ce point. Lors donc que Y décrit le rayon $Y'\eta$, la variable x décrit, dans son plan, un chemin continu d (ne se coupant pas lui-même) qui s'éloigne vers l'infini. Faisons maintenant tourner le rayon $\eta Y'$ autour de η. A toute position nouvelle de ce rayon correspondra (dans le plan des x) un chemin d, contigu au précédent, mais ne le coupant pas; et ainsi de suite jusqu'à ce que le rayon $\eta Y'$ ait décrit j' tours complets autour de η, le nombre j' étant d'ailleurs arbitrairement grand si l'on a pris $|Y' - \eta|$ assez petit.

En résumé, *la singularité du point transcendant* η *est manifestée, dans le plan des* x, *par l'existence d'une bande ou langue continue* $\mathfrak{L}$, *jouissant de cette propriété que, sur tout chemin* d *s'éloignant vers l'infini sans sortir de* $\mathfrak{L}$, Y *tende vers le point* $Y = \eta$ *en ne s'enroulant autour de ce point qu'un nombre fini (d'ailleurs arbitraire) de fois* (¹). *La bande* $\mathfrak{L}$ *contient un nombre arbitrairement grand de chemins* d *différents le long desquels* Y (*tendant vers* η) *repasse par la même série de valeurs, décrivant par exemple un même rayon aboutissant en* η.

(¹) Comprenons, d'une manière générale, dans la langue $\mathfrak{L}$ tous les chemins d contigus sur lesquels Y tend vers η. Il y a dans $\mathfrak{L}$ des chemins d sur lesquels Y tend vers η suivant un chemin simple direct; il y a aussi des chemins d le long desquels Y décrit un chemin spirale, lequel opère une série infinie de permutations *autour de* η *directement*.

Précisons encore un peu. Pour obtenir dans la langue $\mathcal{L}$ une infinité de chemins d le long desquels Y décrit un même rayon $Y'\eta$, nous avons dû, tout à l'heure, faire tendre le point Y' vers le point η. Montrons que nous aurions pu établir l'existence des mêmes chemins *d en laissant fixe le point* Y'.

Sur les caractéristiques issues de Y' avec la détermination x'_j on peut rencontrer, avons-nous dit, un nombre fini de points critiques $\eta_{j,1}, \ldots, \eta_{j,k}$, tels *que les permutations opérées autour de ces points* constituent des impasses. Ces points critiques n'intéressent évidemment la singularité η qu'autant qu'une infinité d'entre eux convergent vers η; nous supposerons donc qu'une infinité de points $\eta_{j,k}$ tendent vers η lorsque j prend des valeurs positives ou négatives arbitrairement grandes. Cela dit, supposons que nous partions, comme plus haut, du point Y' avec la détermination x'_j et que nous décrivions indéfiniment le contour du cercle γ dans l'un ou l'autre sens, de manière (par exemple) à engendrer successivement les déterminations x'_{j+1}, x'_{j+2}, ... d'indices supérieurs à j. Lorsque nous aurons décrit plus de J tours, nous obtiendrons des caractéristiques qui pourront (d'après nos hypothèses) présenter des points critiques dans γ. Dès lors, en continuant à tourner sur le contour γ, nous nous trouverons opérer les permutations relatives à ces points critiques. Mais nous savons que ces permutations constituent des impasses : lors donc que nous aurons décrit sur γ un nombre fini de tours nouveaux, elles se trouveront toutes avoir été opérées de nouveau *en sens inverse*, et leur effet sera détruit. Au contraire, les permutations opérées autour du point η continueront à engendrer une série infinie de déterminations nouvelles. En résumé, *lorsque x tourne indéfiniment sur le contour γ dans l'un ou l'autre sens, nous obtenons* (¹), *sur le rayon* $Y'\eta$, *une infinité de caractéristiques différentes qui toutes admettent le point η comme point transcendant directement critique*. A ces caractéristiques correspondent (dans le plan des x) une infinité de chemins d différents, tous situés dans la bande ou langue $\mathcal{L}$ (et de plus en plus éloignés).

(¹) Notons aussi que, lorsque Y tourne indéfiniment sur γ, nous ne pouvons repasser au point $\overline{Y}$ avec une même détermination qu'un nombre fini (borné) de fois.

V. — Deuxième cas : Point directement et indirectement critique de première espèce.

La conclusion que nous venons d'obtenir subsisterait évidemment lors même que le point η serait *indirectement* en même temps que *directement* critique, pourvu qu'il existe encore un cercle γ, de rayon $\eta Y'$, satisfaisant aux conditions que nous avons énoncées plus haut. Mais, parmi les cas où il en est ainsi, nous ne retiendrons que celui où *le point transcendant directement critique η est un point de première espèce* (1). Voici ce que j'entends par là. Il existe, par hypothèse, une infinité de déterminations $\ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots$ qui se permutent entre elles autour de η directement. Supposons, d'autre part, que d'une infinité de déterminations x_j on puisse déduire des déterminations nouvelles x_k, en nombre infini, en tournant autour d'un ensemble de points critiques algébriques convergeant vers η sans tourner autour de η directement. Par définition, le point η ne peut être point de première espèce [*point de première espèce de la deuxième sorte* (2)] que dans le cas où *les déterminations x_k* (sauf peut-être un nombre fini d'entre elles) *figurent déjà parmi les déterminations x_j*. L'hypothèse que nous faisons consiste donc à supposer que cette circonstance se trouve réalisée.

Reprenons alors le point fixe $\overline{Y}$ défini dans le premier cas, et considérons l'ensemble des caractéristiques x issues de $\overline{Y}$ avec la détermination $\overline{x}_j$. A moins que le point η, considéré comme point transcendant indirectement critique, ne rentre dans le cas exceptionnel (*quatrième cas*) défini plus loin, l'ensemble des caractéristiques considérées ne présentera qu'un nombre fini de points critiques algébriques au voisinage de η. De là nous déduirons, comme plus haut, l'existence d'une bande ou langue infinie à l'intérieur de laquelle la variable Y

---

(1) Ce cas seul nous intéressera dans la suite; d'ailleurs, comme je l'ai dit (*Comptes rendus*, 28 octobre 1907), on peut démontrer *a priori* que les points transcendants des fonctions inverses de fonctions entières sont tous de première espèce.

(2) *Leçons*, etc., p. 96.

tend vers le point η en suivant un rayon aboutissant en ce point. D'ailleurs, les résultats que nous obtiendrons en étudiant le *troisième cas* (§ VI) s'appliqueront aussi au cas actuel; il y aura donc (contiguë à la bande déjà définie) une seconde bande infinie à l'intérieur de laquelle la variable Y tendra vers le point η suivant un chemin spirale.

VI. — Troisième et quatrième cas : Point indirectement critique et cas-limite.

Soit maintenant le point transcendant η, non plus directement critique, mais *indirectement critique* (*point-limite de points critiques algébriques*).

Appelons $\mathcal{A}$ une aire arbitrairement petite entourant le point η; puis partons d'un point critique voisin de η avec la détermination critique correspondante, et faisons mouvoir Y dans $\mathcal{A}$. Si nous nous rendons au point η sans tourner autour d'une infinité de points critiques, nous arrivons en η avec une valeur finie de x. Mais, si nous nous mouvons dans $\mathcal{A}$ d'une manière quelconque, nous faisons correspondre à toute valeur de Y située dans $\mathcal{A}$ une infinité de valeurs qui ne peuvent converger que vers l'infini. En d'autres termes, traçons dans $\mathcal{A}$ un chemin quelconque qui s'enroule autour d'une infinité de points critiques. A ce chemin correspond, dans le plan des x, un chemin continu s'éloignant vers l'infini.

Mais ici une distinction s'impose à laquelle j'ai déjà fait allusion ([1]). Considérons un chemin quelconque qui tourne ([2]) autour d'une suite infinie de points critiques ..., η_{j-1}, η_j, η_{j+1}, ... convergeant vers η. Il peut arriver que ce chemin doive nécessairement s'enrouler une infinité de fois autour du point η : il affecte alors la forme d'une spirale convergeant vers η. Il peut arriver, au contraire, qu'il existe des chemins *(simples directs)* opérant la suite des permutations ..., η_{j-1},

---

([1]) Cf. *Leçons*, etc., p. 91.

([2]) *Vide supra*, p. 323, note 1. On suppose toujours que les points critiques η_j sont simples et que les coupures correspondantes sont des « chemins simples directs ». Cette hypothèse est impliquée dans la définition des points indirectement critiques de première espèce, qui seuls sont intéressants pour la théorie des fonctions entières (*vide supra*).

η_j, ... tout en ne s'enroulant qu'un nombre fini de fois autour de η ou se réduisant même à un segment de droite. En d'autres termes, appelons Ω l'angle dont doit tourner le rayon vecteur OY lorsque (se mouvant toujours dans le même sens) il va passer successivement par les points critiques ..., η_{j-1}, η_j, ... Dans la première hypothèse, l'angle Ω augmente indéfiniment avec j; dans la seconde, cet angle reste fini.

Cette remarque nous conduit à subdiviser en deux le cas où le point transcendant η est indirectement critique :

Troisième cas. — La singularité du point η entraîne, nous l'avons vu, l'existence de chemins continus d s'éloignant vers l'infini (dans le plan des x) et sur lesquels Y tend vers η. Nous supposerons d'abord que sur tous ces chemins *d la variable* Y *tend vers η en s'enroulant une infinité de fois autour du point η*.

Il est facile de se rendre compte que, si un point transcendant η est (d'après les définitions que j'ai adoptées) *point de première espèce* (1), il rentre en général dans le troisième cas ci-dessus défini. Voyons comment se présentent, dans ce cas, les chemins infinis d sur lesquels Y tend vers η.

Soient $\overline{Y}$ un point voisin de η et $\overline{x}_j$ une détermination initiale de $x(\overline{Y})$. Puisque le point η est de première espèce, on ne peut déduire de x_0 une suite infinie de déterminations nouvelles ..., $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$, ... qu'à la condition de tourner successivement autour d'une suite unilinéaire (déterminée) de points critiques algébriques ..., η_j, η_{j+1}, ... (ces points critiques sont supposés converger vers η). D'autre part, appelons δ le cercle du plan des $\overline{Y}$ qui a pour centre η et pour rayon $|\overline{Y}-\eta|$. On constate aisément que, pour opérer la suite unilinéaire des permutations ..., η_j, η_{j+1}, ..., il suffit de faire tourner (2) la variable Y le

(1) *Leçons*, etc., Chap. III, § V.

(2) Cf. *Leçons*, etc., p. 90. Appelons $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$ les valeurs au point $\overline{Y}$ des deux caractéristiques x qui se permutent en η_j. Pour opérer la suite des permutations, on peut partir soit de la détermination $\overline{x}_j$, soit de la détermination $\overline{x}_{j+1}$. *Dans le premier cas, on devra décrire le contour δ dans un certain sens; dans le second cas, on devra décrire ce même contour en sens inverse.*

long du contour δ. D'ailleurs, en vertu de l'hypothèse qui caractérise notre troisième cas, on ne pourra opérer cette suite de permutations qu'*à la condition de tourner une infinité de fois le long de* δ. Si, après avoir décrit un, deux, trois, ... tours complets, on s'arrête au point $\overline{Y}$, on obtient en ce point une infinité de déterminations différentes [1]

$$\ldots,\ \overline{x}_j,\ \overline{x}_{j+k_1},\ \overline{x}_{j+k_2},\ \ldots$$

les entiers k_1, k_2, ... étant supérieurs ou égaux à *un*.

Les permutations η_j que nous opérons en mouvant Y sur δ peuvent être toutes distinctes ; ou, au contraire, il peut arriver qu'une même permutation η_j figure deux fois dans la suite ..., η_j, η_{j+1}, ..., la première fois comme permutant $\overline{x}_{j'}$ avec $\overline{x}_{j'+1}$, la seconde fois comme permutant $\overline{x}_{j'+1}$ avec $\overline{x}_{j'}$. Il nous sera commode de ne comprendre dans la série unilinéaire des permutations η_{j-1}, η_j, η_{j+1}, ... que *les permutations opérées une seule fois* (ces permutations étant numérotées dans l'ordre où nous les rencontrons lorsque Y tourne sur δ). Nous nous rappellerons alors qu'en dehors des points critiques η_j, la branche $x(\mathrm{Y})$ que nous suivons (sur δ) peut présenter (dans δ) des points critiques η'_j permettant de déduire de $\overline{x}_j$ un nombre limité de déterminations nouvelles. En d'autres termes, les points critiques η'_j opèrent des permutations impasses et, s'ils existent, le point η est, d'après ma terminologie, un point du *deuxième type* [2].

Les points critiques η'_j pourraient ne pas converger vers η ou converger moins vite que les η_j : tout ce que nous apprend la définition des points de première espèce, c'est que, d'une détermination $\overline{x}_j$ quelconque on ne pourra pas déduire une infinité de déterminations nouvelles, à moins de tourner autour de *tous* les points η_j, η_{j+1}, ... ou η_{j-1}, η_{j-2}, ... Mais nous ne serons pas gênés par l'existence des points η'_j, si nous remarquons que (quelle que soit la détermination donnée $\overline{x}_j$) l'on pourra toujours prendre $\overline{Y}$ assez voisin de η pour que

---

(1) Il est clair qu'on ne peut repasser deux fois au point $\overline{Y}$ avec une même détermination de x; si cette circonstance se présentait, le cycle des permutations opérées lorsque Y tourne sur δ serait un cycle fermé.

(2) *Leçons*, etc., p. 96.

l'ensemble des caractéristiques issues de $\overline{Y}$ avec la détermination $\overline{x}_j$ ne présente pas de points η'_j à l'intérieur de δ [*comparer* les remarques faites plus haut dans le cas où η est directement critique, § IV].

L'une des deux suites $\eta_j, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_j, \eta_{j-1}, \ldots$ converge par hypothèse vers η; nous supposerons que ce soit le cas pour la première suite; alors, lorsqu'on tourne (¹) indéfiniment sur δ dans un sens convenable (soit le sens positif) à partir de la détermination $\overline{x}_j$, on opère, comme nous l'avons dit, la suite des permutations $\eta_j, \eta_{j+1}, \ldots$. Si l'on tourne ensuite dans le sens négatif, on opère la suite des permutations η_{j-1}, $\eta_{j-2}, \ldots$; mais il se trouve qu'à partir d'une certaine valeur j' de l'indice $j-k$, les points critiques η_{j-k} sont extérieurs à δ; on n'opère donc pas les permutations relatives à ces points, mais (lorsque l'on continue à parcourir δ) on remonte (²) nécessairement la suite des permutations $\eta_{j'}, \eta_{j'+1}, \ldots, \eta_j$; on repasse alors en $\overline{Y}$ non plus avec la détermination $\overline{x}_j$, mais avec la détermination $\overline{x}_{j+1}$, et, continuant (à partir de cette détermination) à mouvoir Y sur δ *dans le sens négatif*, on se trouve opérer (comme nous l'avons observé plus haut en note) la suite des permutations $\eta_{j+1}, \eta_{j+2}, \ldots$.

