ELIE CARTAN

Les sous-groupes des groupes continus de transformations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 25 (1908), p. 57-194

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1908_3_25__57_0>

LES SOUS-GROUPES

DES

GROUPES CONTINUS DE TRANSFORMATIONS;

PAR M. E. CARTAN.

Ce Mémoire peut être considéré comme une suite au Mémoire précédemment paru en deux Parties dans ces mêmes *Annales* ([1]), où est exposée une théorie de la structure des groupes continus de transformations s'appliquant aussi bien aux groupes infinis qu'aux groupes finis. Dans la théorie classique de S. Lie, la structure d'un groupe fini est définie par ce qu'il appelle les *constantes de structure*, et ces constantes s'introduisent lorsqu'on compose entre elles les transformations infinitésimales du groupe; c'est donc la notion de transformation infinitésimale qui est à la base de cette théorie classique de la structure; mais en restant à ce point de vue cette théorie devait se borner aux groupes finis et il a été impossible de l'étendre aux groupes infinis. Au contraire, dans la théorie que j'ai proposée, on prend pour point de départ les *équations de définition* des équations finies du groupe et ce sont ces équations de définition qui donnent naissance à des constantes que j'appelle les *constantes de structure* du groupe; ces

([1]) E. CARTAN, *Sur la structure des groupes infinis de transformations* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 153-156; 3e série, t. XXII, 1905, p. 219-308).

constantes coïncident avec celles de S. Lie dans le cas particulier où le groupe est fini, mais elles existent toujours, que le groupe soit fini ou infini.

On sait comment l'introduction de la notion de structure a permis à S. Lie de ramener à des opérations purement *algébriques* le problème de la détermination et de la classification des sous-groupes d'un groupe donné, du moins tant qu'on se borne à chercher les transformations infinitésimales des sous-groupes, connaissant les transformations infinitésimales du groupe, ou encore tant qu'on se borne à rechercher les structures des sous-groupes, connaissant la structure du groupe.

Dans le présent Mémoire, il est montré comment la nouvelle notion de structure permet de ramener à des opérations purement *algébriques* la détermination des systèmes différentiels dont dépend l'établissement des équations de définition des sous-groupes d'un groupe donné, lorsqu'on connaît les équations de définition de ce groupe; si le groupe n'est donné que par sa structure, ces mêmes opérations purement algébriques permettent de déterminer et de classer les structures de ses différents sous-groupes; elles donnent immédiatement aussi, pour chacun des sous-groupes, la structure du plus grand sous-groupe dans lequel il est invariant.

La méthode développée dans ce Mémoire ramène la recherche des sous-groupes d'un groupe donné à la résolution d'un problème particulier d'équivalence vis-à-vis du groupe donné de certains systèmes d'équations aux différentielles totales complètement intégrables. Aussi ai-je, dans un premier Chapitre, exposé la solution du problème général de l'équivalence des systèmes différentiels, sous la forme la plus commode pour les applications que j'avais en vue. La solution générale du problème avait déjà été donnée par les travaux de S. Lie et tous ceux qu'ils ont inspirés; ce n'est donc que la *forme* de la solution donnée ici qui est neuve; je signalerai cependant un point important et qui est nouveau, c'est le suivant : Lorsque deux systèmes différentiels sont équivalents vis-à-vis d'un certain groupe, l'ensemble des transformations du groupe qui permet de passer du premier système au second s'obtient en effectuant d'abord une transformation particulière jouissant de cette propriété et ensuite la transformation la plus générale d'un certain sous-groupe du groupe donné, celui qui laisse invariant le second système différentiel. C'est la *structure* de ce sous-groupe qui est mise en évidence dans la solution donnée du problème et par suite, jusqu'à un certain point, la *nature* des intégrations à faire pour transformer le premier système dans le second.

Le Chapitre II expose la méthode générale de recherche des sous-groupes d'un groupe donné; cette méthode est appliquée d'abord aux groupes finis, puis au groupe infini des représentations conformes du plan; les différents types de groupes conformes sont indiqués et, pour chacun d'eux, le plus grand groupe conforme dans lequel il est invariant.

Dans les deux Chapitres III et IV, la méthode est appliquée à la détermination des différents types de groupes continus, à deux variables, considérés comme sous-groupes du groupe général à deux variables. A côté de chaque groupe obtenu est indiqué le plus grand groupe dans lequel il est invariant. Cela seul est nouveau comme résultat, S. Lie ayant déjà déterminé tous les groupes finis ([1]) et infinis ([2]) à deux variables. Le but des Chapitres III et IV est donc plutôt d'illustrer la méthode que de donner des résultats nouveaux. On remarquera que la détermination des groupes finis et celle des groupes infinis se font concurremment, par un procédé uniforme. On pourra remarquer aussi que la détermination des sous-groupes n'exige plus que des opérations *rationnelles* une fois qu'on a déterminé les sous-groupes que j'appelle *de degré* 1; quant à ceux-là leur détermination revient essentiellement à celle des sous-groupes du groupe linéaire homogène à deux variables.

La détermination des groupes finis et infinis de l'espace ne présenterait d'ailleurs, en ce moment, d'autres difficultés que celles résultant de la longueur même de leur énumération. En se bornant, en effet, aux groupes *infinis transitifs*, il existe 137 types de groupes de degré 1 qui se déterminent facilement puisqu'on connaît tous les sous-groupes du groupe linéaire et homogène à trois variables. Chacun de ces 137 groupes donne naissance à d'autres groupes de degré supérieur

---

([1]) *Nouv. Arch.*, t. III, 1878, p. 125; *Nouv. Arch.*, t. X, 1885, p. 74; *Math. Ann.*, t. XVI, 1888, p. 455.

([2]) *Leipz. Abh.*, t. XXI, 1895, p. 51.

à 1; l'un d'eux, par exemple, donne naissance jusqu'à 98 groupes différents. D'ailleurs l'énumération complète ne semble pas devoir présenter un grand intérêt, elle ne fournirait aucun groupe simple transitif nouveau; mais peut-être y aurait-il lieu d'étudier, parmi les groupes intransitifs, ceux que j'ai appelés improprement *simples* et qui semblent rendre difficile le problème si important de la réduction d'un groupe à une série normale de sous-groupes (¹).

CHAPITRE I.

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE L'ÉQUIVALENCE.

1. Considérons deux systèmes de n expressions aux différentielles totales linéairement indépendantes à n variables : l'un aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_1 = a_{11}\, dx_1 + a_{12}\, dx_2 + \ldots + a_{1n}\, dx_n, \\ \omega_2 = a_{21}\, dx_1 + a_{22}\, dx_2 + \ldots + a_{2n}\, dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_n = a_{n1}\, dx_1 + a_{n2}\, dx_2 + \ldots + a_{nn}\, dx_n; \end{cases}$$

l'autre aux n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

$$(2)\qquad \begin{cases} \Omega_1 = A_{11}\, dX_1 + A_{12}\, dX_2 + \ldots + A_{1n}\, dX_n, \\ \Omega_2 = A_{21}\, dX_1 + A_{22}\, dX_2 + \ldots + A_{2n}\, dX_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_n = A_{n1}\, dX_1 + A_{n2}\, dX_2 + \ldots + A_{nn}\, dX_n; \end{cases}$$

les a_{ik} désignant des fonctions données des x et les A_{ik} des fonctions données des X. Le problème que nous allons résoudre est celui de *reconnaître si l'on peut trouver pour les* X *des fonctions indépendantes*

(¹) *Voir* E. CARTAN, *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXII, 1905, p. 284-285. *Cf.* la Note, parue postérieurement à la rédaction de ce Mémoire, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXLIV, 21 mai 1907, sous le titre : *Les groupes de transformations continus, infinis, simples.*

des x de manière que $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ se réduisent respectivement à ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$.

La solution qui va être exposée est basée sur la considération des covariants bilinéaires [1]. Si nous calculons les n covariants de ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$ nous pouvons les mettre sous la forme

$$(3) \qquad \omega'_s = \sum_{(ik)}^{1,2,\ldots,n} c_{iks}\omega_i\omega_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

et de même les covariants Ω' sont de la forme

$$(4) \qquad \Omega'_s = \sum_{(ik)}^{1,2,\ldots,n} C_{iks}\Omega_i\Omega_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Si un changement de variables transforme les ω_s dans les Ω_s, il transformera également les ω'_s dans les Ω'_s et, par suite, on aura

$$(5) \qquad C_{iks} = c_{iks}.$$

Supposons que, parmi les $\frac{n^2(n-1)}{2}$ coefficients c_{iks}, il y en ait r indépendants, les autres étant des fonctions de ceux-là.

Désignons-les par $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Nous pouvons mettre les différentielles dy_i sous la forme suivante :

$$(6) \qquad \begin{cases} dy_1 = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 + \ldots + h_{1n}\omega_n, \\ dy_2 = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 + \ldots + h_{2n}\omega_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_r = h_{r1}\omega_1 + h_{r2}\omega_2 + \ldots + h_{rn}\omega_n. \end{cases}$$

Supposons que parmi les coefficients h il y en ait $r_1 - r$ indépendants entre eux et indépendants des y, soient $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{r_1}$. Nous calculerons leurs différentielles :

$$(7) \qquad \begin{cases} dy_{r+1} = h_{r+1,1}\omega_1 + h_{r+1,2}\omega_2 + \ldots + h_{r+1,n}\omega_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_{r_1} = h_{r_1 1}\omega_1 + h_{r_1 2}\omega_2 + \ldots + h_{r_1 n}\omega_n. \end{cases}$$

---

(1) *Voir* E. CARTAN, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 154-156.

Si, parmi les nouveaux coefficients h, il y en a $r_2 - r_1$ indépendants entre eux et indépendants des y, soient $y_{r_1+1}, y_{r_1+2}, \ldots, y_{r_2}$, nous calculerons leurs différentielles et ainsi de suite jusqu'à ce que nous n'arrivions plus à des fonctions indépendantes nouvelles.

Nous aurons, en définitive, obtenu ainsi un certain nombre $p \leq n$ de fonctions indépendantes de x, soient $y_1, y_2, \ldots, y_p$, jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Les coefficients c_{iks} des formules (3) sont des fonctions des y;

2° Les coefficients des différentielles dy exprimées linéairement au moyen de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont également des fonctions des y.

2. Cela étant, si la transformation du système (1) dans le système (2) est possible, *il faudra que les mêmes opérations effectuées sur le système (2) donnent naissance au même nombre p de fonctions* Y, *que de plus les coefficients C_{iks} des formules (4) et es coefficients H_{ik} des Ω dans le développement des dY_i soient les mêmes fonctions des* Y *que les quantités correspondantes c_{iks} et h_{ik} étaient fonctions des y.*

Cette condition nécessaire est aussi suffisante et nous allons voir que la transformation la plus générale qui permet de passer du système (1) au système (2) dépend de $n - p$ constantes arbitraires.

En effet supposons, pour fixer les idées, que les p différentielles dy soient linéairement indépendantes par rapport à $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, et considérons le système

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 - y_1 = 0, \\ Y_2 - y_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_p - y_p = 0, \\ \Omega_{p+1} - \omega_{p+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_n - \omega_n = 0. \end{array} \right.$$

Il résulte de l'hypothèse qui vient d'être faite que ce système entraîne

$$\begin{array}{l} \Omega_1 = \omega_1, \\ \ldots\ldots, \\ \Omega_p = \omega_p \end{array}$$

et qu'il suffit par suite de l'intégrer pour avoir la solution la plus générale du problème.

Or, si l'on tient compte de l'égalité des Y et des y, les covariants bilinéaires des premiers membres $\Omega_{p+1} - \omega_{p+1}, \ldots, \Omega_n - \omega_n$ des équations de ce système sont nuls en tenant compte de (8).

Ce système est donc complètement intégrable et sa solution générale dépend de $n - p$ constantes arbitraires.

Si l'on a une transformation particulière, faisant passer du système (1) au système (2), la transformation la plus générale s'obtient en effectuant sur les x la transformation la plus générale laissant invariantes les expressions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Cette transformation engendre un groupe à $n - p$ paramètres dont la *structure* est définie par les formules (3), avec les invariants $y_1, y_2, \ldots, y_p$ (¹). *Cette structure,* d'après un théorème démontré ailleurs (²), *est encore définie par les constantes $c_{p+i,p+j,p+s}$ $(i, j, s = 1, 2, \ldots, n-p)$ où l'on donne aux x des valeurs numériques arbitraires.*

3. Il se peut qu'on cherche l'équivalence des deux systèmes (1) et (2) en ajoutant la restriction qu'un certain nombre h de fonctions indépendantes données $z_1, z_2, \ldots, z_h$ des x se transforment dans le même nombre h de fonctions également données $Z_1, \ldots, Z_h$ des X. Rien n'est changé à la solution, sauf que les fonctions données des x doivent être traitées comme les fonctions y dont il est question dans la solution générale; on prendra pour $y_1, y_2, \ldots, y_r$ les h fonctions z et $r - h$ coefficients c_{iks} indépendants entre eux et indépendants des z, en supposant que tous les autres s'expriment au moyen des z et de ces $r - h$ coefficients c.

4. Proposons-nous maintenant le problème général suivant :

Étant donnés d'une part un système de n expressions aux différentielles totales linéairement indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ en $x_1, x_2, \ldots,$

(¹) E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXI, 1904, p. 186.

(²) E. Cartan, *loc. cit.*, p. 201.

x_n, et m fonctions indépendantes $y_1, \ldots, y_m$ des n variables x; d'autre part, un système de n expressions aux différentielles totales linéairement indépendantes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ en $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et m fonctions indépendantes $Y_1, \ldots, Y_m$ de ces n variables X; reconnaître s'il existe un changement de variables transformant respectivement les fonctions $y_1, \ldots, y_m$ dans les fonctions $Y_1, \ldots, Y_m$, tel de plus que, par ce changement de variables, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ se déduisent de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ par une substitution linéaire appartenant à un groupe linéaire donné à r paramètres Γ, les coefficients des équations finies de ce groupe pouvant dépendre de $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

En définitive, on doit avoir des relations de la forme

$$(9) \quad \left\{\begin{array}{l} \Omega_1 = \alpha_{11}(y, u)\omega_1 + \alpha_{12}(y, u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{1n}(y, u)\omega_n, \\ \Omega_2 = \alpha_{21}(y, u)\omega_1 + \alpha_{22}(y, u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{2n}(y, u)\omega_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_n = \alpha_{n1}(y, u)\omega_1 + \alpha_{n2}(y, u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{nn}(y, u)\omega_n; \end{array}\right.$$

les α étant des fonctions données de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de r quantités $u_1, u_2, \ldots, u_r$ qui, pour chaque changement de variables répondant à la question, seront certaines fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; de plus, ces fonctions α sont telles que, si l'on regarde les u comme des paramètres et les y comme des constantes, les formules (9) définissent le groupe linéaire Γ (aux n variables $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$).

On peut formuler le problème d'une autre manière. Regardons les u comme r variables auxiliaires nouvelles, et posons

$$(10) \quad \overline{\omega}_s = \alpha_{s1}(y, u)\omega_1 + \alpha_{s2}(y, u)\omega_2 + \ldots + \alpha_{sn}(y, u)\omega_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons de même

$$(11) \quad \overline{\Omega}_s = \alpha_{s1}(Y, U)\Omega_1 + \alpha_{s2}(Y, U)\Omega_2 + \ldots + \alpha_{sn}(Y, U)\Omega_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Le problème primitif peut être remplacé par le problème suivant :

Déterminer pour $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $U_1, \ldots, U_r$ un système de $n + r$ fonctions indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $u_1, \ldots, u_r$ telles que les fonctions Y deviennent égales aux fonctions y correspondantes et telles que les expressions $\overline{\Omega}$ deviennent égales aux expressions $\overline{\omega}$ correspondantes.

Cela étant, *nous sommes ramenés à l'étude des invariants du système formé par les* m *fonctions* y *et les* n *expressions* $\overline{\omega}$.

5. Formons les différentielles $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ et exprimons-les au moyen de $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_n$, soit

$$
(12) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
dy_1 = h_{11}\,\overline{\omega_1} + h_{12}\,\overline{\omega_2} + \ldots + h_{1n}\,\overline{\omega_n},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
dy_m = h_{m1}\overline{\omega_1} + h_{m2}\overline{\omega_2} + \ldots + h_{mn}\overline{\omega_n}.
\end{array}
\right.
$$

Les coefficients h_{ij}, fonctions des x et des u, sont des covariants du système considéré.

Imaginons qu'on effectue sur les $\overline{\omega}$ une substitution du groupe Γ; les h_{ij} subiront entre eux une substitution linéaire engendrant un groupe Γ''(dualistique du groupe Γ). Cela veut dire que, si l'on désigne par h_{ij}^0 la fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à laquelle se réduit h_{ij} lorsqu'on donne aux u les valeurs correspondant à la transformation identique de Γ, les h_{ij} se déduisent des h_{ij}^0 par les transformations du groupe Γ''. Les deux systèmes de valeurs h_{ij}^0 et h_{ij} sont *homologues* par rapport au groupe Γ''. Cela étant, nous pouvons trouver une transformation particulière de Γ'' telle que le système h_{ij}^0 devienne un système *particulier* homologue; par exemple, si parmi les h, considérés comme fonctions des u, il en existe $r - r'$ indépendants, on peut donner à ces $r - r'$ fonctions indépendantes des *valeurs numériques fixes*, les autres deviendront des fonctions des x qui pourront s'exprimer au moyen de $y_1, \ldots, y_m$ et de $m' - m$ d'entre elles, que nous désignerons par $y_{m+1}, \ldots, y_{m'}$. Ces $m' - m$ fonctions nouvelles sont des *invariants* du système.

En somme, nous sommes arrivés à trouver comme éléments invariants les entiers r' et m' et les fonctions par lesquelles les coefficients h_{ij} s'expriment au moyen de $y_1, \ldots, y_{m'}$ une fois que $r - r'$ d'entre eux ont été réduits à des valeurs numériques fixes.

Cela étant, *on peut toujours s'astreindre à choisir les expressions* ω *d'une part, les expressions* Ω *d'autre part, de manière que les* $r - r'$ *coefficients* h_{ij} *considérés prennent les valeurs numériques fixes données à l'avance* (cela revient à remplacer au besoin les expressions ω par d'autres qui s'en déduisent par une substitution linéaire particulière du groupe Γ, ce qui ne change rien aux conditions du problème).

Cela étant, *la transformation linéaire la plus générale de* Γ *qui permet de passer des* ω *aux* Ω *correspond à la transformation la plus générale du groupe* Γ' *laissant invariant le système* h^0_{ij}. Cette transformation engendre manifestement un sous-groupe à r' paramètres de Γ'. Les h_{ij} étant en somme des fonctions de $y_1, \ldots, y_{m'}$; $u_1, \ldots, u_r$ (puisqu'ils se déduisent des h^0_{ij} par la transformation générale du groupe Γ'), ce sous-groupe est défini par $r - r'$ relations entre $u_1, u_2, \ldots, u_r, y_1, \ldots, y_{m'}$.

Nous sommes donc ramenés au problème primitif, sauf que nous avons maintenant $m' \geqq m$ *fonctions* y *et, au lieu du groupe* Γ, *un de ses sous-groupes à* r' *paramètres, les coefficients des équations finies de ce sous-groupe pouvant dépendre de* $y_1, y_2, \ldots, y_{m'}$.

Nous raisonnerons sur ce nouveau problème comme sur l'ancien jusqu'à ce qu'aucun des entiers m et r ne subisse de modification. Cela revient à supposer en somme que *les coefficients* h_{ij} *dans les formules* (12) *ne dépendent que de* $y_1, y_2, \ldots, y_m$, *mais aucunement de* $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

6. Cette première réduction du problème étant obtenue, formons les covariants bilinéaires des expressions $\overline{\omega}_s$. Les formules (10) donnent

$$(13)\quad \begin{aligned} \overline{\omega}'_s = {} & \alpha_{s1}(y, u)\,\omega'_1 + \alpha_{s2}(y, u)\,\omega'_2 + \ldots + \alpha_{sn}(y, u)\,\omega'_n \\ & + \sum_i^{1,\ldots,m} dy_i \left(\frac{\partial \alpha_{s1}}{\partial y_i}\omega_1 + \frac{\partial \alpha_{s2}}{\partial y_i}\omega_2 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{sn}}{\partial y_i}\omega_n \right) \\ & + \sum_k^{1,\ldots,r} du_k \left(\frac{\partial \alpha_{s1}}{\partial u_k}\omega_1 + \frac{\partial \alpha_{s2}}{\partial u_k}\omega_2 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{sn}}{\partial u_k}\omega_n \right). \end{aligned}$$

Or les covariants ω'_i s'expriment linéairement au moyen des dx, c'est-à-dire encore au moyen des ω, ou enfin au moyen des $\overline{\omega}$; il en est de même des dy_i. De plus, soit

$$\sum_\rho^{1,\ldots,r} \sum_{i,s}^{1,\ldots,n} e_\rho\, b_{i\rho s}\, \omega_i \frac{\partial f}{\partial \omega_s}$$

la transformation infinitésimale la plus générale de Γ, les $b_{i\rho s}$ étant des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_m$. On a, comme on sait,

$$\frac{\partial \overline{\omega_s}}{\partial u_k} = \frac{\partial \alpha_{s1}}{\partial u_k}\omega_1 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{sn}}{\partial u_k}\omega_n = \sum \lambda_{k\rho}(u)\, b_{i\rho s}\,\overline{\omega_i}.$$

Par suite, le covariant $\overline{\omega'_s}$ peut se mettre sous la forme

$$\overline{\omega'_s} = \sum_{(ik)} a_{iks}\,\overline{\omega_i}\,\overline{\omega_k} - \sum_{i,\rho} b_{i\rho s}\overline{\omega_i} \sum \lambda_{k\rho}\, du_k,$$

ou encore sous la forme

$$\overline{\omega'_s} = \sum_{(ik)} a_{iks}\,\overline{\omega_i}\,\overline{\omega_k} + \sum_{i,\rho} b_{i\rho s}\,\overline{\omega_i}\,\varpi_\rho \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

les a_{iks} désignant certaines fonctions des x et des u, les ϖ_ρ désignant r expressions différentielles aux variables x et u, linéairement indépendantes par rapport à $du_1, du_2, \ldots, du_r$.

Supposons qu'un changement de variables donnant pour les X des fonctions des x et pour les U des fonctions des x et des u, choisies comme plus haut, transforme les $\overline{\omega_s}$ en $\overline{\Omega_s}$. On aura des formules

$$\overline{\Omega'_s} = \sum_{(ik)} \mathrm{A}_{iks}\,\overline{\Omega_i}\,\overline{\Omega_k} + \sum b_{i\rho s}\,\overline{\Omega_i}\,\Pi_\rho,$$

d'où l'on tire

$$\sum (\mathrm{A}_{iks} - a_{iks})\,\overline{\omega_i}\,\overline{\omega_k} + \sum b_{i\rho s}\overline{\omega_i}(\Pi_\rho - \varpi_\rho) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Ces n égalités ne sont possibles que si l'on a des formules de la forme

$$\Pi_\rho = \varpi_\rho + v_{\rho 1}\overline{\omega_1} + v_{\rho 2}\overline{\omega_2} + \ldots + v_{\rho n}\overline{\omega_n} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \tag{15}$$

$$\mathrm{A}_{iks} = a_{iks} + \sum_{\rho}^{1,\ldots,r} (b_{k\rho s} v_{\rho i} - b_{i\rho s} v_{\rho k}), \tag{16}$$

où les $v_{\rho i}$ désignent certaines fonctions convenablement choisies des x et des u.

Posons alors

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\varpi_\rho} = \varpi_\rho + v_{\rho 1}\overline{\omega_1} + \ldots + v_{\rho n}\overline{\omega_n},\\ &\overline{a_{iks}} = a_{iks} + \sum_\rho^{1,\ldots,r}(b_{k\rho s}v_{\rho i} - b_{i\rho s}v_{\rho k}),\end{aligned}\right.$$

où les $v_{\rho i}$ désignent maintenant des variables auxiliaires nouvelles.

Étant donné un changement de variable quelconque des x dans les X, on pourra déterminer nr quantités $V_{\rho i}$ telles qu'on ait

$$\overline{\Omega_s} = \overline{\omega_s},\qquad \overline{\Pi_\rho} = \overline{\varpi_\rho},\qquad \overline{\Lambda_{iks}} = \overline{a_{iks}}.$$

Nous sommes donc ramenés à étudier les invariants du système des expressions $\overline{\omega_s}$ et $\overline{\varpi_\rho}$, des fonctions y_i et des coefficients $\overline{a_{iks}}$.

