ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. CAHEN

Sur une fonction continue sans dérivée

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 199-219
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__199_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE

FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE,

PAR M. E. CAHEN.

La fonction $X(x)$.

J'ai donné dans l'*Enseignement mathématique*, t. VIII, 1906, p. 361, un exemple de fonction continue n'ayant pas de dérivée pour une infinité de valeurs de la variable. N'ayant à ce moment pas d'autre but que de donner un tel exemple, je n'ai pas étudié plus avant les propriétés de la fonction; en particulier je n'ai pas recherché si elle avait ou non une dérivée pour les autres valeurs de x. C'est ce que je me propose de faire ici.

Parmi les propriétés de cette fonction, que j'appelle $X(x)$, je trouve les suivantes :

Pour toute valeur de x, appartenant à un certain ensemble infini dénombrable (E), dont les éléments sont certaines fonctions rationnelles d'un paramètre a, la fonction prend une valeur qui est la même fonction rationnelle d'un paramètre b.

On peut donc calculer ces valeurs sous forme finie. La fonction X dépend des deux paramètres a, b; il y a donc une double infinité de ces fonctions; mais on ramène leur étude à celle d'une simple infinité de fonctions ne contenant qu'un paramètre.

La fonction X n'a de dérivée pour aucune valeur de x, sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles.

Cette fonction satisfait à une infinité de relations fonctionnelles, qui permettent de calculer sa valeur pour toute valeur de x, quand on la connaît pour les valeurs de x comprises dans certains intervalles, aussi petits qu'on le veut d'ailleurs.

On peut aussi calculer, sous forme finie, l'expression $\int_{x_0}^{x_1} X(x)\,dx$, lorsque x_0 et x_1 sont deux nombres de l'ensemble (E).

Enfin ces recherches se rattachent à un mode particulier d'approximation des nombres, dont la numération binaire est un cas particulier, et qui sera peut-être susceptible d'applications arithmétiques.

1. *Définitions.* — Soit a un nombre réel, positif, plus petit que 1. Entre les nombres 0 et 1 intercalons le nombre a, qui divise cet intervalle dans le rapport $\frac{a}{1-a}$. Nous formons ainsi deux intervalles $0, a$ et $a, 1$. Divisons chacun de ces deux intervalles encore dans le même rapport $\frac{a}{1-a}$; nous trouvons ainsi les nombres a^2 dans le premier intervalle, et $a + a(1-a)$ dans le second.

Puis nous divisons dans le même rapport chacun des quatre intervalles formés, et ainsi de suite.

2. Je dis que les *intervalles ainsi formés tendent tous vers zéro.*

En effet, les deux intervalles primitifs sont égaux respectivement à a et $1-a$.

Le plus grand des deux est le premier ou le second suivant que a est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}$.

Le plus grand des quatre intervalles formés ensuite est a^2 ou $(1-a)^2$, etc. Le plus grand des intervalles formés au bout de n opérations est a^n ou $(1-a)^n$ et par conséquent tend vers zéro. (On appelle *opération* la division en deux parties de tous les intervalles formés jusque-là.)

Le raisonnement précédent suppose $a \neq \frac{1}{2}$; mais, si $a = \frac{1}{2}$, les intervalles formés au bout de n opérations sont tous égaux à $\frac{1}{2^n}$, donc encore tendent vers zéro.

On intercale ainsi entre 0 et 1 un nombre indéfini de valeurs indéfiniment rapprochées, formant un ensemble dénombrable (E).

3. *On peut ainsi s'approcher indéfiniment de tout nombre x compris entre* 0 *et* 1.

En effet, si ce nombre fait partie de l'ensemble (E), on l'atteint après un certain nombre d'opérations.

Si x ne fait pas partie de l'ensemble E, après chaque nouvelle opération, il y a un intervalle de plus en plus petit contenant x; les deux extrémités de cet intervalle tendent vers x.

Supposons qu'après la première opération on choisisse un des deux intervalles formés; après la seconde opération cet intervalle sera lui-même divisé en deux; supposons encore qu'on en choisisse un, et ainsi de suite.

A un choix déterminé d'intervalles successifs correspond un nombre x déterminé.

La réciproque est vraie si le nombre x ne fait pas partie de l'ensemble (E).

Mais, si x fait partie de l'ensemble (E), le choix des intervalles est déterminé jusqu'à ce qu'on soit amené à deux intervalles consécutifs dont x est l'extrémité commune. On peut alors choisir *arbitrairement* l'un de ces deux intervalles; ce choix fait, le choix des intervalles suivants est déterminé. Nous conviendrons, sauf avis contraire, qu'au moment douteux on choisisse l'*intervalle supérieur*.

4. *On peut représenter le choix d'intervalles de la façon suivante :* Après la première opération, on a formé deux intervalles 0, a et a, 1. Si x est dans le premier, écrivons un chiffre 0; si x est dans le second, écrivons un chiffre 1.