Ces remarques faites, partons de $\overline{Y}$ avec la détermination $\overline{x}_j$ (l'indice j étant pris assez grand pour que le point critique η_j qui permute $\overline{x}_j$ avec $\overline{x}_{j+1}$ soit à l'intérieur de δ); puis faisons décrire à Y, à partir de $\overline{Y}$, un chemin-spirale σ convergeant vers η et s'enroulant dans le sens positif autour de la suite des points critiques $\ldots, \eta_j, \eta_{j+1}, \ldots$. Lorsque Y décrit ce chemin, la variable x décrit, dans son plan, un chemin continu d (ne se coupant pas lui-même) qui s'éloigne vers l'infini. Déplaçons maintenant le point $\overline{Y}$ d'une manière continue sur le contour de δ (dans le sens direct), et déformons en même temps la spirale σ de manière que, dans chacune de ses positions nouvelles, cette spirale soit contiguë à sa position précédente et enroulée autour d'elle. Lorsque le point $\overline{Y}$ aura décrit un tour complet sur le contour δ,

---

(¹) Nous négligeons les permutations-impasses qui ne peuvent manifestement pas altérer le mécanisme que nous allons décrire.

(²) C'est ce dont on se rendra compte avec précision en s'appuyant sur l'analyse que je donnerai plus loin au paragraphe X.

la spirale σ pourra prendre une position coïncidant avec sa position primitive; mais, au cours de son évolution, elle aura perdu une spire; et ainsi de suite, quand $\overline{\mathrm{Y}}$ continuera à tourner. D'ailleurs, à toute nouvelle position de σ il correspondra, dans le plan des x, un nouveau chemin d, contigu au précédent chemin d, et ne le coupant pas. Ainsi se trouve établie l'existence d'une *bande ou langue* continue *s'éloignant vers l'infini et jouissant de cette propriété que, sur tout chemin s'étendant vers l'infini sans sortir de la bande,* Y *tend vers une limite égale à* η (le long d'un chemin-spirale). *La bande contient une infinité de chemins d différents, le long desquels* Y *repasse* par la *même série de valeurs* (décrit une même spirale aboutissant en η).

Quatrième cas. — Faisons enfin l'hypothèse suivante : le point η est *indirectement* critique et *de première espèce,* mais il existe (dans le plan des x) des chemins continus, s'éloignant vers l'infini, *sur lesquels* Y *tend vers* η *sans s'enrouler une infinité de fois autour de ce point.*

Ces circonstances se présentent, nous l'avons vu, lorsqu'on peut opérer la série unilinéaire des permutations η_j (qui définissent le point η comme point transcendant de première espèce) tout en faisant décrire à Y un chemin simple direct. Considérons alors la bande formée par l'ensemble des chemins d, contigus, sur lesquels Y tend vers η, *suivant un chemin simple direct.* On ne peut plus démontrer qu'il existe une infinité de chemins d différents sur lesquels Y prend la même valeur; effectivement, d'ailleurs, il n'en est plus ainsi, comme nous le verrons au paragraphe VII.

Au point où nous en sommes, il ne sera pas inutile d'éclairer par des exemples les définitions qui précèdent. Ces définitions s'appliquent, en effet, aux singularités d'une fonction multiforme *quelconque;* nous ne saurions donc affirmer *a priori* que les fonctions inverses des fonctions entières présentent effectivement des points singuliers appartenant aux catégories définies plus haut; il faut, pour nous en assurer, faire appel à des exemples.

VII. — Exemples.

Considérons la fonction entière [1]

$$z = \lambda e^{\frac{2+\lambda}{\lambda}} \cos x - i(2+\lambda)\, e^{\frac{2+\lambda}{\lambda} ix} \sin x,$$

qu'on peut encore écrire

$$z = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{\lambda} ix} (3 + \lambda - 2e^{2ix}).$$

Nous allons rechercher comment se comportent, suivant les valeurs de λ, les singularités transcendantes de la fonction $x(z)$. Nous retrouverons ainsi, dans un ordre différent, les divers cas énumérés au paragraphe précédent.

Séparons dans $\frac{1}{\lambda}$ la partie réelle de la partie imaginaire en écrivant

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha + \beta i,$$

et supposons, en premier lieu, que *la partie réelle α soit* NÉGATIVE *et soit inférieure* [2] *à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue* (β *n'étant pas nul*).

La fonction $x(z)$ admet comme points critiques algébriques les points z_j donnés par l'égalité

$$z_j = \lambda e^{\frac{2ji\pi}{\lambda}},$$

où j peut prendre toutes les valeurs entières, positives ou négatives.

---

(1) On pourrait varier le type de cette fonction. Je donne ici celle dont je me suis servi pour uniformiser les intégrales de l'équation différentielle $zz' = \alpha x + \beta z$ (*Leçons*, etc., p. 77).

(2) Lorsque $-\alpha < \frac{1}{2}$, l'angle dont tourne z lorsque x varie de $j\pi$ à $(j+1)\pi$ est l'*angle géométrique* (moindre que π) des deux rayons vecteurs Oz_j, Oz_{j+1}. Il n'en est plus ainsi dans le cas où $-\alpha > \frac{1}{2}$, et, pour être appliquée à ce cas, l'exposition qui va suivre doit être modifiée.

D'ailleurs, chaque point critique z_j permute deux déterminations x qui, en ce point, sont égales à $j\pi$.

Des deux suites de points $(z_0, z_1, \ldots)$ et $(z_0, z_{-1}, \ldots)$, l'une converge vers $z = 0$ et l'autre vers $z = \infty$: nous admettrons, pour fixer les idées, que ce soit la première suite qui converge vers o (cela revient à supposer $\beta > 0$). Considérons, d'autre part, les rayons vecteurs qui joignent l'origine $z = 0$ aux points z_j; l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs sera, par hypothèse, compris entre o et π; de plus, un rayon vecteur qui (se mouvant toujours dans le même sens) irait passer successivement par les points $z_j, z_{j+1}, \ldots$ devrait tourner une infinité de fois autour de l'origine.

Construisons maintenant un système de coupures rectilignes joignant les points critiques $z_0, z_1, \ldots$ à l'infini, chaque coupure z_j étant tracée suivant le prolongement du rayon vecteur Oz_j (en sorte que, d'après ce qui précède, deux coupures consécutives quelconques ne sauraient se rencontrer). Suivons ensuite le long de la coupure z_j les deux déterminations de x qui se permutent autour de z_j. Lorsque z décrit la coupure z_j, chacune de ces déterminations décrit (dans le plan x) une ligne continue allant du point $x = kj\pi$ à l'infini; l'ensemble des deux lignes ainsi définies forme une courbe d'un seul tenant, L_j, qui partage le plan des x en deux régions.

Les courbes L_j, L_k qui correspondent à deux coupures différentes z_j, z_k ne sauraient se couper, puisque z est fonction uniforme de x et que les coupures z_j, z_k ne se rencontrent pas. Je dis, de plus, que, quelle que soit L_j, *les courbes* L_{j-1} *et* L_{j+1} *sont situées de part et d'autre de* L_j. Pour vérifier ce dernier point, nous nous reporterons à l'expression de la fonction $z(x)$. Cherchons ce que devient cette fonction lorsque x s'éloigne indéfiniment dans une direction donnée quelconque. Nous obtiendrons les résultats suivants : le module $|z|$ tend vers o lorsque x s'éloigne indéfiniment à l'intérieur d'un certain angle aigu A (de sommet $x = 0$) qui contient l'axe réel positif; dans toute autre direction le module $|z|$ augmente indéfiniment ([1]). Si l'on s'éloigne dans une direction parallèle aux côtés de l'angle A, la fonction z restera

([1]) Si l'on s'éloigne parallèlement à l'axe réel négatif, z sera indéterminée, mais non bornée.

finie et indéterminée; il en résulte que, si l'on se donne le point $x = j\pi$, on peut, à partir de ce point, tracer, *des deux côtés de l'axe réel*, des chemins s'éloignant vers l'infini, le long desquels $|z|$ est croissant; les deux moitiés du chemin L_j (le long desquelles z va croissant de z_j à l'infini) sont donc bien situées de part et d'autre de l'axe réel. Répétant le même raisonnement sur L_{j-1}, L_{j+1} et nous rappelant que ces chemins passent respectivement par les points $x = (j-1)\pi$, $x = (j+1)\pi, \ldots$, nous parvenons à la conclusion énoncée plus haut.

Ainsi, les différentes courbes L_j partagent le plan des x en un ensemble de régions contiguës R_j qui n'ont pas de parties communes. Chaque région R_j a pour frontières *deux* lignes L_j, L_{j+1} d'indices consécutifs.

Cela posé, que se passera-t-il lorsque la variable x décrira dans son plan un chemin continu d s'éloignant vers l'infini? Il faut distinguer deux cas :

1° Le chemin d est tout entier situé dans *une* région R_j ou dans un nombre fini de régions R_j : on voit immédiatement que dans ce cas *la fonction z tend, sur le chemin d, vers la limite $z = \infty$.*

2° Le chemin d traverse un nombre infini de régions R_j : en ce cas, lorsque x décrit le chemin d, la fonction z décrit, dans son plan, un chemin qui va couper successivement (dans l'ordre des indices croissants ou décroissants) les diverses coupures z_j; il résulte alors des remarques faites tout à l'heure que *le chemin décrit par z s'enroule une infinité de fois autour de $z = 0$.*

De là, nous tirons une double conclusion. En premier lieu, considérons un chemin infini d quelconque sur lequel z tende vers 0 (la simple inspection de l'expression de z révèle immédiatement l'existence de tels chemins; l'axe réel est l'un d'eux) : lorsque x décrit le chemin d, z décrit un chemin qui contourne nécessairement la suite des points critiques $z_j, z_{j+1}, \ldots$; d'autre part, appelons z un point voisin de l'origine et l un lacet fermé quelconque, formé d'un chemin d *simple direct* issu de z (deux fois parcouru) et d'une boucle infiniment petite entourant l'origine; quelle que soit la détermination de $x(z)$ avec laquelle nous partons de z, cette détermination (supposée suivie sur l) ne saurait être infinie à l'origine et ne saurait, par suite, admettre l'origine comme point critique transcendant; ainsi, *l'origine n'est pas, pour la fonction $z(x)$, point transcendant directement critique, mais seulement point indirectement critique (de première espèce) limite des points critiques algébriques z_j, z_{j+1}, ...* En second lieu, puisque tout chemin d sur lequel z tend vers o s'enroule une infinité de fois autour de l'origine, *le point transcendant $z = 0$ de la fonction $x(z)$ se trouve satisfaire aux conditions du troisième cas défini au paragraphe précédent.*

Supposons maintenant que, dans la quantité

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha + \beta i,$$

la partie réelle α soit POSITIVE (nous continuerons à supposer que $\beta > 0$).

Dans ce cas, comme dans le précédent, la fonction $x(z)$ admettra comme points critiques les points z_j. Nous pourrons donc encore mener des coupures suivant les prolongements des rayons Oz_j, et nous pourrons, comme plus haut, définir (dans le plan des x) les lignes L_j qui ne se coupent ni elles-mêmes, ni entre elles. Mais, cette fois, *les lignes L_{j-1} et L_{j+1} seront situées d'un même côté de L_j.* En effet, reportons-nous de nouveau à la fonction entière $z(x)$; nous verrons que, si à partir du point $x = j\pi$ nous traçons un chemin le long duquel $|z|$ aille en croissant, ce chemin est nécessairement situé au-dessous de l'axe réel. Nous en concluons que les lignes L_{j-1}, L_j, L_{j+1} [qui touchent l'axe réel aux points $(j-1)\pi$, $j\pi$, $(j+1)\pi$] sont toutes trois *au-dessous* de l'axe réel et forment une série de boucles extérieures les unes aux autres. Dès lors, les lignes L_j ne partagent plus le plan des x en régions R_j limitées, chacune, par deux lignes frontières : ces lignes définissent, d'une part, une série de régions dont chacune n'a qu'une frontière, et, d'autre part, une région intermédiaire qui a une infinité de frontières.

On déduit aisément de ces circonstances que l'origine n'est plus maintenant, pour la fonction $x(z)$, un point transcendant indirectement critique de première espèce. En revanche, l'origine est un point *transcendant directement critique* de cette même fonction. C'est ce que nous verrons clairement si nous décomposons le plan des x en régions de la manière suivante :

Nous savons que, lorsque la variable x décrit le demi-axe réel compris entre *zéro* et l'*infini*, z, partant de λ, décrit une spirale qui va passer successivement par les points critiques $z_1, z_2, \ldots$ et converge donc vers l'origine. Nous appellerons $z'_1, \ldots, z'_j, \ldots$ les points de cette spirale qui correspondent aux valeurs $\frac{\pi}{2}, \ldots, j\pi + \frac{\pi}{2}, \ldots$ de la variable x.

Appelons alors *coupure* z'_j une coupure menée suivant le rayon Oz'_j prolongé jusqu'à l'infini; puis suivons le long de ce rayon la caractéristique x issue de z'_j avec la détermination $\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi$. Cette caractéristique est infinie aux deux extrémités, o et ∞, de la coupure z'_j; les valeurs qu'elle prend le long de cette coupure constituent donc une ligne continue L'_j allant de l'infini à l'infini et ne se coupant pas elle-même; cette ligne traverse l'axe réel au point $\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi$.

De la même manière, on définira les lignes L'_{j-1}, L'_{j+1} qui seront situées de part et d'autre de L'_j. Finalement, on obtiendra un ensemble de régions contiguës R'_j dont chacune sera limitée par deux lignes L'_j d'indices consécutifs.

Lorsque x se mouvra arbitrairement à l'intérieur d'une région R'_j, la fonction z pourra repasser deux fois et *deux fois seulement* par la même valeur [1] (car z décrira un chemin qui ne pourra tourner qu'autour d'un seul point critique z_j). Au contraire, lorsque x traversera une infinité de régions R'_j, la variable z suivra un chemin qui s'enroulera une infinité de fois autour de l'origine; elle pourra donc repasser une infinité de fois par la même valeur.