7. Nous allons, en ce qui concerne ces derniers coefficients, opérer une réduction du problème analogue à celle qui a été faite précédemment (n° 5). Effectuons sur les $\overline{\omega}$ une transformation infinitésimale du groupe Γ; soit

$$\delta\overline{\omega_s} = \sum_\rho\sum_i e_\rho b_{i\rho s}\overline{\omega_i}.$$

Les formules

$$\overline{\omega'_s} = \sum \overline{a_{iks}}\,\overline{\omega_i}\,\overline{\omega_k} + \sum b_{i\rho s}\overline{\omega_i}\,\overline{\varpi_\rho}$$

nous donneront

$$\delta\overline{\omega'_s} = \sum \delta\overline{a_{iks}}\,\overline{\omega_i}\,\overline{\omega_k} + \sum\overline{a_{iks}}(\delta\overline{\omega_i}\,\overline{\omega_k} + \overline{\omega_i}\,\delta\overline{\omega_k}) + \sum b_{i\rho s}(\delta\overline{\omega_i}\,\overline{\varpi_\rho} + \overline{\omega_i}\,\delta\overline{\varpi_\rho}).$$

Or on démontre facilement que l'accroissement de $\overline{\omega'_s}$ est égal au covariant bilinéaire de $\delta\omega_s$:

$$\delta\overline{\omega'_s} = \sum de_\rho b_{i\rho s}\overline{\omega_i} + \sum e_\rho db_{i\rho s}\overline{\omega_i} + \sum e_\rho b_{i\rho s}\overline{\omega'_i}.$$

En égalant les deux valeurs trouvées pour $\delta\overline{\omega'_s}$ et remplaçant les $\overline{\omega'_i}$,

$\delta\overline{\omega_i}$, ... par leurs valeurs, on obtient

$$(18)\quad \begin{aligned}&\sum_{\lambda,\rho} b_{\lambda\rho s}\overline{\omega_\lambda}(\delta\overline{\varpi_\rho}+de_\rho)+\sum_{\rho,\lambda,\sigma} e_\rho \sum_i (b_{\lambda\rho i}b_{i\sigma s}-b_{\lambda\sigma i}b_{i\rho s})\overline{\omega_\lambda}\,\overline{\varpi_\sigma}\\ &+\sum_{\lambda,\mu}\Big\{\delta\overline{a_{\lambda\mu s}}+\sum_\rho e_\rho\Big[\sum_i(\overline{a_{i\mu s}}b_{\lambda\rho i}+\overline{a_{\lambda is}}b_{\mu\rho i}-\overline{a_{\lambda\mu i}}b_{i\rho s})\\ &\qquad+\sum_k\Big(\frac{\partial b_{\lambda\rho s}}{\partial y_k}h_{k\mu}-\frac{\partial b_{\mu\rho s}}{\partial y_k}h_{k\lambda}\Big)\Big]\Big\}\overline{\omega_\lambda}\,\overline{\omega_\mu}=0.\end{aligned}$$

Or, si l'on introduit les constantes $c_{\rho\sigma\tau}$ de la structure du groupe Γ, on a

$$\sum_i(b_{\lambda\rho i}b_{i\sigma s}-b_{\lambda\sigma i}b_{i\rho s})=\sum_\tau c_{\rho\sigma\tau}b_{\lambda\tau s}$$

et la première ligne de l'équation (18) se réduit à

$$\sum_{\lambda,\rho} b_{\lambda\rho s}\overline{\omega_\lambda}\Big(\delta\overline{\varpi_\rho}+de_\rho-\sum_{\sigma,\tau}e_\tau c_{\sigma\tau\rho}\overline{\varpi_\sigma}\Big).$$

On déduit de là les formules suivantes, où les $e_{\rho i}$ sont nr nouvelles arbitraires :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}&\delta\overline{\varpi_\rho}=-de_\rho-\sum_{\sigma,\tau}e_\sigma c_{\sigma\tau\rho}\overline{\varpi_\tau}+\sum_i e_{\rho i}\overline{\omega_i},\\ &\delta\overline{a_{\lambda\mu s}}=\sum_\rho e_\rho\Big[\sum_i(\overline{a_{\lambda\mu i}}b_{i\rho s}-\overline{a_{\lambda is}}b_{\mu\rho i}+\overline{a_{\mu is}}b_{\lambda\rho i})\\ &\qquad+\sum_k\Big(\frac{\partial b_{\mu\rho s}}{\partial y_k}h_{k\lambda}-\frac{\partial b_{\lambda\rho s}}{\partial y_k}h_{k\mu}\Big)\Big]+\sum_\rho(b_{\mu\rho s}e_{\rho\lambda}-b_{\lambda\rho s}e_{\rho\mu}).\end{aligned}\right.$$

Les dernières formules trouvées montrent que les coefficients $\overline{a_{iks}}$ sont soumis à un groupe Γ_1 à $r(n+1)$ paramètres (dont les coefficients peuvent dépendre des y). Les quantités u_ρ et $v_{\rho i}$ sont les paramètres des équations finies de ce groupe. Autrement dit, si l'on désigne par $\overline{a^0_{iks}}$ ce que devient a_{iks} pour des valeurs particulières des u et des v, les expressions générales $\overline{a_{iks}}$ se déduisent des $\overline{a^0_{iks}}$ par la transformation la plus générale du groupe Γ_1.

On déduit de là que si parmi les $\overline{a_{iks}}$ il y en a l indépendants, considérés comme fonctions des u et des v, on pourra supposer choisies les ω de manière que ces l coefficients aient des valeurs numériques fixes données à l'avance; les autres seront alors des fonctions des x *invariantes* s'exprimant au moyen de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de $m' - m$ d'entre elles, soit $y_{m+1}, \ldots, y_{m'}$. De plus, *le groupe* Γ_1 *sera réduit à celui de ses sous-groupes qui conserve aux l coefficients* $\overline{a_{iks}}$ *considérés les valeurs numériques fixes données.*

Deux cas peuvent alors se présenter. Γ étant isomorphe hémiédrique de Γ_1, il se peut que la réduction de Γ_1 ne réduise pas Γ, et il se peut aussi que la réduction de Γ_1 réduise Γ. Dans ce second cas, on pourra, des relations entre les u, les v et les y qui définissent le sous-groupe de Γ_1, déduire des relations entre les u seulement et les y; ce sont ces relations qui définiront le sous-groupe de Γ auquel on est ramené si m' est supérieur à m; la considération des invariants $y_{m+1}, \ldots, y_{m'}$ pourra aussi réduire le groupe Γ.

On voit ainsi que de proche en proche on se ramènera au cas où *tous les coefficients* $\overline{a_{iks}}$ *sont des fonctions de* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *seulement, mais ne dépendent ni des u, ni des v.* En général, les nr quantités $e_{\rho i}$ ne seront pas arbitraires; $nr - r_1$ par exemple d'entre elles s'exprimeront au moyen des y, des u et des r_1 restantes. Le nouveau groupe Γ_1 sera un groupe à $r + r_1$ paramètres. Les expressions $\overline{\varpi}_\rho$, au nombre de r, ne dépendront que des x, des u et des r_1 paramètres v restants. Les $nr - r_1$ relations linéaires entre les e_ρ et les $e_{\rho i}$ s'obtiendront en exprimant que les $\delta\overline{a_{\lambda\mu s}}$ sont nuls, c'est-à-dire

$$\sum_\rho (b_{\mu\rho s} e_{\rho\lambda} - b_{\lambda\rho s} e_{\rho\mu}) + \sum_\rho e_\rho \sum_i (\overline{a_{\lambda\mu i}}\, b_{i\rho s} - \overline{a_{\lambda i s}}\, b_{\mu\rho i} + \overline{a_{\mu i s}}\, b_{\lambda\rho i})$$
$$+ \sum_\rho e_\rho \sum_k \left(\frac{\partial b_{\mu\rho s}}{\partial y_k} h_{k\lambda} - \frac{\partial b_{\lambda\rho s}}{\partial y_k} h_{k\mu} \right) = 0 \qquad (\lambda, \mu, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces relations permettront par exemple d'exprimer linéairement les $e_{\rho i}$ au moyen des e_ρ et de r_1 nouvelles arbitraires $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1}$, les coefficients étant des fonctions des y, soit

$$(20) \qquad e_{\rho i} = \sum^{1,\ldots,r} \alpha_{i\sigma\rho} e_\sigma + \sum^{1,\ldots,r_1} \beta_{i\lambda\rho} \varepsilon_\lambda \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, r).$$

8. Supposons que, pour les deux systèmes d'expressions aux différentielles totales donnés, on arrive ainsi au même nombre m d'invariants, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ pour le premier, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ pour le second; que les coefficients h_{ij} soient pour les deux systèmes les mêmes fonctions de leurs arguments; de même pour les coefficients $\overline{a_{iks}}$. Cherchons si les deux systèmes sont équivalents, c'est-à-dire si l'on peut trouver pour les X et les U des fonctions des x et des u transformant les y dans les Y et les $\overline{\omega}$ dans les $\overline{\Omega}$. Pour cela imaginons que le déterminant

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mm} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul, et considérons le système d'équations suivant:

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 - y_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m - y_m = 0, \\ \overline{\Omega_{m+1}} - \overline{\omega_{m+1}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{\Omega_n} - \overline{\omega_n} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on trouve pour les X et les U des fonctions des x et des u satisfaisant à ces équations, elles satisferont également, d'après les hypothèses faites, aux équations

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega_1} - \overline{\omega_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{\Omega_m} - \overline{\omega_m} = 0. \end{array} \right.$$

Or, si l'on tient compte de l'égalité des Y et des y, les covariants bilinéaires des premiers membres des équations à intégrer,

$$\begin{array}{l} \overline{\Omega_{m+1}} - \overline{\omega_{m+1}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overline{\Omega_n} - \overline{\omega_n} = 0, \end{array}$$

deviennent

$$\begin{gathered}\sum_{i,\rho} b_{i,\rho,m+1}\overline{\omega_i}(\overline{\Pi_\rho}-\overline{\varpi_\rho}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \sum_{i,\rho} b_{i\rho n}\quad\overline{\omega_i}(\overline{\Pi_\rho}-\overline{\varpi_\rho}).\end{gathered}$$

Appliquons la théorie des systèmes en involution [1]. Désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_n$; $t'_1, \ldots, t'_n$; $\ldots$; $t_1^{(n-1)}, \ldots, t_n^{(n-1)}$, n systèmes de n variables arbitraires et considérons la matrice à $n(n-m)$ lignes et r colonnes

$$\left\|\begin{array}{llll}
\sum b_{i,1,m+1}t_i & \sum b_{i,2,m+1}t_i & \ldots & \sum b_{i,r,m+1}t_i\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\sum b_{i,1,n}\quad t_i & \sum b_{i,2,n}\quad t_i & \ldots & \sum b_{i,r,n}\quad t_i\\
\sum b_{i,1,m+1}t'_i & \sum b_{i,2,m+1}t'_i & \ldots & \sum b_{i,r,m+1}t'_i\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\sum b_{i,1,n}\quad t'_i & \sum b_{i,2,n}\quad t'_i & \ldots & \sum b_{i,r,n}\quad t'_i\\
\sum b_{i,1,m+1}t''_i & \sum b_{i,2,m+1}t''_i & \ldots & \sum b_{i,r,m+1}t''_i\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\sum b_{i,1,n}\quad t_i^{(n-1)} & \sum b_{i,2,n}\quad t_i^{(n-1)} & \ldots & \sum b_{i,r,n}\quad t_i^{(n-1)}
\end{array}\right\|.$$

Désignons par σ_1 le degré du déterminant principal de la matrice obtenue en prenant les $n-m$ premières lignes, par $\sigma_1+\sigma_2$ le degré du déterminant principal de la matrice obtenue en prenant les $2(n-m)$ premières lignes, etc., par $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n$ le degré du déterminant principal de la matrice obtenue en prenant les $n(n-m)$ lignes.

Enfin, considérons le système d'équations linéaires aux rn incon-

(1) *Voir* E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 154-175.

nues $z_{\rho i}$

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_\rho b_{\mu\rho,m+1} z_{\rho\lambda} - \sum_\rho b_{\lambda\rho,m+1} z_{\rho\mu} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_\rho b_{\mu\rho n} \quad z_{\rho\lambda} - \sum_\rho b_{\lambda\rho n} \quad z_{\rho\mu} = 0 \end{array}\right. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (21) sera en involution si le nombre des inconnues $z_{\rho i}$ qu'on peut prendre arbitrairement est égal à

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots + n\sigma_n.$$

Dans ce cas le système d'équations (21) admet une infinité de solutions dépendant de σ_n fonctions arbitraires de n arguments, σ_{n-1} fonctions arbitraires de $n-1$ arguments et ainsi de suite. Si l'on a une solution particulière, la solution générale s'obtient en effectuant sur les x et les u la transformation la plus générale laissant invariantes les fonctions y et les expressions $\overline{\omega}$. Cette transformation engendre un groupe dont on a immédiatement la *structure* par les formules qui donnent $\overline{\omega}'_1, \overline{\omega}'_2, \ldots, \overline{\omega}'_n$.

Les hypothèses faites sur les coefficients h_{ik} montrent qu'on a

$$\sum_i^{1,\ldots,n} h_{ki} b_{\lambda\rho i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \rho = 1, 2, \ldots, r).$$

Par suite, on peut sans inconvénient substituer au système des $\frac{mn(n-1)}{2}$ équations linéaires (23) le système des $\frac{n^2(n-1)}{2}$ équations

$$(24)\qquad \sum_\rho^{1,\ldots,r} (b_{\mu\rho s} z_{\rho\lambda} - b_{\lambda\rho s} z_{\rho\mu}) = 0 \qquad (\lambda, \mu, s = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit alors que le nombre des inconnues $z_{\rho i}$ qu'on peut prendre arbitrairement n'est autre que le nombre que nous avons désigné par r_1. La condition d'involution est donc

$$r_1 = \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n.$$

9. Supposons maintenant que le système (21) ne soit pas en involution, c'est-à-dire qu'on ait

$$r_1 < \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n.$$

Nous allons former les covariants bilinéaires des r expressions $\overline{\varpi}_\rho$, qui dépendent des x, des u et de r_1 variables auxiliaires nouvelles (r_1 des quantités $v_{\rho i}$). D'après la manière même dont entrent ces r_1 quantités dans les expressions $\overline{\varpi}$, on voit qu'on a des formules de la forme

$$\overline{\varpi}'_\tau = \sum_{(ik)} \mathrm{A}_{ik\tau}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k + \sum_{i,\rho} \mathrm{B}_{i\rho\tau}\overline{\omega}_i\overline{\varpi}_\rho + \sum_{(\rho\sigma)} \mathrm{C}_{\rho\sigma\tau}\overline{\varpi}_\rho\overline{\varpi}_\sigma + \sum_{i,\lambda} \mathrm{D}_{i\lambda\tau}\overline{\omega}_i\chi_\lambda,$$

les χ étant r_1 expressions de Pfaff nouvelles indépendantes des $\overline{\omega}$ et des $\overline{\varpi}$.

Si nous appliquons aux formules (14) l'*identité fondamentale* (1), nous obtenons

$$(25) \qquad \overline{\varpi}'_\tau = \sum_{(ik)} \mathrm{A}_{ik\tau}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k + \sum_{i,\rho} \alpha_{i\rho\tau}\overline{\omega}_i\overline{\varpi}_\rho + \sum_{(\rho\sigma)} c_{\rho\sigma\tau}\overline{\varpi}_\rho\overline{\varpi}_\sigma + \sum_{i,\lambda} \beta_{i\lambda\tau}\overline{\omega}_i\chi_\lambda$$
$$(\tau = 1, 2, \ldots, r),$$

les coefficients $c_{\rho\sigma\tau}$ étant les coefficients de structure de Γ, les coefficients $\alpha_{i\rho\tau}$ et $\beta_{i\lambda\tau}$ étant ceux qui entrent dans les formules (20).

Il ne reste donc que les coefficients $\mathrm{A}_{ik\tau}$ qui puissent être indépendants des y. Si nous posons maintenant

$$\overline{\chi}_\lambda = \chi_\lambda + w_{\lambda 1}\overline{\omega}_1 + w_{\lambda 2}\overline{\omega}_2 + \ldots + w_{\lambda n}\overline{\omega}_n,$$
$$\overline{\mathrm{A}}_{ik\tau} = \mathrm{A}_{ik\tau} + \sum_{\lambda}^{1,\ldots,r_1} (\beta_{i\lambda\tau}w_{\lambda k} - \beta_{k\lambda\tau}w_{\lambda i}),$$

les expressions $\overline{\chi}_\lambda$ et les coefficients $\overline{\mathrm{A}}_{ik\tau}$ sont des *invariants*. Les $\overline{\mathrm{A}}_{ik\tau}$ dépendent maintenant des n variables x, des r quantités u, des r_1 quantités v et des nr_1 quantités w.

---

(1) *Voir* E. CARTAN, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 155.

Comme plus haut (n° 7), on montre que ces coefficients sont soumis à un groupe Γ_2 à $r+r_1+nr_1$ paramètres. En prenant, en effet, les accroissements δ des deux membres des équations (25), nous obtenons

$$\sum_{i,\lambda} \beta_{i\lambda\tau}\overline{\omega_i}\,\delta\overline{\chi_\lambda} + \sum \delta\overline{\mathrm{A}_{ik\tau}}\,\overline{\omega_i}\,\overline{\omega_k} = \ldots,$$

les seconds membres étant des expressions connues. On en déduit facilement

$$\delta\overline{\chi_\lambda} = -d\varepsilon_\lambda + \sum_i \varepsilon_{\lambda i}\overline{\omega_i} + \ldots, \tag{26}$$

les termes non écrits des formules (26) étant linéaires par rapport aux e et aux ε, par rapport aussi aux $\overline{\varpi}$ et aux $\overline{\chi}$, les coefficients ne dépendant que des y. Quant aux $\delta\mathrm{A}_{ik\tau}$ ils s'expriment linéairement au moyen des quantités A elles-mêmes, les coefficients étant des expressions linéaires par rapport aux e et aux ε avec des coefficients fonctions des y. On a ainsi les transformations infinitésimales du groupe Γ_2 à $r+r_1+nr_1$ paramètres.

10. Si les $\overline{\mathrm{A}_{ik\tau}}$ dépendent effectivement de certains de ces paramètres, on pourra toujours réduire un certain nombre d'entre eux à des constantes; les autres seront alors des invariants (fonctions des seules variables x) et le groupe Γ_2 sera réduit à l'un de ses sous-groupes. La réduction du groupe Γ_2 à l'un de ses sous-groupes pourra aussi réduire, soit Γ_1, soit Γ; les nouveaux invariants, s'il y en a, pourront aussi réduire Γ.

En tous les cas on peut, après un certain nombre de réductions et, au besoin, l'introduction d'invariants y nouveaux, se supposer ramené au cas où les $\overline{\mathrm{A}_{ik\tau}}$ sont des fonctions des seuls invariants y et où le groupe Γ_2 est réduit à l'un de ses sous-groupes à $r+r_1+r_2$ paramètres.

On considérera alors les nombres caractéristiques σ'_1, σ'_2, ..., σ'_n correspondant au système des coefficients $\beta_{i\lambda\rho}$. Si l'on a

$$r_2 = \sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n,$$

le système des $\overline{\Omega}$ sera équivalent au système des $\overline{\omega}$, à condition que, pour ce second système, on arrive au même nombre m d'invariants Y et que les coefficients h_{ik}, $\overline{a_{iks}}$, $\overline{\mathrm{A}_{iks}}$ soient les mêmes fonctions de leurs arguments Y que pour le système des $\overline{\omega}$. La transformation la plus générale qui fait passer des $\overline{\omega}$ aux $\overline{\Omega}$ dépend de σ'_n fonctions arbitraires de n arguments, de σ'_{n-1} fonctions de $n-1$ arguments et ainsi de suite. Si l'on a une transformation particulière faisant passer des $\overline{\omega}$ aux $\overline{\Omega}$, la plus générale s'obtient en effectuant sur les x un groupe à m invariants et dont la *structure* est donnée par les formules (14) et (25).

Si l'on a

$$r_2 < \sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n,$$

on aura les covariants bilinéaires des expressions $\overline{\chi_\rho}$; il s'introduira ainsi r_2 expressions nouvelles θ, et l'on pourra s'arranger de manière que tous les coefficients des $\overline{\chi_\lambda}$ soient des fonctions des y, sauf les coefficients des $\overline{\omega_i}\,\overline{\omega_k}$. On procédera alors comme plus haut, de manière à arriver à un groupe Γ_3 à $r + r_1 + r_2 + r_3$ paramètres et ainsi de suite.

La théorie des systèmes en involution montre que ces opérations auront une fin, c'est-à-dire que, pour un entier α, on aura

$$r_\alpha = \sigma_1'^{(\alpha-1)} + 2\sigma_2'^{(\alpha-1)} + \ldots + n\sigma_n'^{(\alpha-1)}.$$

Alors on aura la *structure* du groupe le plus général qui laisse invariantes les expressions $\overline{\omega}$ et le degré d'indétermination de la transformation qui fait passer du système des $\overline{\omega}$ à un système équivalent.

11. Plus généralement, considérons :

D'une part, m fonctions indépendantes $y_1, \ldots, y_m$ des variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et deux systèmes de n expressions aux différentielles totales linéairement indépendantes

$$\begin{matrix} \omega_1, & \omega_2, & \ldots, & \omega_n, \\ \theta_1, & \theta_2, & \ldots, & \theta_n; \end{matrix}$$

D'autre part, m fonctions indépendantes $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m$ des variables X_1, $\mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ et deux systèmes de n expressions aux différentielles totales linéairement indépendantes

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_n,$$
$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_n.$$

Proposons-nous de reconnaître s'il existe un changement de variables transformant les fonctions y dans les fonctions Y, tel de plus que les expressions Ω se déduisent des ω par une substitution linéaire appartenant à un groupe donné Γ d'ordre r, et les expressions Θ des expressions θ par une substitution linéaire appartenant à un autre groupe donné Γ' d'ordre r', les coefficients des équations finies de ces deux groupes pouvant dépendre, outre les paramètres, des fonctions y.

Si nous désignons par

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_r,$$
$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{r'}$$

les paramètres des groupes Γ et Γ', et si nous désignons par $\overline{\omega}_s$ et $\overline{\theta}_s$ ce que deviennent ω_s et θ_s par la substitution la plus générale des groupes Γ et Γ', il est clair que les $\overline{\theta}$ s'expriment linéairement au moyen des $\overline{\omega}$ par des formules

$$\overline{\theta}_s = l_{s1}\overline{\omega}_1 + l_{s2}\overline{\omega}_2 + \ldots + l_{sn}\overline{\omega}_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

les coefficients l_{ik} étant des fonctions des x, des u et des v. Si l'on effectue sur les $\overline{\omega}$ une substitution quelconque du groupe Γ et sur les $\overline{\theta}$ une substitution quelconque du groupe Γ', les coefficients l_{ik} subissent les transformations d'un groupe linéaire à $r + r'$ paramètres. En raisonnant comme plus haut, on verra qu'on peut réduire un certain nombre d'entre ces coefficients à des valeurs constantes, les autres étant des *invariants* fonctions des seules variables x. Chacun des groupes Γ et Γ' est alors réduit à un de ses sous-groupes, et ces deux sous-groupes sont évidemment isomorphes. On peut maintenant faire abstraction des expressions θ, et l'on est ramené au problème primitif, le groupe Γ étant réduit à l'un de ses sous-groupes.

12. Le problème général précédent se présente, par exemple, lorsqu'il s'agit de reconnaître l'équivalence de deux systèmes d'équations

aux différentielles totales en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vis-à-vis d'un groupe fini ou infini donné G. Il résulte, en effet, de la théorie des groupes [1] que, en adjoignant au besoin des variables auxiliaires nouvelles, le groupe est défini par un certain nombre d'invariants $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et par n expressions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ soumises entre elles à la substitution linéaire la plus générale d'un groupe linéaire Γ d'ordre r; d'autre part, si

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_\nu = 0 \tag{27}$$

sont les équations de l'un des systèmes différentiels donnés,

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_\nu = 0 \tag{28}$$

celles de l'autre (où les variables sont écrites X au lieu de x), et que l'on désigne par $\theta_{\nu+1}, \ldots, \theta_n$, $n-\nu$ expressions quelconques indépendantes des ν premières (de même pour $\Theta_{\nu+1}, \ldots, \Theta_n$), on doit passer des θ aux Θ par la substitution linéaire la plus générale qui transforme le système d'équations (27) dans le système d'équations (28); cette substitution engendre le groupe appelé plus haut Γ'.

13. Prenons pour application la recherche de l'équivalence de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$
$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

vis-à-vis du groupe de transformations G défini par les équations

$$x' = X,$$
$$y' = Y,$$

X et Y désignant deux fonctions arbitraires, la première de x, la seconde de y.

(1) *Voir* E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 176 et suiv.

Posons ici

$$\omega_1 = dx, \qquad \theta_1 = dy - f(x, y)\,dx,$$
$$\omega_2 = dy, \qquad \theta_2 = dx.$$

Le groupe Γ a pour équations

$$\overline{\omega}_1 = u_1 \omega_1,$$
$$\overline{\omega}_2 = u_2 \omega_2,$$

et le groupe Γ' a pour équations

$$\overline{\theta}_1 = v_1 \theta_1,$$
$$\overline{\theta}_2 = v_2 \theta_1 + v_3 \theta_2.$$

On a, en appliquant la théorie générale,

$$\overline{\theta}_1 = \frac{v_1}{u_2}\overline{\omega}_2 - \frac{v_1 f(x, y)}{u_1}\overline{\omega}_1,$$
$$\overline{\theta}_2 = \frac{v_2}{u_2}\overline{\omega}_2 + \frac{v_3 - v_2 f(x, y)}{u_1}\overline{\omega}_1.$$

On pourra réduire les quatre coefficients des seconds membres à des constantes ([1]), de manière qu'on ait

$$\overline{\theta}_1 = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1,$$
$$\overline{\theta}_2 = \overline{\omega}_2$$

avec

$$u_2 = v_1,$$
$$u_1 = v_1 f(x, y),$$
$$v_2 = v_1,$$
$$v_3 = v_1 f(x, y).$$

On a alors

$$\overline{\omega}_1 = u f(x, y)\,dx,$$
$$\overline{\omega}_2 = u\,dy,$$

le groupe Γ étant réduit à un sous-groupe à un paramètre

$$\overline{\omega}_1 = u \omega_1,$$
$$\overline{\omega}_2 = u \omega_2.$$

([1]) Nous supposons la fonction $f(x, y)$ différente de zéro, ainsi que la fonction $F(x, y)$.