Puis l'intervalle dans lequel est x se trouve de nouveau divisé en deux autres; si x est dans le premier, écrivons un chiffre 0; si x est dans le second, écrivons un chiffre 1. Et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite indéfinie, par exemple

$$0101\,1000101\ldots, \tag{1}$$

qui représente sans ambiguïté le choix d'intervalles, et par conséquent :

A une suite (1) *déterminée correspond une valeur de x déterminée.*

La réciproque est vraie, même si x fait partie de l'ensemble (E), à cause de la convention dont on a parlé plus haut. Dans ce cas tous les chiffres à partir d'un certain rang sont des zéros.

Si l'on n'avait pas fait la convention susdite, on pourrait remplacer le dernier 1 par un 0, et tous les zéros suivants par des 1.

Par exemple,

$$01010000\ldots$$

représente le même nombre que

$$01001111\ldots,$$

à savoir

$$a^2 + a^3(1-a).$$

5. *Développement de x en série.* — Nous obtiendrons ce développement en cherchant les valeurs des extrémités inférieures des intervalles dans lesquels se trouve x défini par la suite (1).

Le premier de ces intervalles a pour longueur a et son extrémité inférieure est 0.

Le second a pour longueur $a(1-a)$ et son extrémité inférieure est la même que la précédente.

En général, quand dans la suite (1) il y a un chiffre 0, l'intervalle correspondant est égal au précédent multiplié par a et son extrémité inférieure est la même.

Quand dans la suite (1) il y a un chiffre 1, l'intervalle correspondant est égal au précédent multiplié par $1-a$ et son extrémité inférieure est égale à la précédente plus l'ancien intervalle multiplié par a. On obtient ainsi

$$(2) \qquad \begin{aligned} x = 0 + a^2 + 0 + a^3(1-a) + a^3(1-a)^2 \\ + 0 + 0 + 0 + a^6(1-a)^3 + 0 + a^7(1-a)^4 + \ldots \end{aligned}$$

On peut énoncer la règle suivante :

A chaque chiffre ε de la suite (1) ($\varepsilon = 0$ *ou* 1) *correspond dans la* *série* (2) *le terme*

$$\varepsilon\, a^{p+1}(1-a)^q,$$

p étant le nombre de chiffres 0 *qui précèdent le terme, q étant le nombre de chiffres* 1 *qui précèdent le terme.*

Si x appartient à l'ensemble (E) la série (2) est limitée; par exemple,

$$x = 0 + a^2 + 0 + a^3(1-a). \tag{3}$$

Mais on peut lui donner une forme illimitée, en écrivant

$$x = 0 + a^2 + 0 + 0 + a^4(1-a) + a^4(1-a)^2 + \ldots.$$

D'une convention antérieure il résulte que nous représenterons x par (3).

En résumé : *a étant un nombre compris entre* 0 *et* 1, *tout nombre x compris entre* 0 *et* 1 *peut se mettre sous la forme*

$$x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n a^{p_n+1}(1-a)^{q_n}. \tag{4}$$

Les ε_n *sont toujours égaux à* 0 *ou à* 1, *et*

$$q_n = \sum_0^{n-1} \varepsilon_n, \tag{5}$$

$$p_n = n - q_n. \tag{6}$$

En général cette représentation n'est possible que d'une seule manière.

Il y a exception pour les nombres de l'ensemble (E). *Un tel nombre est représentable de deux façons. Dans l'un des modes de représentation les* ε *sont, à partir d'un certain rang, tous égaux à* 0; *dans l'autre ils sont tous égaux à* 1. *Réciproquement, quand les* ε *satisfont à l'une de ces conditions, x appartient à l'ensemble* E.

En général c'est la première représentation qu'on choisira.

On remarquera que, dans la série (4) *réduite à ses termes non nuls,* l'exposant q_n va en croissant d'une unité d'un terme à l'autre; quant à l'exposant p_n, il ne peut décroître.

6. *Étant données deux valeurs x et x', données chacune par une suite* (1), *trouver la plus grande.*

Supposons que les k premiers ε soient les mêmes pour les deux suites, mais que les $(k+1)^{\text{ièmes}}$ soient ε_k pour la première suite, ε'_k pour la seconde.

Soit, pour fixer les idées, $\varepsilon_k < \varepsilon'_k$, c'est-à-dire $\varepsilon_k = 0$, $\varepsilon'_k = 1$.

Je dis que $x < x'$, sauf une exception.

En effet, puisque $\varepsilon_k = 0$ et $\varepsilon'_k = 1$, tous les ε précédents étant les mêmes, c'est que x et x' ont été pris dans le même intervalle à chacune des k premières opérations, mais qu'à la $(k+1)^{\text{ième}}$, x a été pris dans l'intervalle inférieur et x' dans le supérieur. Donc $x < x'$.

Il y aurait exception et l'on aurait $x = x'$ si l'on avait $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k+2} = \ldots = 1$ et $\varepsilon'_{k+1} = \varepsilon'_{k+2} = \ldots = 0$.