Il est ainsi bien établi que *le point transcendant $z = 0$ de la fonction $x(z)$ satisfait aux conditions du* PREMIER *cas défini au paragraphe* IV.

Nous avons supposé successivement que, dans la quantité

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha + \beta i,$$

(1) Chaque région R'_j s'éloigne vers l'infini dans deux directions. Considérons alors le long des deux droites $z_j\infty$, $z_j o$ les deux caractéristiques x qui sont confondues au point

la partie réelle α était négative ou positive. Qu'arriverait-il *dans le cas où α serait nul?* Il sera facile d'étudier ce cas en le considérant comme un cas-limite des deux cas précédents. On aura alors le choix entre deux manières de décomposer le plan des x; on pourra le décomposer en régions R_j ou en régions R'_j.

Opérons, par exemple, la décomposition en régions R_j.

Dans le cas actuel, les points critiques algébriques

$$z_j = \lambda e^{\frac{2ji\Pi}{\lambda}}$$

se trouvent tous situés sur un même rayon vecteur issu de l'origine, en sorte que, si nous prenions pour *coupure* z_j le prolongement du rayon Oz_j, toutes les coupures coïncideraient. Mais il est clair que, dans le cas traité plus haut où $0 > \alpha > -\frac{1}{2}$, nous pouvons, sans modifier les résultats obtenus, déplacer d'une manière continue la coupure z_j, à condition de ne la faire passer par aucun des deux points critiques z_{j-1}, z_{j+1}. En d'autres termes, les coupures z_j peuvent être des demi-droites quelconques joignant les points z_j à l'infini, pourvu que ces demi-droites soient toutes situées d'un même côté (à l'extérieur) de la spirale obtenue en joignant deux à deux les points ..., z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, ... Nous conclurons de là que, lorsque α devient nul, nous pouvons toujours construire nos régions R_j, à condition de prendre comme coupures z_j des demi-droites parallèles *toutes situées d'un même côté (non arbitraire) du rayon vecteur qui contient les points critiques.*

Mais, supposant les régions R_j construites, faisons décrire à z, dans la direction de l'origine, un rayon voisin du rayon vecteur des points critiques et situé par rapport à ce dernier rayon du côté où sont les coupures.

Lorsque z décrit le rayon considéré, x décrit, dans son plan, un chemin continu d qui s'éloigne vers l'infini en traversant une infi-

---

critique z_j; suivies le long de $z_j\infty$, les deux caractéristiques s'éloigneront vers l'infini (à l'intérieur de R'_j) dans une même direction; suivies le long de $z_j o$, l'une des caractéristiques s'éloigne vers l'infini suivant la seconde direction, l'autre tend vers un point situé à distance finie.

nité de régions R_j. Ainsi il existe, dans le plan des x, des chemins continus d s'éloignant vers l'infini, sur lesquels z tend vers $z=0$ sans s'enrouler une infinité de fois autour de ce point : *le point transcendant $z=0$ de la fonction $x(z)$ satisfait aux conditions du* QUATRIÈME *cas défini au paragraphe* VI.

L'ensemble des chemins d, contigus les uns aux autres, constitue, pour $\alpha=0$ comme pour $\alpha\neq 0$, une bande continue dans laquelle z tend vers 0. Toutefois, cette bande ne jouit pas de la propriété que nous avons mise en lumière dans l'hypothèse où $\alpha\neq 0$ (*cf.* paragraphe IV) : il ne saurait exister, dans cette bande, plusieurs chemins d différents sur lesquels z prenne une série de valeurs. En effet, appelons δ le chemin que suit z lorsque x décrit un chemin d, et considérons, par exemple, les points $\ldots$, $\overline{z}_j$, $\overline{z}_{j+1}$, $\ldots$ où δ coupe respectivement les coupures $\ldots$, z_j, z_{j+1}, $\ldots$. Lorsque z (se dirigeant vers l'origine) passe en $\overline{z}_j$, x ne peut prendre qu'une seule valeur : la valeur commune aux deux caractéristiques issues respectivement du point z_j avec la détermination $j\pi$ et du point z_{j+1} avec la détermination $(j+1)\pi$.

Remarquons d'ailleurs que, dans le cas actuel (*quatrième*) comme dans le *troisième*, il existe une infinité de chemins d_1 contigus, s'éloignant vers l'infini, sur lesquels z tend vers $z=0$ suivant un chemin-spirale s'enroulant une infinité de fois. L'ensemble des chemins d_1 est contigu à l'ensemble des chemins d, et c'est l'ensemble total des chemins d et d_1 que nous désignerons à l'avenir sous le nom de *langue infinie dans laquelle z tend vers* 0. Il existe une infinité de chemins d_1 différents sur lesquels z prend une même série de valeurs.

Nous avons jusqu'ici fixé notre attention sur la singularité $z=0$ de la fonction $x(z)$, et nous avons cherché à caractériser cette singularité suivant la valeur de α. Nous aurions pu faire une étude analogue sur le point $z=\infty$ qui, bien évidemment, est un point singulier transcendant de la fonction $x(z)$.

En particulier, soit de nouveau *la quantité α négative et inférieure à* $\frac{1}{2}$, et soit $\beta>0$. Nous avons vu plus haut que, tandis que les points critiques appelés z_1, z_2, $\ldots$ convergent vers $z=0$, les points critiques z_{-1}, z_{-2}, $\ldots$ convergent vers $z=\infty$. D'ailleurs, sur ces points critiques d'indices négatifs, nous pouvons raisonner exactement comme sur les points $z_1, z_2, \ldots$; autour des points $\ldots, z_{-j}, z_{-j+1}, \ldots$ s'engendre une série unilinéaire de déterminations de x, déterminations qui se permutent aussi entre elles autour du point $z = \infty$ directement. *Le point transcendant $z = \infty$ se trouve, par conséquent, satisfaire aux conditions du* DEUXIÈME *cas défini au paragraphe* IV.

Construisons, dans ces conditions, les régions R_{-j} correspondant aux points z_j. Nous constatons qu'il existe, dans le plan des x, une bande telle que, sur tout chemin s'éloignant indéfiniment à l'intérieur de cette bande, z tende vers l'infini. Mais, circonstance nouvelle, cette bande contient deux sortes de chemins infinis d: 1° chemins d le long desquels Y tend vers l'infini suivant un chemin simple direct ou suivant un chemin-spirale opérant une série infinie de permutations *autour de l'infini directement;* 2° chemins d_1 le long desquels Y décrit un chemin-spirale, lequel opère une série infinie de permutations en tournant successivement autour des points $\ldots, z_{-j}, z_{-j-1}, \ldots$. Les chemins d sont séparés des chemins d_1 par des chemins infinis sur lesquels Y est indéterminée, mais prend (lorsqu'on les suit vers l'infini) des valeurs de plus en plus grandes.

La fonction $z(x)$ posée au début de ce paragraphe nous a fourni des exemples concrets des diverses circonstances prévues plus haut aux paragraphes III-VI. Nous ne quitterons pas cette fonction sans signaler les nouvelles illustrations qu'on en tirerait dans le cas où le coefficient β $\left[\text{coefficient de } \sqrt{-1} \text{ dans la quantité complexe } \frac{1}{\lambda}\right]$ serait égal à o.

Soit d'abord $\beta = 0$ *avec* $\alpha > 0$. Tous les résultats obtenus sous l'hypothèse $\alpha > 0$, $\beta > 0$ subsistent dans ce cas. La division du plan des x en régions R'_j est possible, et chaque région R'_j contient un seul point critique z_j. Seulement, les points z_j (au lieu de converger vers o et l'infini) convergent (dans leur plan) vers tous les points d'une courbe fermée entourant l'origine [1] si α est irrationnel, et se confondent avec un nombre fini de points fixes si α est rationnel.

---

[1] Comparer les résultats obtenus, dans l'étude des équations différentielles, pour les points singuliers de Briot et Bouquet (cf. *Leçons*, etc., Chap. IV).

Soit maintenant $\beta = 0$ *avec* $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. La division du plan des x en régions R_j est toujours possible comme lorsque $\beta > 0$. Les points z_j convergent (dans leur plan) vers tous les points d'une courbe fermée entourant l'origine si α est irrationnel, et se confondent avec un nombre fini de points fixes si α est rationnel. Dans un cas comme dans l'autre, il n'existe plus (dans le plan des x) de chemin d s'éloignant indéfiniment sur lequel z tend vers 0. *Sur tout chemin qui s'éloigne indéfiniment dans le plan des* x, z *reste indéterminée, ou tend vers l'infini.*

VIII. — Classification des langues.

Soit toujours $Y(x)$ une fonction entière. Nous avons mis en lumière, *a priori* d'abord, *a posteriori* ensuite, l'existence de bandes continues qui s'éloignent à l'infini dans le plan des x, et à l'intérieur desquelles Y tend vers certaines valeurs finies η ou vers l'infini. Faute d'un meilleur mot, nous avons appelé ces bandes continues des *langues;* je continuerai à me servir de ce vocable, un peu inusité peut-être, mais cependant commode.

Rassemblons d'abord les divers résultats relatifs aux *langues*, que nous avons déjà obtenus au cours de ce travail.

Nous avons signalé quatre types de langues dans lesquelles Y peut tendre vers une valeur η :

1° *Langues dans lesquelles* Y *tend vers le point* η *en s'enroulant un nombre arbitraire de fois (fini ou infini) autour de ce point, mais sans tourner* (1) *autour d'une infinité de points critiques algébriques convergeant vers* η, — *dans lesquelles, aussi, il existe une infinité de chemins infinis* d *le long desquels* Y (*tendant vers* η) *passe par les mêmes valeurs.* Pour abréger, nous appellerons ces langues : LANGUES DU PREMIER TYPE.

Des exemples simples, l'exemple de la fonction e^x, si l'on veut, montrent que les fonctions entières peuvent présenter des langues du premier type dans lesquelles Y tend vers une valeur finie η ou vers l'infini.

---

(1) *Voir*, page 323, la note précisant le sens de cette expression.

2° *Langues dans lesquelles* Y *ne peut tendre vers le point* η *sans s'enrouler une infinité de fois autour de ce point, en tournant autour d'une infinité de points critiques algébriques convergeant vers* η, — *et dans lesquelles il existe une infinité de chemins infinis d le long desquels* Y *passe par les mêmes valeurs*. Nous appellerons ces langues : LANGUES DU SECOND TYPE. [En donnant cette définition, nous supposons entendu qu'il n'existe dans la langue du second type *aucun* chemin infini d sur lequel Y tende vers η suivant un chemin simple direct.]

Le premier des exemples donnés au paragraphe VII nous a révélé l'existence de langues du second type dans lesquelles Y tend vers une valeur finie η. *Pourra-t-on rencontrer aussi des langues du second type dans lesquelles* Y *tende vers l'infini?* La réponse est négative, en ce qui concerne les fonctions entières. Imaginons, en effet, que nous ayons un ensemble de chemins (infinis) d contigus, le long desquels Y tende vers l'infini, suivant des chemins spirales, une infinité de ces chemins d correspondant d'ailleurs à une même trajectoire de Y. Ces circonstances ne peuvent se présenter que si la trajectoire z considérée est une spirale enroulée autour d'une suite de points critiques qui convergent vers $Y = \infty$. Mais partons, alors, de l'un quelconque de ces points critiques, et faisons décrire à Y un chemin *quelconque* (*simple direct*) s'éloignant à l'infini. A ce chemin correspondra nécessairement, dans le plan des x, un chemin d_1 s'éloignant vers l'infini, et l'on verra facilement qu'entre ce chemin d_1 et les chemins d définis tout à l'heure, on ne peut tracer aucun chemin sur lequel Y ne tende pas vers l'infini. On en conclut que la langue considérée n'est pas une langue du second type, mais bien une de ces langues que nous allons baptiser dans un instant : *langues multiples*.

3° *Langues dans lesquelles* Y *tend vers* η *en tournant autour d'une infinité de points critiques algébriques convergeant vers* η, *mais sans s'enrouler nécessairement une infinité de fois autour de* η. *Appelons* d_1 (*dans cette langue*) *les chemins infinis sur lesquels* Y *s'enroule une infinité de fois et d les autres chemins infinis ; il existe une infinité de chemins* d_1 *différents, mais il n'existe pas une infinité de chemins d différents, le long desquels* Y *passe par les mêmes valeurs. Nous appellerons les langues ainsi définies :* LANGUES DU TROISIÈME TYPE.

Nous avons donné au paragraphe VII un exemple de langue du troisième type. Nous avons reconnu d'ailleurs que ce type de langue se présentait dans un cas-limite exceptionnel.

Il sera donc permis de négliger ce cas dans un premier travail de dégrossissement. Il ne présenterait d'ailleurs aucun caractère nouveau, tout résultat qui est valable à la fois pour les langues du premier et du second type étant également valable pour les langues du troisième type.

4° *Langues dans lesquelles se trouvent des chemins d sur lesquels* Y *tend vers* η *sans tourner autour d'une infinité de points critiques algébriques convergeant vers* η, *et aussi des chemins* d_1 *sur lesquels* Y *tend vers* η *suivant un chemin-spirale en tournant autour d'une infinité de points critiques convergeant vers* η.

Nous avons, à la fin du paragraphe VII, signalé l'existence de semblables langues où Y tend vers l'infini; les caractères que présentent ces langues sont dus au fait que l'infini est, pour la fonction $x(\mathrm{Y})$, un point de première espèce à la fois directement et indirectement critique. Il est clair que les chemins d_1 le long desquels Y s'enroule autour d'une infinité de points critiques sont tous contigus les uns aux autres, de même que les chemins d. Tout se passe donc comme si la langue considérée était formée de deux langues juxtaposées, l'une du premier type, l'autre du second. Pour cette raison, nous conviendrons d'appeler cette langue une LANGUE MULTIPLE.

Faisons, à propos de cette définition, une observation importante. L'exemple du paragraphe VII met en évidence, entre les chemins d et les chemins d_1, des chemins infinis sur lesquels Y prend sans doute (lorsqu'on s'éloigne vers l'infini) des valeurs de plus en plus grandes, mais n'admet pas de limite à proprement parler (reste indéterminée). Cette circonstance pourrait nous inclure à regarder comme distinctes les langues formées par l'ensemble des chemins d d'une part, des chemins d_1 d'autre part. C'est cette manière de voir que j'avais primitivement adoptée. Je regardais alors tout chemin infini sur lequel Y est indéterminée (quoique non bornée) comme extérieur aux langues et situé dans une *languette d'indétermination* (*voir* § IX). Il m'a semblé depuis qu'il y avait intérêt à *considérer comme appartenant à une même* *langue double tous les chemins contigus sur lesquels* Y *tend régulièrement vers l'infini, ou prend des valeurs de plus en plus grandes.* C'est en ce sens que je prendrai la définition des langues multiples. D'ailleurs, une étude plus approfondie de ces langues amènerait à les décomposer en langues partielles séparées par les chemins infinis d', sur lesquels Y est indéterminée (non bornée).