Calculons maintenant $\overline{\omega'_1}$ et $\overline{\omega'_2}$; on a

$$\overline{\omega'_1} = \overline{\omega_1}\left(-\frac{du}{u} - \frac{f'_y}{uf}\overline{\omega_2}\right),$$
$$\overline{\omega'_2} = \overline{\omega_2}\left(-\frac{du}{u}\right),$$

c'est-à-dire

$$\overline{\omega'_1} = \overline{\omega_1}\,\overline{\varpi},$$
$$\overline{\omega'_2} = \overline{\omega_2}\,\overline{\varpi},$$

en posant

$$\overline{\varpi} = -\frac{du}{u} - \frac{f'_y}{uf}\overline{\omega_2} = -\frac{du}{u} - \frac{f'_y}{f}dy.$$

Calculons $\overline{\varpi'}$; on a

$$\overline{\varpi'} = -\frac{\partial^2 \log f}{\partial x\, \partial y}dx\, dy = -\frac{1}{u^2 f}\frac{\partial^2 \log f}{\partial x\, \partial y}\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° $\dfrac{\partial^2 \log f}{\partial x\, \partial y} = 0$. Alors il faut qu'on ait aussi

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial x\, \partial y} = 0;$$

les deux équations sont équivalentes, chacune d'elles admet un groupe à trois paramètres dont la structure est définie par les formules

$$\omega'_1 = \omega_1 \varpi,$$
$$\omega'_2 = \omega_2 \varpi,$$
$$\varpi' = 0.$$

Ce groupe étant intégrable, la réduction d'une des équations à l'autre se fait par des quadratures. L'une des équations est, par exemple,

$$\frac{dy}{dx} = 1.$$

2° $\dfrac{\partial^2 \log f}{\partial x\, \partial y} \neq 0$. Alors le coefficient de $\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}$ dans $\overline{\varpi'}$ n'est pas nul et l'on peut le réduire à l'unité en prenant

$$u = \sqrt{-\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \log f}{\partial x\, \partial y}}.$$

On a alors

$$\overline{\omega_1} = f\sqrt{-\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y}}\,dx = \sqrt{-f\frac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y}}\,dx,$$

$$\overline{\omega_2} = \sqrt{-\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y}}\,dy.$$

Le groupe Γ est maintenant réduit à la transformation identique. On a

$$\overline{\omega'_1} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial \log f}{\partial y} + \dfrac{\partial^3 \log f}{\partial x\,\partial y^2}}{\left(-\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y}\right)^{\frac{3}{2}}}\,\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2},$$

$$\overline{\omega'_2} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial \log f}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 \log f}{\partial x^2\,\partial y}}{\left(-f\dfrac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y}\right)^{\frac{3}{2}}}\,\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}.$$

Les coefficients de $\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}$ dans ces deux formules sont deux invariants que nous désignerons par A et B; on peut déduire tous les autres de ces deux-là. Si I est un invariant quelconque, les coefficients de $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$ dans l'expression de dI en sont deux autres que nous désignerons par X_1I et X_2I :

$$dI = X_1 I.\overline{\omega_1} + X_2 I.\overline{\omega_2}. \tag{29}$$

On a d'ailleurs

$$X_2 I = \frac{1}{\sqrt{-\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y}}}\,\frac{\partial I}{\partial y},$$

$$X_1 I = \frac{1}{\sqrt{-f\dfrac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y}}}\,\frac{\partial I}{\partial x}.$$

Si l'on applique à l'égalité (29) l'identité fondamentale, on arrive à

$$X_1(X_2 I) - X_2(X_1 I) = -A X_1 I - B X_2 I.$$

Enfin, entre les invariants *dérivés* de A et de B, il existe la relation suivante, obtenue en exprimant que le covariant bilinéaire de

$$\overline{\varpi} = A\,\overline{\omega_2} - B\,\overline{\omega_1}$$

est égal à l'unité :

$$X_1 A + X_2 B = 1. \tag{30}$$

Cherchons s'il y a, dans le cas où nous sommes, des équations admettant un groupe. La dernière relation montre que A et B ne peuvent être toutes les deux des constantes. Le groupe en question est donc à un paramètre au plus, et tous les invariants sont des fonctions de l'un d'entre eux. Posons par exemple

$$dA = C(\omega_2 + u\omega_1) \qquad \left(X_2 A = C,\; u = \frac{X_1 A}{X_2 A} = \frac{1}{f} \frac{\frac{\partial A}{\partial x}}{\frac{\partial A}{\partial y}} \right).$$

Alors du est de la forme

$$du = F(u)(\omega_2 + u\omega_1);$$

en appliquant l'identité fondamentale, on obtient

$$B + uA = F(u).$$

L'application de la relation (30) conduit alors aux formules

$$A = F'(u) - \frac{1}{F(u)},$$

$$B = F(u) - uF'(u) + \frac{u}{F(u)},$$

$$dA = \left[F(u)F''(u) + \frac{F'(u)}{F(u)} \right] (\omega_2 + u\omega_1).$$

C'est alors la seule fonction F de u qui caractérise l'équation différentielle vis-à-vis du groupe infini donné; autrement dit, deux équations différentielles pour lesquelles tous les invariants sont fonctions d'un seul d'entre eux sont équivalentes si, pour chacune d'elles, la quantité

$$B + A \frac{X_1 A}{X_2 A}$$

s'exprime de la même manière en fonction de $\frac{X_1 A}{X_2 A}$. Toute équation de cette nature est réductible à

$$\frac{dx}{dy} = u(x+y),$$

et l'on a

$$F(u) = \sqrt{\frac{uu'^2}{uu'' - u'^2}},$$

u' et u'' désignant les deux dérivées de u par rapport à son argument $x+y$.

En résumé, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

peut admettre, vis-à-vis du groupe

$$x' = X,$$
$$y' = Y,$$

soit un groupe à trois paramètres, et alors elle est réductible à l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

soit un groupe à un paramètre, et alors elle est réductible à la forme

$$\frac{dx}{dy} = u(x+y);$$

dans le cas général elle n'admet aucun groupe.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE DONNÉ.

14. Étant donné un groupe de transformations $\mathcal{G}$ fini ou infini, on dit qu'un autre groupe g est un *sous-groupe* de $\mathcal{G}$, lorsque toutes les transformations de g appartiennent à $\mathcal{G}$. Deux sous-groupes g_1 et g_2 de $\mathcal{G}$ sont dits *homologues* dans $\mathcal{G}$, ou sont dits appartenir au même *type*, s'il existe une transformation S de $\mathcal{G}$ transformant g_1 en g_2, ou si l'on a symboliquement $S^{-1}g_1 S = g_2$; cela veut dire que, si sur les variables primitives et les variables transformées on effectue le changement de variables défini par S, les équations finies de g_1 se changent dans les équations finies de g_2. Si g_1 et g_2 sont deux sous-groupes homologues de $\mathcal{G}$, la transformation la plus générale de $\mathcal{G}$ qui transforme g_1 en g_2 s'obtient en effectuant, après la transformation la plus générale d'un certain groupe G_1, une transformation particulière transformant g_1 en g_2; G_1 est le plus grand groupe de $\mathcal{G}$ qui transforme g_1 en lui-même, ou qui laisse invariant g_1.

Le problème général de la recherche des sous-groupes d'un groupe donné $\mathcal{G}$ peut être énoncé de la manière suivante :

1° *Déterminer tous les types des sous-groupes de* $\mathcal{G}$, *et pour chaque type, un représentant particulier;*

2° *Pour chaque sous-groupe ainsi obtenu déterminer le plus grand sous-groupe* G *de* $\mathcal{G}$ *dans lequel il est invariant.*

Il est facile de voir que, si deux groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont holomorphes (holoédriques), à chaque sous-groupe de l'un correspond un sous-groupe de l'autre qui lui est holomorphe et réciproquement. Si l'on se borne à la recherche des *structures* des différents sous-groupes d'un groupe donné $\mathcal{G}$, il est donc à prévoir que la solution du problème ne dépendra que de la *structure* du groupe $\mathcal{G}$.

Ainsi limité, le problème peut être résolu en s'appuyant sur la théorie générale des groupes, finis ou infinis [1], et sur la théorie développée dans le Chapitre précédent.

15. Considérons un groupe $\mathcal{G}$ que nous pouvons au besoin supposer prolongé holoédriquement de manière que ses équations de définition soient du premier ordre; désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les variables transformées par ce groupe. Si g est un de ses sous-groupes, les équations de définition de g peuvent être du premier ordre, mais aussi d'ordre supérieur. Supposons-les d'ordre p.

Si l'on considère les prolongements normaux [2] successifs $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$, $\mathcal{G}'''$, ... de $\mathcal{G}$, dans chacun d'eux il correspond à g un sous-groupe g', g'', g''', ... D'après la théorie des prolongements normaux, les équations de définition de $g', g'', g''', \ldots$ sont d'ordre $p-1, p-2, p-3, \ldots$; de sorte que le sous-groupe $g^{(p)}$ de $\mathcal{G}^{(p)}$ a ses équations de définition du premier ordre et le sous-groupe $g^{(p+1)}$ de $\mathcal{G}^{(p+1)}$ a ses équations de définition d'ordre zéro. Autrement dit :

Théorème. — *Étant donné un sous-groupe quelconque g d'un groupe $\mathcal{G}$, on peut trouver un prolongement normal $\mathcal{G}^{(q)}$ de $\mathcal{G}$ tel que le sous-groupe $g^{(q)}$ de $\mathcal{G}^{q}$ correspondant à g soit le plus grand sous-groupe de $\mathcal{G}^{(q)}$ laissant invariantes un certain nombre de fonctions des variables transformées par $\mathcal{G}^{q}$.*

Nous appellerons *degré* du sous-groupe g le plus petit entier q pour lequel le prolongement $g^{(q)}$ jouit de la propriété énoncée dans le théorème précédent. Il est bon de remarquer que les équations de définition de g peuvent être d'ordre supérieur à son degré.

Nous conviendrons de plus de dire qu'une fonction des variables transformées par $\mathcal{G}^{(r)}$ est d'*ordre r*, si elle ne peut pas s'exprimer au moyen des seules variables transformées par $\mathcal{G}^{(r-1)}$.

Soit g un sous-groupe quelconque de degré q; si q' est un entier quelconque inférieur à q, il est évident qu'il y a un sous-groupe au

---

(1) Voir E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 153-206; 3e série, t. XXII, 1905 p. 219-308).

(2) E. Cartan, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXII, 1905, p. 229-399.

plus de degré q' dans lequel g est contenu tout entier : c'est le sous-groupe g' formé des transformations de $\mathcal{G}^{(q')}$ qui laissent invariants tous ceux des invariants de g qui sont d'ordre inférieur ou égal à q'.

Si deux sous-groupes g_1 et g_2 sont homologues, ils sont nécessairement de même degré q; de plus, si l'un d'eux g_1 est contenu dans un sous-groupe g'_1 de degré $q' < q$, l'autre g_2 doit également être contenu dans un sous-groupe g'_2 de même degré q'; et les deux sous-groupes g'_1 et g'_2 doivent être homologues.

Enfin, si deux sous-groupes g_1 et g_2 de degré q sont contenus dans un même sous-groupe g' de degré $q' < q$, il faut et il suffit, pour que g_1 et g_2 soient homologues dans $\mathcal{G}$, qu'ils soient homologues dans le plus grand sous-groupe G' de $\mathcal{G}$ qui laisse invariant g'. En effet, toute transformation de $\mathcal{G}$ qui transforme g_1 en g_2 doit laisser invariants les invariants de g', puisque ce sont les invariants d'ordre inférieur ou égal à q' communs à g_1 et g_2; cette transformation appartient donc à G'.

16. D'après les remarques précédentes, voici comment on pourra déterminer tous les types de sous-groupes de $\mathcal{G}$.

On déterminera d'abord tous les types de sous-groupes de degré zéro de $\mathcal{G}$; soit obtenu pour chacun de ces types un représentant

$$g_0 = \mathcal{G}, \qquad g_1, \qquad g_2, \qquad g_3, \qquad \ldots;$$

on déterminera pour chacun de ces sous-groupes le plus grand sous-groupe de $\mathcal{G}$ dans lequel il est invariant, soit

$$G_0 = \mathcal{G}, \qquad G_1, \qquad G_2, \qquad G_3, \qquad \ldots.$$

On reprendra ensuite chacun de ces groupes G_i; pour chacun d'eux G_i on déterminera les différents types de ceux de ses sous-groupes qui sont contenus dans g_i et qui sont de degré inférieur ou égal à 1; on prendra pour chacun de ces types un représentant, et pour chacun de ces représentants le plus grand sous-groupe de G_i dans lequel il est invariant. On aura ainsi une suite de sous-groupes

$$g_{i,0} = g_i, \qquad g_{i,1}, \qquad g_{i,2}, \qquad g_{i,3}, \qquad \ldots,$$

invariants dans les groupes

$$G_{i,0} = G_i, \qquad G_{i,1}, \qquad G_{i,2}, \qquad G_{i,3}, \qquad \ldots.$$

Pour chaque groupe $G_{i,j}$ on déterminera les différents types de ceux de ses sous-groupes qui sont d'ordre $\leqq 2$ et qui sont contenus dans $g_{i,j}$; pour chacun de ces types on choisira un représentant et l'on déterminera le plus grand sous-groupe de $G_{i,j}$ dans lequel il est invariant. Cela donnera une troisième suite de sous-groupes

$$g_{i,j,0} = g_{i,j}, \qquad g_{i,j,1}, \qquad g_{i,j,2}, \qquad \ldots,$$

invariants dans les groupes

$$G_{i,j,0} = G_{i,j}, \qquad G_{i,j,1}, \qquad G_{i,j,2}, \qquad \ldots,$$

et ainsi de suite.

Chaque type de sous-groupes de $\mathcal{G}$ sera obtenu après un nombre fini de pareilles opérations, et une fois seulement.

17. Si l'on remarque qu'un sous-groupe de degré q d'un groupe $\mathcal{G}$ devient de degré zéro, si on le considère comme un sous-groupe du $q^{\text{ième}}$ prolongement normal $\mathcal{G}^{(q)}$, on voit que les différents problèmes partiels auxquels on est ramené peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Étant donné un groupe $\mathcal{G}$, déterminer tous ses types de sous-groupes de degré zéro et pour chacun d'eux le plus grand sous-groupe dans lequel il est invariant.

Remarquons que nous pouvons substituer au système des invariants (de degré zéro) de l'un des sous-groupes cherchés g le système d'équations aux différentielles totales complètement intégrables qui admet ces invariants comme intégrales. Ce système n'est pas un système complètement intégrable quelconque; il jouit, en effet, de la propriété caractéristique que *le plus grand sous-groupe de $\mathcal{G}$ qui laisse invariante chacune de ses intégrales ne laisse invariante aucune fonction d'ordre zéro qui ne soit pas une intégrale de ce système.*

Nous appellerons *systèmes* (Σ) les systèmes complètement intégrables qui jouissent de cette propriété caractéristique.

Cela étant, pour que deux sous-groupes g et g' de $\mathcal{G}$ soient homologues, il faut et il suffit que les systèmes (Σ) correspondants soient *équivalents* par rapport à $\mathcal{G}$. De plus, le plus grand sous-groupe de $\mathcal{G}$ qui laisse invariant le système (Σ) correspondant à g est lui-même le plus grand sous-groupe de $\mathcal{G}$ qui laisse invariante chacune des intégrales de (Σ).

18. Le problème général de la recherche des sous-groupes de degré zéro d'un groupe donné $\mathcal{G}$ peut alors être ramené aux problèmes suivants :

1° *Déterminer tous les types de systèmes complètement intégrables* (Σ), *chaque type étant formé de l'ensemble des systèmes* (Σ) *équivalents entre eux par rapport au groupe* $\mathcal{G}$; *déterminer pour chaque type un système particulier le représentant ;*

2° *Pour chaque système* (Σ), *déterminer la structure du plus grand sous-groupe* G *de* $\mathcal{G}$ *qui le laisse invariant ;*

3° *Pour chaque système* (Σ), *déterminer la structure du plus grand sous-groupe* g *de* G *qui laisse invariante chacune de ses intégrales ;*

4° *Pour chaque système* (Σ), *déterminer les équations de définition et les équations finies du groupe* G *correspondant ;*

5° *Pour chaque système* (Σ), *déterminer les équations de définition et les équations finies du groupe* g *correspondant.*

Les problèmes 1° et 2° ont été résolus dans le Chapitre I ; leur résolution, lorsque le groupe $\mathcal{G}$ est donné par sa structure ou par des équations de définition, n'exige que des opérations *algébriques*. Le problème 3° a été résolu dans un Mémoire précédent [1], où le lecteur trouvera en même temps la manière de reconnaître si les systèmes complètement intégrables qu'on considère sont des systèmes (Σ); la résolution de ce problème 3° n'exige, elle aussi, que des opérations algébriques.

En ce qui concerne les problèmes 4° et 5°, la recherche des équations de définition de g et de G exige, si le groupe $\mathcal{G}$ est donné par

---

[1] E. CARTAN, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXII, 1905, p. 235-243. Le Chapitre où il est ici référé traite au fond le problème de la recherche des sous-groupes *invariants* d'un groupe donné (problème équivalent à celui de la recherche des groupes isomorphes mériédriques d'un groupe donné).

ses équations de définition, l'intégration de ce que M. Vessiot a appelé des systèmes différentiels *automorphes* (¹). Cette même intégration donne leurs équations finies, si le groupe $\mathcal{G}$ est donné par ses équations finies. Nous ne nous occuperons pas ici de ces deux derniers problèmes.

Nous allons appliquer la méthode générale qui vient d'être exposée à la recherche des sous-groupes des groupes finis, à celle des sous-groupes du groupe des représentations conformes dans le plan, enfin, à la recherche des groupes à deux variables, considérés comme sous-groupes du groupe infini général à deux variables.

Sous groupes des groupes finis.

19. Considérons un groupe $\mathcal{G}$ fini d'ordre r que nous pouvons toujours supposer simplement transitif. Si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_r$ les variables qu'il transforme, il est formé de l'ensemble des transformations qui laissent invariantes r expressions différentielles linéaires $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, linéairement indépendantes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$. On a de plus des formules de la forme

$$(1) \qquad \omega'_s = \sum_{(i,k)}^{1,\ldots,r} c_{iks}\,\omega_i\,\omega_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Les coefficients c_{iks} sont les *constantes de structure* du groupe.

Tout sous-groupe g d'ordre ρ est engendré par les transformations de $\mathcal{G}$ qui laissent invariante chaque intégrale d'un système complètement intégrable de $r-\rho$ équations aux différentielles totales. On peut toujours mettre ce système sous la forme

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_1 \;\;\;\;\, = \omega_{\rho+1} - a_{11}\,\omega_1 - a_{12}\,\omega_2 - \ldots - a_{1\rho}\,\omega_\rho = 0, \\ \theta_2 \;\;\;\;\, = \omega_{\rho+2} - a_{21}\,\omega_1 - a_{22}\,\omega_2 - \ldots - a_{2\rho}\,\omega_\rho = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_{r-\rho} = \omega_r \;\;\; - a_{r-\rho,1}\,\omega_1 - a_{r-\rho,2}\,\omega_2 - \ldots - a_{r-\rho,\rho}\,\omega_\rho = 0. \end{array}\right.$$

(¹) E. Vessiot, *Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations* (*Acta mathematica*, t. XXVIII, 1904, p. 307-349).

Toute transformation de g laissant invariant le système (2) ainsi que chacune des expressions ω_i laisse invariant chaque coefficient a_{ik}. *Ces coefficients sont donc des intégrales du système* (2).

En exprimant que le système (2) est complètement intégrable, et en tenant compte de ce que les différentielles da_{ik} s'annulent nécessairement au moyen des équations (2), on obtient des relations finies entre les a_{ik}. Formons en effet θ'_s; en exprimant $\omega_{\rho+1}, \ldots, \omega_r$ au moyen de $\omega_1, \ldots, \omega_\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{r-\rho}$, nous trouvons

$$\theta'_s = \sum_{(i,k)}^{1,\ldots,\rho} A_{iks}\omega_i\omega_k + \sum_{i=1}^{i=r-\rho}\sum_{k=1}^{k=\rho} B_{iks}\theta_i\omega_k + \sum_{(i,k)}^{1,\ldots,r-\rho} C_{iks}\theta_i\theta_k - \sum_{k=1}^{k=\rho} da_{sk}\omega_k$$
$$(s = 1, 2, \ldots, r-\rho).$$

Les A_{iks} sont des polynomes entiers du troisième degré en $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{r-\rho,\rho}$. Ces polynomes doivent être nuls, quels que soient $x_1, \ldots, x_r$:

$$(3) \qquad A_{iks} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \rho;\ s = 1, 2, \ldots, r-\rho).$$

Ce ne sont pas là les seules conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients des équations (2). Il faut encore que la transformation la plus générale qui laisse invariante chacune des intégrales de (2) ne laisse invariante aucune autre fonction des x. Il faut pour cela que les équations

$$\frac{\partial\theta'_s}{\partial\theta_i} = 0 \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, r-\rho)$$

soient des conséquences des équations (2), en supposant qu'on ait remplacé dans θ'_s les da_{sk} par leurs expressions en fonction des θ. Cela donne

$$(4) \qquad da_{sk} = \sum_{i=1}^{i=r-\rho} B_{iks}\theta_i \qquad (s = 1, 2, \ldots, r-\rho;\ k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Les B_{iks} sont d'ailleurs des polynomes entiers du second degré par rapport aux a_{ik}.

En définitive, les coefficients a_{ik} satisfont aux équations finies (3) et aux équations différentielles (4).

20. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on désigne par a_{ik} un système quelconque de valeurs numériques satisfaisant aux relations* (3), *il existe toujours un système de coefficients a_{ik} fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_r$, prenant pour des valeurs particulières des variables les valeurs a_{ik}^0 et satisfaisant aux équations* (3) *et* (4).

Pour faire cette démonstration, nous pouvons sans inconvénient supposer que tous les a_{ik}^0 sont nuls. Le système

$$\omega_{\rho+1} = \omega_{\rho+2} = \ldots = \omega_r = 0$$

est alors complètement intégrable; nous pouvons supposer que $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2}, \ldots, x_r$ en sont des intégrales. Alors le groupe $\mathcal{G}$ transforme entre elles les $r - \rho$ variables $x_{\rho+1}, \ldots, x_r$. Soient

$$\begin{aligned}
X_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_r;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_\rho &= f_\rho(x_1, \ldots, x_1;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),\\
X_{\rho+1} &= f_{\rho+1}(x_{\rho+1}, \ldots, x_r;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_r &= f_r(x_{\rho+1}, \ldots, x_r;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)
\end{aligned}$$

ses équations finies. Désignons par g le sous-groupe formé des transformations de $\mathcal{G}$ qui laissent invariant le système de valeurs particulier $(x_{\rho+1}^0, \ldots, x_r^0)$ des variables $x_{\rho+1}, \ldots, x_r$. Ce sous-groupe est d'ordre ρ et admet par suite $r - \rho$ invariants. Si $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ est l'un quelconque d'entre eux, il en est manifestement de même de $\varphi(x_1, \ldots, x_\rho, x_{\rho+1}^0, \ldots, x_r^0)$. Si l'on a eu soin de choisir $x_{\rho+1}^0, \ldots, x_r^0$ de manière que le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_r)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)}$ ne soit pas identiquement nul lorsqu'on y fait $x_{\rho+1} = x_{\rho+1}^0, \ldots, x_r = x_r^0$, on voit sans difficulté qu'une fonction telle que $\varphi(x_1, \ldots, x_\rho, x_{\rho+1}^0, \ldots, x_r^0)$ ne peut être un invariant de g que si elle se réduit à une constante. Par suite, la différentielle de $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ se réduit à une combinaison linéaire de $dx_{\rho+1}, \ldots, dx_r$, c'est-à-dire de $\omega_{\rho+1}, \ldots, \omega_r$, si dans ses coefficients on fait $x_{\rho+1} = x_{\rho+1}^0, \ldots, x_r = x_r^0$. Autrement dit enfin, le système (2) relatif au sous-groupe g se réduit, si dans les coefficients a_{ik} on fait $x_{\rho+1} = x^0_{\rho+1}, \ldots, x_r = x^0_r$, à

$$\omega_{\rho+1} = \omega_{\rho+2} = \ldots = \omega_r = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

La structure du sous-groupe g s'obtient d'ailleurs facilement. Si l'on désigne par $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_\rho$ ce que deviennent $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\rho$ quand on y fait $x_{\rho+1} = x^0_{\rho+1}, \ldots, x_r = x^0_r$, $dx_{\rho+1} = \ldots = dx_r = 0$, les équations

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_\rho, x^0_{\rho+1}, \ldots, x^0_r;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_\rho &= f_\rho(x_1, \ldots, x_\rho, x^0_{\rho+1}, \ldots, x^0_r;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \end{aligned}$$

où les paramètres α sont liés par les relations

$$\begin{aligned} x^0_{\rho+1} &= f_{\rho+1}(x^0_{\rho+1}, \ldots, x^0_r;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^0_r &= f_r(x^0_{\rho+1}, \ldots, x^0_r;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \end{aligned}$$

définissent un groupe isomorphe à g et ce groupe est formé de l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les ρ expressions $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_\rho$. Or on a

$$\overline{\omega}'_s = \sum_{(i,k)}^{1,\ldots,\rho} c_{iks}\overline{\omega}_i\overline{\omega}_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, \rho),$$

les coefficients de structure c_{iks} étant ceux qui entrent dans les formules (1). *La structure de g est donc définie par ceux des coefficients de structure de $\mathcal{G}$ pour lesquels les indices sont inférieurs ou égaux à ρ.*

Ce qui précède suffirait pour donner *toutes les structures possibles* des sous-groupes de $\mathcal{G}$, mais non pour *classer* ces sous-groupes en *types* de sous-groupes homologues. Reprenons à cet effet l'étude des équations (3) et (4).

21. Le théorème précédent montre que le système des équations aux différentielles totales (4), où l'on suppose les a_{ik} liées par les relations (3), est compatible et, de plus, *est complètement intégrable*; sinon, en effet, il entraînerait comme conséquence des relations finies nou-

velles entre les a_{ik}, ce que nous venons de démontrer être impossible. Cela étant, si l'on regarde les a_{ik} comme les coordonnées d'un point dans un espace à $\rho(r-\rho)$ dimensions, les équations (3) définissent dans cet espace une ou plusieurs multiplicités algébriques indécomposables M_1, M_2, etc.