On peut trouver une limite inférieure de $x' - x$. Soit $a_k^{p_k+1}(1-a)^{q_k}$ le $k^{\text{ième}}$ terme de x' (le premier qui n'est pas identique au terme de même rang dans x). Soit ε'_{k+l} le premier ε' après ε'_k qui est égal à 1 [$l = \infty$ si x appartient à (E)]. Soit ε_{k+h} le premier ε après ε_k qui est égal à zéro. On a

$$\begin{aligned} x' - x > {} & a^{p_k+1}(1-a)^{q_k} + a^{p_k+l}(1-a)^{q_k+1} \\ & - a^{p_k+2}(1-a)^{q_k} - a^{p_k+2}(1-a)^{q_k+1} - \ldots - a^{p_k+2}(1-a)^{q_k+h-1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$x' - x > a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+1}[a^{l-1} + (1-a)^{h-1}]. \tag{7}$$

On peut aussi donner une limite *supérieure* de $x' - x$, à savoir

$$\begin{aligned} x' - x < {} & a^{p_k+1}(1-a)^{q_k} + a^{p_k+l}(1-a)^{q_k+1} + a^{p_k+l}(1-a)^{q_k+2} + \ldots \\ & - a^{p_k+2}(1-a)^{q_k} - a^{p_k+2}(1-a)^{q_k+1} - \ldots - a^{p_k+2}(1-a)^{q_k+h-2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$x' - x < a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+1}[a^{l-2} + (1-a)^{h-2}]. \tag{8}$$

En particulier, les deux formules précédentes peuvent servir à trouver une limite supérieure et une inférieure de l'erreur commise, quand dans le développement (4) on s'arrête au terme

$$a^{p_k+1}(1-a)^{q_k}.$$

7. Corollaire. — *L'un des deux nombres x, x' étant fixe et l'autre variable, pour que le nombre fixe tende vers le nombre variable, il suffit que k croisse indéfiniment.*

En effet, si k croît indéfiniment, l'un au moins des deux nombres p_k, q_k croît indéfiniment; donc d'après la formule (8) $x'-x$ tend vers zéro, puisque le second membre contient au moins un facteur, soit a^{p_k+1}, soit $(1-a)^{q_k+1}$, qui tend vers zéro.

Cette condition que k croisse indéfiniment est-elle d'ailleurs nécessaire?

La réponse est *oui si le nombre fixe n'appartient pas à l'ensemble* (E), *ou s'il lui appartient, et que le nombre variable ne reste pas plus petit que lui. Mais si le nombre fixe appartient à l'ensemble* (E), *et que le nombre variable reste plus petit que lui, il tendra vers le nombre fixe, même si k ne croît pas indéfiniment, pourvu qu'alors h croisse indéfiniment.*

En effet, supposons d'abord que le nombre variable, appelons-le x', ne reste pas à partir d'un certain moment plus petit que le nombre fixe x. Pour les valeurs de x' plus grandes que x, on a

$$x'-x > a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+1}[a^{l-1}+(1-a)^{h-1}]$$

et *a fortiori*

$$x'-x > a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+h}.$$

Comme h est fixe, pour que $x'-x$ tende vers zéro il faut que l'un au moins des nombres p_k, q_k, et par suite leur somme k, croisse indéfiniment.

Supposons maintenant que le nombre variable reste plus petit, à partir d'un certain moment, que le nombre fixe. Pour appliquer toujours les mêmes notations, nous allons supposer maintenant que c'est x

qui est variable et x' qui est fixe. On a encore

$$x' - x > a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+1}[a^{l-1} + (1-a)^{h-1}].$$

Si x' n'appartient pas à l'ensemble (E), le nombre l n'est pas infini. Dans ce cas l'inégalité précédente donne

$$x' - x > a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+l},$$

et, le nombre l étant fixe, on voit comme plus haut qu'il faut que k croisse indéfiniment.

Mais, si x' appartient à l'ensemble (E), le nombre l est infini. Donc, dans ce cas, l'inégalité se réduit à

$$x' - x > a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+h}.$$

Donc $x' - x$ peut tendre vers zéro sans que k croisse indéfiniment, mais alors il faut que h croisse indéfiniment.

Remarque. — Lorsque $a = \frac{1}{2}$, la série (4) s'écrit

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

et la suite (1) n'est autre chose que le développement de x écrit dans la numération binaire.

Lorsque a est quelconque, notre procédé d'approximation des nombres peut donc être considéré comme une généralisation de celui que donne la numération binaire. A ce point il y aurait lieu d'étudier ses propriétés arithmétiques. Mais ce n'est pas ce que nous nous proposons ici.

8. *La fonction* $X_a^b(x)$. — Donnons-nous deux nombres a, b, tous les deux compris entre 0 et 1. Soit x une valeur comprise entre 0 et 1; à cette valeur correspond, *relativement au nombre* a, une suite (1). D'autre part, à cette suite (1) correspond, *relativement au nombre* b, une valeur y.

On voit donc que y est une fonction de x; c'est cette fonction que nous désignerons par $X_a^b(x)$.