Existe-t-il des langues multiples dans lesquelles Y tende vers une valeur finie η? La réponse est négative, lorsque $Y(x)$ est une fonction entière. En d'autres termes, *l'inverse $x(Y)$ d'une fonction entière ne peut présenter, à distance finie, des points transcendants à la fois directement et indirectement critiques.* Je ne démontrerai toutefois pas ici cette proposition à laquelle conduit aisément la méthode des paramètres, méthode dont je me suis servi pour établir que les points transcendants de x (Y) sont tous de première espèce [1].

Les langues que nous avons rencontrées au paragraphe VII appartiennent toutes aux quatre types qui viennent d'être énumérés. *Pourrait-il arriver qu'une fonction entière $Y(x)$ présentât des langues d'un autre type* (langue signifiant, d'une manière générale, ensemble de chemins x contigus, s'éloignant à l'infini et sur lesquels Y tend vers une limite déterminée)?

Nous savons (§§ III-VI) qu'à toute langue $\mathfrak{L}$ de la fonction $Y(x)$ correspond un point singulier transcendant (isolé) η de la fonction $x(Y)$, et que, réciproquement, *si un point transcendant η de $x(Y)$ est de première espèce,* il donne naissance à une langue de l'un des quatre types définis ci-dessus.

Lors donc que nous aurons démontré que les points transcendants de l'inverse d'une fonction entière sont tous de première espèce, nous pourrons répondre négativement à la question posée.

Poursuivons maintenant notre analyse en cherchant à nous faire une idée de la manière dont les langues sont rattachées les unes aux autres [nous ne parlerons pas des langues du troisième type].

---

(1) *Comptes rendus,* 28 octobre 1907.

IX. — Frontières d'une langue.

Et, d'abord, comment définir avec précision les frontières d'une langue?

Appelons $\mathfrak{L}$ une langue dans laquelle Y tende vers une limite η, et soit d'abord $\mathfrak{L}$ LANGUE DU PREMIER TYPE. Traçons dans le plan des Y un cercle δ de centre η et de rayon arbitrairement petit [le cercle δ ne doit contenir aucun point transcendant de $x(\mathrm{Y})$ autre que η]; puis partons d'un point $\overline{\mathrm{Y}}$ du contour δ avec une détermination qui se trouve tendre vers un point de $\mathfrak{L}$, lorsque $\overline{\mathrm{Y}}$ tend vers η, et faisons décrire à Y le contour δ dans l'un ou l'autre sens. Nous avons vu (§ IV, *in fine*) que, si le rayon $\overline{\mathrm{Y}}\eta$ est suffisamment petit, nous obtenons sur ce rayon (lorsque Y tourne indéfiniment le long de δ) une infinité de caractéristiques différentes qui toutes admettent le point η comme point transcendant directement critique (isolé). Par conséquent : 1° lorsque Y tourne sur δ dans l'un ou l'autre sens, x, partant de x_j, décrit une ligne d' qui s'éloigne vers l'infini (puisqu'elle passe par une infinité de points où Y reprend la même valeur); 2° la ligne d' ne se coupe pas elle-même (car on ne peut évidemment repasser deux fois en un même point de δ avec une même détermination) (¹); 3° les deux branches infinies de d' se rapprochent de plus en plus de la langue $\mathfrak{L}$, quand le rayon de δ tend vers o. Ainsi la ligne d' encadre, si l'on peut dire, la langue $\mathfrak{L}$; c'est pourquoi nous appellerons *ligne frontière* de $\mathfrak{L}$ chacune des deux demi-branches infinies de d' (lorsque le rayon de δ tend vers o). Toute ligne frontière est évidemment contiguë à une infinité d'autres lignes frontières. Nous appellerons *languette* (²) *d'indétermination* l'ensemble de toutes les lignes frontières contiguës d'une même langue. Nous dirons donc que la langue $\mathfrak{L}$ est flanquée de deux languettes d'indétermination, $\mathfrak{L}'_1$ et $\mathfrak{L}'_2$.

Soit maintenant $\mathfrak{L}$ une LANGUE DU SECOND TYPE. Traçons encore un cercle δ de centre η et de rayon arbitrairement petit, prenons un point

(¹) Autrement, le cycle des déterminations engendrées lorsqu'on tourne sur δ serait un cycle fixe.

(²) L'emploi de ce diminutif sera justifié ultérieurement.

fixe $\overline{Y}$ sur ce cercle, et appelons $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$ les valeurs prises au point $\overline{Y}$ par les deux caractéristiques de $x(Y)$ qui se permutent en un point critique η_j arbitrairement voisin de η. Nous avons vu (§ VI, texte et notes) que, pour opérer la suite de permutations qui définissent η comme point indirectement critique de première espèce, nous devons faire tourner indéfiniment Y sur le contour δ, en le mouvant dans l'un ou l'autre sens suivant que nous sommes partis avec la détermination $\overline{x}_j$ ou avec la détermination $\overline{x}_{j+1}$. D'ailleurs, si, partant avec une même détermination $\overline{x}_j$, nous tournons successivement dans le sens positif, puis dans le sens négatif, nous obtenons, comme courbe décrite par x, une ligne d' qui ne se coupe jamais elle-même et qui a deux branches infinies se rapprochant de plus en plus de la langue $\mathfrak{L}$ quand le rayon de δ tend vers o. Cette ligne d' est une *ligne frontière* de $\mathfrak{L}$. L'ensemble des lignes d' contiguës forme deux *languettes d'indétermination* qui sont les frontières de la langue $\mathfrak{L}$.

Supposons, enfin, que la langue $\mathfrak{L}$ soit une LANGUE MULTIPLE, la valeur limite η étant alors égale à l'infini. Il sera nécessaire de faire une distinction :

Soit Δ un très grand cercle décrit autour de $Y = o$.

Ou bien (quelque grand que soit Δ) *il existe un ensemble infini de déterminations de x, se permutant entre elles à l'extérieur de Δ, et telles que de l'une quelconque d'entre elles on ne puisse déduire une infinité de déterminations nouvelles à moins de tourner une infinité de fois autour de* $Y = \infty$.

Ou bien (quelque grand que soit Δ) *on peut, de toute détermination qui se permute hors de Δ (un nombre fini de déterminations pouvant faire exception, bien entendu), déduire une infinité de déterminations nouvelles en tournant autour de points critiques algébriques convergeant vers $Y = \infty$, sans tourner autour de $Y = \infty$ directement*.

Dans le premier cas, mouvons Y sur le contour Δ en partant d'une détermination convenable de x : x décrira une ligne allant de l'infini à l'infini, ligne que nous appellerons *ligne frontière* de la langue multiple $\mathfrak{L}$, lorsque le rayon de Δ augmentera indéfiniment.

Dans le second cas, nous ne pouvons plus engendrer la suite des déterminations x_j qui se permutent entre elles au voisinage de $Y = \infty$ en décrivant indéfiniment le contour d'un même cercle Δ. Pour voir clairement comment les choses se passent, faisons le changement de variable $Y = U^{-1}$. Si nous voulons obtenir la suite des x_j, nous devons, ou bien tourner successivement autour d'une suite de points critiques $\ldots, u_{j-1}, u_j, \ldots$ (convergeant vers $U = 0$) *sans tourner autour de* $U = 0$, ou bien tourner autour de $U = 0$ *sans tourner autour des points* u_j. Traçons alors un cercle arbitrairement petit, λ, de centre $U = 0$; on pourra, pour engendrer les u_j, décrire le contour λ indéfiniment; mais, chaque fois qu'on se sera trouvé opérer une permutation parasite autour de $U = 0$ ou $U = u_j$, on devra opérer de nouveau cette permutation en sens inverse, en décrivant un lacet élémentaire autour de $U = 0$ ou $U = u_j$; en d'autres termes, on devra mouvoir U sur un chemin λ' ainsi composé : une infinité de tours décrits (dans le même sens) le long de λ, et, intercalés entre ces tours, une infinité de lacets élémentaires décrits, soit autour de $U = 0$, soit autour des u_j. Lorsque U décrit le chemin λ', x parcourt un chemin infini, d_2, sur lequel U reste indéterminée mais prend des valeurs arbitrairement petites. Par définition, un tel chemin d_2 ne sera pas considéré comme ligne frontière de la langue $\mathfrak{L}$, mais bien comme ligne tracée dans $\mathfrak{L}$ et séparant deux langues partielles de la langue multiple (*voir* au paragraphe VIII la définition des langues doubles).

Prenons alors un point $\overline{Y}$ arbitrairement rapproché de $Y = \infty$ et appelons $\ldots, \overline{x}_j, \overline{x}_{j+1}, \ldots$ les déterminations de $x(\overline{Y})$ qui se permutent entre elles au voisinage de $Y = \infty$. Dans l'hypothèse où nous nous plaçons actuellement, il n'existe pas de chemin joignant la suite des points $\overline{x}_j, \overline{x}_{j+1}, \ldots$ sans passer par des points de modules arbitrairement grands situés dans la langue $\mathfrak{L}$. Nous en concluons que *la langue $\mathfrak{L}$ n'a pas de frontières : il n'existe pas (dans le plan des x) de chemin s'éloignant vers l'infini à l'extérieur de la langue $\mathfrak{L}$.*

C'est ce qu'on vérifiera en prenant pour exemple la fonction

$$Y = \sin x + x,$$

laquelle présente une langue double dépourvue de frontières.

X. — Langues contiguës.

Considérons deux langues différentes $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, appartenant à une même fonction entière $Y(x)$ et telles que la variable x, pour passer de l'une à l'autre, n'ait à traverser aucune autre langue. Nous dirons que les langues $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ sont contiguës.

Il peut arriver que, dans les langues contiguës $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$, la fonction $Y(x)$ tende vers une même limite ou vers des limites différentes; mais ces limites sont en tout cas discrètes, puisque les singularités transcendantes de $x(Y)$ sont des points isolés. D'ailleurs, deux langues contiguës sont toujours séparées, d'après ce qui précède, par une languette d'indétermination qui est leur frontière commune.

Cela dit, nous ferons une remarque importante. *Si une fonction entière* $Y(x)$ *tend vers une limite finie* η *dans une langue* $\mathfrak{L}_1$, *cette fonction tend vers l'infini dans les deux langues contiguës à* $\mathfrak{L}_1$.

Appelons, en effet, $\mathfrak{L}_2$ l'une ou l'autre des deux langues contiguës à $\mathfrak{L}_1$. Je dis qu'il n'est pas possible que Y tende, dans $\mathfrak{L}_2$, vers une limite finie η'.

Prenons (dans le plan des Y) un point $\overline{Y}$ voisin de η, et, comme tout à l'heure, appelons ..., $\overline{x}_j$, x_{j+1}, ... la suite des points de la frontière commune à $\mathfrak{L}_1$ et à $\mathfrak{L}_2$ où Y prend la valeur $\overline{Y}$. Joignons ensuite $\overline{Y}$ à l'*infini* par une droite quelconque D qui ne passe ni par η ni par η'. Lorsque Y décrit cette droite, la variable x, à partir des déterminations $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$, ..., décrit, dans son plan, une infinité de chemins différents, $d_{(1),j}$, $d_{(1),j+1}$, ..., qui s'éloignent nécessairement vers l'infini. Ces chemins $d_{(1)}$ se déversent donc dans une langue où Y tend vers l'infini, et, si cette langue n'est ni $\mathfrak{L}_1$ ni $\mathfrak{L}_2$, il faut que les chemins $d_{(1)}$ commencent par traverser la langue $\mathfrak{L}_1$ ou la langue $\mathfrak{L}_2$. Il devra donc exister des dérivées $d_{(1)}$ sur lesquelles Y prendra des valeurs arbitrairement rapprochées de η ou de η'. Or cela n'est pas. Donc l'hypothèse d'après laquelle les deux nombres η et η' seraient finis conduit à une absurdité. La langue $\mathfrak{L}_2$ est nécessairement une langue où Y tend vers l'infini.

Nous touchons ici à une question qui présente dans l'étude de la fonction $x(\mathrm{Y})$ une grande importance : *comment se comporte, d'une manière générale, la fonction* Y *le long des chemins qui vont de* $\mathcal{L}_1$ *à* $\mathcal{L}_2$ *en traversant la frontière commune à ces deux langues?* Posons-nous cette question en supposant toujours que Y tende vers η dans $\mathcal{L}_1$ et vers l'infini dans $\mathcal{L}_2$.

Considérons comme tout à l'heure une droite fixe joignant à l'infini (dans le plan des Y) le point $\overline{\mathrm{Y}}$ situé sur le contour du cercle δ de centre η; nous appellerons D cette droite (ce sera, par exemple, un rayon issu de η) et nous désignerons (¹) par $d_{(1),j}$, $d_{(1),j+1}$, ... les chemins que la variable x décrit à partir des déterminations $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$, ... lorsque Y décrit D (*voir* plus haut). D'autre part, nous continuerons à appeler d' le chemin infini que décrit x lorsque Y tourne indéfiniment sur le contour δ (de manière à engendrer la suite des déterminations $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$, ...), et nous admettrons, pour fixer les idées, que Y tourne sur δ *dans le sens positif* quand x parcourt d'.

Cela posé, imaginons que nous fassions tourner le rayon ηx autour du point η dans le sens direct, et suivons, le long de ce rayon, la caractéristique de $x(\mathrm{Y})$ qui, pour la position initiale D de ηx, prend la suite des valeurs situées sur $d_{(1),j}$: je vais démontrer la proposition suivante : *Traçons un cercle* Γ *de centre* η *et de rayon* R : *quelque grand que soit le rayon* R, *on peut prendre l'indice* j (*et par suite* $|\overline{x}_j|$) *assez grand pour que, lorsque le rayon* ηx *tourne indéfiniment autour de* η *dans le sens direct, la caractéristique* x *suivie le long de ce rayon ne puisse présenter entre* δ *et* Γ *que des points critiques opérant des permutations-impasses, ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe IV* (premier cas). (En d'autres termes, on ne peut engendrer autour des points critiques obtenus une infinité de déterminations nouvelles à moins de tourner une infinité de fois autour de η.)