A chaque sous-groupe g de G les équations (3) et (4) font correspondre une multiplicité μ, tout entière située sur l'une des multiplicités M_1, M_2, ... Cette multiplicité μ est le lieu des points (a_{ik}) obtenu en donnant à $x_1, x_2, \ldots, x_s$ toutes les valeurs possibles. *Pour que deux sous-groupes g et g' soient homologues, il faut manifestement que leurs deux multiplicités μ correspondantes coïncident.*

Réciproquement, deux sous-groupes auxquels correspond une seule et même multiplicité μ sont homologues. Pour l'un des sous-groupes, en effet, les coefficients a_{ik} sont certaines fonctions des $x_1, x_2, \ldots, x_r$; pour l'autre ce sont des fonctions que nous désignerons par A_{ik} des mêmes variables. Les égalités

$$A_{ik}(X_1, X_2, \ldots, X_r) = a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \tag{5}$$

sont compatibles, c'est ce qu'exprime l'hypothèse; c'est-à-dire on peut les vérifier en prenant pour les X des fonctions convenablement choisies des x. Tout revient à démontrer que ces fonctions peuvent être choisies de manière à définir une transformation de G. Or soit h le nombre des dimensions de la multiplicité μ; cela veut dire que les da_{ik} exprimés au moyen des dx_i, ou encore au moyen des θ_i, forment h expressions linéairement indépendantes; supposons qu'elles soient indépendantes par rapport à $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h$. Considérons alors le système

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{ik}(X_1, X_2, \ldots, X_r) = a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_r), \\ \Omega_1 = \omega_1, \quad \ldots, \quad \Omega_\rho = \omega_\rho, \quad \Omega_{\rho+h+1} = \omega_{\rho+h+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_r = \omega_r, \end{array}\right.$$

où l'on désigne par Ω_i ce que devient ω_i quand on remplace les x par les X. Ce système est complètement intégrable, car les équations finies (5) entraînent, en différentiant et en tenant compte de (6),

$$\Omega_{\rho+1} = \omega_{\rho+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{\rho+h} = \omega_{\rho+h}.$$

Il admet donc une infinité de solutions dépendant de $r-h$ constantes arbitraires et chacune de ces solutions définit une transformation du groupe $\mathcal{G}$.

En définitive, *deux sous-groupes auxquels correspond la même multiplicité* μ *sont homologues; la transformation la plus générale du groupe* $\mathcal{G}$ *qui fait passer de l'un à l'autre dépend de* $r-h$ *paramètres arbitraires, si la multiplicité* μ *est à* h *dimensions. Chacun d'eux est donc invariant dans un sous-groupe de* $\mathcal{G}$ *d'ordre* $r-h$.

Pour avoir la structure d'un des groupes correspondant à une certaine multiplicité μ, on remarque qu'on peut donner aux invariants de ce groupe des valeurs finies arbitraires, par exemple les valeurs qu'ils ont pour des valeurs arbitrairement données de $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Cela revient à supposer le groupe défini par les ρ expressions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\rho$. Les covariants sont donnés par les formules (1) dans lesquelles on remplace $\omega_{\rho+1}, \ldots, \omega_r$ par leurs valeurs tirées de (2), en regardant dans ces formules (2) les a_{ik} comme les coordonnées d'un point *particulier* arbitraire de μ. Quant au plus grand sous-groupe G dans lequel g est invariant, il a de même une structure définie par les expressions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ supposées liées par les h relations $\Sigma B_{iks}\theta_i = 0$, où l'on donne aux quantités a_{ik} dont dépendent les B_{iks} les mêmes valeurs que pour le sous-groupe g.

22. La classification des sous-groupes de G dépend donc de la classification des multiplicités μ. Ces dernières seront d'abord classées suivant le nombre de leurs dimensions. Pour celles qui sont contenues dans l'une des multiplicités indécomposables M définies par les équations (3), ce nombre ne dépasse pas une valeur fixe, qui est le rang σ de la matrice des quantités B_{iks} relatives à un point quelconque de M. Si ce rang est inférieur au nombre de dimensions de M, les multiplicités μ au nombre maximum de dimensions contenues dans M dépendent de constantes arbitraires. Les multiplicités μ à $\sigma - 1$ dimensions sont contenues dans la multiplicité obtenue en égalant à zéro tous les déterminants à σ lignes et σ colonnes de la matrice des B_{iks}; elles peuvent dépendre elles aussi de constantes arbitraires; de même pour les multiplicités μ à $\sigma-2, \sigma-3, \ldots, 1, 0$ dimension. Les multiplicités μ à 0 dimension (points) correspondent à des sous-groupes invariants.

Il résulte de là, ce qui était d'ailleurs évident, que les types de sous-groupes dépendent tout au plus de *constantes arbitraires*. Le théorème du n° 20 montre d'ailleurs que par tout point de M passe au moins une multiplicité μ; il en est de même pour toute multiplicité M_1 pour laquelle le rang de la matrice des B_{iks} a une valeur donnée quelconque.

Les calculs qui permettent d'obtenir les structures des sous-groupes d'un groupe donné $\mathcal{G}$ et de classer ces sous-groupes en types sont pratiquement les mêmes que si le groupe était défini par r transformations infinitésimales indépendantes

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad \ldots, \quad X_r f$$

satisfaisant aux relations

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Mais l'interprétation de ces calculs est bien différente. En particulier, au lieu d'avoir les transformations infinitésimales qui engendrent un sous-groupe g d'un groupe $\mathcal{G}$ dont on donne les transformations infinitésimales, on a les équations qui permettent de former les équations de définition de ce sous-groupe g, en supposant données les équations de définition du groupe $\mathcal{G}$.

La méthode classique de recherche des sous-groupes fondée sur la considération des transformations infinitésimales ne peut pas s'étendre au cas des groupes infinis, tandis que la méthode exposée dans les paragraphes précédents s'applique tout aussi bien à tous les groupes finis ou infinis.

Sous-groupes du groupe des représentations conformes du plan.

23. Nous allons d'abord appliquer la méthode à la recherche des sous-groupes du groupe infini $\mathcal{G}$ à deux variables x et y, défini par les équations

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Si l'on pose

$$\omega_1 = dx, \qquad \omega_2 = dy,$$

c'est le groupe le plus général pour lequel ω_1 et ω_2 subissent une transformation linéaire appartenant à un groupe Γ à deux paramètres défini par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = u\omega_1 - v\omega_2, \\ \Omega_2 = v\omega_1 + u\omega_2. \end{cases}$$

Si l'on introduit les variables auxiliaires u et v et si l'on pose

$$\overline{\omega_1} = u\omega_1 - v\omega_2,$$
$$\overline{\omega_2} = v\omega_1 + u\omega_2,$$

on a

$$\overline{\omega'_1} = \overline{\omega_1}\varpi_1 - \overline{\omega_2}\varpi_2,$$
$$\overline{\omega'_2} = \overline{\omega_1}\varpi_2 + \overline{\omega_2}\varpi_1;$$

ces dernières formules définissent la *structure* du groupe.

En changeant un peu les notations, on peut arriver à représenter par les formules suivantes les structures du groupe $\mathcal{G}$ et de ses prolongements normaux successifs $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$, ... :

$$(3) \qquad \begin{cases} \omega'_1 + i\varpi'_1 = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega'_2 + i\varpi'_2 = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_3 + i\varpi_3), \\ \omega'_3 + i\varpi'_3 = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_4 + i\varpi_4) + (\omega_2 + i\varpi_2)(\omega_3 + i\varpi_3), \\ \omega'_4 + i\varpi'_4 = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_5 + i\varpi_5) + 2(\omega_2 + i\varpi_2)(\omega_4 + i\varpi_4), \\ \omega'_5 + i\varpi'_5 = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_6 + i\varpi_6) + 3(\omega_2 + i\varpi_2)(\omega_5 + i\varpi_5) + 2(\omega_3 + i\varpi_3)(\omega_4 + i\varpi_4), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

On pourra prendre, par exemple,

$$\omega_1 + i\varpi_1 = (x_2 + iy_2)(dx_1 + i\,dy_1),$$

$$\omega_2 + i\varpi_2 = -\frac{dx_2 + i\,dy_2}{x_2 + iy_2} + (x_3 + iy_3)(dx_1 + i\,dy_1),$$

$$\omega_3 + i\varpi_3 = -\frac{dx_3 + i\,dy_3}{x_2 + iy_2} + (x_4 + iy_4)(dx_1 + i\,dy_1),$$

$$\omega_4 + i\varpi_4 = -\frac{dx_4 + i\,dy_4}{x_2 + iy_2} + \frac{(x_3 + iy_3)(dx_3 + i\,dy_3)}{(x_2 + iy_2)^2} - \frac{(x_4 + iy_4)(dx_2 + i\,dy_2)}{(x_2 + iy_2)^2} + (x_5 + iy_5)(dx_1 + i\,dy_1),$$

.....

Le groupe $\mathcal{G}^{(n-1)}$ est celui qui transforme les variables x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n. Supposons qu'un sous-groupe g de $\mathcal{G}$ soit de degré n et que l'ordre minimum des invariants de $g^{(n)}$ soit $p-1$, le nombre des invariants indépendants d'ordre minimum $p-1$ sera alors égal à *un* ou à *deux*.

Dans le premier cas, l'invariant sera donné par une équation complètement intégrable de la forme

$$(4) \qquad a_0\omega_p + b_0\varpi_p + a_1\omega_{p-1} + b_1\varpi_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega_1 + b_{p-1}\varpi_1 = 0;$$

dans le second cas, les invariants seront donnés par un système complètement intégrable de la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} \omega_p + a_1\omega_{p-1} + b_1\varpi_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega_1 + b_{p-1}\varpi_1 = 0, \\ \varpi_p + \alpha_1\omega_{p-1} + \beta_1\varpi_{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}\omega_1 + \beta_{p-1}\varpi_1 = 0. \end{cases}$$

24. *Premier cas.* — Nous distinguerons le cas où p est égal à 1 et celui où p est supérieur à 1.

1° $p = 1$. Nous cherchons tous les sous-groupes g de $\mathcal{G}$ qui admettent un invariant et un seul d'ordre zéro. Cet invariant est une intégrale du système

$$(4) \qquad a_0\omega_1 + b_0\varpi_1 = 0.$$

En réduisant le groupe linéaire Γ, nous pouvons faire en sorte que l'équation (4) se réduise à

$$\varpi_1 = 0.$$

Le groupe Γ est alors réduit au sous-groupe γ dont les équations sont

$$(2') \qquad \begin{cases} \Omega_1 = u\omega_1, \\ \Pi_1 = u\varpi_1. \end{cases}$$

On a donc des formules de la forme

$$\omega'_1 = \omega_1\omega_2,$$
$$\varpi'_1 = \varpi_1\omega_2,$$

d'où l'on déduit

$$\omega' = A\omega_1\varpi_1.$$

Le coefficient A est nul; sinon, toute transformation du sous-groupe g laisserait invariante chaque intégrale du système $\varpi_1 = \omega_2 = 0$ et par suite chaque intégrale du système $\varpi_1 = \omega_2 = \omega_1 = 0$ [1]; le sous-groupe g admettrait donc deux invariants d'ordre zéro.

Finalement, le plus grand sous-groupe g_1 qui laisse invariante chaque intégrale de l'équation (4) est invariant dans le sous-groupe fini à trois paramètres G_1 défini par les formules

$$G_1 \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1 \omega_2, \\ \varpi'_1 &= \varpi_1 \omega_2, \\ \omega'_2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

et c'est celui qui laisse invariante chacune des intégrales du système $\varpi_1 = \omega_2 = 0$. Ce sous-groupe g_1 est à un paramètre et sa structure est donnée par $\omega'_1 = 0$.

En résumé, *si $p = 1$, il y a un seul type de sous-groupes g_1; chacun d'eux est à un paramètre et est invariant dans un sous-groupe à trois paramètres.*

On peut prendre

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x_2\, dx_1, \\ \varpi_1 &= x_2\, dy_1, \\ \omega_2 &= -\frac{dx_2}{x_2}. \end{aligned}$$

On a alors le groupe

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= x_1 + a \\ Y_1 &= y_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{invariant dans} \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \alpha x_1 + \beta, \\ Y_1 &= \alpha y_1 + \gamma, \end{aligned} \right.$$

ou encore, en posant $x_1 + iy_1 = z$,

$$\boxed{g_1 \mid Z = z + a} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_1 \mid Z = \alpha z + \beta + i\gamma}$$

25. 2° $p > 1$. Nous cherchons tous les sous-groupes g qui ad-

(1) E. CARTAN, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXII, 1905, p. 237.

mettent un invariant et un seul d'ordre $p-1>0$, invariant défini par l'équation

$$(4) \qquad \theta \equiv a_0\omega_p + b_0\varpi_p + a_1\omega_{p-1} + b_1\varpi_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega_1 + b_{p-1}\varpi_1 = 0.$$

Ici le groupe linéaire $\Gamma^{(p-1)}$, adjoint à $g^{(p-1)}$, laisse invariantes les variables $\omega_1, \varpi_1, \ldots, \omega_{p-1}, \varpi_{p-1}$, et remplace ω_p et ϖ_p respectivement par $\omega_p + u\omega_1 - v\varpi_1$, $\varpi_p + v\omega_1 + u\varpi_1$.

On peut donc faire en sorte que les coefficients a_{p-1} et b_{p-1} soient réduits à zéro. Alors les rapports mutuels des coefficients $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{p-2}, b_{p-2}$ deviennent des invariants d'ordre $\leqq p-1$ du sous-groupe g considéré; par suite, leurs différentielles s'annulent en tenant compte de (4). On peut d'ailleurs supposer que l'un des coefficients a_0 et b_0 a été réduit à l'unité.

Si l'on exprime que l'équation (4) est complètement intégrable, en tenant compte de cette équation elle-même, on trouve que p est nécessairement égal à 2. En effet, le covariant θ' peut s'exprimer, en tenant compte de (4), au moyen de $\omega_1, \varpi_1, \omega_2, \varpi_2, \ldots, \omega_{p-1}, \varpi_{p-1}$, $b_0\omega_p - a_0\varpi_p$; or le coefficient de $\varpi_2(b_0\omega_p - a_0\varpi_p)$ est égal à $p-2$.

Supposons donc $p=2$. L'équation (4) se réduit à

$$(4) \qquad \theta = a_0\omega_2 + b_0\varpi_2 = 0.$$

L'un des coefficients a_0, b_0 étant réduit à l'unité, on doit avoir

$$\theta' = 0$$

[sans quoi toute transformation de g admettrait des invariants ne satisfaisant pas à l'équation (4)]; cela donne

$$da_0 = db_0 = 0,$$
$$\omega_2' = b_0\alpha\omega_1\varpi_1, \qquad \varpi_2' = -a_0\alpha\omega_1\varpi_1.$$

Les coefficients a_0 et b_0 sont donc des constantes; quant au coefficient α, c'est un invariant pour le groupe G qui laisse invariante l'équation (4); c'est en particulier un invariant de g; on a donc une formule telle que

$$d\alpha = \alpha'\theta.$$

Si l'on applique l'identité fondamentale à ω'_2 et ϖ'_2, on obtient

$$\omega_1\varpi_1(\alpha'\theta - 2\alpha\omega_2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$b_0\alpha' = 0, \qquad a_0\alpha' = 2\alpha.$$

a. $\alpha = 0$. Il y a une infinité de types de sous-groupes g_2 caractérisés par la valeur du rapport $\frac{b_0}{a_0}$; chacun d'eux est invariant dans le sous-groupe G_2 à quatre paramètres défini par

$$G_2 \begin{cases} \omega'_1 + i\varpi'_1 = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega'_2 + i\varpi'_2 = 0; \end{cases}$$

g_2 est formé des transformations qui laissent invariante chacune des intégrales du système

$$a_0\omega_2 + b_0\varpi_2 = 0;$$

sa structure s'obtient en posant

$$\omega_2 = b_0\omega, \qquad \varpi_2 = -a_0\omega,$$

d'où

$$g_2 \begin{cases} \omega'_1 = (b_0\omega_1 + a_0\varpi_1)\omega, \\ \varpi'_1 = (-a_0\omega_1 + b_0\varpi_1)\omega, \\ \omega' = 0. \end{cases}$$

On peut prendre, par exemple,

$$\omega_1 + i\varpi_1 = (x_2 + iy_2)(dx_1 + i\,dy_1),$$
$$\omega_2 + i\varpi_2 = -\frac{dx_2 + i\,dy_2}{x_2 + iy_2}.$$

On a alors, si $a_0 = 1$, $b_0 = -m$, le sous-groupe

$$\boxed{g_2 \mid Z = e^{(m+i)a}z + b + ic}$$

invariant dans

$$\boxed{G_2 \mid Z = (\alpha + i\beta)x + \gamma + i\delta}$$

Si $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, on a le sous-groupe

$$\boxed{g_2 \left\{ \, Z = az + b + ic \right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_2 \left\{ \, Z = (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta \right.}$$

b. $\alpha \neq 0$. Alors on a nécessairement $b_0 = 0$, $a_0 = 1$, $\alpha' = 2\alpha$,

$$d\alpha = 2\alpha\omega_2.$$

Toute transformation qui laisse invariant le sous-groupe g laisse invariant α et par suite appartient à g. On a ici

$$\begin{aligned} \omega'_1 + i\varpi'_1 &= (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega'_2 &= 0, \\ \varpi'_2 &= -\alpha\omega_1\varpi_1. \end{aligned}$$

La fonction α de x_1, y_1, x_2, y_2 conserve un signe constant. Par suite, tous les sous-groupes g pour lesquels ce signe est le même sont homologues entre eux. Pour avoir la structure des deux types ainsi obtenus, il suffit de donner à α une valeur numérique constante, par exemple ± 1, ce qui conduit à faire $\omega_2 = 0$. On a alors

$$g_3, g'_3 \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 &= -\varpi_1\varpi_2, \\ \varpi'_1 &= \quad\omega_1\varpi_2, \\ \varpi'_2 &= \mp\,\omega_1\varpi_1. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 \pm 1}(\cos u\,dx_1 - \sin u\,dy_1), \\ \varpi_1 &= \frac{2}{x_1^2 + y_1^2 \pm 1}(\sin u\,dx_1 + \cos u\,dy_1), \\ \varpi_2 &= -du - 2\frac{x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1}{x_1^2 + y_1^2 \pm 1}, \end{aligned}$$

ce qui donne les groupes simples à trois paramètres

$$\boxed{g_3, g'_3 \left\{ \begin{array}{l} Z = \dfrac{(a+ib)z + c + id}{\mp(c-id)z + a - ib} \\ [a^2 + b^2 \pm (c^2 + d^2) = 1] \end{array} \right.}$$

invariants dans eux-mêmes.

26. *Second cas.* — Dans ce second cas, le sous-groupe g admet deux invariants indépendants d'ordre $p-1$. Nous pouvons évidemment supposer $p > 1$, sinon le sous-groupe g se réduirait à la transformation identique. Les invariants sont donnés par le système

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \equiv \omega_p + a_1\omega_{p-1} + b_1\varpi_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega_1 + b_{p-1}\varpi_1 = 0, \\ \theta_2 \equiv \varpi_p + \alpha_1\omega_{p-1} + \beta_1\varpi_{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1}\omega_1 + \beta_{p-1}\varpi_1 = 0. \end{array} \right.$$

Le groupe linéaire $\Gamma^{(p-1)}$ permet de remplacer ω_p et ϖ_p par $\omega_p + u\omega_1 - v\varpi_1$, $\varpi_p + v\omega_1 + u\varpi_1$. On peut donc toujours faire en sorte que dans les équations (5) on ait les relations

$$\alpha_{p-1} = b_{p-1}, \qquad \beta_{p-1} = -a_{p-1}.$$

Alors toute transformation de g qui laisse invariant le système (5) laisse invariantes les expressions ω_1, ϖ_1, ω_2, ϖ_2, ..., ω_p, ϖ_p et, de plus, les coefficients a_i, b_i, α_i, β_i. Ces coefficients sont donc des invariants du système (5).

Si l'on écrit que le système (5) est complètement intégrable, et tout d'abord que θ'_1 et θ'_2 sont nuls en tenant compte des équations (5), on voit que p ne doit pas dépasser l'entier 4. Sinon, en effet, il y aurait dans θ'_1 des termes non nuls en $\omega_3\omega_{p-1}$. Nous avons donc trois cas à examiner :

1° $p = 2$. Le système (5) s'écrit

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \equiv \omega_2 + a\omega_1 + b\varpi_1 = 0, \\ \theta_2 \equiv \varpi_2 + b\omega_1 - a\varpi_1 = 0, \end{array} \right.$$

ou encore

$$(6) \qquad \theta \equiv \theta_1 + i\theta_2 \equiv \omega_2 + i\varpi_2 + A(\omega_1 - i\varpi_1) = 0,$$

A désignant le nombre complexe $a + ib$.

Pour que le sous-groupe g n'admette pas d'autres invariants d'ordre 1 que les intégrales du système (5), il faut que θ' soit de la forme $\alpha\theta_1\theta_2$. Or, on a une formule de la forme

$$\omega_2' + i\varpi_2' = (\omega_1 + i\varpi_1)[B(\omega_1 - i\varpi_1) + C(\omega_2 + i\varpi_2) + D(\omega_2 - i\varpi_2)],$$

où B, C, D désignent des coefficients complexes ordinaires (fonctions de x_1, y_1, x_2, y_2); de plus, on a

$$dA = A'[\omega_2 + i\varpi_2 + A(\omega_1 - i\varpi_1)] + A''[\omega_2 - i\varpi_2 + A_0(\omega_1 + i\varpi_1)],$$

où A_0 désigne le nombre complexe conjugué de A.

Cela étant, on obtient, en formant le covariant θ',

$$\begin{aligned}\theta' = {} & (B + A''A_0)(\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_1 - i\varpi_1) \\ & + C(\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2) - A'(\omega_1 - i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2) \\ & + D(\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 - i\varpi_2) + (A - A'')(\omega_1 - i\varpi_1)(\omega_2 - i\varpi_2).\end{aligned}$$

On en déduit

$$C = D = A' = 0,$$
$$A'' = A, \qquad B = -AA_0 = -(a^2 + b^2).$$

On a, par suite,

$$\begin{aligned}\omega_1' + i\varpi_1' &= (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega_2' + i\varpi_2' &= -(a^2 + b^2)(\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_1 - i\varpi_1), \\ da + i\,db &= (a + ib)(\omega_2 - i\varpi_2) + (a^2 + b^2)(\omega_1 + i\varpi_1).\end{aligned}$$

a. Supposons $a = b = 0$. Alors on a un seul type de sous-groupes g_4 à deux paramètres. Chacun d'eux est invariant dans un sous-groupe G_4 à quatre paramètres, défini par les formules

$$G_4 \left\{ \begin{aligned} & \omega_1' + i\varpi_1' = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ & \omega_2' + i\varpi_2' = 0; \end{aligned} \right.$$

ce sous-groupe g_4 est celui qui laisse invariante chaque intégrale du système complètement intégrable

$$\omega_2 = \varpi_2 = 0\,;$$

sa structure est donnée par

$$g_4 \{ \omega'_1 + i\varpi'_1 = 0.$$

Par exemple, on peut prendre le sous-groupe

$$\boxed{g_4 \{ Z = z + a + ib}$$

invariant dans

$$\boxed{g_4 \{ Z = (\alpha + i\beta)\, z + \gamma + i\delta}$$

b. Supposons $a^2 + b^2 \neq 0$. Alors l'expression même de $da + idb$ montre que a et b sont deux fonctions indépendantes de x_1, y_1, x_2, y_2. Toute transformation qui laisse invariant le sous-groupe g laissant invariantes les fonctions a et b, ce sous-groupe g n'est invariant que dans lui-même. Si l'on donne à ses invariants a et b des valeurs numériques fixes, par exemple, $a = 0$, $b = -1$, on a

$$\omega_2 = \varpi_1, \qquad \varpi_2 = \omega_1,$$

ce qui donne la structure

$$g_5 \begin{cases} \omega'_1 = 2\,\omega_1 \varpi_1, \\ \varpi'_1 = 0. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\omega_1 = \frac{dx_1}{y_1},$$

$$\varpi_1 = \frac{dy_1}{2\,y_1},$$

ce qui donne le groupe

$$\boxed{g_5 \{ Z = az + b}$$

invariant dans lui-même.

2° $p=3$. Le système (5) s'écrit

$$(5)\qquad \begin{cases} \theta_1 \equiv \omega_3 + a_1\omega_2 + b_1\varpi_2 + a_2\omega_1 + b_2\varpi_1 = 0, \\ \theta_2 \equiv \varpi_3 + \alpha_1\omega_2 + \beta_1\varpi_2 + b_2\omega_1 - a_2\varpi_1 = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$(6)\quad \theta \equiv \theta_1 + i\theta_2 \equiv \omega_3 + i\varpi_3 + \mathrm{A}(\omega_2 + i\varpi_2) + \mathrm{B}(\omega_2 - i\varpi_2) + \mathrm{C}(\omega_1 - i\varpi_1) = 0,$$

A, B, C désignant des coefficients complexes ordinaires.

Si nous exprimons que θ' est nul en tenant compte des équations (5) et en négligeant les termes en $\omega_1 + i\varpi_1$, nous obtenons

$$\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0.$$

Nous trouvons ensuite, en exprimant que θ' doit être proportionnel à $\theta_1\theta_2$,

$$d\mathrm{A} = \omega_3 + i\varpi_3 + \mathrm{A}(\omega_2 + i\varpi_2),$$
$$\omega'_3 + i\varpi'_3 = [\omega_2 + i\varpi_2 - \mathrm{A}(\omega_1 + i\varpi_1)](\omega_3 + i\varpi_3).$$

Les parties réelle et imaginaire de A sont deux intégrales indépendantes du système (5). Il y a donc un seul type de sous-groupes g_6; chacun d'eux est à quatre paramètres et n'est invariant que dans lui-même. On a sa structure en donnant, par exemple, à A la valeur zéro, ce qui conduit à faire $\omega_3 = \varpi_3 = 0$. Par suite

$$g_6 \begin{cases} \omega'_1 + i\varpi'_1 = (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega'_2 + i\varpi'_2 = 0. \end{cases}$$

On peut prendre, par exemple, le sous-groupe

$$\boxed{g_6 \mid \mathrm{Z} = (a + ib)z + c + id}$$

invariant dans lui-même.

3° $p=4$. Le système (5) peut s'écrire

$$\theta \equiv \theta_1 + i\theta_2 \equiv \omega_4 + i\varpi_4 + \mathrm{A}(\omega_3 + i\varpi_3) + \mathrm{B}(\omega_3 - i\varpi_3)$$
$$+ \mathrm{C}(\omega_2 + i\varpi_2) + \mathrm{D}(\omega_2 - i\varpi_2) + \mathrm{E}(\omega_1 - i\varpi_1) = 0,$$

les coefficients A, B, C, D, E étant complexes ordinaires.