Si l'on a

$$x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n a^{p_n+1}(1-a)^{q_n},$$

on a

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n b^{p_n+1}(1-b)^{q_n}.$$

Cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1.

9. *Premières propriétés de la fonction* $X_a^b(x)$. — On a

$$X_a^b(0) = 0, \qquad X_a^b(1) = 1,$$
$$X(a) = b, \qquad X(a^r) = b^r \qquad (r \text{ entier} > 0),$$
$$X_a^b[a(2-a)] = b(2-b).$$

Plus généralement, si la valeur de x appartient à l'ensemble (E) la valeur de y est le nombre correspondant dans l'ensemble (F), c'est-à-dire est formée avec b comme x est formée avec a.

La fonction $X_a^b(x)$ *est croissante.* — En effet, pour comparer deux valeurs de x, x et x', il suffit de comparer des suites de nombres ε correspondants. Or ces suites sont les mêmes pour y et y'. Donc de $x' > x$ il résulte $y' > y$.

10. *La fonction* $X_a^b(x)$ *est continue.* — En effet, soient une valeur fixe x et une valeur variable x' tendant vers x. Soient y et y' les valeurs correspondantes de $X_a^b(x)$. Nous avons vu (n° 7) que, x' tendant vers x, cela entraîne certaines conditions sur les nombres k et h, et que réciproquement quand ces conditions sont remplies x' tend vers x. Or, les h et les k étant les mêmes pour y et y', il en résulte que, si x' tend vers x, y' tend vers y.

11. *La fonction* $X_a^b(x)$ *n'a pas de dérivée.* — Pour le démontrer étudions la variation du rapport $\frac{y'-y}{x'-x}$ quand x' tend vers x.

Nous supposerons $a < b$ pour fixer les idées.

Soit

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a^{p_n+1}(1-a)^{q_n}.$$

Supposons d'abord que x' tende vers x par valeurs supérieures à x. On a

$$\begin{gathered} a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+h}[a^{l-1}+(1-a)^{h-1}] \\ < x'-x < a^{p_k+1}(1-a)^{q_k}[a^{l-2}(1-a)+(1-b)^{h-1}], \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} b^{p_k+1}(1-b)^{q_k+h}[b^{l-1}+(1-b)^{h-1}] \\ < y'-y < b^{p_k+1}(1-b)^{q_k}[b^{l-2}(1-b)+(1-b)^{h-1}]. \end{gathered}$$

Donc

$$\begin{gathered} \left(\frac{b}{a}\right)^{p_k}\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^{q_k}\frac{b}{a}\,\frac{(1-b)^h[b^{l-1}+(1-b)^{h-1}]}{a^{l-2}(1-a)+(1-a)^{h-1}} \\ < \frac{y'-y}{x'-x} < \left(\frac{b}{a}\right)^{p_k}\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^{q_k}\frac{b}{a}\,\frac{b^{l-2}(1-b)+(1-b)^{h-1}}{a^{l-1}+(1-a)^{h-1}}. \end{gathered}$$

Les facteurs

$$\frac{b}{a}\,\frac{(1-b)^h[b^{l-1}+(1-b)^{h-1}]}{a^{l-2}(1-a)+(1-a)^{h-1}}$$

et

$$\frac{b}{a}\,\frac{b^{l-2}(1-b)+(1-b)^{h-1}}{a^{l-1}+(1-a)^{h-1}}$$

sont compris entre des limites fixes, à savoir

$$\frac{b}{a}\,\frac{(1-b)^{2h-1}}{1+(1-a)^{h-1}} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a}\,\frac{(1-b)^h[1+(1-b)^{h-1}]}{(1-a)^{h-1}}$$

pour le premier,

$$\frac{b}{a}\,\frac{1-b+(1-b)^{h-1}}{1+(1-a)^{h-1}} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a}\,\frac{1-b+(1-b)^{h-1}}{(1-a)^{h-1}}$$

pour le second.

Si donc on s'assure que l'expression

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{p_k}\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^{q_k} \tag{9}$$

croît indéfiniment ou bien tend vers zéro, il en sera de même de

$$\frac{y'-y}{x'-x}.$$

Considérons le logarithme de cette expression, à savoir

$$p_k \log\left(\frac{b}{a}\right) + q_k \log\left(\frac{1-b}{1-a}\right).$$

Posons $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ qui est positif (on a supposé $b > a$) égal à A, et $\log\left(\frac{1-b}{1-a}\right)$ qui est négatif égal à $-$ A'; l'expression précédente s'écrit

$$A p_k - A' q_k. \tag{10}$$

Or la variation de cette expression, quand k croît indéfiniment, dépend de la façon dont varient p_k et q_k, c'est-à-dire de x.

Si x est tel que l'expression (10) tende vers $+\infty$, il en est de même de l'expression (9), et par suite $\frac{y'-y}{x'-x}$ croît indéfiniment.

Si au contraire x est tel que l'expression (10) tende vers $-\infty$, il en est de même de l'expression (9), et par suite $\frac{y'-y}{x'-x}$ tend vers zéro.