Voici comment nous démontrerons cette proposition :

(¹) Si les branches de $x(\mathrm{Y})$ que nous suivons le long de D présentaient des points critiques sur cette droite, nous choisirions arbitrairement, à partir de chaque point critique, la détermination que nous convenons d'appeler ..., $d_{(1)j}$, $d_{(1)j+1}$, ... Mais, comme l'ensemble des points critiques algébriques de $x(\mathrm{Y})$ est dénombrable, on pourra toujours choisir la droite D de manière qu'elle ne passe par aucun de ces points critiques (quoiqu'elle puisse être arbitrairement rapprochée de certains d'entre eux). Nous ferons la même hypothèse sur le cercle δ.

Traçons, autour du point η, un contour fermé Δ extérieur au cercle Γ et rencontrant la droite D en un point $\overline{\overline{Y}}$; appelons, d'autre part, $\overline{\overline{x}}_j$, $\overline{\overline{x}}_{j+1}$, ... les valeurs prises en $\overline{\overline{Y}}$ par les caractéristiques x issues de $\overline{Y}$ avec les déterminations $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$, ... Nous pouvons toujours tracer Δ de manière que, lorsqu'on décrit sur ce contour une infinité de tours *dans le sens direct,* on obtienne en $\overline{\overline{Y}}$ $\left(\text{à partir de } \overline{\overline{x}}_j\right)$ une infinité de déterminations différentes de la fonction $x(Y)$. En effet, lorsque Y parcourt Δ, x reste arbitrairement près (quand le rayon R devient arbitrairement grand) de la langue $\mathfrak{L}_2$ où Y devient infinie. Il sera donc toujours permis de prendre comme contour Δ le cercle qui nous a servi au paragraphe précédent pour définir les frontières des langues infinies simples et doubles. Nous appellerons $\overline{\overline{x}}'_j$, $\overline{\overline{x}}'_{j+1}$, $\overline{\overline{x}}'_{j+2}$, ... la suite des valeurs que x prend en $\overline{\overline{Y}}$, lorsque Y décrit successivement *un* tour, *deux* tours, etc., le long de Δ dans le sens positif, et nous désignerons par d'' l'ensemble du chemin parcouru par x lorsque Y tourne de la manière indiquée [1].

Cela posé, nous allons établir que, *quelque grand que soit* j, *il existe sûrement un nombre fini* K *tel que la détermination* $\overline{\overline{x}}'_{j+K}$ *soit égale à* $\overline{\overline{x}}'_{j+1}$. En d'autres termes, si, partant de $\overline{Y}$ avec $\overline{x}_j$, on tourne sur Δ dans le sens direct, on revient sûrement en $\overline{\overline{Y}}$ avec $\overline{\overline{x}}_{j+1}$ après avoir décrit un nombre fini de tours.

Montrons qu'on serait conduit à une absurdité si l'on supposait que le nombre K n'existe pas.

Nous allons considérer (dans le plan des x) un chemin f qui, coïncidant d'abord avec $d_{(1),j}$, se déplace avec continuité sans jamais se recouvrir lui-même, et vient coïncider avec $d_{(1),j+1}$ après avoir balayé toute l'aire comprise entre $d_{(1),j}$ et $d_{(1),j+1}$. Nous appellerons F le chemin que décrit Y lorsque x parcourt f; nous désignerons, d'autre part, par x', x'' les points de rencontre de f avec d', d'' et par Y′, Y″ les valeurs correspondantes de Y.

Lorsque le chemin f se déplace de la manière indiquée, les points x'

---

[1] Il est loisible de supposer qu'il n'y a sur Δ comme sur D et J aucun point critique de $x(X)$.

et x'' décrivent les lignes d', d'', tandis que Y' et Y'' tournent respectivement (dans le sens direct) le long de δ et Δ. Admettre qu'il n'existe pas de nombre fini K satisfaisant à la condition énoncée plus haut revient donc à admettre que le chemin f, variant à partir de $d_{(1),j}$, doit franchir tous les points $\overline{\overline{x}}'_{j+1}$, $\overline{\overline{x}}'_{j+2}$, ... avant de prendre la position $d_{(1),j+1}$, revient donc, en d'autres termes, à admettre que la ligne d'' s'éloigne indéfiniment entre les chemins $d_{(1),j}$ et $d_{(1),j+1}$. Mais les chemins $d_{(1),j}$ et $d_{(1),j+1}$ traversent, nous le savons, la langue $\mathfrak{L}_2$. Donc, il en sera de même de d''. Conclusion inacceptable si l'on a pris l'indice j assez grand, puisque la ligne d'' est, par hypothèse, une ligne frontière de $\mathfrak{L}_2$. Donc le nombre K existe, et la proposition énoncée est démontrée.

Afin de bien mettre en lumière l'existence (éventuelle) des permutations-impasses, nous allons étudier d'un peu plus près la variation des chemins f et celle du chemin correspondant F décrit par Y (chemin qui se déplace à partir de la position D du rayon $Y'\infty$).

Nous prendrons d'abord comme chemin variable f la suite des valeurs par lesquelles passe la caractéristique considérée x quand Y décrit le rayon joignant η à l'infini; dans ces conditions, lorsque f se déplace à partir de $d_{(1),j}$, le chemin F coïncide avec un rayon $Y'\infty$ et tourne autour de η à partir de la position D. Mais il peut arriver que, lorsque le rayon $\eta\infty$ vient à prendre une certaine position D', nous rencontrions sur le segment Y'Y'' de ce rayon un point critique η'_1 de la caractéristique x; quand F viendra coïncider avec D' la caractéristique x se dédoublera à partir du point η'_1; nous obtiendrons donc (pour Y variant le long de D') deux chemins f différents qui ont une partie commune f_1 aboutissant en un certain point φ_1 et se dédoublant ensuite en deux chemins f'_1, f''_1. D'ailleurs, des deux chemins (f_1, f'_1), (f_1, f''_1), l'un seulement (f_1, f'_1) sera contigu aux chemins f précédemment obtenus. Partons de cette position de f et continuons à déplacer f d'une manière continue de manière à balayer l'angle curviligne de sommet φ_1 formé par f'_1 et f''_1. Nous prendrons comme chemin f un chemin composé du segment fixe f_1 et d'un segment f' compris entre f'_1 et f''_1. En particulier, nous pouvons prendre comme segment f' la suite des valeurs par lesquelles passe la caractéristique de x (à partir de la valeur φ_1) quand Y décrit un rayon qui joint η'_1 à l'infini et tourne autour de η'_1 à partir de la position D' : le chemin F sera alors une ligne brisée composée d'un segment rectiligne $Y'\eta'_1$ (dirigé suivant D') et d'un second segment rectiligne $\eta'_1\infty$ qui tourne autour de η'_1.

Deux cas peuvent alors se présenter :

Ou bien le segment $\eta'_1\infty$ décrit un tour complet autour de η'_1 sans que nous rencontrions (sur ce segment) de nouveaux points critiques des caractéristiques que nous suivons; une fois ce tour décrit, le chemin F reprend la position D', et le chemin f prend la position (f_1, f''_1) après avoir balayé l'angle curviligne (f'_1, f''_1). *L'effet de la permutation* η'_1 *se trouve détruit.*

Ou bien pour une certaine position D'' du rayon $\eta'_1\infty$ nous rencontrons, sur le segment $\eta'_1 Y''$ de ce rayon, un point critique η'_2 de x; pour cette position de $\eta'_1\infty$, le chemin f se dédoublera en deux chemins $(f'_2, f''^{(1)}_2)$, $(f'_2, f''^{(2)}_2)$. Continuons alors à déplacer le chemin f de manière à balayer l'angle curviligne $(f''^{(1)}_2, f''^{(2)}_2)$: nous pourrons prendre comme chemin F une ligne brisée composée du segment rectiligne $Y'\eta'_1$, du segment rectiligne $\eta'_1\eta'_2$ et d'un segment rectiligne $\eta'_2\infty$ qui tourne autour de η'_2. Deux cas peuvent encore se présenter. Ou bien le segment $\eta'_2\infty$ décrit un tour complet autour de η'_2 sans que nous rencontrions un point critique η'_3 et nous pouvons raisonner sur η'_3, comme nous l'avons fait sur η'_2 et η'_1, et ainsi de suite, la ligne brisée F acquérant ainsi de plus en plus de côtés. Mais, lorsque f continue à se déplacer jusqu'à la position $d_{(1), j+1}$, la ligne F doit reprendre la position droite D. Il faut donc qu'elle ait perdu tous ses côtés sauf un. Comment cela est-il possible? Nous constatons qu'au moment où la ligne brisée F possède q côtés, le seul qu'elle puisse perdre est le dernier côté, $\eta'_q\infty$: F perdra ce côté si le segment $\eta'_q\infty$ décrit un tour complet autour de η'_q sans qu'on rencontre un nouveau point critique η'_{q+1}; l'effet de la permutation η'_q se trouve alors détruit. Après avoir perdu son $q^{\text{ième}}$ côté, la ligne F pourra perdre son $(q-1)^{\text{ième}}$ côté, et ainsi de suite : il résulte de la proposition ci-dessus démontrée que, lorsque Y'' *aura décrit un nombre fini de tours le long de* Δ, *la ligne brisée sera redevenue droite. L'effet de toutes les permutations* η'_1, η'_2, ... *aura été détruit.*

Quand le chemin F varie (dans le plan des Y) suivant la loi que nous venons de préciser, *le chemin f (dans le plan des x) balaye (sans jamais se recouvrir lui-même) la languette d'indétermination qui sépare les deux langues $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$.*

Faisons, avant de passer au cas où Y tend vers l'infini dans les deux langues $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$, quelques remarques encore.

Nous vérifions d'abord qu'il résulte de la proposition démontrée qu'*on pourra toujours prendre comme contour Δ (contour sur lequel nous avons fait tourner le point Y'') un cercle quelconque de rayon arbitrairement grand.*

Établissons maintenant une distinction entre le cas où la langue $\mathfrak{L}_1$ est du premier type et le cas où elle est du second type.

Supposant d'abord $\mathfrak{L}_1$ *du premier type*, prolongeons jusqu'au point η (dans le plan des Y) la droite particulière que nous avons appelée D. Lorsque Y décrit le segment $\overline{Y\eta}$, la variable x, suivant les chemins appelés $d_{(1),j}$, $d_{(1),j+1}$, ..., s'éloigne vers l'infini à l'intérieur de la langue $\mathfrak{L}_1$. Nous pouvons donc définir, d'une manière générale, les chemins $d_{(1),j}$ comme étant *une suite de chemins ne se coupant ni eux-mêmes, ni entre eux, et allant de l'infini à l'infini en se déversant d'un côté dans la langue $\mathfrak{L}_1$, de l'autre côté dans la langue contiguë $\mathfrak{L}_2$. Les chemins $d_{(1),j-1}$ et $d_{(1),j+1}$ sont situés de part et d'autre de $d_{(1),j}$. Ils jouent exactement le même rôle que les chemins L'_j qui, dans le second exemple du paragraphe VII, nous ont servi à décomposer le plan des x en régions R'_j dans chacune desquelles la fonction entière ne prend que deux fois toute valeur donnée.*

Cela posé, nous aurons la proposition suivante : *Tout chemin qui, dans le plan x, traverse un nombre arbitrairement grand de chemins $d_{(1),j}$, s'enroule un nombre arbitrairement grand de fois autour du point η, c'est-à-dire franchit un nombre arbitrairement grand de fois un rayon quelconque (tel que D) issu du point η.* En effet, nous avons défini plus haut un chemin particulier d' qui franchit les chemins ..., $d_{(1),j-1}$, $d_{(1),j}$, $d_{(1),j+1}$, ... et satisfait à la proposition énoncée. Au lieu de d', nous pourrons, d'après ce qui précède, considérer le chemin g parcouru par x lorsque Y décrit la série de lacets élémentaires qui engendre la suite des permutations ..., $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+1}$, ... de $x(\overline{Y})$, c'est-à-dire une série indéfinie de lacets décrits autour de $Y = \eta$, et,

— intercalées entre certains de ces lacets, — des séries finies de lacets décrits autour de points critiques algébriques; le chemin g franchira la suite des chemins $d_{(1),j}$; de plus, lorsque x se mouvra sur g entre $d_{(1),j}$ et $d_{(1),j+q}$, Y décrira directement autour de $Y = \eta$ un nombre q' de lacets élémentaires qui croîtra indéfiniment avec q. Déformons alors le chemin g avec continuité, de manière à le transformer en un chemin quelconque joignant un point de $d_{(1),j}$ à un point de $d_{(1),j+q}$; le chemin transformé devra nécessairement s'enrouler q' fois au moins autour de η; en effet, s'il n'en était pas ainsi, il devrait exister sur certaines positions du chemin transformé des points où Y traverserait la valeur critique $Y = \eta$, et ces points devraient alors être à l'infini, puisque les déterminations de $x(Y)$ qui se permutent autour de $Y = \eta$ sont infinies pour $Y = \eta$.

Soit maintenant $\mathcal{L}_1$ une langue du *deuxième type*. Alors, nous ne pourrons plus prolonger le chemin $d_{(1),j}$ jusqu'à l'infini dans $\mathcal{L}_1$ comme nous l'avons fait tout à l'heure; car les caractéristiques x suivies le long du rayon $\overline{Y\eta}$ ne seront pas infinies en η. Si nous voulions poursuivre jusqu'au bout l'analogie des langues du premier type et des langues du second type, nous devrions, dans le cas de ces dernières, remplacer les chemins $d_{(1),j}$ par des chemins autrement définis. Nous considérerions dans le plan des Y un chemin-spirale S, convergeant d'un côté vers $Y = \eta$, de l'autre vers $Y = \infty$ et tournant autour de la suite de points critiques algébriques η_j qui définit η comme point indirectement critique de première espèce de la fonction $x(Y)$. Mouvant alors Y sur la spirale S, nous obtiendrions, dans le plan des x, *une suite de chemins $e_{(1),j}$ ne se coupant ni eux-mêmes ni entre eux, et allant de l'infini à l'infini en se déversant d'un côté dans la langue $\mathcal{L}_1$, de l'autre dans la langue $\mathcal{L}_2$.*

Mais nous nous ferons une idée plus nette des propriétés de $Y(x)$ dans $\mathcal{L}_1$, si nous considérons, en place des chemins $e_{(1),j}$ des chemins définis différemment. Considérons la suite des points critiques η_j et, par chacun d'eux, menons une coupure rectiligne le joignant à l'infini [et satisfaisant aux diverses conditions que nous imposons aux coupures (*voir* paragraphe III)]. Nous constaterons que, *lorsque Y décrit la coupure η_j, x partant de la valeur critique décrit deux lignes dont l'ensemble forme une ligne infinie continue q_j se déversant dans les deux* *langues infinies* $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ *qui flanquent* $\mathfrak{L}_1$. D'ailleurs, les lignes q_j ne se coupent pas entre elles et q_{j-1}, q_{j+1} sont de part et d'autre de q_j. *Les lignes* q_j *jouent alors le même rôle que, dans le premier exemple du paragraphe VII, les lignes appelées* L_j. Mais nous n'insisterons pas sur ces lignes, ne voulant pas aborder ici la décomposition générale du plan des x en régions dans lesquelles Y ne prend qu'une fois toute valeur donnée.