Si l'on exprime que le système (5) est complètement intégrable, ou, d'une manière plus précise, que θ' est proportionnel à $\theta_1\theta_2$, on trouve

$$A = B = D = E = 0,$$

puis

$$dC = 2(\omega_4 + i\varpi_4) + 2C(\omega_2 + i\varpi_2).$$

Les parties réelle et imaginaire de C étant deux intégrales indépendantes du système (5), il y a un seul type de sous-groupes g_7; ces sous-groupes sont à six paramètres et chacun d'eux n'est invariant que dans lui-même. Sa structure s'obtient en faisant, par exemple, $C = 0$, $\omega_4 \equiv \varpi_4 \equiv 0$, ce qui donne

$$g_7 \left\{ \begin{aligned} \omega'_1 + i\varpi'_1 &= (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_2 + i\varpi_2), \\ \omega'_2 + i\varpi'_2 &= (\omega_1 + i\varpi_1)(\omega_3 + i\varpi_3), \\ \omega'_3 + i\varpi'_3 &= (\omega_2 + i\varpi_2)(\omega_3 + i\varpi_3). \end{aligned} \right.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\begin{aligned} \omega_1 + i\varpi_1 &= (x_2 + iy_2)(dx_1 + i\,dy_1), \\ \omega_2 + i\varpi_2 &= -\frac{dx_2 + i\,dy_2}{x_2 + iy_2} + (x_3 + iy_3)(dx_1 + i\,dy_1), \\ \omega_3 + i\varpi_3 &= -\frac{dx_3 + i\,dy_3}{x_2 + iy_2} + \frac{(x_3 + iy_3)^2}{2(x_2 + iy_2)}(dx_1 + i\,dy_1), \end{aligned}$$

ce qui donne le sous-groupe à six paramètres essentiels

$$\boxed{g_7 \left\{ Z = \frac{(a + ib)z + c + id}{(m + in)z + p + iq} \right.}$$

invariant dans lui-même.

En définitive, le groupe infini

$$Z = f(z)$$

n'admet que des sous-groupes finis :

1 type à 1 paramètre,
2 types à 2 paramètres,
3 types à 3 paramètres (dont l'un dépend d'une constante arbitraire),
1 type à 4 paramètres,
1 type à 6 paramètres.

CHAPITRE III.

LES GROUPES INTRANSITIFS A DEUX VARIABLES.

26. La recherche des groupes à deux variables est identique à la recherche des sous-groupes du groupe infini général à deux variables $\mathcal{G}$, dont les équations finies sont

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= f(x, y), \\ Y &= \varphi(x, y). \end{aligned} \right.
$$

La structure de ce groupe $\mathcal{G}$ est définie par les formules

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\
\varpi' &= \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}.
\end{aligned}
$$

Celle de son premier prolongement normal $\mathcal{G}'$ est définie par les formules précédentes jointes aux suivantes :

$$
\begin{aligned}
\omega'_{10} &= \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11} + \varpi_{10}\omega_{01}, \\
\omega'_{01} &= \omega\omega_{11} + \omega_{01}\omega_{10} + \varpi\omega_{02} + \varpi_{01}\omega_{01}, \\
\varpi'_{10} &= \omega\varpi_{20} + \omega_{10}\varpi_{10} + \varpi\varpi_{11} + \varpi_{10}\varpi_{01}, \\
\varpi'_{01} &= \omega\varpi_{11} + \omega_{01}\varpi_{10} + \varpi\varpi_{02}.
\end{aligned}
$$

D'une manière générale, la structure du $n^{\text{ième}}$ prolongement normal $\mathcal{G}^{(n)}$ est définie au moyen de $(n+1)(n+2)$ expressions différentielles ω, ϖ, ω_{pq}, ϖ_{pq} $(p+q \leq n)$ laissées invariantes par $\mathcal{G}^{(n)}$ et dont les covariants dépendent de $2(n+2)$ expressions différentielles nouvelles ω_{pq}, ϖ_{pq} $(p+q = n+1)$. On a, de plus :

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\omega'_{pq} &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p-1} \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_{p-1}^{\alpha} C_q^{\beta}\, \omega_{\alpha,\beta}\, \omega_{p-\alpha+1,q-\beta} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_p^{\alpha} C_q^{\beta}\, \varpi_{\alpha,\beta}\, \omega_{p-\alpha,q-\beta+1}, \\
\varpi'_{pq} &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} \sum_{\beta=0}^{\beta=q-1} C_p^{\alpha} C_{q-1}^{\beta}\, \varpi_{\alpha,\beta}\, \varpi_{p-\alpha,q-\beta+1} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_p^{\alpha} C_q^{\beta}\, \omega_{\alpha,\beta}\, \varpi_{p-\alpha+1,q-\beta}, \\
\omega'_{0q} &= \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^{\beta}\, \omega_{0\beta}\, \omega_{1,q-\beta} + \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^{\beta}\, \varpi_{0\beta}\, \omega_{0,q-\beta+1}, \\
\varpi'_{p0} &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^{\alpha}\, \varpi_{\alpha,0}\, \varpi_{p-\alpha,1} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^{\alpha}\, \omega_{\alpha,0}\, \varpi_{p-\alpha+1,0}.
\end{aligned} \right.
$$

Dans ces formules ω_{00} et ϖ_{00} doivent être remplacés par ω et ϖ; C_m^n désigne le nombre des combinaisons de m lettres n à n, avec la convention $C_m^0 = 1$.

Nous examinerons dans ce Chapitre le cas où le sous-groupe cherché admet un invariant d'ordre zéro, fonction de x et y (sous-groupes intransitifs); dans le Chapitre suivant, le cas où il n'en admet pas (sous-groupes transitifs).

27. L'invariant, fonction de x, y, est défini par une équation aux différentielles totales complètement intégrable de la forme

$$a\omega + b\varpi = 0. \tag{3}$$

Le groupe $\mathcal{G}$ soumettant ω et ϖ au groupe linéaire Γ

$$\begin{aligned} \Omega &= u\omega + v\varpi, \\ \Pi &= w\omega + s\varpi, \end{aligned}$$

on peut faire en sorte que l'équation (3) se réduise à

$$\varpi = 0. \tag{3}$$

Le groupe linéaire Γ est alors réduit à l'un de ses sous-groupes

$$\begin{aligned} \Omega &= u\omega + v\varpi, \\ \Pi &= \phantom{u\omega +{}} s\varpi, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire, pour le groupe G_1 qui laisse invariante l'équation (3),

$$\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \phantom{\omega\omega_{10} +{}} \varpi\varpi_{01}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Les sous-groupes intransitifs g_1 de degré zéro appartiennent donc tous au même type; chacun d'eux est invariant dans un groupe G_1; les structures respectives de g_1 et G_1 sont

$$g_1 \mid \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \qquad G_1 \left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \phantom{\omega\omega_{10} +{}} \varpi\varpi_{01}. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$g_1 \begin{cases} X = f(x, y) \\ Y = y \end{cases}$	invariant dans	$G_1 \begin{cases} X = f(x, y) \\ Y = \varphi(y) \end{cases}$

28. Nous allons maintenant chercher dans le groupe G_1, parmi les sous-groupes de g_1, les différents types de sous-groupes de degré 1.

La structure de G_1 est définie par les formules (4); celle de ses prolongements normaux successifs peut être définie par les formules (2), à condition de supprimer toutes les expressions ϖ_{pq} pour lesquelles p est différent de zéro. Le nombre des variables transformées par $G_1^{(n)}$ est alors $\dfrac{(n+1)(n+4)}{2}$.

Le système complètement intégrable qui définit les invariants de l'un des sous-groupes cherchés comprendra d'abord les équations

$$\varpi = \varpi_{01} = 0,$$

puis une ou deux équations linéaires entre ω, ω_{10}, ω_{01}.

29. 1° *Les invariants du premier ordre sont définis par trois équations*

$$\varpi = \varpi_{01} = a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\omega = 0. \tag{5}$$

Le groupe G_1' laisse invariantes les expressions ω et ϖ, mais soumet les expressions ω_{10}, ω_{01}, ϖ_{01} au groupe linéaire

$$\begin{cases} \Omega_{10} = \omega_{10} + u\omega + v\varpi, \\ \Omega_{01} = \omega_{01} + v\omega + w\varpi, \\ \Pi_{01} = \varpi_{01} + s\varpi. \end{cases} \tag{6}$$

D'après cela, on peut toujours supposer que dans les équations (5) le coefficient c est nul; le rapport $\dfrac{b}{a}$ $\left(\text{ou } \dfrac{a}{b}\right)$ est alors une fonction d'ordre 1 ou zéro et, par suite, une intégrale du système (5); on peut d'ailleurs supposer que l'un des coefficients a et b est réduit à l'unité. Le groupe linéaire (6) se réduit maintenant à un de ses sous-groupes, celui défini par la relation $au+bv=0$. Cela veut dire que $a\omega_{20}+b\omega_{11}$ s'exprime linéairement au moyen de ω, ϖ, ω_{10}, ω_{01}, ϖ_{01}.

a. $b=0$, $a=1$. Dans ce cas on a

$$\omega'_{10}=\omega(A\omega_{10}+B\omega_{01}+C\varpi_{01})+\varpi\omega_{11}.$$

Pour que le sous-groupe g n'admette pas d'autre invariant que les intégrales du système (5), il faut que les équations

$$\frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\omega}=\frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\varpi}=\frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\omega_{01}}=\frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\omega_{10}}=\frac{\partial\omega'_{10}}{\partial\varpi_{01}}=0$$

n'entraînent pas entre ω, ϖ, ω_{10}, ω_{11}, ϖ_{01} de relation indépendante de (5). Cela montre que les coefficients A, B, C sont nuls.

On a ainsi un seul type de sous-groupes g_2 dont chacun est invariant dans un groupe G_2. Leurs structures respectives peuvent être représentées par les formules

$$g_2\left\{\ \omega'=dy\,\omega_{01},\right. \qquad G_2\left\{\begin{aligned}\omega'&=\omega\omega_{10}+\varpi\omega_{01},\\ \varpi'&=\varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10}&=\varpi\omega_{11}.\end{aligned}\right.$$

On peut prendre par exemple le sous-groupe

$g_2\left\{\begin{aligned}X&=x+f(y)\\ &=y\end{aligned}\right.$	invariant dans	$G_2\left\{\begin{aligned}X&=xf(y)+\varphi(y)\\ Y&=\psi(y)\end{aligned}\right.$

b. $b=1$. Le covariant bilinéaire de $\theta\equiv\omega_{01}+a\omega_{10}$ est

$$\theta'=\overline{\varpi\omega_{02}}+\omega_{01}\omega_{10}+\varpi_{01}\omega_{01}+\omega(A\omega_{10}+B\omega_{01}+C\varpi_{01})+(\alpha\omega_{01}+\alpha'\varpi_{01})\omega_{10},$$

en posant

$$da=\alpha(\omega_{01}+a\omega_{10})+\alpha'\varpi_{01}+\alpha''\varpi.$$

Si l'on exprime que le sous-groupe g n'admet pas d'autre invariant du premier ordre que les intégrales du système (5), on obtient

$$A=B=C=0,\qquad \alpha=-1,\qquad \alpha'=a.$$

On peut alors faire en sorte que α'' soit nul, ce qui réduit encore le groupe linéaire (6) ($w = as - au$).

On a alors

$$da + \omega_{01} + a(\omega_{10} - \varpi_{01}) = 0.$$

Toute transformation qui laisse invariant le système (5) laisse invariant a. Si l'on donne à l'invariant a une valeur numérique fixe, par exemple zéro, on a

$$\omega_{01} \equiv 0.$$

On obtient ainsi un type de groupes g_3 dont chacun est invariant dans un groupe G_3; leurs structures respectives sont données par

$$g_3 \left\{ \omega' = \omega\omega_{10}, \right. \qquad G_3 \left\{ \begin{array}{l} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{array} \right.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_3 \left\{ \begin{array}{l} X = f(x) \\ Y = y \end{array} \right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_3 \left\{ \begin{array}{l} X = f(x) \\ Y = \varphi(y) \end{array} \right.}$$

30. 2° *Les invariants du premier ordre de g sont définis par quatre équations*

$$(7) \qquad \varpi = \varpi_{01} = \omega_{10} + a\omega = \omega_{01} + b\omega = 0.$$

Le groupe linéaire (6) permet de réduire les coefficients a et b à la valeur commune zéro; cela réduit le groupe linéaire (6) à l'un de ses sous-groupes ($u = v = 0$). Les expressions ω_{20} et ω_{11} deviennent des combinaisons linéaires de ω, ϖ, ω_{10}, ω_{01}, ϖ_{01}.

On a, par suite, des formules de la forme

$$\begin{aligned} \omega'_{10} &= A\omega\varpi + B\omega\omega_{10} + C\omega\omega_{01} + E\omega\varpi_{01} + F\varpi\omega_{10} + G\varpi\omega_{01} + H\varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{01} &= F\omega\omega_{10} + G\omega\omega_{01} + H\omega\varpi_{01} + \omega_{01}\omega_{10} + \varpi_{01}\omega_{01} + \varpi\omega_{02}. \end{aligned}$$

En exprimant que le sous-groupe g n'admet pas d'autre invariant du premier ordre que les intégrales du système (7), on obtient

$$A = B = C = E = F = G = H = 0.$$

On a ainsi un type de groupes g_4 dont chacun est invariant dans un type G_4. Leurs structures respectives sont définies par les formules

$$g_4 \mid \omega' = 0, \qquad G_4 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} = 0. \end{cases}$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_4 \begin{cases} X = x + a \\ Y = y \end{cases}} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_4 \begin{cases} X = ax + f(y) \\ Y = \varphi(y) \end{cases}}$$

Nous avons ainsi obtenu tous les types de groupes intransitifs à deux variables de degré inférieur ou égal à 1, *et, pour chacun de ces groupes, le plus grand groupe dans lequel il est invariant.*

31. Nous allons maintenant reprendre successivement chacun des quatre groupes G_1, G_2, G_3, G_4, et, pour chacun d'eux, rechercher tous les types de sous-groupes contenus respectivement dans les groupes g_1, g_2, g_3, g_4 et n'admettant pas d'autres invariants d'ordres 0 et 1 que les invariants de g_1, g_2, g_3, g_4. D'ailleurs, pour G_4, le problème est tout résolu, g_4 ne pouvant avoir d'autre sous-groupe que lui-même et la transformation identique.

I. *Groupes admettant les mêmes invariants d'ordres* 0 *et* 1 *que* g_1. — Si nous considérons le $n^{\text{ième}}$ prolongement normal $G_1^{(n)}$ de G_1, il transforme entre elles $\dfrac{(n+1)(n+4)}{2}$ variables, intégrales des équations

$$\varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = \omega = \omega_{pq} = 0 \qquad (p + q \leqq n).$$

Si g est un des groupes cherchés, le système complètement intégrable qui donne ses invariants d'ordre inférieur ou égal à n contient certainement les $n+1$ équations

$$(8) \qquad \varpi = \varpi_{01} = \varpi_{02} = \ldots = \varpi_{0n} = 0;$$

mais il peut en contenir d'autres. Nous considérerons la plus petite valeur de n pour laquelle ce cas se présente, c'est-à-dire pour laquelle

g admet plus de $n+1$ invariants d'ordre inférieur ou égal à n. Cet entier n est au moins égal à 2. Le système complètement intégrable qui donne ces invariants s'obtiendra en ajoutant aux équations (8) une ou plusieurs équations de la forme

$$(9) \qquad \theta \equiv \sum \mathrm{A}_{pq}\omega_{pq} + \mathrm{A}\omega = 0,$$

dans chaque équation, l'un au moins des coefficients A_{pq} pour lesquels $p+q=n$ étant différent de zéro. On pourra d'ailleurs toujours faire en sorte que les coefficients A de ω soient tous nuls, ce qui réduira le groupe linéaire auquel $\mathrm{G}_1^{(n)}$ soumet les expressions ω_{pq} à l'un de ses sous-groupes. Les coefficients restants pourront toujours être supposés alors des invariants d'ordre inférieur ou égal à n.

Exprimons que chaque covariant θ' est nul en tenant compte des équations (8) et (9), et ne conservons d'abord dans θ' que les termes qui contiennent en facteur ω_{10} et ω_{01}, en négligeant tous ceux qui contiennent ω, ϖ, ϖ_{01}, ..., ϖ_{0n}. En se servant des formules (2), on obtient ainsi

$$\theta' = \omega_{10}\sum (p-1)\mathrm{A}_{pq}\omega_{pq} + \omega_{01}\sum q\,\mathrm{A}_{pq}\omega_{p+1,q-1}.$$

Ce résultat montre que l'on a des formules de la forme

$$(10) \qquad \sum (p-1)\mathrm{A}_{pq}\omega_{pq} = \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01},$$

$$(11) \qquad \sum q\,\mathrm{A}_{pq}\omega_{p+1,q+1} = \beta\omega_{10} + \gamma\omega_{01}.$$

De la formule (10) on déduit qu'on peut toujours supposer que dans chaque équation (9) les indices p des expressions ω_{pq} $(p+q \geqq 2)$ ont tous la même valeur. De la formule (11) on déduit que, pour l'une au moins des équations (9), la valeur commune de cet indice p est égale à n. On peut donc prendre

$$\theta \equiv \omega_{n0} + a\omega_{10} + b\omega_{01};$$

les formules (10) et (11) montrent alors que b doit être nul.

Finalement, *l'une des équations* (9) *qui déterminent avec* (8) *les in-*

variants d'ordre inférieur ou égal à n est de la forme

$$\theta \equiv \omega_{n0} + a\omega_{10} = 0.$$

D'après cela, le nombre n ne peut pas dépasser 3, sinon, en effet, il y aurait dans θ' un terme en $\omega_{20}\omega_{n-1,0}$ qui ne pourrait pas se détruire, car son coefficient est $C_{n-1}^2 - 1 = \frac{n(n-3)}{2} \neq 0$.

Nous avons donc à examiner les deux cas $n = 2$, $n = 3$.

1° $n = 3$. Les cinq expressions ω, ω_{10}, ω_{20}, ω_{30}, ϖ peuvent servir à définir un groupe $\overline{G_1}$ holomorphe à G_1, par les formules

$$(12) \qquad \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega\omega_{30} + \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \omega'_{30} = \omega\omega_{40} + 2\omega_{10}\omega_{30} + \varpi\omega_{31}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

Tous les groupes que nous cherchons sont des sous-groupes du groupe $g_{1,1}$ dont les invariants sont définis par les équations

$$\varpi = 0,$$
$$\theta \equiv \omega_{30} + a\omega_{10} = 0.$$

En posant

$$da = a'\varpi + a''(\omega_{30} + a\omega_{10}),$$

on obtient $a'' = 2$ et l'on peut alors faire en sorte que a' soit nul, en réduisant le groupe linéaire auquel sont soumis ω, ω_{10}, ω_{20}, ω_{30}. On a donc

$$da = 2(\omega_{30} + a\omega_{10}).$$

Il y a, par suite, un seul type de groupes $g_{1,1}$. Le plus grand groupe $G_{1,1}$ qui le laisse invariant laisse invariant a; sa structure peut être obtenue en faisant $a = 0$, c'est-à-dire $\omega_{30} = 0$. Les structures respectives de $g_{1,1}$ et $G_{1,1}$ sont données par les formules

$$g_{1,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + dy\,\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + dy\,\omega_{21}, \end{cases} \qquad G_{1,1} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_{1.1}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{xf(y)+\varphi(y)}{x\psi(y)+1} \\ Y &= y \end{aligned}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1.1}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{xf(y)+\varphi(y)}{x\psi(y)+1} \\ Y &= \chi(y) \end{aligned}\right.}$$

Pour achever la détermination des groupes qui correspondent au cas $n=3$, il faut rechercher les sous-groupes de $G_{1,1}$ qui admettent tous les invariants de $g_{1,1}$ et en plus certains autres d'ordre supérieur ou égal à 3. La structure des prolongements $G_{1,1}^{(n)}$ de $G_{1,1}$ est donnée encore par les formules (2), où l'on supprimerait tous les ω_{pq} pour lesquels p est supérieur ou égal à 3. On a donc

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_{2q} &= \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^\beta(\omega_{1\beta}\omega_{2,q-\beta}+\varpi_{0\beta}\omega_{2,q-\beta+1}), \\ \omega'_{1q} &= \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^\beta(\omega_{0\beta}\omega_{2,q-\beta}+\varpi_{0\beta}\omega_{1,q-\beta+1}), \\ \omega'_{0q} &= \sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^\beta(\omega_{0\beta}\omega_{1,q-\beta}+\varpi_{0\beta}\omega_{0,q-\beta+1}). \end{aligned}\right.$$

Supposons que les invariants d'ordre n des groupes cherchés soient donnés par les équations

$$\varpi=\varpi_{01}=\ldots=\varpi_{0q}=0,$$

et, en outre, par au moins une équation de la forme

$$(14)\qquad \theta = A\omega_{2,n-2}+B\omega_{1,n-1}+C\omega_{0,n}+\ldots=0,$$

l'un des coefficients A, B, C étant différent de zéro. Les formules (13) montrent alors que, pour l'une au moins des équations (14), on a $A \neq 0$, $B = C = 0$; la première formule (13) montre alors que θ' a un terme $\omega_{11}\omega_{2,n-3}$ qui ne peut pas se détruire. Il n'y a donc pas d'autre groupe possible que $g_{1,1}$ dans le cas $n = 3$.

2° $n = 2$. On montre absolument, comme dans le cas $n = 3$, que tous les groupes cherchés sont des sous-groupes d'un groupe $g_{1,2}$ invariant dans un groupe $G_{1,2}$; les structures respectives de $g_{1,2}$ et $G_{1,2}$ sont

$$g_{1,2} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \phantom{\omega\omega_{10} +} dy\,\omega_{11}, \end{cases} \qquad G_{1,2} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \phantom{\omega\omega_{10} +} \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = \phantom{\omega\omega_{10} +} \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_{1,2} \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = y \end{cases}}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1,2} \begin{cases} X = xf(y) + \varphi(y) \\ Y = \psi(y) \end{cases}}$$

La structure du prolongement $G_{1,2}^{(n)}$ de $G_{1,2}$ est donnée par les formules (2), où l'on supprime tous les ω_{pq} pour lesquels p est supérieur ou égal à 2. On a donc

$$(15) \qquad \begin{cases} \omega'_{1q} = \displaystyle\sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^\beta\ \varpi_{0\beta}\omega_{1,q-\beta+1}, \\ \omega'_{0q} = \displaystyle\sum_{\beta=0}^{\beta=q} C_q^\beta(\omega_{0\beta}\omega_{1,q-\beta} + \varpi_{0\beta}\omega_{0,q-\beta+1}). \end{cases}$$

Soit $n \geqq 2$ le plus petit entier pour lequel le système complètement intégrable qui donne les invariants d'ordre $\leqq n$ d'un des groupes cherchés (différents de $g_{1,2}$) contienne d'autres équations que

$$(16) \qquad \varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = 0;$$

alors il en contiendra une ou deux autres de la forme

$$\begin{aligned} & A_{n-1}\omega_{1,n-1} + A_{n-2}\omega_{1,n-2} + \ldots \\ & \qquad + A_0\omega_{10} + B_n\omega_{0n} + B_{n-1}\omega_{0,n-1} + \ldots + B_1\omega_{01} + B\omega = 0; \end{aligned}$$

l'un des coefficients de ω pourra être réduit à zéro si l'un des coefficients B_n est différent de zéro. Les formules (15) montrent en tous les cas que l'une des équations est de la forme

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} + a_1\omega_{1,n-2} + \ldots + a_{n-1}\omega_{10} + b\omega = 0. \tag{17}$$

Tous les groupes cherchés sont des sous-groupes du groupe dont les invariants sont définis par les équations (16) et (17). On peut se borner d'ailleurs à considérer le groupe $\overline{G_{1,2}^{(n)}}$, holomorphe de $G_{1,2}^{(n)}$, défini par les seules expressions ω, ω_{10}, ω_{11}, ..., $\omega_{1,n-1}$, ϖ, ϖ_{01}, ..., $\varpi_{0,n-1}$. On voit tout de suite, en prenant dans θ' le terme en $\omega\omega_{10}$, que b doit être nul; que, de plus, a_1, a_2, ..., a_{n-1} sont des intégrales du système

$$\varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0,n-1} = 0.$$

On trouve

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{l} da_1 - a_1\varpi_{01} + C_{n-1}^2 \varpi_{02} + \alpha_1\varpi = 0, \\ da_2 - 2a_2\varpi_{01} + C_{n-2}^2 a_1\varpi_{02} + C_{n-1}^3\varpi_{03} + \alpha_2\varpi = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ da_{n-2} - (n-2)a_{n-2}\varpi_{01} + C_2^2 a_{n-3}\varpi_{02} + C_3^3 a_{n-4}\varpi_{03} + \ldots + \varpi_{0,n-1} + \alpha_{n-2}\varpi = 0, \\ da_{n-1} - (n-1)a_{n-1}\varpi_{01} + \alpha_{n-1}\varpi = 0. \end{array} \right.$$

On peut enfin toujours supposer le coefficient α_{n-2} égal à zéro.