En dernier lieu, si x est tel que l'expression (10) reste finie, il faut des renseignements plus précis sur les nombres p_k pour étudier $\frac{y'-y}{x'-x}$.

Considérons le cas particulier où x appartient à l'ensemble (E). C'est le cas étudié dans l'article cité plus haut de l'*Enseignement mathématique*. Dans ce cas, à partir d'une certaine valeur de k, q_k est constant. Donc l'expression (10) tend vers $+\infty$; donc aussi $\frac{y'-y}{x'-x}$, ce qui est bien le résultat trouvé dans l'article susdit.

12. Soit maintenant x' tendant vers x par valeurs inférieures. Il faut subdiviser ce cas en deux, suivant que x appartient à l'ensemble (E) ou non.

Supposons d'abord qu'il n'y appartienne pas. J'appelle alors ε_{k+l} le premier ε après ε_k qui est égal à 1, et ε'_{k+h} le premier ε' après ε'_k qui est égal à zéro; c'est donc l qui est fixe et non infini, et h qui est variable. On a

$$a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+1}[a^{l-1}+(1-a)^{h-1}]$$
$$< x - x' < a^{p_k+1}(1-a)^{q_k}[a^{l-2}(1-a)+(1-a)^{h-1}]$$

et

$$b^{p_k+1}(1-b)^{q_k+1}[b^{l-1}+(1-b)^{h-1}]$$
$$< y - y' < b^{p_k+1}(1-b)^{q_k}[b^{l-2}(1-b)+(1-b)^{h-1}].$$

Donc

$$\frac{b^{p_k+1}(1-b)^{q_k+1}[b^{l-1}+(1-b)^{h-1}]}{a^{p_k+1}(1-a)^{q_k}[a^{l-2}(1-a)+(1-a)^{h-1}]}$$
$$< \frac{y-y'}{x-x'} < \frac{b^{p_k+1}(1-b)^{q_k}[b^{l-2}(1-b)+(1-b)^{h-1}]}{a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+1}[a^{l-1}+(1-a)^{h-1}]}$$

ou

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{p_k}\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^{q_k}\frac{b}{a}(1-b)\,\frac{b^{l-1}+(1-b)^{h-1}}{a^{l-2}(1-a)+(1-a)^{h-1}}$$
$$< \frac{y-y'}{x-x'} < \left(\frac{b}{a}\right)^{p_k}\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^{q_k}\frac{1}{a}\,\frac{b^{l-2}(1-b)+(1-b)^{h-1}}{a^{l-1}+(1-a)^{h-1}},$$

de sorte qu'on se trouve encore amené à étudier l'expression

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{p_k}\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^{q_k}$$

et qu'on trouve les mêmes résultats que lorsque x' tend vers x par valeurs supérieures.

13. Mais supposons maintenant que x appartienne à l'ensemble (E). Nous avons montré, dans l'article déjà cité de l'*Enseignement mathématique*, que dans ce cas $\frac{y'-y}{x'-x}$ tend vers zéro. C'est ce qu'on peut retrouver de la façon suivante.

Soient

$$x = \sum_{n=0}^{n=k} \varepsilon_n a^{p_n+1}(1-a)^{q_n} \qquad (\varepsilon_k = 1)$$

et

$$x' = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon'_n a^{p'_{n+1}}(1-a)^{q'_n}.$$

On aura à partir d'un certain moment

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0, \qquad \varepsilon'_1 = \varepsilon_1, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon'_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, \qquad \varepsilon'_k = 0,$$
$$\varepsilon'_{k+1} = \varepsilon'_{k+2} = \ldots = \varepsilon'_{k+h-1} = 1, \qquad \varepsilon'_{k+h} = 0,$$

et h croîtra indéfiniment. On a, d'après les formules (7) et (8), où il faut faire l infini,

$$a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+h} < x - x' < a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+h-1}.$$

De même

$$b^{p_k+1}(1-b)^{q_k+h} < y - y' < b^{p_k+1}(1-b)^{q_k+h-1}.$$

Donc

$$\frac{b^{p_k+1}(1-b)^{q_k+h}}{a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+h-1}} < \frac{y-y'}{x-x'} < \frac{b^{p_k+1}(1-b)^{q_k+h-1}}{a^{p_k+1}(1-a)^{q_k+h}}$$

ou

$$\frac{b^{p_k+1}(1-b)^{q_k}}{a^{p_k+1}(1-a)^{q_k-1}}\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^h < \frac{y-y'}{x-x'} < \frac{b^{p_k+1}(1-b)^{q_k-1}}{a^{p_k+1}(1-a)^{q_k}}\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^h.$$

Or p_k et q_k sont fixes, $\frac{1-b}{1-a}$ est plus petit que 1; donc, h croissant indéfiniment, l'expression $\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^h$ tend vers zéro; il en est donc de même de $\frac{y-y'}{x-x'}$.