XI. — Langues infinies contiguës.

Ces remarques vont nous conduire dans un instant à l'énoncé de certaines propriétés des languettes. Mais, avant d'en venir là, nous dirons quelques mots des langues où Y tend vers l'infini.

Appelons, pour abréger, *langue finie* toute langue où $Y(x)$ reste finie, et *langue infinie* toute langue où $Y(x)$ devient infinie. Il résulte de ce qui précède que toute langue finie est flanquée de deux langues infinies (simples du premier type, ou double. Une langue infinie, en revanche, peut être flanquée soit de langues finies, soit de langues infinies. Voyons un peu *comment se comportera* Y *entre deux langues infinies contiguës* dont l'une au moins est simple (du premier type). Désignons par $\mathfrak{L}_1$ la langue infinie simple, par $\mathfrak{L}_2$ la langue infinie contiguë à $\mathfrak{L}_1$, par $\mathfrak{L}'$ la languette d'indétermination qui sépare $\mathfrak{L}_2$ de $\mathfrak{L}_1$. Puis prenons (dans le plan des Y) un point $\overline{Y}$ voisin de l'infini. Il existe dans $\mathfrak{L}'$ une double série de valeurs de x où Y prend la valeur $\overline{Y}$; les points de la première série tendent vers des points de $\mathfrak{L}_1$ lorsque $|\overline{Y}|$ croît indéfiniment, tandis que les points de la deuxième série tendent vers des points de $\mathfrak{L}_2$; nous allons d'abord considérer les points de la première série que nous appellerons

$$\ldots,\quad \overline{x}_{j-h},\quad \overline{x}_j,\quad \overline{x}_{j+h_1},\quad \ldots.$$

Nous savons [1] que les caractéristiques de $x(Y)$ issues de $\overline{Y}$ avec

---

[1] *Voir* au paragraphe IV les remarques relatives au cas où la singularité $Y=\infty$ donne naissance à une langue du premier type.

les déterminations $\overline{x}_j$ admettent l'*infini* comme point transcendant directement critique et ne présentent aucun point critique algébrique au voisinage de l'infini (exception faite, peut-être, pour un nombre fini de valeurs de l'indice j). Nous en concluons que, pour déduire les unes des autres les déterminations $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+k_1}$, $\overline{x}_{j+k_2}$, ..., il suffit de décrire successivement *un, deux,* ... tours le long d'un cercle de grand rayon Γ, ayant pour centre le point $Y = 0$ et passant par $\overline{Y}$. D'ailleurs les points $\overline{x}_j$ sont dans la frontière $\mathcal{L}'$ les seuls points (s'éloignant indéfiniment, en se rapprochant de $\mathcal{L}_1$, quand $|\overline{Y}|$ croît indéfiniment) où l'on ait $Y = \overline{Y}$.

Lorsque nous décrivons le contour Γ pour permuter entre elles les déterminations $\overline{x}_j$, nous nous trouvons tourner nécessairement autour d'une suite de points critiques ..., η_j, ... situés à l'intérieur de Γ. Ces points critiques sont des *points critiques algébriques*. Plus précisément, il n'est pas possible qu'un nombre arbitrairement grand de permutations ..., η_j, ... consécutives s'opèrent autour d'un même point η ou autour d'une suite de points critiques algébriques convergeant vers η; car, s'il en était ainsi, le raisonnement employé au commencement du dernier paragraphe prouverait que l'une des langues $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ doit être une langue finie dans laquelle Y converge vers η.

Construisons d'abord un système de coupures rectilignes joignant les divers points ..., η_j, ... au contour Γ ou, *plus généralement, à un contour fermé quelconque,* Δ, *décrit autour de* Γ. Nous prendrons, par exemple, comme coupures les prolongements des divers rayons joignant l'origine aux points η_j. [Si plusieurs points critiques (permutant une même détermination de x) se trouvaient sur un même rayon, nous dévierions légèrement les coupures de manière qu'elles restent distinctes.]

Cela posé, il nous sera commode d'affecter les points critiques η_j de deux indices i, j, afin de pouvoir les répartir entre plusieurs séries. Nous appellerons $\theta_{i,j}$ les points de rencontre des coupures $\eta_{i,j}$, ... avec le contour Δ; nous désignerons, d'autre part, par $x'_{i,j}$, $x''_{i,j}$ les deux déterminations de $x(\theta_{i,j})$ qui se permutent entre elles le long d'un lacet élémentaire $l_{i,j}$ formé de la coupure $\eta_{i,j}$ deux fois parcourue et d'une boucle infiniment petite décrite autour de $\eta_{i,j}$.

Partons maintenant de $\theta_{i,j}$ avec la détermination $x'_{i,j}$ et commençons par mouvoir Y le long de Δ suivant le sens de rotation qui engendre au point Y la suite des déterminations $\overline{x}_j$, $\overline{x}_{j+k}$, ... situées dans g'. Ce sens sera, par exemple, le sens positif. Chaque fois que nous passons en un point $0_{i,j'}$ avec l'une des déterminations $x'_{i,j'}$, $x''_{i,j'}$, nous opérons la permutation $\eta_{i,j'}$. Ainsi nous nous trouvons opérer une suite de permutations élémentaires rangées dans un ordre déterminé. Ces permutations seront de deux sortes : celles que nous ne nous trouvons opérer qu'une fois; celles que nous opérons deux fois (ces dernières étant ce que nous avons appelé des *permutations-impasses*) Nous affecterons les premières [1] des indices $(1, j+1)$, $(1, j+2)$, ... dans *l'ordre où nous les rencontrons*, et les secondes des indices $(2, j+1)$, $(2, j+2)$, ... De plus, nous conviendrons d'appeler spécialement $x'_{1,j'}$ celle des deux déterminations $x'_{1,j'}$, $x''_{1,j'}$ avec laquelle nous passons au point $0_{1,j'}$, lorsque Y se meut de la manière indiquée. Nous voyons que, tandis que Y tournera, x décrira (à partir de $x_{1,j}$) un chemin d' qui s'éloigne vers l'infini dans la languette g' et sur lequel sont situés, d'une part les points $x'_{1,j+1}$, $x'_{1,j+2}$, ..., d'autre part les couples de points $(x'_{2,j+1}, x''_{2,j+1})$, $(x'_{2,j+2}, x''_{2,j+2})$, ...

Décrivons maintenant successivement (à partir des déterminations $x'_{1,j}$, $x'_{1,j+1}$, ...) les lacets élémentaires $l_{1,j}$, $l_{1,j+1}$, ... qui nous ramènent respectivement en $0_{1,j}$, $0_{1,j+1}$, ... avec les déterminations $x''_{1,j}$, $x''_{1,j+1}$, ... Lorsque Y décrit ces lacets le point x décrit une série de chemins $d_{(1),j}$, $d_{(1),j+1}$, ..., qui ne peuvent pas se couper (si deux de ces chemins se coupaient, ils coïncideraient). Je dis que *les chemins* $d_{(1),j}$, $d_{(1),j+1}$ *traversent la languette* g'. En effet, si $d_{(1),j}$ ne traversait pas g'_1, on pourrait déformer ce chemin de manière que tous ses points se rapprochent indéfiniment de g_1, lorsque $|\overline{Y}|$ croît indéfiniment; les deux déterminations x'_j, x''_j devraient alors se permuter le long d'un contour Δ' arbitrairement éloigné et devraient donc se permuter le long de Δ, puisque, si l'indice j est assez grand, il ne peut y avoir entre Δ' et Δ aucun point critique des branches que nous suivons : les points x'_j, x''_j devraient, par suite, être tous deux sur la ligne d', ce qui

---

[1] La première série comprendra nécessairement une infinité de permutations; autrement, on n'obtiendrait, en tournant indéfiniment sur Δ, qu'un nombre fini de déterminations différentes.

n'est pas [1]. Ainsi, *quand le point* $\overline{\mathrm{Y}}$ *s'éloigne indéfiniment, les chemins* $d_{(1),j}$, $d_{(1),j+1}$ *sont des chemins qui vont de l'infini à l'infini et se déversent, d'un côté dans la langue* $\mathcal{L}_1$, *de l'autre côté dans la langue* $\mathcal{L}_2$.

Cela acquis, nous allons pouvoir reproduire, sous une forme un peu modifiée, le raisonnement que nous avons développé plus haut à propos des langues finies.

Appelons Y′ un point Y qui sera supposé tourner indéfiniment sur Δ dans le sens POSITIF à partir de $\theta_{1,j}$, et désignons par x' la valeur de la branche de $x(\mathrm{Y}')$ qui prend la valeur $x'_{1,j}$ pour la valeur initiale $\theta_{1,j}$ de Y′. Je dis que *la branche* x' *ne peut présenter, dans* Δ, *en dehors des points critiques* $\ldots, \eta_{1,j}, \eta_{1,j+1}, \ldots$, *que des points critiques opérant des permutations-impasses.*

Voici comment nous démontrerons cette proposition.

Il sera toujours possible [2] (*cf.*, plus haut, le cas où $\mathcal{L}_1$ est une langue finie) de disposer du contour Δ de manière que, lorsqu'on décrit sur Δ une infinité de tours *dans le sens* NÉGATIF (à partir de $\theta_{1,j}$ et de la détermination initiale $x''_{1,j}$), on obtienne en $\theta_{1,j}$ ou en $\theta_{1,j+1}$ une infinité de déterminations x différentes. Nous désignerons par Y″ un point Y qui sera supposé tourner indéfiniment sur Δ de la manière indiquée et par x'' la valeur correspondante de x. Nous appellerons, d'autre part, $\xi_{j+1}^{(1)}, \xi_{j+1}^{(2)}, \ldots$ les valeurs avec lesquelles x se trouve successivement passer au point $\theta_{1,j+1}$, lorsque x va tournant. Le point x'' décrit une ligne d'' qui s'éloigne indéfiniment dans le plan des x et qui contient la suite des points $\xi_{j+1}^{(1)}, \xi_{j+1}^{(2)}, \ldots$.

Cela posé, nous allons établir que, *quelque grand que soit* j, *il existe sûrement un nombre fini* k *tel que la détermination* $\xi_{j+1}^{(k)}$ *soit égale à* $x''_{1,j+1}$.

Nous allons considérer (dans le plan des x) un chemin f qui, coïncidant d'abord avec $d_{(1),j}$, se déplace avec continuité sans jamais se recouvrir lui-même, et vient coïncider avec $d_{(1),j+1}$ après avoir balayé toute l'aire comprise entre $d_{(1),j}$ et $d_{(1),j+1}$. Nous appellerons F le chemin que décrit Y lorsque x parcourt f; nous désignerons, d'autre

(1) Réciproquement, supposons que, lorsque Y décrit (à partir de la détermination $x'_{i,j'}$) le lacet élémentaire $l_{i,j'}$, x décrive un chemin traversant $\mathcal{L}'_1$: le point $\eta_{i,j'}$ ne saurait se trouver parmi les points $\eta_{2,j+1}, \eta_{2,j+2}, \ldots$.

(2) En vertu des propriétés des lignes frontières des langues.

part, par x', x'' les points de rencontre de f avec d', d'' et par Y', Y'' les valeurs correspondantes de Y. Lorsque f se déplace de la manière indiquée, les points x' et x'' décrivent les lignes d', d'', tandis que les points Y' et Y'' tournent tous deux *le premier dans le sens positif, le second dans le sens négatif* le long de Δ. Admettre qu'il n'existe pas de nombre fini k satisfaisant à la condition énoncée plus haut revient donc à admettre que le chemin f, variant à partir de $d_{(1),j}$, doit franchir tous les points $\xi^{(1)}_{j+1}$, $\xi^{(2)}_{j+1}$, ... avant de prendre la position $d_{(1),j+1}$, revient donc, en d'autres termes, à admettre que la ligne d'' s'éloigne indéfiniment entre les chemins $d_{(1),j}$ et $d_{(1),j+1}$. Mais cela ne se peut pas, pour la raison que nous avons indiquée en parlant des langues finies. Donc le nombre k existe.

Nous conclurons de là que lorsque Y'' tourne sur Δ à partir de $\theta_{1,j}$, comme il a été dit, *toutes les permutations élémentaires qui se trouvent opérées avant la permutation $\eta_{1,j+1}$ sont en nombre fini et sont des permutations-impasses*. On pourra, comme nous l'avons fait plus haut, analyser ce résultat de plus près en prenant comme ligne F une ligne brisée ainsi définie; pour f coïncidant avec $d_{(1),j}$ ou $d_{(1),j+1}$, cette ligne n'aura que deux côtés (confondus suivant la coupure $\eta_{1,j}$ ou la coupure $\eta_{1,j+1}$); lorsque f variera entre $d_{(1),j}$ et $d_{(1),j+1}$, F pourra acquérir des côtés supplémentaires (en nombre fini) qu'elle devra perdre ensuite l'un après l'autre.

Considérons, dans ces conditions, la suite des permutations élémentaires que nous nous trouvons opérer, lorsque nous mouvons Y'' sur Δ (*dans le sens négatif*). Ces permutations sont de deux sortes : celles que nous n'opérons qu'une fois, celles que nous opérons deux fois (les permutations-impasses). Nous affecterons les premières des indices $(3, j+1)$, $(3, j+2)$, ... *dans l'ordre où nous les rencontrons*, et les secondes des indices $(4, j+1)$, $(4, j+2)$, ... La proposition que nous venons d'établir entraîne alors cette conséquence que *les permutations* (¹) *appelées $\eta_{3,j+1}$, $\eta_{3,j+2}$, ... sont les mêmes que les permutations appelées $\eta_{1,j+1}$, $\eta_{1,j+2}$, ...*

Quelles conclusions tirer de cette analyse?