Les $(n-2)$ premières formules (18) montrent que a_1, a_2, ..., a_{n-2} sont $n-2$ invariants indépendants du groupe g cherché, et aussi du groupe G dans lequel g est invariant. Comme γ n'est pas une fonction de ces invariants on peut, sans inconvénient, donner à ces invariants des valeurs numériques fixes, par exemple zéro. On a alors

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} + a_{n-1}\omega_{10} = 0, \tag{17}$$

puis des identités de la forme

$$(19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi_{02} \equiv b_1 \varpi, \\ \varpi_{03} \equiv b_2 \varpi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi_{0,n-2} \equiv b_{n-3}\varpi, \\ \varpi_{0,n-1} \equiv 0. \end{array} \right.$$

Les coefficients a_{n-1}, b_1, b_2, $\ldots$, b_{n-3} satisfont alors aux relations, faciles à démontrer,

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} db_1 = b_1\varpi_{01} + c_1\varpi, \\ db_2 = 2b_2\varpi_{01} + c_2\varpi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ db_{n-3} = (n-3)b_{n-3}\varpi_{01} + c_{n-3}\varpi, \\ da_{n-1} = (n-1)a_{n-1}\varpi_{01} + c_{n-1}\varpi. \end{array}\right.$$

Cela étant, nous distinguerons trois cas :

a. Les coefficients a_{n-1}, b_1, b_2, $\ldots$, b_{n-3} *sont tous nuls.* — Alors, on obtient un seul type de sous-groupes que nous appellerons $g_{1,3}$. Chacun d'eux est invariant dans un sous-groupe $G_{1,3}$. Les structures de $g_{1,3}$ et $G_{1,3}$ sont respectivement données par les formules :

$$g_{1,3}\left\{\begin{array}{l} \omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = dy\,\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = dy\,\omega_{12}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-3} = dy\,\omega_{1,n-2}, \\ \omega'_{1,n-2} = 0, \end{array}\right. \qquad G_{1,3}\left\{\begin{array}{l} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{array}\right.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_{1,3}\left\{\begin{array}{l} X = x\,e^{a_1y^{n-2}+a_2y^{n-3}+\ldots+a_{n-2}y+a_{n-1}} + f(y) \\ Y = y \end{array}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1,3}\left\{\begin{array}{l} X = x f(y) + \varphi(y) \\ Y = ay + b \end{array}\right.}$$

b. Les coefficients a_{n-1}, b_1, b_2, $\ldots$, b_{n-3} *ne sont pas tous nuls.* — Alors, si l'on considère l'un d'entre eux, supposé différent de zéro, on peut lui donner sans inconvénient une valeur numérique constante, par exemple, 1. On a alors l'identité

$$\varpi'_{01} = b_0 \varpi.$$

Nous considérerons d'abord le cas où $b_0, b_1, \ldots, b_{n-3}, a_{n-1}$ sont des *constantes*. Alors on a une infinité de types de sous-groupes, suivant les valeurs numériques de ces $n-1$ constantes (dont l'une est égale à 1). Chacun de ces sous-groupes, que nous appellerons $g_{1,4}$, est invariant dans un sous-groupe $G_{1,4}$. Les structures de $g_{1,4}$ et $G_{1,4}$ sont respectivement données par les formules

$$g_{1,4}\left\{\begin{array}{ll}
\omega' & = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01}, \\
\omega'_{10} & = dy\,\omega_{11}, \\
\omega'_{11} & = dy(\omega_{12} + b_0\omega_{11}), \\
\omega'_{12} & = dy(\omega_{13} + 2b_0\omega_{12} + b_1\omega_{11}), \\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
\omega'_{1,n-3} & = dy\phantom{(-a_{n-1}\omega_{10}}(\omega_{1,n-2} + C^1_{n-3}b_0\omega_{1,n-3} + C^2_{n-3}b_1\omega_{1,n-4} + \ldots + b_{n-4}\omega_{11}), \\
\omega'_{1,n-2} & = dy(-a_{n-1}\omega_{10} + C^1_{n-2}b_0\omega_{1,n-2} + C^2_{n-2}b_1\omega_{1,n-3} + \ldots + b_{n-3}\omega_{11}),
\end{array}\right.$$

$$G_{1,4}\left\{\begin{array}{ll}
\omega' & = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\
\varpi'_{10} & = \varpi\omega_{11}, \\
\varpi' & = 0.
\end{array}\right.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_{1,4}\left\{\begin{array}{l} X = x\,e^{P(y)} + f(y) \\ Y = y \end{array}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1,4}\left\{\begin{array}{l} X = x f(y) + \varphi(y) \\ Y = y + a \end{array}\right.}$$

en désignant par $P(y)$ la solution générale d'une équation différentielle linéaire en $P(y)$, à coefficients *constants* d'ordre $n+1$, l'équation caractéristique étant

$$(21)\quad \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0-r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & 2b_0-r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 3b_1 & 3b_0-r & \dots & 0 \\ . & .. & \dots & \dots\dots & \dots & . \\ -a_{n-1} & b_{n-3} & C_{n-2}^1 b_{n-4} & C_{n-2}^2 b_{n-5} & \dots & (n-2)b_0-r \end{vmatrix} = 0.$$

L'un des coefficients a_{n-1}, b_1, b_2, ..., b_{n-3} est égal à 1.

c. Parmi les coefficients b_0, b_1, ..., a_{n-1}, il y en a qui sont des fonctions non constantes de y. Alors on arrive à un résultat analogue. L'un des coefficients b_1, b_2, ..., b_{n-3}, a_{n-1} ayant déjà la valeur 1, l'un des coefficients restants b_0, b_1, ..., b_{n-3}, a_{n-1} est une fonction non constante qu'on peut toujours prendre égale à y. Alors, on a une formule telle que

$$dy = m(y)\,\varpi.$$

Il reste alors $n-2$ fonctions arbitraires de y. A chaque choix de ces fonctions correspond un type de groupes $g_{1,5}$; chacun d'eux est invariant dans un groupe $G_{1,5}$ intransitif. Les structures de $g_{1,5}$ et de $G_{1,5}$ sont données par les formules

$$g_{1,5}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \dfrac{dy}{m(y)}\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{dy}{m(y)}\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \dfrac{dy}{m(y)}(\omega_{12} + b_0\omega_{11}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{1,n-2} = \dfrac{dy}{m(y)}(-a_{n-1}\omega_{10} + C_{n-2}^1 b_0\omega_{1,n-2} + \dots + b_{n-3}\omega_{11}), \end{cases}$$

$$G_{1,5}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \dfrac{dy}{m(y)}\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \dfrac{dy}{m(y)}\omega_{11}. \end{cases}$$

On peut prendre, par exemple, le groupe

$$\boxed{g_{1,5}\left\{\begin{array}{l} X = x e^{P(y)} + f(y) \\ Y = y \end{array}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1,5}\left\{\begin{array}{l} X = x f(y) + \varphi(y) \\ Y = y \end{array}\right.}$$

en désignant par $P(y)$ la solution générale d'une équation différentielle linéaire en $P(y)$, d'ordre $n-1$, à coefficients fonctions de y, d'équation caractéristique

$$\left.\begin{array}{cccccc} -m(y)r & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 - m(y)r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & 2b_0 - m(y)r & 0 & \dots & 0 \\ . & .. & \dots\dots\dots\dots & . & \dots & 0 \\ -a_{n-1} & b_{n-3} & C^1_{n-2} b_{n-4} & C^2_{n-2} b_{n-5} & \dots & (n-2)b_0 - m(y)r \end{array}\right| = 0$$

Rappelons que l'un des coefficients $b_1, b_2, \dots, b_{n-3}, a_{n-1}$ est égal à 1, et l'un des coefficients $b_0, b_1, \dots, b_{n-3}, a_{n-1}$ est égal à y.

On a, dans l'analyse précédente, laissé un cas de côté, celui où $n = 2$. Le système (18) se réduit alors à

$$da_1 - a_1 \varpi_{01} = 0.$$

Si $a_1 \neq 0$, on retombe sur un groupe du type $g_{1,4}$. Mais, si a_1 est nul, on obtient le groupe suivant :

$$\boxed{g_{1,6}\left\{\begin{array}{l} X = a x + f(y) \\ Y = y \end{array}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1,6}\left\{\begin{array}{l} X = x f(y) + \varphi(y) \\ Y = \psi(y) \end{array}\right.}$$

avec les structures respectives, pour $g_{1,6}$ et $G_{1,6}$,

$$g_{1,6}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01},\\ \omega'_{10} = 0,\end{cases}\qquad G_{1,6}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}.\end{cases}$$

32. Il nous faut maintenant reprendre successivement les groupes $G_{1,3}$, $G_{1,4}$, $G_{1,5}$, $G_{1,6}$ et, pour chacun d'eux $G_{1,i}$, rechercher s'il admet des sous-groupes contenus dans $g_{1,i}$ et pour lequel le système complètement intégrable qui donne les invariants contient une équation dépendant des ω_{0q}. On voit facilement que cela n'est possible que pour $G_{1,6}$.

Si nous considérons le groupe $G_{1,6}^{(n)}$, $n^{\text{ième}}$ prolongement normal de $G_{1,6}$, le système qui donne les invariants d'ordre n d'un sous-groupe quelconque de $g_{1,6}$ contient les équations

$$(22)\qquad \begin{cases}\varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = 0,\\ \omega_{11} = \omega_{12} = \ldots = \omega_{1,n-1} = 0.\end{cases}$$

Supposons que $n \geqq 2$ soit le plus petit entier pour lequel le système contienne en outre une équation de la forme

$$(23)\qquad \theta = \omega_{0n} + a_1\omega_{0,n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega_{01} + a_n\omega + b\omega_{10} = 0.$$

Le groupe $G_{1,6}^{(n)}$ soumet les expressions $\omega_{1,n-1}$, ω_{0n}, ϖ_{0n} au groupe linéaire

$$(24)\qquad \begin{cases}\Omega_{1,n-1} = \omega_{1,n-1} + u\varpi,\\ \Omega_{0n} = \omega_{0n} + u\omega + v\varpi,\\ \Pi_{0n} = \varpi_{0n} + w\varpi.\end{cases}$$

On peut, en réduisant ce groupe linéaire à l'un de ses sous-groupes $(u = 0)$, faire en sorte que dans l'équation (23) le coefficient a_n soit nul. L'expression ω_{1n} sera alors identiquement une combinaison linéaire des expressions ω, ϖ, $\omega_{1q}(q \leqq n-1)$, $\omega_{0q}(q \leqq n)$, $\varpi_{0q}(q \leqq n)$.

Si l'on forme θ' et si l'on exprime que le groupe g n'admet pas d'autre invariant du $n^{\text{ième}}$ ordre que les intégrales des équations (23) et (24), on obtient d'abord la formule suivante :

$$db = -\theta + nb\varpi_{01} + \beta\varpi.$$

On peut faire en sorte que β soit nul, en réduisant encore le groupe linéaire (24) à l'un de ses sous-groupes ($u = v = 0$); l'expression $\omega_{0,n+1}$ devient alors identiquement une combinaison linéaire de $\omega, \omega_{10}, \ldots, \omega_{1,n-1}, \omega_{01}, \ldots, \omega_{0n}, \varpi, \varpi_{01}, \ldots, \varpi_{0n}$.

Toute transformation qui laisse g invariant laisse invariante la fonction b. On peut donner à cet invariant b une valeur numérique fixe, par exemple o; on a alors identiquement $\theta \equiv 0$ pour toute transformation qui laisse g invariant.

On a ensuite

$$
\begin{aligned}
da_1 &= -C_n^2\varpi_{02} + a_1\varpi_{01} + C_n^1\omega_{11} + A_1\varpi,\\
da_2 &= -C_n^3\varpi_{03} - C_{n-1}^2 a_1\varpi_{02} + 2a_2\varpi_{01} + C_n^2\omega_{12} + C_{n-1}^1 a_1\omega_{11} + A_2\varpi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
da_\alpha &= -C_n^{\alpha+1}\varpi_{0\alpha+1} - C_{n-1}^{\alpha} a_1\varpi_{0\alpha} - C_{n-2}^{\alpha-1} a_2\varpi_{0\alpha-1} + \ldots + \alpha a_\alpha\varpi_{01} + C_n^\alpha\omega_{1\alpha}\\
&\qquad + C_{n-1}^{\alpha-1}a_1\omega_{1\alpha-1} + \ldots + C_{n-\alpha+1}^1 a_{\alpha-1}\omega_{11} + A_\alpha\varpi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
da_{n-1} &= -\varpi_{0n} - a_1\varpi_{0n-1} - a_2\varpi_{0n-2} + \ldots + (n-1)a_{n-1}\varpi_{01} + n\omega_{1,n-1}\\
&\qquad + (n-1)a_1\omega_{1,n-2} + \ldots + 2a_{n-2}\omega_{11} + A_{n-1}\varpi.
\end{aligned}
$$

On peut enfin réduire A_{n-1} à la valeur zéro en réduisant encore le groupe linéaire (24) à la transformation identique. Le plus grand groupe G dans lequel g est invariant est donc *fini*.

Les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sont manifestement $n-1$ fonctions indépendantes. On peut leur donner des valeurs numériques fixes, par exemple zéro, et l'on a alors identiquement, pour le groupe G,

$$
\begin{aligned}
\omega_{0n} &= 0,\\
\omega_{11} &= \frac{C_n^2}{C_n^1}\varpi_{02} + b_1\varpi,\\
\omega_{12} &= \frac{C_n^3}{C_n^2}\varpi_{03} + b_2\varpi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega_{1,n-2} &= \frac{C_n^{n-1}}{C_n^{n-2}}\varpi_{0,n-1} + b_{n-2}\varpi,\\
\omega_{1,n-1} &= \frac{1}{n}\varpi_{0n}.
\end{aligned}
$$

Supposons d'abord $n = 2$. Les identités précédentes se réduisent à

$$\omega_{02} \equiv \omega_{11} - \frac{1}{2}\varpi_{02} \equiv 0.$$

Le groupe G a sa structure donnée par les formules

$$G_{1,7}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} &= \frac{1}{2}\varpi\varpi_{02},\\ \omega'_{01} &= \frac{1}{2}\omega\varpi_{02} + \omega_{01}\omega_{10} + \varpi_{01}\omega_{01},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02} + \lambda\omega\varpi,\end{aligned}\right.$$

la dernière équation étant une conséquence des premières. Le fait que le groupe g ne doit pas admettre d'invariants du deuxième ordre autres que ceux considérés montre que λ est nul.

On a donc un seul type de groupes g, que nous appellerons $g_{1,7}$, à trois paramètres, invariants dans le groupe $G_{1,7}$ à six paramètres; la structure de $g_{1,7}$ s'obtient en supprimant ϖ, ϖ_{01} et ϖ_{02}, ce qui donne

$$g_{1,7}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10},\\ \omega'_{10} &= 0,\\ \omega'_{01} &= \omega_{01}\omega_{10}.\end{aligned}\right.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_{1,7}\left\{\begin{aligned} X &= ax + by + c\\ Y &= y\end{aligned}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1,7}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{ax + by + c}{py + q}\\ Y &= \frac{my + n}{py + q}\end{aligned}\right.}$$

Supposons maintenant $n > 2$. On obtient alors les formules suivantes :

$$db_1 \quad = \frac{n+1}{2.3} \varpi_{03} + 2 b_1 \varpi_{01} + c_1 \varpi,$$

$$db_2 \quad = \frac{(n+1)}{3.4} \varpi_{04} + b_1 \varpi_{01} + 3 b_2 \varpi_{02} + c_2 \varpi,$$

. . . . ,

$$db_\alpha \quad = \frac{n+1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \varpi_{0,\alpha+2} + b_1 \varpi_{0\alpha} + \frac{\alpha}{1} b_2 \varpi_{0,\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} b_3 \varpi_{0,\alpha-2} + \dots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} b_{\alpha-1} \varpi_{02} + (\alpha+1) b_\alpha \varpi_{01} + c_\alpha \varpi,$$

. . . . ,

$$db_{n-2} = \frac{n+1}{(n-1)n} \varpi_{0n} + b_1 \varpi_{0,n-2} + \frac{n-2}{1} b_2 \varpi_{0,n-3} + \dots$$
$$+ \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} b_{n-3} \varpi_{02} + (n-1) b_{n-2} \varpi_{01} + c_{n-2} \varpi,$$

$$0 = \frac{1}{n} \varpi_{0,n+1} + b_1 \varpi_{0,n-1} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} b_{n-2} \varpi_{02} + \lambda \varpi.$$

On voit que les coefficients $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$ sont $n-2$ fonctions indépendantes de leurs arguments. On peut, sans inconvénient, leur donner des valeurs numériques fixes, par exemple zéro, et l'on a alors des *identités* de la forme

$$\varpi_{03} = c_1 \varpi,$$
$$\varpi_{04} = c_2 \varpi,$$
$$\dots\dots\dots,$$
$$\varpi_{0n} = c_{n-2} \varpi.$$

Si l'on calcule les différentielles des coefficients c_i, on trouve enfin

$$dc_1 \quad = \quad 3 c_1 \varpi_{01} + h_1 \varpi,$$
$$dc_2 \quad = 2 c_1 \varpi_{02} + 4 c_2 \varpi_{01} + h_2 \varpi,$$

. . . . ,

$$dc_\alpha \quad = \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{2} c_{\alpha-1} \varpi_{02} + (\alpha+2) c_\alpha \varpi_{01} + h_\alpha \varpi,$$

. . . . ,

$$dc_{n-2} = \frac{n(n-3)}{2} c_{n-3} \varpi_{02} + n c_{n-2} \varpi_{01} + h_{n-2} \varpi.$$

Cela étant, nous distinguerons trois cas.

a. Les coefficients c_α sont tous nuls. — On a un seul type de groupes qui comprend comme cas particulier le groupe $g_{1,7}$ précédemment déterminé; nous les appellerons encore $g_{1,7}$; ils sont d'ordre $n+1$; chacun d'eux est invariant dans un groupe $G_{1,7}$ d'ordre $n+4$. Les structures respectives de $g_{1,7}$ et $G_{1,7}$ sont données par les formules

$$g_{1,7}\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10},\\
\omega'_{10} &= 0,\\
\omega'_{01} &= \omega_{01}\omega_{10},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_{0q} &= \omega_{0q}\omega_{10},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_{0,n-1} &= \omega_{0,n-1}\omega_{10},
\end{aligned}\right.$$

$$G_{1,7}\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10}+\varpi\omega_{01},\\
\omega'_{10} &= \frac{n-1}{2}\varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{01} &= \frac{n-1}{2}\omega\varpi_{02}+\omega_{01}\omega_{10}+\varpi\omega_{02}+\varpi_{01}\omega_{01},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_{0q} &= q\,\frac{n-1}{2}\omega_{0,q-1}\varpi_{02}+\omega_{0q}\omega_{10}+\varpi\omega_{0q+1}\\
&\qquad+q\,\varpi_{01}\omega_{0q}+\frac{q(q-1)}{2}\varpi_{02}\omega_{0,q-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_{0,n-1} &= \frac{(n-1)^2}{2}\omega_{0,n-2}\varpi_{02}+\omega_{0,n-1}\omega_{10}+(n-1)\varpi_{01}\omega_{0,n-1}\\
&\qquad+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-2},\\
\varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\
\varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\
\varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02}.
\end{aligned}\right.$$

On peut prendre, par exemple,

$$g_{1,7}\left\{\begin{aligned}
X &= ax+a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\\
Y &= y
\end{aligned}\right.$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1,7}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{ax + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + a_{n-1}}{(py+q)^{n-1}}\\ Y &= \frac{my+n}{py+q}\end{aligned}\right.}$$

b. Les coefficients c_α ne sont pas tous nuls. — Supposons, pour fixer les idées, que $c_1, \ldots, c_{\alpha-1}$ soient nuls, mais non c_α. Alors on peut donner aux coefficients c_α, $c_{\alpha+1}$, qui sont deux fonctions indépendantes, les valeurs numériques fixes $c_\alpha = 1$, $c_{\alpha+1} = 0$. On a alors

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \varpi_{01} &= c_{n-1}\varpi,\\ \varpi_{02} &= c_n\varpi.\end{aligned}\right.$$

Une exception est à faire si $\alpha = n - 2$; alors on peut faire $c_{n-2} = 1$, et l'on a

$$\varpi_{01} = c_{n-1}\varpi;$$

cette dernière équation donne d'ailleurs

$$dc_{n-1} = -\varpi_{02} + c_n\varpi;$$

on peut alors donner à la fonction c_{n-1} la valeur numérique zéro et l'on obtient encore l'identité

$$\varpi_{02} = c_n\varpi.$$

En définitive, les identités (25) sont toujours valables, avec la restriction $c_{n-1} = 0$ dans le cas où $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-3} = 0$.

Dans tous les cas il reste $n - \alpha - 1$ coefficients qui peuvent dépendre de y.

Nous supposons d'abord ces $n - \alpha - 1$ coefficients constants. On a alors une infinité de types de groupes $g_{1,8}$, dépendant des valeurs constantes données à ces $n - \alpha - 1$ coefficients. Chacun d'eux est invariant dans un groupe $G_{1,8}$, qui a un paramètre de plus. Les structures de $g_{1,8}$

et $G_{1,8}$ sont données par les formules

$$g_{1,8}\left\{\begin{array}{ll}
\omega' & = \omega\omega_{10},\\
\omega'_{10} & = 0,\\
\omega'_{01} & = \omega_{01}\omega_{10},\\
\omega'_{02} & = \omega_{02}\omega_{10},\\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots,}\\
\omega'_{0q} & = \omega_{0q}\omega_{10},\\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots,}\\
\omega'_{0,n-1} & = \omega_{0,n-1}\omega_{10},
\end{array}\right.$$

$$G_{1,8}\left\{\begin{array}{ll}
\omega' & = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\omega'_{10} & = 0,\\
\omega'_{01} & = \omega_{01}\omega_{10} + \varpi\left(\omega_{02} + c_{n-1}\omega_{01} - \dfrac{n-1}{2}c_n\omega\right),\\
\omega'_{02} & = \omega_{02}\omega_{10} + \varpi\left[\omega_{03} + 2c_{n-1}\omega_{02} - (n-2)c_n\omega_{01} - \dfrac{n-2}{3}c_n\omega\right],\\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,}\\
\omega'_{0q} & = \omega_{0q}\omega_{10} + \varpi\left(\omega_{0,q+1} + qc_{n-1}\omega_{0q} - C_q^1\dfrac{n-q}{2}c_n\omega_{0,q-1}\right.\\
 & \qquad\qquad \left. - C_q^2\dfrac{n-q}{3}c_1\omega_{0,q-2} - \dots - \dfrac{n-q}{q+1}c_{q-1}\omega\right),\\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,}\\
\omega'_{0,n-1} & = \omega_{0,n-1}\omega_{10} + \varpi\left[(n-1)c_{n-1}\omega_{0,n-1} - C_{n-1}^1\dfrac{1}{2}c_n\omega_{0,n-2} - \dots - \dfrac{1}{n}c_{n-2}\omega\right],\\
\varpi' & = 0.
\end{array}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{1,8}\left\{\begin{array}{l} X = ax + P(y)\\ Y = y\end{array}\right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_{1,8}\left\{\begin{array}{l} X = ax + P(y)\\ Y = y + b\end{array}\right.}$$

$P(y)$ désignant, dans les deux formules, la solution la plus générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants, celle dont l'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{n-1}{2}c_n & c_{n-1}-r & 1 & \dots & 0 \\ -\frac{n-2}{3}c_1 & -(n-2)c_n & 2c_{n-1}-r & \dots & 0 \\ -\frac{1}{n}c_{n-2} & -c_{n-3} & -\frac{n-1}{2}c_{n-4} & \dots & (n-1)c_{n-1}-r \end{vmatrix} = 0.$$

c. Parmi les n coefficients c, dont deux consécutifs sont déjà égaux, l'un à 1, l'autre à zéro, il y en a qui sont fonctions de y. — On peut alors donner à l'un d'eux la valeur y; on a alors

$$dy = m(y)\varpi.$$

On a une infinité de types de groupes $g_{1,9}$, chacun étant caractérisé par la fonction $m(y)$ et les $n-\alpha-2$ autres fonctions de y fournies par les coefficients $c_{\alpha+2}, \dots, c_n$ autres que celui qui a été pris égal à y. Chaque type dépend donc de $n-\alpha-1$ fonctions arbitraires de y. Chacun de ces groupes $g_{1,9}$ n'est invariant que dans lui-même et sa structure est la même que celle de $g_{1,8}$. On peut prendre

$$\boxed{g_{1,9} \begin{cases} X = ax + P(y) \\ Y = y \end{cases}}$$

invariant dans lui-même, en désignant par $P(y)$ la solution la plus générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients non tous constants, celle dont l'équation caractéristique se déduit de la précédente en changeant r en $m(y)r$.

33. II. *Groupes admettant les mêmes invariants d'ordres* 0 *et* 1 *que* g_2. — Le groupe $G_2^{(n)}$, prolongement normal de G_2, est défini par les expressions $\omega, \omega_{10}, \omega_{11}, \dots, \omega_{1,n-1}, \omega_{01}, \dots, \omega_{0n}, \varpi, \dots, \varpi_{0n}$. Le système complètement intégrable qui donne les invariants d'ordre inférieur ou

égal à n de chacun des groupes cherchés contient les $2n+1$ équations

$$(26) \qquad \begin{cases} \varpi = \varpi_{01} = \ldots = \varpi_{0n} = 0, \\ \omega_{10} = \omega_{11} = \ldots = \omega_{1,n-1} = 0. \end{cases}$$

Désignons par n le plus petit entier par lequel il faille ajouter aux équations précédentes une équation de la forme

$$(27) \qquad \theta \equiv \omega_{0n} + a_1\omega_{0,n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega_{01} + a_n\omega = 0.$$

Le groupe linéaire auquel $G_1^{(n)}$ soumet les expressions ω_{0n}, $\varpi_{1,n-1}$, ϖ_{0n} étant

$$(28) \qquad \begin{cases} \Omega_{0n} = \omega_{0n} + u\omega + v\varpi, \\ \Omega_{1,n-1} = \omega_{1,n-1} + u\varpi, \\ \Pi_{0n} = \varpi_{0n} + w\varpi, \end{cases}$$

on peut réduire le coefficient a_n de ω dans l'équation (27) à zéro, en réduisant le groupe linéaire à l'un de ses sous-groupes ($u=0$).

On obtient alors

$$\begin{aligned} da_1 &= -C_n^2\varpi_{02} + a_1\varpi_{01} + C_n^1\omega_{11} + A_1\varpi, \\ da_2 &= -C_n^3\varpi_{03} - C_{n-1}^2 a_1\varpi_{02} + 2a_2\varpi_{01} + C_n^2\omega_{12} + C_{n-1}^1 a_1\omega_{11} + A_2\varpi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ da_{n-1} &= -\varpi_{0n} - a_1\varpi_{0,n-1} - \ldots - (n-1)a_{n-1}\varpi_{01} \\ &\quad + n\omega_{1,n-1} + (n-1)a_1\omega_{1,n-2} + \ldots + 2a_{n-2}\omega_{11} + A_{n-1}\varpi. \end{aligned}$$

On peut encore réduire le coefficient A_{n-1} à 0, en réduisant le groupe linéaire (28) à l'un de ses sous-groupes ($u = w = 0$).