14. *Résumé*. — En supposant $a < b$:

I. *Si x appartient à l'ensemble* (E), $\frac{y'-y}{x'-x}$ *croît indéfiniment quand x tend vers x par valeurs plus grandes que x, et tend vers zéro quand x' tend vers x par valeurs plus petites.*

II. *Si x n'appartient pas à l'ensemble* (E) *et que son développement est tel que pour une certaine valeur de k et pour les suivantes $\frac{p_k}{q_k}$ soit plus grand qu'un nombre fixe, $> \frac{A'}{A}$, $\frac{y'-y}{x'-x}$ croît indéfiniment quand x' tend vers x soit par valeurs plus grandes, soit par valeurs plus petites.*

III. *Si x n'appartient pas à l'ensemble* (E) *et que son développement est tel que pour une certaine valeur de k et pour les suivantes $\frac{p_k}{q_k}$ devienne et reste plus petit qu'un nombre fixe plus petit que $\frac{A'}{A'}$, $\frac{y'-y}{x'-x}$ tend vers zéro quand x' tend vers x soit par valeurs plus grandes, soit par valeurs plus petites.*

IV. *Enfin, pour les valeurs de x qui ne sont aucune des précédentes, la variation de $\frac{y'-y}{x'-x}$ est plus compliquée et peut dependre de la façon dont x tend vers x.*

15. *Remarque.* — Ayant obtenu le premier résultat relatif aux nombres de l'ensemble (E), on pourrait d'abord soupçonner qu'il est vrai pour tout nombre x. Mais on voit qu'il n'en est rien d'après le théorème général suivant :

Théorème. — *Il n'existe pas de fonction y de x continue dans un intervalle $x_0 x_1$ telle que, pour toute valeur de x dans cet intervalle, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende vers $+\infty$ quand Δx tend vers $+0$.*

En effet, choisissons un nombre N fixe plus grand que $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ et considérons l'expression $\frac{y - y_0}{x - x_0}$. La valeur de cette fonction de x est plus petite que N pour $x = x_1$, mais elle croît indéfiniment quand x tend vers x_0. D'ailleurs dans cet intervalle cette fonction est continue. Donc on peut trouver une valeur x' comprise entre x_0 et x_1 et telle que

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} = \mathrm{N},$$

telle d'ailleurs que pour toute valeur de x plus grande que x' on ait

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} < \mathrm{N}. \tag{11}$$

Je dis qu'il est impossible que $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ tende vers $+\infty$. En effet, si cela était on pourrait trouver un nombre $x'' > x'$ tel que

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} > \mathrm{N}.$$

Or, des inégalités

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} > \mathrm{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{y'-y}{x'-x} = \mathrm{N},$$

on déduit

$$\frac{y''-y}{x''-x} > \mathrm{N},$$

ce qui est contradictoire avec la condition (11).

COROLLAIRES. — *Il n'existe pas de fonction y de x continue dans un intervalle x_0, x_1 telle que, pour toute valeur de x dans cet intervalle, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende vers $+0$ quand Δx tend vers $+0$* (¹).

Il n'existe pas de fonction y de x continue dans un intervalle x_0, x_1 telle que, pour toute valeur de x dans cet intervalle, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende vers $\varepsilon\infty$ ou vers $\varepsilon' 0$ lorsque Δx tend vers $\varepsilon'' 0$ (ε, ε', ε'' étant $+$ ou $-$ 1).

16. THÉORÈME D'HOMOGRAPHIE. — *Appelons valeurs conjointes de x deux valeurs qui se trouvent consécutives, à un certain moment, dans la suite d'opérations définie au n° 1.*

Par exemple, au début, il n'y a que les valeurs 0, 1; elles sont donc conjointes. Ensuite on intercale le nombre a entre 0 et 1.

Donc 0 et a sont des valeurs conjointes, ainsi que a et 1. Ensuite entre 0 et a on intercale a^2. Donc 0 et a^2 sont les valeurs conjointes

(¹) Cas particulier du théorème énoncé par M. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), p. 72, ligne 3.

ainsi que a^2 et a. Entre a et 1 on intercale $a(2-a)$. Donc les valeurs a et $a(2-a)$ sont conjointes, ainsi que les valeurs $a(2-a)$ et 1 ; etc.

Ceci posé, soient p et q deux valeurs conjointes, auxquelles correspondent les valeurs $X(p)$ et $X(q)$ de la fonction X. (Nous écrivons X au lieu de X_a^b, les indices étant sous-entendus.) A partir du moment où p et q sont apparus tous les deux, la façon dont on divise ultérieurement l'intervalle p, q est la même quel que soit cet intervalle p, q. C'est-à-dire que le rapport

$$\frac{X(x)-X(p)}{X(q)-X(p)} \qquad (p<x<q)$$

dépend uniquement de $\frac{x-p}{q-p}$ (et de a et b sous-entendus évidemment).