(¹) Il est certain que pour opérer la suite des permutations ..., $\eta_{1,j-1}$, $\eta_{1,j}$, $\eta_{1,j+1}$, ...; ou la suite des permutations ..., $\eta_{3,j-1}$, $\eta_{3,j}$, ..., on devra décrire sur Δ une infinité de

Nous remarquons d'abord qu'il résulte de la proposition qu'*on peut prendre comme contour* Δ (*contour sur lequel nous avons fait tourner* Y' *et* Y'') *un cercle quelconque de rayon arbitrairement grand.*

Faisons maintenant tendre le cercle Δ vers l'infini. Alors les chemins que nous avons appelés $d_{(1),j}$ deviennent *des chemins infinis* (*ne se coupant pas*) *et se déversant, d'un côté dans la langue* $\mathfrak{L}_1$, *de l'autre dans la langue* $\mathfrak{L}_2$. *De plus,* $d_{(1),j-1}$ *et* $d_{(1),j+1}$ *sont situés de part et d'autre de* $d_{(1),j}$. *Les chemins* $d_{(1),j}$ *jouent alors exactement le même rôle que les chemins* L_j *qui, au paragraphe VII, nous ont servi à décomposer le plan des* x *en régions* R_j *où la fonction entière ne prend qu'une fois une valeur donnée* (*on comparera de préférence au cas présent la fonction* z *du paragraphe VII pour laquelle la quantité appelée* λ *est réelle négative irrationnelle*). D'ailleurs, les points critiques $\eta_{1,j}$ ne tendent vers aucun point-limite transcendant. Ils peuvent converger vers tous les points d'une courbe fermée, comme il arrive pour la fonction du paragraphe VII à laquelle nous venons de renvoyer; ils peuvent aussi converger vers *plusieurs points discrets,* comme il arrive pour la fonction arc sin x.

Notons enfin cette proposition : *Tout chemin qui, dans le plan des* x, *traverse un nombre arbitrairement grand de chemins* $d_{(1),j}$ *opère un nombre arbitrairement grand de permutations* (comparer la fin du paragraphe X).

XII. — Propriétés des langues.

Après avoir défini avec précision les *langues* d'une fonction entière Y(x), on peut se poser, au sujet de ces langues, un grand nombre de questions.

Combien une même fonction entière peut-elle présenter de langues? A cette question essentielle, le théorème de M. Denjoy ([1]) apporte une réponse. Le nombre des langues est fini et admet une limite supérieure fonction du genre de la fonction.

---

tours. En effet, s'il en était autrement, il existerait sûrement à l'intérieur de Δ un point η au voisinage duquel s'opéreraient une infinité de permutations consécutives. Ce point η devrait donc donner naissance à une langue finie qui ne pourrait être que $\mathfrak{L}_1$ ou $\mathfrak{L}_2$.

([1]) *Loc. cit.* (*Comptes rendus,* juillet 1907).

quelle nature sont les chemins qui s'éloignent vers l'infini à l'inur d'une langue? Comment sont disposées, en particulier, les ues des fonctions, si remarquables, récemment découvertes par Iittag-Leffler, fonctions qui tendent vers zéro dans toutes les :tions?

ommment se présentent, du point de vue de la théorie des langues, héorèmes de M. Phragmén (¹)?

besoin se fera particulièrement sentir de rattacher la théorie des ues à la théorie du *module maximum* d'une fonction entière (pour nodule donné de la variable).

onsidérons un chemin qui s'éloigne indéfiniment dans le plan x et sur lequel le module $|Y|$ reste comparable (¹) au module maxi- $M(r)$ de $Y(x)$ pour $x = r$ [c'est-à-dire à la plus grande valeur par $|Y(x)|$ pour $|x = r|$]. Tout chemin x jouissant de cette proté s'éloigne évidemment dans une langue infinie de la fonction $Y(x)$. la réciproque n'est pas vraie : car, si $\mathcal{L}$ est une langue finie dans elle $Y(x)$ tend vers o, $\mathcal{L}$ est, pour la fonction $Y(x) + x$, une ue dans laquelle cette fonction augmente indéfiniment, à la façon polynome du premier degré. En revanche, il est probable que l'on proposition suivante : *De même que, de deux langues contiguës, e est nécessairement infinie, de même, de deux langues contiguës conques, l'une au moins est une langue dans laquelle* $|Y|$ *croît me* $M(r)$.

n constatera, d'autre part, que dans toute langue finie dans relle Y tend vers o, le module $|Y|$ décroît comme l'inverse du mo- maximum d'une fonction entière [croissant moins vite ou aussi que $M(r)$, ce qui confirme la formule de M. Borel : *L'inverse du imum d'une fonction entière est, au plus, du même ordre de gran- que son maximum*].

n même temps que l'on étudiera la croissance (ou la décroissance) Y sur les chemins qui s'éloignent vers l'infini dans une langue $\mathcal{L}$,

(¹) Nous entendons dire par là que, à partir d'une certaine valeur de r, le rap- $\frac{|Y|}{M(r)}$ reste compris entre deux nombres fixes, ou, plus généralement, qu'on a $< \frac{|Y|}{M(r)} < M^{\varepsilon}$.

on examinera la croissance (ou la décroissance de la dérivée Y′) [1], et l'on comparera les modules $|Y|$ et $|Y'|$. On découvrira sans doute alors une loi de croissance de la dérivée logarithmique $\frac{Y'}{Y}$, loi précisant les résultats que j'ai obtenus à ce sujet il y a quelques années [2].

Pour l'instant, je me contenterai de faire quelques remarques sur les langues respectives d'une fonction entière $Y(x)$ et de sa dérivée. Je vais montrer qu'*une langue finie de* Y *est aussi une langue finie de* Y′ *et une langue où* Y′ *tend vers zéro*.

Soit η un point singulier transcendant de la fonction $x(Y)$ donnant naissance à une langue $\mathcal{L}_1$. Je dis d'abord que *tout chemin s'éloignant indéfiniment dans l'une ou l'autre des languettes d'indétermination qui flanquent* $\mathcal{L}_1$ *est situé dans une languette d'indétermination de* Y′.

Remarquons que le point η, point transcendant pour $x(Y)$, est également transcendant et transcendant de la même manière pour la fonction $Y'(Y)$. En effet, si η est directement critique, il l'est pour les deux fonctions, et, d'autre part, tout point critique algébrique (voisin de η) de la fonction $x(Y)$ est aussi point critique algébrique de $Y'(Y)$, puisque les deux dérivées [3]

$$\frac{dy}{dY} = \frac{1}{Y'}, \qquad \frac{dY'}{dY} = \frac{Y''}{Y'}$$

sont infinies en même temps. Considérons alors (dans le plan des Y) le petit cercle δ de centre η sur lequel nous avons déjà maintes fois raisonné, et mouvons Y le long de ce cercle (dans un sens convenable) de manière à engendrer une infinité de déterminations différentes de $x(Y)$, ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe IX. Lorsque nous faisons ainsi tourner Y, nous engendrons une infinité de déterminations de Y′; Y′ décrit par suite une ligne indéfinie (non fermée) [4] τ.

---

[1] On notera que Y′, représentant maintenant $\frac{dY}{dx}$, n'a pas la même signification qu'au paragraphe X.

[2] *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XXVIII).

[3] Nous continuons à supposer que les points critiques sont simples. A ce cas on ramènera celui où plusieurs points critiques sont confondus.

[4] Le cas où les spires successives de la ligne τ se recouvriraient elles-mêmes (ainsi

Je dis qu'il n'est pas possible que la ligne τ converge vers une valeur déterminée η (1). En effet, la fonction $Y'(Y)$ suivie le long de δ ne cesse pas d'être algébroïde; elle ne peut donc tendre vers une valeur déterminée η, le long d'un chemin infini, à moins que toutes les dérivées $\frac{dY'}{dY}, \frac{d^2Y'}{dY^2}, \cdots$ ne tendent également vers zéro. Mais alors toutes les dérivées $Y', Y'', Y''', \ldots$ devraient tendre vers zéro le long des chemins d' (*voir* § X) que décrit x quand Y parcourt δ; or cela exigerait que Y tendît vers un point singulier transcendant de $x(Y)$, ce qui n'est pas le cas. On en conclut que toute ligne frontière, d', de la langue ξ_1 est ligne frontière d'une langue de Y'.

Réciproquement, soit η_1 un point singulier transcendant de $x(Y')$. On voit que η_1 sera également point transcendant et de la même manière pour la fonction $Y(Y')$ $\left[\text{les deux dérivées } \frac{dx}{dY'} = \frac{1}{Y''} \text{ et } \frac{dY}{dY'} = \frac{Y'}{Y''}\right.$ $\left.\text{sont infinies en même temps}\right]$. Le raisonnement que nous venons d'employer prouvera alors que toute ligne frontière d'une langue de Y' est nécessairement extérieure à la langue ξ_1.

De là résulte immédiatement que *la langue ξ_1 est une langue de la fonction $Y(x)$. D'ailleurs Y' tend vers zéro dans cette langue* : car, si Y' tendait, dans ξ_1, vers une limite finie ou vers l'infini, Y ne saurait tendre vers η. Ajoutons que ξ_1 sera pour $Y(x)$ et $Y'(x)$ une langue du même type.

Les remarques sur lesquelles nous venons de nous fonder servent pareillement à établir qu'*une langue infinie dans laquelle $\frac{|Y|}{|x^m|}$ augmente indéfiniment quelque grand que soit m est une langue infinie pour les dérivées successives* $Y', Y'', \ldots$.

Les mêmes remarques permettraient d'ailleurs d'aller beaucoup plus loin dans l'étude comparative des modules $|Y|$ et $|Y'|$.

Appelons en effet α un nombre *rationnel* positif arbitrairement petit,

---

qu'il arrive pour $Y = \sin x$, $Y' = \cos x$) est évidemment un cas très particulier qu'on peut écarter.

(1) Cette valeur, en tout cas, ne pourrait être infinie; car, si Y' tendait vers l'infini, il devrait en être de même de Y.

et considérons les fonctions $(Y-\eta)^{\pm\alpha}$, $Y^{\pm\alpha}$ qui sont, par rapport à x, des fonctions n'ayant qu'un nombre fini de branches.

Dans la langue $\mathfrak{L}_1$, où Y tend vers η, la fonction $(Y-\eta)^\alpha$ tend vers zéro, et zéro est, pour l'inverse de cette fonction, point singulier transcendant. On vérifiera alors (en raisonnant comme tout à l'heure) que, *sur les chemins x qui s'éloignent vers l'infini dans la langue $\mathfrak{L}_1$, la dérivée $\frac{\alpha Y'}{(Y-\eta)^{1-\alpha}}$ de $(Y-\eta)^\alpha$ tend vers zéro. Cela, quelque petit que soit le nombre rationnel α. Pareillement la dérivée $\frac{-\alpha Y'}{(Y-\eta)^{1+\alpha}}$ de $(Y-\eta)^{-\alpha}$ augmente indéfiniment sur les chemins considérés.*

Soit, d'autre part, $\mathfrak{L}_2$ une langue infinie où $Y(x)$ croît plus vite qu'une puissance quelconque de x; dans cette langue $Y^{-\alpha}$ tend vers zéro et *il en est par conséquent de même de la dérivée $\frac{-\alpha Y'}{Y^{1+\alpha}}$ de $Y^{-\alpha}$; pareillement la dérivée $\frac{\alpha Y'}{Y^{1-\alpha}}$ augmente indéfiniment* (¹).

On voit, par ces énoncés, combien les propriétés des langues doivent être simples et régulières. Si l'on se place à l'intérieur d'une langue, on voit disparaître la plupart des difficultés qui rendent si ardue l'étude de la croissance des fonctions entières. Il est vrai qu'en général on ne sera pas renseigné sur la forme des langues. Mais c'est que, précisément, la forme des langues est l'un des caractères qui permettent d'établir les distinctions entre les divers types de fonctions entières. [L'étude de la forme des langues se rattacherait sans doute aux récentes recherches de M. Blumenthal (²), dont j'ai connaissance au moment où j'achève ce paragraphe.]

XIII. — Propriétés des languettes.

Une languette d'indétermination est infiniment mince par rapport aux deux langues qui l'avoisinent.

(¹) L'étude des expressions $\frac{Y'}{Y(\log Y)^{1+\alpha}}$, $\frac{Y'}{Y\log Y(\log\log Y)^{1+\alpha}}$, ..., conduirait vraisemblablement à des propositions analogues.

(²) *Bull. de la Soc. mathém. de France*, 1907, p. 213 et suiv.

Soit, par exemple, $\mathfrak{L}_1$ une langue finie où Y tende vers o, $\mathfrak{L}_2$ une langue infinie contiguë à $\mathfrak{L}_1$, et $\mathfrak{L}'$ la languette qui sépare $\mathfrak{L}_2$ de $\mathfrak{L}$. Voici ce que je vais démontrer.

Considérons un chemin d, qui s'éloigne vers l'infini dans la langue $\mathfrak{L}_1$, et appelons ξ_1 un point quelconque de ce chemin. Quelque petit que soit ε, on pourra toujours prendre ξ_1 assez éloigné sur d pour que l'on ait

$$|Y(\xi_1)| < \varepsilon.$$

Désignons, d'autre part, par M un nombre donné arbitrairement grand. Puis appelons ξ'_1 le point le plus rapproché de ξ_1 où l'on ait $|Y| > M$. Je dis que l'*on peut prendre* ξ_1 *assez éloigné sur d pour qu'un certain cercle de centre* ξ_1 *et de rayon* $(1+\alpha)|\xi'_1 - \xi_1|$ *contienne des points où* $|Y| > M^2$, α ÉTANT UN NOMBRE ARBITRAIREMENT PETIT AVEC $\frac{1}{M}$.

Pour établir cette proposition, nous nous appuierons sur la remarque suivante [1] :

Y étant une fonction holomorphe autour du point ξ_1, si l'on a $|Y| < M^2$ pour $|x - \xi_1| < \rho$, on a

$$|a_n(x-\xi_1)^n| + |a_{n+1}(x-\xi_1)^{n+1}| \ldots < \lambda^{\frac{2}{n}} M^2,$$

pour $|x - \xi_1| < \lambda\rho$, λ étant un nombre plus petit que 1, lequel peut être arbitrairement voisin de 1 si l'on a pris M assez grand.