On peut alors refaire identiquement les raisonnements faits dans la recherche des groupes $g_{1,7}$, $g_{1,8}$, $g_{1,9}$. Il y a cependant deux différences essentielles, c'est que dans les équations de structure des nouveaux groupes g, ω_{10} doit être identiquement remplacé par zéro, c'est de plus que le plus grand groupe $G_{2,i}$ dans lequel $g_{2,i}$ est invariant est infini; ω_{0n} n'est pas, en effet, identiquement nul pour $G_{2,i}$.

On aura alors trois cas.

a. On a un type unique de groupes $g_{2,1}$ d'ordre fini invariants dans un groupe $G_{2,1}$ infini. Les structures respectives de $g_{2,1}$ et $G_{2,1}$ sont données par les formules

$$g_{2,1}\begin{cases}\omega' = 0,\\ \omega'_{01} = 0,\\ \dots\dots\dots,\\ \omega'_{0,n-1} = 0,\end{cases}\qquad G_{2,1}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} = \dfrac{n-1}{2}\varpi\varpi_{02},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02},\\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}.\end{cases}$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_{2,1}\begin{cases}X = x + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1}\\ Y = y\end{cases}}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{2,1}\begin{cases}X = \dfrac{ax + f(y)}{(py+q)^{n-1}}\\ Y = \dfrac{my+n}{py+q}\end{cases}}$$

b. On a des types dépendant de *constantes arbitraires*. Chaque groupe $g_{2,2}$ est invariant dans un groupe infini $G_{2,2}$. Les structures respectives de $g_{2,2}$ et $G_{2,2}$ sont données par

$$g_{2,2}\begin{cases}\omega' = 0,\\ \omega'_{01} = 0,\\ \dots\dots\dots,\\ \omega'_{0,n-1} = 0,\end{cases}\qquad G_{2,2}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} = 0,\\ \varpi' = 0.\end{cases}$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_{2,2}\begin{cases}X = x + P(y)\\ Y = y\end{cases}}\qquad \text{invariant dans}\qquad \boxed{G_{2,2}\begin{cases}X = ax + f(y)\\ Y = y + b\end{cases}}$$

en désignant par $P(y)$ la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants.

c. On a des types de groupe $g_{2,3}$ dépendant de *fonctions arbitraires* d'un argument. Chacun d'eux est invariant dans un groupe infini $G_{2,3}$. Les structures sont respectivement, pour $g_{2,3}$ et $G_{2,3}$,

$$g_{2,3}\begin{cases}\omega' = 0,\\ \omega'_{01} = 0,\\ \dots\dots\dots,\\ \omega'_{0,n-1} = 0,\end{cases}\qquad G_{2,3}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + dy\,\omega_{01},\\ \omega'_{10} = 0.\end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,3}\begin{cases}X = x + P(y)\\ Y = y\end{cases}}\quad \text{invariant dans}\quad \boxed{G_{2,3}\begin{cases}X = ax + f(y)\\ Y = y\end{cases}}$$

en désignant par $P(y)$ la solution générale d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients non tous constants.

34. III. *Groupes admettant les mêmes invariants d'ordres* 0 *et* 1 *que* g_3. — On trouve sans difficulté deux types de groupes différents de g_3. Le premier, $g_{3,1}$, du troisième ordre, est invariant dans un groupe $G_{3,1}$; leurs structures sont définies par les formules

$$g_{3,1}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10},\\ \omega'_{10} = \omega\omega_{11},\\ \omega'_{11} = \omega_{10}\omega_{11},\end{cases}\qquad G_{3,1}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10},\\ \omega'_{10} = \omega\omega_{11},\\ \omega'_{11} = \omega_{10}\omega_{11},\\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}.\end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,1}\begin{cases}X = \dfrac{ax+b}{cx+d}\\ Y = y\end{cases}}\quad \text{invariant dans}\quad \boxed{G_{3,1}\begin{cases}X = \dfrac{ax+b}{cy+d}\\ Y = f(y)\end{cases}}$$

Le second, $g_{3,2}$, fini d'ordre 2, est invariant dans un groupe infini $G_{3,2}$; leurs structures sont définies par les formules

$$g_{3,2} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \end{aligned} \right. \qquad G_{3,2} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,2} \left\{ \begin{aligned} X &= ax+b \\ Y &= y \end{aligned} \right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_{3,2} \left\{ \begin{aligned} X &= ax+b \\ Y &= f(y) \end{aligned} \right.}$$

Nous sommes arrivés ainsi à dix-huit types essentiellement distincts de groupes intransitifs à deux variables. Sur ces dix-huit types, neuf sont d'ordre fini, à savoir

$$g_4, \quad g_{1,7}, \quad g_{1,8}, \quad g_{1,9}, \quad g_{2,1}, \quad g_{2,2}, \quad g_{2,3}, \quad g_{3,1}, \quad g_{3,2},$$

et neuf sont infinis, à savoir

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_{1,1}, \quad g_{1,2}, \quad g_{1,3}, \quad g_{1,4}, \quad g_{1,5}, \quad g_{1,6}.$$

Parmi les neuf types d'ordre fini, six sont invariants dans un groupe infini, à savoir

$$g_4, \quad g_{2,1}, \quad g_{2,2}, \quad g_{2,3}, \quad g_{3,1}, \quad g_{3,2}.$$

Enfin, pour un seul type $g_{1,9}$, on a des groupes qui ne sont invariants que dans eux-mêmes.

Les groupes g_1, g_3, g_4, $g_{1,1}$, $g_{3,1}$ sont proprement simples, le groupe g_2 est improprement simple ([1]).

([1]) *Cf.* E. CARTAN, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXII, 1905, p. 284.

CHAPITRE IV.

LES GROUPES TRANSITIFS A DEUX VARIABLES.

35. Nous allons d'abord déterminer et classer les groupes de degré 1, définis uniquement par un ou plusieurs invariants du *premier* ordre.

Le groupe G', prolongement normal de G, est à six variables, et sa structure est définie par les expressions ω, ϖ, ω_{10}, ω_{01}, ϖ_{10}, ϖ_{01}. Ce groupe G' soumet les expressions ω_{10}, ω_{01}, ϖ_{10}, ϖ_{01} au groupe linéaire Γ dont les équations sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega_{10} &= \omega_{10} + u_{20}\omega + u_{11}\varpi, \\ \Omega_{01} &= \omega_{01} + u_{11}\omega + u_{02}\varpi, \\ \Pi_{10} &= \varpi_{10} + v_{20}\omega + v_{11}\varpi, \\ \Pi_{01} &= \varpi_{01} + v_{11}\omega + v_{02}\varpi. \end{aligned}\right.$$

Nous allons successivement examiner les quatre cas où le groupe cherché admet un, deux, trois ou quatre invariants indépendants du premier ordre.

1° *Le groupe g admet un invariant indépendant du premier ordre.* — Cet invariant sera donné par une équation telle que

$$(2)\qquad \theta \equiv a_0\omega_{10} + a_1\omega_{01} + b_0\varpi_{10} + b_1\varpi_{01} + h\omega + k\varpi = 0.$$

On peut toujours faire en sorte que les coefficients h et k soient nuls en réduisant le groupe linéaire Γ à l'un de ses sous-groupes à quatre paramètres. Les rapports mutuels des coefficients a_0, a_1, b_0, b_1 deviennent alors des invariants du premier ordre du groupe g. Exprimons d'abord que θ' est nul, en tenant compte de l'équation (2). Nous obtenons, en négligeant les termes qui contiennent ω ou ϖ, les relations

$$\begin{aligned} a_0^2 - a_0 b_1 + 2a_1 b_0 &= 0, \\ b_1^2 - a_0 b_1 + 2a_1 b_0 &= 0, \\ a_1(a_0 + b_1) &= 0, \\ b_0(a_0 + b_1) &= 0. \end{aligned}$$

Ces relations admettent deux solutions

$a.$ $$b_1 = a_0, \qquad a_1 = b_0 = 0,$$
$b.$ $$b_1 = -a_0, \qquad a_0^2 + a_1 b_0 = 0.$$

a. On peut prendre

(2) $$\theta \equiv \omega_{10} + \varpi_{01} = 0.$$

On a alors un seul type de groupes g_1, chacun d'eux étant invariant dans un groupe G_1; les structures de g_1 et de G_1 sont respectivement données par les formules

$$g_1 \left\{ \begin{array}{l} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} - \varpi\omega_{10}, \end{array} \right. \qquad G_1 \left\{ \begin{array}{l} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} + \varpi'_{01} = 0. \end{array} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_1 \left\{ \begin{array}{l} X = f(x, y) \\ Y = \varphi(x, y) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = 1}$$

invariant dans

$$\boxed{G_1 \left\{ \begin{array}{l} X = f(x, y) \\ Y = \varphi(x, y) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = a}$$

b. On peut prendre

$$\theta \equiv \varpi_{10} + \alpha(\varpi_{01} - \omega_{10}) - \alpha^2 \omega_{01},$$

et l'on trouve

$$d\alpha = -\theta = -\varpi_{10} - \alpha(\varpi_{01} - \omega_{10}) + \alpha^2 \omega_{01}.$$

On peut donner à l'invariant α une valeur numérique fixe, par exemple 0, et alors, pour toute transformation qui laisse g invariant, on a identiquement $\varpi_{10} = 0$.

Il y a un seul type de groupes g_2, chacun étant invariant dans lui-même. Sa structure est donnée par

$$g_2 \left\{ \begin{array}{l} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{array} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_2 \left\{ \begin{array}{l} X = f(x, y) \\ Y = \varphi(y) \end{array} \right.}$$

invariant dans lui-même.

36. 2° *Le groupe cherché g admet deux invariants indépendants du premier ordre.*

Écrivons les équations qui donnent ces invariants sous la forme

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \equiv a\,\varpi_{10} + b\,(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c\,\omega_{01} + h\,(\omega_{10} + \varpi_{01}) + m\,\omega + n\,\varpi = 0, \\ \theta_2 \equiv a'\varpi_{10} + b'(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c'\omega_{01} + h'(\omega_{10} + \varpi_{01}) + m'\omega + n'\varpi = 0. \end{array} \right.$$

En ne tenant pas compte des termes en ω, ϖ, on trouve que les coefficients $a, b, c, h, a', b', c', h'$ doivent satisfaire aux relations finies suivantes :

$$\begin{aligned} h(ac' + ca' + 2bb') &= 2h'(ac + b^2), \\ 2h(a'c' + b'^2) &= h'(ac' + ca' + 2bb'). \end{aligned}$$

Nous distinguerons deux cas :

a. $h = h' = 0$. — On peut alors prendre

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv \varpi_{10} + a\,\omega_{01} + m\,\omega + n\,\varpi = 0, \\ \theta_2 &\equiv \omega_{10} - \varpi_{01} + b\,\omega_{01} + m'\omega + n'\varpi = 0. \end{aligned}$$

On peut réduire m, n, m', n' aux valeurs zéro, en réduisant le groupe linéaire Γ à l'un de ses sous-groupes.

Le calcul de θ'_1 et θ'_2 montre que l'on a

$$\begin{aligned} da + b\theta_1 - 2a\theta_2 &= 0, \\ db + 2\theta_1 - b\theta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Il y a deux cas à distinguer :

a_1. $b^2 - 4a = 0$. — On peut donner à l'invariant b une valeur numérique fixe, par exemple zéro, et l'on a alors identiquement, pour le groupe dans lequel g est invariant, $\varpi_{10} \equiv 0$. A ce cas correspond un seul type de groupes g_3, chacun invariant dans G_3. Les stuctures de g_3 et G_3 sont données par les formules

$$g_3 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\omega_{10}, \end{aligned} \right. \qquad G_3 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} &- \varpi'_{01} = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\boxed{g_3 \left\{ \begin{aligned} X &= x f'(y) + \varphi(y) \\ Y &= f(y) \end{aligned} \right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_3 \left\{ \begin{aligned} X &= a x f'(y) + \varphi(y) \\ Y &= f(y) \end{aligned} \right.}$$

a_2. $b^2 - 4a \neq 0$. — On peut donner aux deux invariants indépendants a, b des valeurs numériques fixes, par exemple

$$b = 0, \qquad a = \pm 1.$$

On a ainsi deux types de groupes g_4, chacun invariant dans lui même. Leur structure est donnée par

$$g'_4, g_4 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \mp \omega\omega_{01} + \varpi\omega_{10}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où l'on prend le signe $+$, on peut considérer la structure holomorphe

$$g_4 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01} \end{aligned} \right.$$

On peut prendre, pour le signe $-$, le groupe

$$\boxed{g'_4 \left\{ \begin{array}{l} X = f(x, y) \\ Y = \varphi(x, y) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

invariant dans lui-même, et, pour le signe $+$, le groupe

$$\boxed{g_4 \left\{ \begin{array}{l} X = f(x) \\ Y = \varphi(y) \end{array} \right.}$$

invariant dans lui-même.

b. Supposons maintenant que h et h' ne soient pas nuls tous les deux, dans les équations (3). On peut supposer $h = 0$, $h' = 1$; on a ensuite

$$ac + b^2 = ac' + ca' + 2bb' = 0.$$

On peut prendre

$$\theta_1 \equiv \varpi_{10} + \alpha(\omega_{10} - \varpi_{01}) - \alpha^2 \omega_{01} = 0,$$
$$\theta_2 \equiv \omega_{10} + \varpi_{01} + \beta(\omega_{10} - \varpi_{01}) - 2\alpha\beta\omega_{01} + \gamma\omega = 0.$$

On peut réduire le coefficient γ à zéro, à moins que β ne soit égal à -1. C'est ce premier cas que nous allons examiner.

b_1. On a

$$\theta_1 \equiv \varpi_{10} + \alpha(\omega_{10} - \varpi_{01}) - \alpha^2 \omega_{01} = 0,$$
$$\theta_2 \equiv \varpi_{01} + \alpha\omega_{01} + \gamma\omega = 0.$$

On en déduit d'abord

$$d\alpha = \varpi_{10} + \alpha(\omega_{10} - \varpi_{01}) - \alpha^2 \omega_{01}.$$

On peut donner à α la valeur numérique zéro, ce qui donne

$$\varpi_{10} = 0,$$
$$\theta_2 \equiv \varpi_{01} + \gamma\omega = 0.$$

En exprimant que l'équation $\theta_2 = 0$ est complètement intégrable, on obtient $\gamma = 0$. On a donc un type de groupes g_5. Sa structure, ainsi que celle du groupe G_5 dans lequel il est invariant, est donnée par

$$g_5 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_5 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_5 \begin{cases} X = f(x, y) \\ Y = y + a \end{cases}} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_5 \begin{cases} X = f(x, y) \\ Y = ay + b \end{cases}}$$

b_2. On peut encore donner à l'invariant α la valeur numérique zéro, ce qui donne

$$\varpi_{10} = 0,$$

et l'on peut écrire

$$\theta_2 = \omega_{10} - m\varpi_{01}.$$

On trouve facilement

$$dm = 0.$$

On a donc une infinité de types distincts, suivant la valeur de la constante m. On retrouve pour $m = 1$ le groupe g_3 déjà obtenu. Nous appellerons encore g_3 les groupes qui correspondent à une valeur quelconque de m. On a pour g_3 et G_3 les structures

$$g_3 \begin{cases} \omega' = m\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \end{cases} \qquad G_3 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} - m\varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_3 \begin{cases} X = xf'^m(y) + \varphi(y) \\ Y = f(y) \end{cases}}$$

invariant dans

$$\boxed{G_3 \begin{cases} X = axf'^m(y) + \varphi(y) \\ Y = f(y) \end{cases}}$$

37. 3° *Le groupe cherché g admet trois invariants indépendants du premier ordre.*

Nous distinguerons deux cas suivant que l'équation

$$\omega_{10} + \varpi_{01} = 0$$

est comprise ou non dans le système qui donne les invariants du premier ordre.

a. Dans le premier cas, posons

$$\begin{aligned}
\theta_1 &\equiv \omega_{10} + \varpi_{01} = 0,\\
\theta_2 &\equiv \varpi_{10} + a\,\omega_{01} = 0,\\
\theta_3 &\equiv \omega_{10} - \varpi_{01} + b\,\omega_{01} + c\,\omega = 0.
\end{aligned}$$

Les coefficients de ω et de ϖ ont pu être réduits à zéro, sauf celui de ω dans la dernière équation; ce dernier ne peut pas être réduit si $b^2 - 4a$ est nul.

a_1. On a $b^2 - 4a = 0$. On obtient, après des calculs qui n'offrent aucune difficulté,

$$\theta'_1 = 0, \qquad \theta'_2 = \theta_3\theta_2, \qquad \theta'_3 = 0,$$
$$db = -2\theta_2 + b\theta_3,$$
$$dc = \frac{1}{2}c(\theta_1 + \theta_3).$$

Si c est égal à zéro, on peut donner à l'invariant b la valeur numérique fixe zéro; on aura un type de groupes g_6, chacun invariant dans un groupe G_6; leurs structures sont respectivement

$$g_6 \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_6 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_6 \begin{cases} X = x + f(y) \\ Y = y + a \end{cases}} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_6 \begin{cases} X = ax + f(y) \\ Y = by + c \end{cases}}$$

Si c n'est pas nul, les invariants b et c sont indépendants, on peut leur donner les valeurs numériques fixes $b=0$, $c=2$; on a encore un seul type de groupes g_7, chacun invariant dans un groupe G_7; pour G_7 on a identiquement $\omega_{10} \equiv -\omega$, $\varpi_{10} \equiv 0$. Les structures de g_7 et G_7 sont

$$g_7 \left\{ \begin{array}{l} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = -\omega\varpi, \end{array} \right. \qquad G_7 \left\{ \begin{array}{ll} \omega' & = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' & = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} & = \varpi\omega_{01}. \end{array} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_7 \left\{ \begin{array}{l} X = \dfrac{x}{f'(y)} \\ Y = f(y) \end{array} \right.} \qquad \text{invariant dans} \qquad \boxed{G_7 \left\{ \begin{array}{l} X = \dfrac{ax}{f'(y)} \\ Y = f(y) \end{array} \right.}$$

a_2. On a $b^2 - 4a \neq 0$. Alors on peut supposer $c=0$. On obtient

$$\theta'_1 = 0, \qquad \theta'_2 = \theta_3\theta_2, \qquad \theta'_3 = 0,$$
$$da = -b\theta_2 + 2a\theta_3,$$
$$db = -2\theta_2 + b\theta_3.$$

On voit que a et b sont deux invariants indépendants. On peut leur donner des valeurs numériques fixes, par exemple

$$b = 0, \qquad a = \mp 1.$$

On a alors pour le groupe G, dans lequel g est invariant,

$$\begin{array}{ll} \omega' & = \quad \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' & = \pm\,\omega\omega_{01} + \varpi\omega_{10}, \\ \omega'_{10} & = 0. \end{array}$$

On tire de ces équations la suivante :

$$\omega'_{01} = \lambda\omega\varpi,$$

le coefficient λ étant un invariant du groupe g. En appliquant l'identité fondamentale, on obtient

$$d\lambda = 2\lambda\,\omega_{10}.$$

Si $\lambda = 0$, on obtient un groupe g_8 (ou g'_8) invariant dans un groupe G_8 (ou G'_8). Les structures de g_8 et G_8 sont définies par

$$g_8, g'_8 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \pm\,\omega\omega_{01}, \\ \omega'_{01} &= 0, \end{aligned} \right. \qquad G_8, G'_8 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \pm\,\omega\omega_{01} + \varpi\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \\ \omega'_{01} &= 0. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre plus simplement, dans le cas où $a = -1$, les structures

$$g_8 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \varpi' &= -\varpi\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \end{aligned} \right. \qquad G_8 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} &= 0, \\ \varpi'_{01} &= 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui donne le groupe

$$\boxed{g_8 \left\{ \begin{aligned} X &= ax + b \\ Y &= \frac{1}{a}y + c \end{aligned} \right.} \qquad \text{invariant dans} \qquad \boxed{G_8 \left\{ \begin{aligned} X &= ax + b \\ Y &= cy + h \end{aligned} \right.}$$

et le groupe

$$\boxed{g'_8 \left\{ \begin{aligned} X &= a + x\cos c - y\sin c \\ Y &= b + x\sin c + y\cos c \end{aligned} \right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G'_8 \left\{ \begin{aligned} X &= a + cx - hy \\ Y &= b + hx + cy \end{aligned} \right.}$$

Si λ est différent de zéro, on peut donner à cet invariant la valeur numérique fixe ± 1 et l'on a alors un groupe g_9 (ou g'_9, ou g''_9) invariant dans lui-même. Sa structure est donnée par

$$g_9, g'_9, g''_9 \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \pm\,\omega\omega_{01}, \\ \omega'_{01} &= \pm\,\omega\varpi. \end{aligned} \right.$$

Si $a = -1$, on peut prendre plus simplement

$$g_9 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = -\varpi\omega_{10}, \\ \omega_{10} = \omega\varpi, \end{cases}$$

ce qui donne le groupe

$$\boxed{g_9 \begin{cases} X = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+d} \end{cases}}$$

invariant dans lui-même.

Si $a = +1$, en posant $x + iy = z$, on a les groupes

$$\boxed{g'_9, g''_9 \left\{ Z = \frac{(a+ib)z + c + id}{\pm(c-id)z + a - ib} \qquad [a^2 + b^2 \pm (c^2 + d^2) = 1] \right.}$$

invariants dans eux-mêmes.

b. Dans ce second cas l'équation

$$\omega_{10} + \varpi_{01} = 0$$

n'est pas comprise dans le système qui donne les trois invariants du premier ordre du groupe g. Posons alors

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv \omega_{10} - \varpi_{01} + a(\omega_{10} + \varpi_{01}) + h\varpi = 0, \\ \theta_2 &\equiv \omega_{01} + b(\omega_{10} + \varpi_{01}) = 0, \\ \theta_3 &\equiv \varpi_{10} + c(\omega_{10} + \varpi_{01}) = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient h peut encore être réduit à zéro, à moins que l'on n'ait

$$a^2 + 4bc = 1;$$

mais, même dans ce cas, la condition que le système précédent soit complètement intégrable exige que h soit nul.

Supposons donc $h = 0$. Un calcul sans difficulté donne

$$\theta_1' = 2\theta_3\theta_2, \qquad \theta_2' = \theta_2\theta_1, \qquad \theta_3' = \theta_1\theta_3,$$
$$da = -2c\theta_2 + 2b\theta_3,$$
$$db = -b\theta_1 + a\theta_2,$$
$$dc = -a\theta_3 + c\theta_1.$$

On en déduit

$$a\,da + 2b\,dc + 2c\,db = 0;$$

donc l'expression $a^2 + 4bc$ est une constante m et cette constante est *essentielle* pour les différents types cherchés.

b_1. Supposons d'abord $a = b = c = 0$. On a des groupes g_{10}, dont chacun d'eux est invariant dans un groupe G_{10}. On a pour la structure de G_{10} les formules

$$\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},$$
$$\varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},$$
$$\omega'_{10} - \varpi'_{01} = 2\varpi_{10}\omega_{01},$$
$$\omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),$$
$$\varpi'_{10} = (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10},$$

d'où l'on déduit

$$\omega'_{10} + \varpi'_{01} = \lambda\omega\varpi.$$

Le coefficient λ est un invariant; mais l'identité fondamentale appliquée à la dernière formule donne

$$\omega\varpi[d\lambda - \lambda(\omega_{10} + \varpi_{01})] = 0;$$

cela exige que λ soit nul. Les structures de g_{10} et G_{10} sont donc données par les formules

$$g_{10}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \varpi' &= \varpi\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad G_{10}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} &= \varpi_{10}\omega_{01}, \\ \omega'_{01} &= \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}), \\ \varpi'_{10} &= (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10}, \\ \varpi'_{01} &= \omega_{01}\varpi_{10}. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{10}\left\{\begin{aligned} X &= ax + b \\ Y &= ay + c \end{aligned}\right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_{10}\left\{\begin{aligned} X &= ax + by + c \\ Y &= hx + ky + p \end{aligned}\right.}$$

b_2. Si a, b, c ne sont pas nuls tous les trois, parmi ces trois invariants il y en a deux indépendants. Nous allons faire des hypothèses sur la valeur de la constante a^2+4bc.