Donc soient deux autres valeurs conjointes p', q' ; le théorème que nous appelons *théorème d'homographie* consiste en ce que :

L'égalité

$$\frac{x'-p'}{q'-p'}=\frac{x-p}{q-p} \qquad (p<x<q)$$

entraîne l'égalité

$$\frac{X(x')-X(p')}{X(q')-X(p')}=\frac{X(x)-X(p)}{X(q)-X(p)}.$$

On a évidemment un énoncé aussi général en supposant $p'=0$, $q'=1$; le théorème devient alors :

L'égalité

$$x'=\frac{x-p}{q-p}$$

entraîne

$$X(x')=\frac{X(x)-X(p)}{X(q)-X(p)} \qquad (p<x<q).$$

Plus simplement, le théorème consiste dans l'égalité

$$X\left(\frac{x-p}{q-p}\right)=\frac{X(x)-X(p)}{X(q)-X(p)} \qquad (p<x<q).$$

Changeons de notation, remplaçons $\frac{x-p}{q-p}$ par x; l'identité précédente devient

$$X(x) = \frac{X[p+(q-p)x] - X(p)}{X(q) - X(p)} \qquad (0 < x < 1); \tag{12}$$

x variant entre 0 et 1, $p+(q-p)x$ varie entre p et q; de sorte que, *connaissant les valeurs de la fonction pour les valeurs de la variable comprises entre p et q, on en déduit les valeurs de la fonction pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1.*

La relation (12) établit une relation d'homographie entre la portion de la courbe $y = X(x)$ comprise entre les droites d'abscisses p et q, et celle comprise entre les droites d'abscisses 0 et 1, d'où le nom de *théorème d'homographie*.

17. *Primitive de la fonction* $X(x)$. — Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 X(x)\,dx;$$

d'après la relation (12) elle peut s'écrire

$$\int_0^1 \frac{X[p+(q-p)x] - X(p)}{X(q) - X(p)}\,dx,$$

c'est-à-dire en faisant le changement de variable

$$p + (q-p)x = y,$$

et écrivant x à la place de y

$$\int_0^1 X(x)\,dx = \frac{1}{q-p}\int_p^q \frac{X(x) - X(p)}{X(q) - X(p)}\,dx$$

ou

$$\int_p^q X(x)\,dx = (q-p)[X(q) - X(p)]\int_0^1 X(x)\,dx + (q-p)X(p). \tag{13}$$

Faisons dans cette relation $p = 0$, $q = a$; il vient

$$\int_0^a X(x)\,dx = ab\int_0^1 X(x)\,dx. \tag{14}$$

Ensuite faisons $p = a$, $q = 1$; il vient

$$\int_a^1 \mathrm{X}(x)\,dx = (1-a)(1-b)\int_0^1 \mathrm{X}(x)\,dx + (1-a)\,b. \tag{15}$$

Ajoutons les relations (14) et (15); il vient

$$\int_0^1 \mathrm{X}(x)\,dx = (1-a-b+2ab)\int_0^1 \mathrm{X}(x)\,dx + (1-a)\,b,$$

d'où

$$\int_0^1 \mathrm{X}(x)\,dx = \frac{(1-a)\,b}{a+b-2ab},$$

et alors la relation (13) donne

$$\int_p^q \mathrm{X}(x)\,dx = (q-p)\,[\mathrm{X}(q)-\mathrm{X}(p)]\,\frac{(1-a)\,b}{a+b-2ab} + (q-p)\,\mathrm{X}(p),$$

ou encore

$$\int_p^q \mathrm{X}(x)\,dx = \frac{q-p}{a+b-2ab}\,(1-b)\,a\,\mathrm{X}(p) + (1-a)\,b\,\mathrm{X}(q)]. \tag{16}$$

On obtient donc une expression de l'intégrale de $\mathrm{X}(x)\,dx$ prise entre deux valeurs conjointes, qu'on peut calculer sous forme finie, puisqu'il en est ainsi de $\mathrm{X}(p)$ et $\mathrm{X}(q)$.

Quant au calcul numérique de l'intégrale $\int \mathrm{X}(x)\,dx$ prise entre deux valeurs quelconques, x_0, x, il est facile. En effet, si x_0, x appartiennent à l'ensemble (E), il est évident qu'on peut trouver des nombres x_1, x_2, ..., x_{n-1} tels que deux termes consécutifs quelconques de la suite $x_0\,x_1\,x_2\ldots x_{n-1}\,x$ soient conjoints. Or

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{X}(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{X}(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x} \mathrm{X}(x)\,dx.$$

On peut donc calculer $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{X}(x)\,dx$.

Si les limites x_0, x_1 n'appartiennent pas toutes les deux à l'ensemble (E) on peut trouver des nombres de cet ensemble qui en approchent d'autant qu'on voudra; on aura donc une valeur aussi approchée qu'on voudra de l'intégrale.

18. Les fonctions X_a^b contiennent deux paramètres. Nous allons montrer que l'étude générale de ces fonctions se ramène à celle d'une d'entre elles qui ne contient plus qu'un paramètre.

On a en effet la relation

$$X_c^b[X_a^c(x)] = X_a^b(x).$$

En particulier

$$X_{\frac{1}{2}}^b\left[X_a^{\frac{1}{2}}(x)\right] = X_b^a(x).$$

Donc l'étude de la fonction $X_a^b(x)$ se ramène à celle des deux fonctions particulières $X_{\frac{1}{2}}^b$ et $X_a^{\frac{1}{2}}$.