Posons alors $\frac{1}{1+\alpha} = \lambda$, ce qui donne pour α une valeur qui est arbitrairement petite en même temps que $\frac{1}{M}$; puis déterminons n par la condition

$$\lambda^{\frac{n}{2}} < \frac{1}{2M}.$$

Prenons, d'autre part, le point ξ_1 assez éloigné sur d_1 pour que l'on ait

$$|a_0| + |a_1(\xi'_1 - \xi_1)| + \ldots + |a_{n-1}(\xi'_1 - \xi_1)^{n-1}| < \frac{M}{2},$$

[1] On déduit cette remarque de l'inégalité $|a_i| \leq \frac{M^2}{\rho^i}$.

ce qui est toujours possible, puisque, d'après le paragraphe précédent, toutes les dérivées Y', Y'', ... tendent vers zéro sur le chemin d_1.

Dans ces conditions, supposons que $|Y|$ n'atteigne pas la valeur M^2 dans le cercle de centre ξ_1 et de rayon $(1+\alpha)|\xi_1' - \xi_1|$: alors nous aurons l'inégalité

$$|Y(\xi_1')| < \sum |a_i(\xi_1' - \xi_1)^i| < M,$$

laquelle est contraire à nos hypothèses. La proposition énoncée est donc démontrée.

Considérons, d'autre part, la langue infinie $\mathfrak{L}_2$, contiguë à $\mathfrak{L}_1$, dans laquelle $|Y|$ augmente indéfiniment (plus vite qu'une puissance quelconque de $|x|$). Traçons dans $\mathfrak{L}_2$ un chemin d_2 qui s'éloigne indéfiniment, et appelons ξ_2 un point quelconque de ce chemin. Désignons, en outre, par ε un nombre donné arbitrairement petit, et appelons ξ_2' le point le plus rapproché de ξ_2 où l'on ait $|Y| \leqq \varepsilon$. Je dis qu'*on peut prendre* ξ_2 *assez éloigné sur* d_2 *pour qu'un cercle de centre* ξ_2 *et de rayon* $(1+\alpha)|\xi_2' - \xi_2|$ *contienne des points où* $|Y| < \varepsilon^2$, α *étant un nombre arbitrairement petit avec* ε.

Cette proposition se démontrera comme la précédente. D'ailleurs, en rapprochant les deux énoncés obtenus, on en tirera sans peine la conséquence suivante : Soient d' un chemin qui s'éloigne indéfiniment dans la languette $\mathfrak{L}'$, et ξ' un point de d'. Nous donnant des nombres arbitrairement petits ε et $\frac{1}{M}$, traçons (ce qui est toujours possible si ξ' est assez éloigné) deux cercles de centre ξ', l'un c_1 dans lequel

$$\varepsilon \leqq |Y| \leqq M,$$

l'autre c_2 dans lequel $|Y|$ prenne des valeurs inférieures à ε^2 et des valeurs supérieures à M^2. Alors, *lorsque le point* ξ' *s'éloigne indéfiniment sur* d', *le rapport du rayon de* c_1 *au rayon de* c_2 *tend vers zéro.*

Telle est la propriété des languettes qui justifie le diminutif dont nous nous servons pour les désigner.

D'autres problèmes se poseront à propos des languettes, dont les plus importants sont peut-être ceux qui ont trait à *l'étude des lignes tracées dans une languette.*

Reportons-nous au paragraphe X. $\mathfrak{L}_1$ est une langue finie où Y tend vers η; ζ'_0 et ζ'_1 sont les languettes contiguës à ζ_1; ζ_2 est une langue infinie, séparée de ζ_1 par ζ'_1, et flanquée de l'autre côté d'une languette ζ'_2; δ est un petit cercle de centre $Y = \eta$; d' est la ligne infinie parcourue par x lorsque Y tourne sur δ. Ainsi que nous l'avons fait observer au paragraphe IX, la ligne d' a deux branches infinies; nous avons étudié, au paragraphe X, celle de ces deux branches (soit $d'^{(1)}$) qui se déverse dans ζ'_1; la seconde branche de d' (soit $d'^{(0)}$) se déverse dans ζ'_0. D'ailleurs, on obtient $d'^{(1)}$ en mouvant Y sur δ dans le sens positif [1], et $d'^{(0)}$ en mouvant Y dans le sens négatif. Dans l'un et l'autre cas, on opère une série unilinéaire de permutations (soit directement autour de η, soit autour d'une suite unilinéaire de points critiques algébriques), série dans laquelle peuvent se trouver intercalés des groupes de permutations-impasses.

Cela posé, appelons τ un cercle de centre η qui coïncide d'abord avec δ, puis grandit d'une manière continue. Au cercle τ correspond, dans le plan des x, un chemin infini t qui se déplace à partir de la position d'. Ce chemin t varie d'abord avec continuité [2]; mais il effectue des sauts brusques et se décompose en plusieurs chemins différents, lorsque des points critiques η'_j de la branche x suivie le long de τ viennent à s'introduire entre les deux contours δ et τ. Le paragraphe X nous a appris, d'ailleurs, que, lorsque le module $|x|$ devient assez grand, la branche x suivie sur δ et τ ne peut présenter, entre δ et τ, que des points critiques algébriques opérant des permutations-impasses : il en résulte que, *quelque grand que soit le rayon τ_1, on peut tracer (dans le plan des x) un cercle C assez grand pour que, lorsque τ varie entre δ et τ_1, le chemin $t^{(1)}$, qui varie à partir de $d'^{(1)}$, reste unique hors du cercle C et s'y déplace avec continuité.*

Cela posé, puisque l'ensemble des points critiques de $x(Y)$ est dénombrable, on peut toujours se donner un ensemble (non dénombrable) de nombres positifs croissants $\rho_1, \ldots, \rho_i, \ldots$ tels que les cercles τ_i de rayon ρ_i ne passent par aucun point critique de $x(Y)$. Il nous sera commode de ne considérer que les positions τ_i du cercle τ.

---

(1) En vertu des hypothèses faites aux paragraphes VIII et IX.

(2) Nous supposons, comme nous l'avons déjà fait plus haut, qu'il n'y a sur δ aucun point critique de $x(Y)$.

A chaque cercle τ_i plusieurs chemins t peuvent correspondre; mais un seul de ces chemins aura (dans $\mathcal{L}'_1$) une branche infinie $t^{(1)}$ tendant vers $d'^{(1)}$ lorsque τ_i tend vers δ; c'est ce chemin particulier que nous désignons sous le nom de *chemin* t_i.

Faisons maintenant croître ρ_i. Lorsque τ_i est très voisin de δ, il est certain que le chemin t_i qui se déverse d'un côté dans la languette $\mathcal{L}'_1$ se déverse de l'autre côté dans la languette $\mathcal{L}'_0$ (t_i a une branche infinie $t_i^{(1)}$ qui se déplace avec continuité à partir de $d'^{(1)}$ lorsque τ_i varie à partir de δ). D'autre part, lorsque τ_i sera très grand et se rapprochera du cercle Δ défini au paragraphe X, la ligne t_i, franchissant les lignes frontières de la langue $\mathcal{L}_2$, devra se déverser dans les deux languettes $\mathcal{L}'_1$ et $\mathcal{L}'_2$ qui flanquent la langue $\mathcal{L}_2$.

Ainsi, nous distinguerons deux ensembles de cercles τ_i : 1° cercles $\tau_{i'}$ donnant naissance à des chemins $t_{i'}$ se déversant dans $\mathcal{L}'_1$ et $\mathcal{L}'_0$; 2° cercles $\tau_{i''}$ donnant naissance à des chemins $t_{i''}$ se déversant dans $\mathcal{L}'_1$ et $\mathcal{L}'_2$. Lorsque x parcourt, dans un sens ou dans l'autre, un chemin $t_{i'}$, Y opère (nous l'avons vu) une série unilinéaire de permutations autour de η ou de points critiques algébriques convergeant vers η. Au contraire, lorsque x parcourt un chemin $t_{i''}$, en se dirigeant vers $\mathcal{L}'_2$, Y se trouve opérer une série de permutations autour d'un point critique transcendant de $x(\mathrm{Y})$ autre que le point η, ou autour d'un ensemble de points critiques algébriques ne convergeant pas vers η.

Les chemins $t_{i'}$, $t_{i''}$ ne peuvent évidemment pas se rencontrer, puisque $|\mathrm{Y}|$ a, sur ces chemins, des valeurs différentes. D'ailleurs, si l'on veut se rendre de la langue $\mathcal{L}_1$ à la langue $\mathcal{L}_2$, on doit traverser tous les chemins $t_{i'}$ avant de traverser les chemins $t_{i''}$. On en conclura que les lignes $t_{i'}$ tendent (lorsque ρ_i va en croissant) vers une ligne limite qui sépare, dans $\mathcal{L}'_1$, le groupe des branches infinies $t_{i'}^{(1)}$ du groupe des branches infinies $t_{i''}^{(1)}$. Cette ligne limite peut être comparée à une ligne de partage des eaux, séparant les chemins t_i qui vont se déverser dans $\mathcal{L}'_0$ des chemins t_i qui vont se déverser dans $\mathcal{L}'_2$: nous l'appellerons *ligne de partage*, et nous désignerons par *cercle critique* le cercle τ_i correspondant.

De même que les branches $t_{i'}^{(1)}$, les branches $t_{i''}^{(1)}$ occupent, dans la languette $\mathcal{L}'_1$, un domaine limité par une ligne de partage. D'ailleurs, les lignes de partage relatives aux $t_{i'}^{(1)}$ et aux $t_{i''}^{(1)}$ peuvent coïncider ou être distinctes.

Ainsi, nous serons amenés, si nous entreprenons une étude systématique des fonctions entières $Y(x)$, à sillonner le plan x d'une infinité de lignes infinies (ne se coupant pas) réparties entre diverses familles. Nous avons défini plus haut une famille de lignes $d_{(1),j}$ qui sont à cheval sur la languette $\mathcal{L}'_1$ et se déversent dans les langues $\mathcal{L}'_1$ et $\mathcal{L}'_2$. Nous définissons maintenant une famille de lignes $t_{i'}$ qui sont à cheval sur la langue $\mathcal{L}_1$ et se déversent dans les languettes $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}'_1$. Les deux familles de lignes $d_{(1),j}$ et $t_{i'}$ constituant, en quelque manière, un réseau de lignes conjuguées, et en les étudiant à ce point de vue, on se ferait une idée assez nette de la structure des fonctions entières. D'ailleurs, on devra répéter sur toutes les langues et languettes des fonctions entières les opérations faites sur $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}'_0$ et $\mathcal{L}'_1$.

XIV. — Applications.

Nous n'avons étudié jusqu'ici que des langues ou languettes isolées. Nous devrions maintenant considérer simultanément l'ensemble des langues et languettes d'une même fonction, et étendre leur agencement. Jetons un coup d'œil sur ce nouveau problème.

Observons d'abord qu'il sera toujours permis de se limiter aux *fonctions entières qui tendent vers zéro dans toutes leurs langues finies*. Si cette condition n'est pas satisfaite pour la fonction $Y(x)$, elle le sera toujours, en effet, pour la dérivée $\frac{dY}{dx}$.

Cela posé, soit d'abord $Y(x)$ une fonction entière présentant au plus quatre langues, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, respectivement séparées par les languettes $\mathcal{L}'_0$, $\mathcal{L}'_1$, $\mathcal{L}'_2$, $\mathcal{L}'_3$, et soient, par exemple, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_3$ deux langues nulles de $Y(x)$.

Considérons dans la languette $\mathcal{L}'_1$ les branches infinies $t_{i'}^{(1)}$, $t_{i''}^{(1)}$ définies au paragraphe précédent. Les $t_{i'}^{(1)}$ admettent (nous l'avons vu) dans $\mathcal{L}'_1$ une ligne de partage T_1. Soit ρ_1 le rayon du *cercle critique* correspondant (cercle de centre $Y = 0$). La ligne de partage T_1, prolongée d'un côté jusqu'à l'infini, aboutit nécessairement, de l'autre côté, à un point X tel que la branche de $x(Y)$ égale à X au point

$Y = Y(X)$ admette ce point comme point critique algébrique. Dès lors, si Y, à partir du point $Y = Y(X)$, décrit dans l'un ou l'autre sens le cercle critique de rayon ρ_1, x partant de X décrit quatre branches infinies, dont l'une est T_1, les trois autres étant T_2, T_3, T_0.

De là, on tirera immédiatement les conséquences suivantes : *les lignes* T_2, T_3, T_0 *s'éloignent vers l'infini à l'intérieur des languettes* $\mathcal{L}'_2$, $\mathcal{L}'_3$ *et* $\mathcal{L}'_0$ *respectivement*. Soit ρ_i un nombre arbitrairement rapproché de ρ_1, mais supérieur. Lorsque le cercle τ_i défini au paragraphe précédent a pour rayon ρ_i, le chemin t_i décrit par x a deux branches infinies respectivement voisines de T_1 et T_2 ; ce chemin est donc l'un des chemins $t_{i''}$ qui se déversent dans $\mathcal{L}'_1$ et $\mathcal{L}'_2$. Par conséquent, *les* $t_{i'}^{(1)}$ *et les* $t_{i''}^{(1)}$ *ont, dans* $\mathcal{L}'_1$, *la même ligne de partage* T_1. Pareillement, *les deux familles de branches* t_i *respectivement situées dans l'une quelconque des languettes* $\mathcal{L}'_2$, $\mathcal{L}'_3$, $\mathcal{L}'_0$ *ont, dans cette languette, une même ligne de partage qui est respectivement* T_2, T_3 *ou* T_0. En résumé, *la fonction entière* $Y(x)$ *a quatre lignes de partage seulement*, T_1, T_2, T_3, T_4, *lesquelles sont concourantes. Les cercles critiques correspondant à ces quatre lignes de partage coïncident. Les quatre lignes concourantes* T_0, T_1, T_2, T_3 (*sur lesquelles* Y *a un module constant, le rayon du cercle critique*) *séparent les unes des autres les quatre langues* $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$.

Signalons un autre cas remarquable : celui où la fonction entière a six, huit, dix, ... langues $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$, $\mathcal{L}_5$, ... et présente un même nombre de *lignes de partage toutes concourantes*. Alors, il n'y a encore, dans chaque languette, qu'une *ligne de partage*, ligne séparant l'une de l'autre les deux langues qui flanquent la languette.

Ainsi s'offrent à nous de nombreux sujets d'étude que nous ne poursuivrons pas plus longtemps. Notons seulement une conséquence, encore, de l'existence des lignes de partage : c'est qu'une fonction entière ne saurait présenter un nombre impair de langues.