D'autre part la fonction $X_a^{\frac{1}{2}}$ est la fonction inverse de la fonction $X_{\frac{1}{2}}^a$. Donc en résumé l'étude des fonctions X_a^b se ramène à celle de la fonction $X_{\frac{1}{2}}^a(x)$ qui ne dépend plus que d'un seul paramètre a. De plus on peut supposer $a > \frac{1}{2}$, à cause de la relation $X_{\frac{1}{2}}^a(x) = 1 - X_{\frac{1}{2}}^{1-a}(1-x)$.

Pour abréger nous désignerons $X_{\frac{1}{2}}^a(x)$ par $X^a(x)$ et même par $X(x)$.

L'ensemble (E) est l'ensemble des nombres rationnels plus petits que 1, dont le dénominateur est une puissance de 2, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme

$$\frac{K}{2^p} \qquad (p \text{ entier} > 0, \qquad K \text{ entier impair} > 0 \text{ et} < 2^p).$$

Deux valeurs conjointes sont de la forme

$$\frac{K}{2^p} \qquad \text{et} \qquad \frac{K}{2^p} + \frac{1}{2^q}.$$

Il est facile d'avoir la valeur de $X_{\frac{1}{2}}^a(x)$; *il suffit d'écrire le nombre x dans la numération binaire, cela donne une suite de chiffres* 0 et 1, *qu'on porte dans la formule* (4). En particulier, si x est de la forme $\frac{K}{2^p}$, la suite de chiffres est limitée.

La relation (16) devient

$$\int_{\frac{K}{2^p}}^{\frac{K}{2^p}+\frac{1}{2^q}} X_{\frac{1}{2}}^{a}(x)\,dx = \frac{1}{2^q}\left[a\,X_{\frac{1}{2}}^{a}\left(\frac{K}{2^p}+\frac{1}{2^q}\right)+(1-a)\,X_{\frac{1}{2}}^{a}\left(\frac{K}{2^p}\right)\right],$$

et l'on peut calculer le second membre.

19. On en conclut comme au n° 17 qu'on peut calculer la valeur de la fonction

$$W^{a}(x) = \int_0^x X^{a}(x)\,dx,$$

pour toute valeur rationnelle de x, dont le dénominateur est une puissance de 2.

Par exemple,

$$\begin{aligned}
W^{a}\left(\frac{7}{16}\right) &= \int_0^{\frac{7}{16}} X^{a}(x)\,dx \\
&= \int_0^{0+\frac{1}{16}} X^{a}(x)\,dx + \int_{0+\frac{1}{16}}^{\frac{1}{16}+\frac{1}{8}} X^{a}(x)\,dx + \int_{\frac{1}{16}+\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} X^{a}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{16}\left[a\,X\left(\frac{1}{16}\right)+(1-a)\,X(0)\right] \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[a\,X\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\right)+(1-a)\,X\left(\frac{1}{16}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[a\,X\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)+(1-a)\,X\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\right)\right].
\end{aligned}$$

Or, dans la numération binaire, $\frac{1}{16}$ s'écrit 0,0001, $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$ s'écrit 0,0011, $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$ s'écrit 0,0111.

Donc

$$X^{a}\left(\frac{1}{16}\right) = a^4,$$

$$X^{a}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\right) = a^3 + a^3(1-a),$$

$$X^{a}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right) = a^2 + a^2(1-a) + a^2(1-a)^2.$$

Donc

$$\begin{aligned}W^a\left(\frac{7}{16}\right) &= \frac{1}{16}a^5 + \frac{1}{8}[a^4 + a^4(1-a) + (1-a)a^4] \\ &\quad + \frac{1}{4}[a^3 + a^3(1-a) + a^3(1-a)^2 + (1-a)a^3 + a^3(1-a)^2] \\ &= \frac{a^3(5a^2 - 18a + 20)}{16}.\end{aligned}$$

20. Revenons à la fonction générale $X_a^b(x)$; elle n'a été définie que pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1; on peut étendre la définition de la façon suivante. Appliquons la relation (12) dans laquelle nous supposerons $p = 0$, $q = a^r$ (r entier > 0); nous obtenons

$$X(x) = \frac{X(a^r x)}{b^r} \qquad (0 < x < 1).$$

Supprimons la restriction $0 < x < 1$, l'égalité

$$X(x) = \frac{X(a^r x)}{b^r}$$

définit la fonction $X(x)$ pour toute valeur de x. En effet, quelle que soit cette valeur de x, on peut choisir l'entier positif r de façon que $a^r x$, soit compris entre 0 et 1. Il y a même une infinité de valeurs de x satisfaisant à cette condition, elles fournissent toutes la même valeur de $X(x)$.

La fonction ainsi définie est calculable sous forme finie, pour toutes les valeurs d'un ensemble formé par les éléments de (E), multipliés par les puissances de a.