Si a^2+4bc *est positif*, soit égal à $m^2 (m > 0)$, nous donnons aux invariants des valeurs numériques fixes. Soit

$$a = -m, \qquad b = c = 0.$$

Si l'on désigne par G_{11} le groupe dans lequel est invariant le groupe cherché g_{11}, on a, pour G_{11}, $\omega_{01} \equiv \varpi_{10} \equiv 0$. La structure de G_{11} est donnée par

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega\omega_{10},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ (1+m)\omega'_{10} &= (1-m)\varpi'_{01}.\end{aligned}$$

Si m est égal à $+1$, on ne déduit de là aucune autre relation. On aura pour g_{11} et G_{11} les structures

$$g_{11}\left\{\begin{aligned}\omega' &= \omega\omega_{10},\\ \varpi' &= 0,\end{aligned}\right. \qquad G_{11}\left\{\begin{aligned}\omega' &= \omega\omega_{10},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= 0,\end{aligned}\right.$$

et l'on peut prendre

$$\boxed{g_{11}\left\{\begin{aligned}X &= f(x)\\ Y &= y+a\end{aligned}\right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_{11}\left\{\begin{aligned}X &= f(x)\\ Y &= ay+b\end{aligned}\right.}$$

Si m^2 est différent de 1, on a

$$\begin{aligned}\omega'_{10} &= (1-m)\lambda\omega\varpi,\\ \varpi'_{10} &= (1+m)\lambda\omega\varpi,\end{aligned}$$

mais, comme tout à l'heure, on montre que λ est nul. On a alors pour g_{12} et G_{12} les structures

$$g_{12}\left\{\begin{aligned}\omega' &= (1-m)\omega\chi,\\ \varpi' &= (1+m)\omega\chi,\\ \chi' &= 0,\end{aligned}\right. \qquad G_{12}\left\{\begin{aligned}\omega' &= \omega\omega_{10},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10} &= 0,\\ \varpi'_{01} &= 0.\end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$g_{12}\left\{\begin{aligned} X &= a^{1-m}x+b \\ Y &= a^{1+m}y+c \end{aligned}\right. \qquad (m \neq 0)$$

invariant dans

$$G_{12}\left\{\begin{aligned} X &= ax+b \\ Y &= cy+h \end{aligned}\right.$$

Si a^2+4bc *est négatif, égal à* $-m^2$, nous donnerons aux invariants les valeurs numériques

$$a=0, \qquad b=-c=\frac{1}{2}m.$$

On aura pour le groupe G'_{12}, dans lequel le groupe cherché g'_{12} est invariant, $\omega_{10}=\varpi_{01}$, $\omega_{01}=-\varpi_{10}$, et, par suite, la structure

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}-\varpi\varpi_{10}, \\ \varpi' &= \omega\varpi_{10}+\varpi\omega_{10}, \\ \varpi'_{10} &- m\omega'_{10}=0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, comme tout à l'heure,

$$\omega'_{10}=0.$$

On a donc, pour g'_{12} et G'_{12}, les structures

$$g'_{12}\left\{\begin{aligned} \omega' &= (\omega-m\varpi)\omega_{10}, \\ \varpi' &= (\varpi+m\omega)\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad G'_{12}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}-\varpi\varpi_{10}, \\ \varpi' &= \omega\varpi_{10}+\varpi\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \\ \varpi'_{10} &= 0. \end{aligned}\right.$$

En posant $x+iy=z$, on a le groupe

$$g'_{12} \left\{ Z = e^{(mi-1)a}z+b+ic \qquad (m\neq 0)\right.$$

invariant dans

$$\boxed{G'_{12} \left\{ Z = (a+ib)z + c + ih \right.}$$

Si enfin $a^2 + 4bc$ est nul, on peut donner aux invariants les valeurs numériques

$$a = b = 0, \qquad c = \frac{1}{2}.$$

On a pour le groupe G_{13}, dans lequel le groupe cherché g_{13} est invariant,

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \varpi' &= \omega\varpi_{10} + \varpi\omega_{10}, \\ \varpi'_{10} &+ \omega'_{10} = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\omega'_{10} = \lambda\omega\varpi,$$

et l'on montre encore que λ est nul. On a donc pour g_{13} et G_{13} les structures

$$g_{13} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \varpi' &= (\varpi - \omega)\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \end{aligned} \right. \qquad G_{13} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \varpi' &= \omega\varpi_{10} + \varpi\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \\ \varpi'_{10} &= 0. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{13} \left\{ \begin{aligned} X &= ax + b \\ Y &= a(y - x\mathrm{L}a) + c \end{aligned} \right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{13} \left\{ \begin{aligned} X &= ax + b \\ Y &= a(y - cx) + h \end{aligned} \right.}$$

38. 4° *Le groupe cherché g admet quatre invariants indépendants du premier ordre.*

Nous pouvons toujours écrire sous la forme suivante le système complètement intégrable qui donne ces invariants :

$$\begin{aligned}\theta_1 &\equiv \omega_{10} + a\varpi = 0,\\ \theta_2 &\equiv \omega_{01} = 0,\\ \theta_3 &\equiv \varpi_{10} = 0,\\ \theta_4 &\equiv \varpi_{01} + b\omega = 0;\end{aligned}$$

les coefficients a et b sont des invariants du premier ordre. On trouve sans difficulté que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}\theta'_1 &= \theta_3\theta_2,\\ \theta'_2 &= \theta_2(\theta_1 - \theta_4),\\ \theta'_3 &= (\theta_1 - \theta_4)\theta_3,\\ \theta'_4 &= \theta_2\theta_3,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}da &= a\theta_4 + b\theta_2,\\ db &= a\theta_3 + b\theta_1.\end{aligned}$$

a. Supposons d'abord $a = b = 0$. On a alors un groupe g_{14} invariant dans un groupe G_{14}; les structures de g_{14} et G_{14} sont

$$g_{14}\begin{cases}\omega' = 0,\\ \varpi' = 0,\end{cases}\qquad G_{14}\begin{cases}\omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' = \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10} = \varpi_{10}\omega_{01},\\ \omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\ \varpi'_{10} = (\omega_{10} - \varpi_{01})\omega_{01},\\ \varpi'_{01} = \omega_{01}\varpi_{10}.\end{cases}$$

On peut prendre le groupe

$$\boxed{g_{14}\begin{cases}X = x + a\\ Y = y + b\end{cases}}\quad\text{invariant dans}\quad\boxed{G_{14}\begin{cases}X = ax + by + c\\ Y = hx + ky + p\end{cases}}$$

b. Supposons maintenant que a et b ne sont pas nuls tous les deux; ce sont alors deux invariants indépendants. On peut leur donner les valeurs numériques fixes

On a un groupe g_{15} invariant dans un groupe G_{15} avec les formules de structure

$$g_{15}\left\{\begin{array}{l}\omega' = \omega\varpi,\\ \varpi' = 0,\end{array}\right. \qquad G_{15}\left\{\begin{array}{l}\omega' \;\;= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' \;\;= 0,\\ \omega'_{10} = 0,\\ \omega'_{01} = \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi).\end{array}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{15}\left\{\begin{array}{l}X = ax + b\\ Y = ay\end{array}\right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_{15}\left\{\begin{array}{l}X = ax + by + h\\ Y = cy\end{array}\right.}$$

La détermination des groupes transitifs à deux variables qui n'admettent que des invariants du premier ordre est achevée. Il nous reste à prendre successivement chacun des groupes g trouvés, y compris le groupe général $\mathcal{G}$ lui-même, et à rechercher s'il admet des sous-groupes n'admettant pas d'autre invariant du premier ordre que ceux de g lui-même, mais en admettant d'ordres supérieurs. Cette recherche est d'ailleurs évidemment inutile pour les groupes

$$g_8, \quad g_9, \quad g_{10}, \quad g_{12}, \quad g_{13}, \quad g_{14}, \quad g_{15}.$$

Elle n'est nécessaire que pour les groupes qui restent, à savoir

$$\mathcal{G}, \quad g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_4, \quad g_5, \quad g_6, \quad g_7, \quad g_{11}.$$

39. I. *Les groupes transitifs qui n'admettent pas d'invariant du premier ordre.*

Supposons que l'ordre minimum des invariants de l'un de ces groupes soit n, et supposons que l'une des équations du système complètement intégrable qui définit les invariants d'ordre n soit

$$\theta \equiv \sum_{p+q\leqq n} A_{pq}\omega_{pq} + \sum_{p+q\leqq n} B_{pq}\varpi_{pq} = 0.$$

Si l'on néglige d'abord tous les termes qui contiennent ω et ϖ dans θ' et si l'on ne prend que les coefficients de ω_{10}, ω_{01}, ϖ_{01}, ϖ_{10}, on obtient

$$
\begin{aligned}
\theta' = \quad & \omega_{10}\Big[\sum(p-1)\mathrm{A}_{pq}\omega_{pq} + \sum p\,\mathrm{B}_{pq}\varpi_{pq}\Big] \\
& + \omega_{01}\Big[\sum \mathrm{A}_{pq}(q\,\omega_{p+1,q-1} - \varpi_{pq}) + \sum q\,\mathrm{B}_{pq}\varpi_{p+1,q-1}\Big] \\
& + \varpi_{10}\Big[\sum p\,\mathrm{A}_{pq}\omega_{p-1,q+1} + \sum \mathrm{B}_{pq}(p\,\varpi_{p-1,q+1} - \omega_{pq})\Big] \\
& + \varpi_{01}\Big[\sum q\,\mathrm{A}_{pq}\omega_{pq} + \sum (q-1)\mathrm{B}_{pq}\varpi_{pq}\Big].
\end{aligned}
$$

On déduit de là qu'en négligeant, dans les équations du système complètement intégrable qui donne les invariants d'ordre n, les termes pour lesquels $p+q \leqq 1$, la présence de l'équation $\theta = 0$ entraîne la présence de toutes les équations

$$
\mathrm{A}_{pq}\omega_{pq} + \mathrm{B}_{p-1,q+1}\varpi_{p-1,q+1} = 0 \qquad \begin{pmatrix} p = 0, 1, 2, \ldots, n \\ q = 0, 1, 2, \ldots, n \\ p + q \geqq 2 \end{pmatrix}.
$$

Puis on montre sans difficulté que le système comprend, du moins si $n \geqq 3$, soit les équations

$$
\omega_{n0} + \ldots = \omega_{n-1,1} + \ldots = \ldots = \omega_{0n} + \ldots = \varpi_{n0} + \ldots = \ldots = \varpi_{0n} + \ldots = 0,
$$

soit les équations

$$
\omega_{n0} + \varpi_{n-1,1} + \ldots = \omega_{n-1,1} + \varpi_{n-2,2} + \ldots = \ldots = \omega_{1,n-1} + \varpi_{0n} + \ldots = 0,
$$

les termes non écrits étant d'ordre 0 ou 1.

Dans les deux cas *n ne peut pas être supérieur à* 2; en effet, si n est supérieur à 2, le coefficient de ϖ_{20} dans ω'_{n0} est $\dfrac{n(n-1)}{2}\,\omega_{n-2,1}$, et dans $\omega'_{n0} + \varpi'_{n-1,1}$ il est $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}(\omega_{n-2,1} + \varpi_{n-3,2})$; il ne peut donc pas s'éliminer.

Supposons donc $n = 2$. La considération des coefficients de ω_{01} et ϖ_{10} dans θ' montre que la présence d'équations de la forme

$$
\omega_{02} + \ldots = 0, \quad \varpi_{20} + \ldots = 0, \quad a\omega_{20} + b\varpi_{11} + \ldots = 0, \quad a\varpi_{02} + b\omega_{11} + \ldots = 0
$$

entraîne respectivement la présence des équations

$$
\begin{aligned}
\varpi_{02} - 2\omega_{11} + \ldots &= 0,\\
\omega_{20} - 2\varpi_{11} + \ldots &= 0,\\
(a-b)\varpi_{20} + \ldots = b\varpi_{02} + (2a-b)\omega_{11} + \ldots &= 0,\\
b\omega_{20} + (2a-b)\varpi_{11} + \ldots = (a-b)\omega_{02} + \ldots &= 0.
\end{aligned}
$$

On en déduit que le système est de l'une des formes suivantes :

$$\omega_{20} + \varpi_{11} + \ldots = \varpi_{02} + \omega_{11} + \ldots = 0,$$

$$\omega_{02} + \ldots = \varpi_{20} + \ldots = \omega_{20} - 2\varpi_{11} + \ldots = \varpi_{02} - 2\omega_{11} + \ldots = 0,$$

$$\omega_{20} + \ldots = \omega_{11} + \ldots = \omega_{02} + \ldots = \varpi_{20} + \ldots = \varpi_{11} + \ldots = \varpi_{02} + \ldots = 0.$$

Suivant ces trois cas, il existe donc deux, quatre ou six invariants du second ordre.

1° *Il existe deux invariants du second ordre.* — On peut poser

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &\equiv \omega_{20} + \varpi_{11} + a_{10}\,\omega_{10} + a_{01}\,\omega_{01} + b_{10}\,\varpi_{10} + b_{01}\,\varpi_{01} &&= 0,\\
\theta_2 &\equiv \omega_{11} + \varpi_{02} + a'_{10}\,\omega_{10} + a'_{01}\,\omega_{01} + b'_{10}\,\varpi_{10} + b'_{01}\,\varpi_{01} + c\,\omega &&= 0,
\end{aligned}
$$

après avoir réduit, ce qui est toujours possible, trois des coefficients de ω et ϖ à zéro. On a manifestement

$$\theta'_1 = \theta'_2 = 0.$$

En exprimant ces égalités on obtient successivement

$$
\begin{gathered}
da_{10} = \theta_1, \qquad db_{10} = \theta_2,\\
a_{01} = b_{01} = a'_{10} = b'_{10} = 0,\\
a'_{01} = a_{10}, \qquad b'_{01} = b_{10},\\
c = 0.
\end{gathered}
$$

On peut alors donner aux invariants a_{10}, b_{10} les valeurs numériques fixes zéro; on obtient un groupe $g_{0,1}$ qui est invariant dans lui-même et dont la structure est donnée par

$$
g_{0,1}\left\{
\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\varpi' &= \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},\\
\omega'_{10} &+ \varpi'_{01} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{0,1} \left\{ \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = a \right.}$$

invariant dans lui-même.

Pour ce groupe on peut exprimer tous les ϖ_{pq} $(q > 0)$ au moyen des ω_{pq}, par la formule

$$\varpi_{pq} = - \omega_{p+1,q-1};$$

il ne reste ainsi comme expressions d'ordre n que

$$\varpi_{n0}, \quad \omega_{n0}, \quad \omega_{n-1,1}, \quad \omega_{n-2,2}, \quad \ldots, \quad \omega_{1,n-1}, \quad \omega_{0n}.$$

Supposons maintenant que le groupe $g_{0,1}$ ait des sous-groupes admettant des invariants d'ordre $n \geqq 3$, mais pas d'ordre $n - 1$. Le même raisonnement que celui qui a été fait plus haut montrerait que le système qui donne ces invariants est de la forme

$$\varpi_{n0} + \ldots = \omega_{n0} + \ldots = \omega_{n-1,1} + \ldots = \ldots = \omega_{0n} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant d'ordre 0 ou 1. Mais alors le coefficient de ϖ_{20} dans ω'_{20} ne peut pas être nul en tenant compte des équations du système. Le groupe $g_{0,1}$ n'admet donc pas de sous-groupes de la nature de ceux que nous cherchons.

2° *Il existe quatre invariants du second ordre.* — On peut poser

$$\begin{aligned}
\theta_1 &\equiv \omega_{02} \qquad\quad + a_{10}\,\omega_{10} + a_{01}\,\omega_{01} + b_{10}\,\varpi_{10} + b_{01}\,\varpi_{01} = 0,\\
\theta_2 &\equiv \varpi_{02} - 2\omega_{11} + \alpha_{10}\,\omega_{10} + \alpha_{01}\,\omega_{01} + \beta_{10}\,\varpi_{10} + \beta_{01}\,\varpi_{01} = 0,\\
\theta_3 &\equiv \omega_{20} - 2\varpi_{11} + \alpha'_{10}\,\omega_{10} + \alpha'_{01}\,\omega_{01} + \beta'_{10}\,\varpi_{10} + \beta'_{01}\,\varpi_{01} = 0,\\
\theta_4 &\equiv \varpi_{20} \qquad\quad + a'_{10}\,\omega_{10} + a'_{01}\,\omega_{01} + b'_{10}\,\varpi_{10} + b'_{01}\,\varpi_{01} = 0.
\end{aligned}$$

Les coefficients de ω et ϖ ont pu être réduits à zéro, en réduisant à la transformation identique le groupe linéaire auquel étaient soumises les expressions ω_{20}, ω_{11}, ω_{02}, ϖ_{20}, ϖ_{11}, ϖ_{02}.

On a évidemment comme tout à l'heure

$$\theta'_1 = \theta'_2 = \theta'_3 = \theta'_4 = 0.$$

On en déduit

$$\begin{array}{llll}
da_{10} = -\theta_1, & da_{01} = -\theta_2, & db'_{10} = -\theta_3, & db'_{01} = -\theta_4, \\
b_{10} = 0, & b_{01} = -2a_{10}, & a'_{10} = -2b'_{01}, & a'_{01} = 0, \\
\alpha_{10} = 0, & \alpha_{01} = 2b'_{10}, & \beta_{10} = 3a_{10}, & \beta_{01} = -a_{01}, \\
\alpha'_{10} = -b'_{10}, & \alpha'_{01} = 3b'_{01}, & \beta'_{10} = 2a_{01}, & \beta'_{01} = 0.
\end{array}$$

On peut donner aux quatre invariants indépendants a_{10}, a_{01}, b'_{10}, b'_{01} des valeurs numériques fixes, par exemple zéro, et l'on a alors identiquement

$$\omega_{02} \equiv \varpi_{02} - 2\omega_{11} \equiv \omega_{20} - 2\varpi_{11} \equiv \varpi_{20} \equiv 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\omega'_{11} &= \omega_{01}\varpi_{11} + \varpi_{01}\omega_{11}, \\
\varpi'_{11} &= \omega_{10}\varpi_{11} + \varpi_{10}\omega_{11}.
\end{aligned}$$

On obtient par suite un seul type de groupes finis à huit paramètres $g_{0,2}$ invariants dans eux-mêmes, dont la structure est donnée par

$$g_{0,2} \left\{ \begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\
\varpi' &= \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01}, \\
\omega'_{10} &= \varpi_{10}\omega_{01} + 2\omega\varpi_{11} + \varpi\omega_{11}, \\
\omega'_{01} &= \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}) + \omega\omega_{11}, \\
\varpi'_{10} &= (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10} + \varpi\varpi_{11}, \\
\varpi'_{01} &= \omega_{01}\varpi_{10} + \omega\varpi_{11} + 2\varpi\omega_{11}, \\
\omega'_{11} &= \omega_{01}\varpi_{11} + \varpi_{01}\omega_{11}, \\
\varpi'_{11} &= \omega_{10}\varpi_{11} + \varpi_{10}\omega_{11}.
\end{aligned} \right.$$

On peut prendre par exemple

$$\boxed{g_{0,2} \left\{ \begin{aligned}
X &= \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} \\
Y &= \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3}
\end{aligned} \right.}$$

invariant dans lui-même.

3° *Il existe six invariants du second ordre.* — On peut regarder tout groupe $g_{0,3}$ qui correspond à ce cas comme un sous-groupe de $g_{0,2}$ défini par deux invariants supplémentaires du second ordre. On peut prendre

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \omega_{11} + a_{10}\,\omega_{10} + a_{01}\,\omega_{01} + b_{10}\,\varpi_{10} + b_{01}\,\varpi_{01} + c\,\omega + h\,\varpi,\\ \theta_2 &= \varpi_{11} + a'_{10}\,\omega_{10} + a'_{01}\,\omega_{01} + b'_{10}\,\varpi_{10} + b'_{01}\,\varpi_{01} + c'\omega + h'\varpi.\end{aligned}$$

On a encore manifestement

$$\theta'_1 = \theta'_2 = 0.$$

On en déduit successivement

$$\begin{gathered} da_{01} = \theta_2, \qquad db_{01} = \theta_1,\\ a_{10} = b_{10} = a'_{01} = b'_{01} = 0,\\ a'_{10} = a_{01}, \qquad b'_{10} = b_{01},\\ c = h' = a_{01}\,b_{01},\\ c' = a^2_{01}, \qquad h = b^2_{01}. \end{gathered}$$

Si l'on donne aux deux invariants indépendants a_{01} et b_{01} les valeurs numériques fixes zéro, on a

$$\omega_{11} = \varpi_{11} = 0.$$

On obtient ainsi un seul type de groupes $g_{0,3}$, chacun étant invariant dans lui-même. Sa structure est donnée par

$$g_{0,3}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' &= \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10} &= \varpi_{10}\omega_{01},\\ \omega'_{01} &= \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\ \varpi'_{10} &= (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10},\\ \omega'_{01} &= \omega_{01}\varpi_{10}. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{0,3}\left\{\begin{aligned} X &= a_1 x + a_2 y + a_3\\ Y &= b_1 x + b_2 y + b_3 \end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

Il existe donc en somme, en comptant le groupe $\mathcal{G}$ lui-même, quatre types de groupes, deux finis et deux infinis, n'admettant pas d'invariants du premier ordre, c'est-à-dire pour lesquels les *éléments linéaires* du plan sont transformés entre eux par le groupe linéaire et homogène général. Ce résultat s'étend d'ailleurs au cas d'un nombre quelconque de variables et a été démontré, sous sa forme générale, par S. Lie (¹).

40. II. *Les groupes transitifs qui admettent le même invariant du premier ordre que g_1.* — Ici G_1 est identique au groupe $g_{0,1}$ qui a été déterminé tout à l'heure. Le système complètement intégrable qui donne les invariants d'ordre n des groupes cherchés comprend toujours l'équation

$$\omega_{10} + \varpi_{01} = 0.$$

Soit n le plus petit entier pour lequel il y a d'autres équations et soit

$$\theta \equiv B\varpi_{n0} + A_n\omega_{n0} + A_{n-1}\omega_{n-1,1} + \ldots + A_1\omega_{1,n-1} + A_0\omega_{0,n} + \ldots = 0$$

l'une de ces équations, où l'on n'a écrit que les termes d'ordre n. Si, dans θ', on tient compte des équations du système, et qu'on ne considère que les coefficients de ω_{10}, ω_{01}, ϖ_{10} et, dans ces coefficients, les termes d'ordre n, on obtient

$$\begin{aligned}\theta' = \ & \omega_{10}[(n+1)B\varpi_{n0} + (n-1)A_n\omega_{n0} + (n-3)A_{n-1}\omega_{n-1,1} + \ldots - (n+1)A_0\omega_{0n}] \\ & + \omega_{01}[-A_n\varpi_{n0} + 2A_{n-1}\omega_{n,0} + 3A_{n-2}\omega_{n-1,1} + \ldots + (n+1)A_0\omega_{1,n-1}] \\ & + \varpi_{10}[-(n+1)B\omega_{n0} + nA_{n-1}\omega_{n-1,1} + (n-1)A_{n-2}\omega_{n-2,2} + \ldots + A_1\omega_{0n}] + \end{aligned}$$

Cette formule montre que le système contient $n+2$ équations du $n^{\text{ième}}$ ordre. Mais alors n ne peut être supérieur à 2, comme le montre la considération du coefficient de ϖ_{20} dans ω'_{n0}.

Supposons donc $n = 2$. On peut prendre

$$\begin{aligned}\theta &\equiv \omega_{10} + \varpi_{01} = 0, \\ \theta_1 &\equiv \varpi_{20} + a_1\varpi_{10} + b_1(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c_1\omega_{01} = 0, \\ \theta_2 &\equiv \omega_{20} + a_2\varpi_{10} + b_2(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c_2\omega_{01} + h_2\omega = 0, \\ \theta_3 &\equiv \omega_{11} + a_3\varpi_{10} + b_3(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c_3\omega_{01} + h_3\omega = 0, \\ \theta_4 &\equiv \omega_{02} + a_4\varpi_{10} + b_4(\omega_{10} - \varpi_{01}) + c_4\omega_{01} + h_4\omega = 0,\end{aligned}$$

(¹) *Leipz. Abh.*, t. XXI, 1895, p. 81 (rédigé par F. Engel).

les coefficients de ω et ϖ autres que h_2, h_3, h_4 ayant été réduits à zéro par la réduction à la transformation identique du groupe linéaire qui transforme ω_{20}, ϖ_{20}, ω_{11}, ω_{02}.

On obtient d'abord

$$\theta' = 0, \qquad \theta'_1 = \frac{1}{2}\theta\theta_1, \qquad \theta'_2 = \frac{1}{2}\theta\theta_2, \qquad \theta'_3 = \frac{1}{2}\theta\theta_3, \qquad \theta'_4 = \frac{1}{2}\theta\theta_4,$$

$$\begin{aligned}
db_1 &= \frac{3}{2}\theta_1 + \frac{1}{2}b_1\theta,\\
da_1 &= -3\theta_2 + \frac{1}{2}a_1\theta,\\
da_2 &= 2\theta_3 + \frac{1}{2}a_2\theta,\\
da_3 &= \theta_4 + \frac{1}{2}a_3\theta,
\end{aligned}$$

$$c_1 = 0, \qquad b_2 = -\frac{1}{6}a_1, \qquad c_2 = -\frac{2}{3}b_1, \qquad b_3 = -\frac{1}{4}a_2,$$

$$c_3 = -\frac{2}{3}a_1, \qquad a_4 = 0, \qquad b_4 = -\frac{3}{2}a_3, \qquad c_4 = \frac{3}{2}a_2.$$

Les invariants b_1, a_1, a_2, a_3 étant indépendants, on peut leur donner des valeurs numériques fixes, par exemple zéro; on a alors

$$\theta = \omega_{10} + \varpi_{01} = 0,$$
$$\varpi_{20} = \omega_{20} + h_2\omega = \omega_{11} + h_3\omega = \omega_{02} + h_4\omega = 0.$$

On déduit de là facilement

$$h_2 = h_3 = h_4 = 0.$$

On a, par suite, un type de groupes $g_{1,1}$, chacun d'eux invariant dans un groupe $G_{1,1}$; les structures respectives de $g_{1,1}$ et $G_{1,1}$ sont données par les formules

$$g_{1,1}\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\varpi' &= \omega\varpi_{10} - \varpi\omega_{10},\\
\omega'_{10} &= \varpi_{10}\omega_{01},\\
\omega'_{01} &= 2\omega_{01}\omega_{10},\\
\varpi'_{10} &= 2\omega_{10}\varpi_{10},
\end{aligned}\right.
\qquad
G_{1,1}\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\varpi' &= \omega\varpi_{10} + \varpi\varpi_{01},\\
\omega'_{10} &= \varpi_{10}\omega_{01},\\
\omega'_{01} &= \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\
\varpi'_{10} &= (\omega_{10} - \varpi_{01})\varpi_{10},\\
\varpi'_{01} &= \omega_{01}\varpi_{10}.
\end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{1,1}\left\{\begin{array}{l} X = a_1 x + a_2 y + a_3 \\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3 \end{array}\right. \qquad (a_1 b_2 - b_1 a_2 = 1)}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{1,1}\left\{\begin{array}{l} X = a_1 x + a_2 y + a_3 \\ Y = b_1 x + b_2 y + b_3 \end{array}\right.}$$

41. III. *Les groupes transitifs qui admettent le même invariant du premier ordre que g_2.*

Le groupe $G_2^{(n)}$, $n^{\text{ième}}$ prolongement normal de G_2, est défini par les expressions $\omega_{pq}(p+q \leqq n)$, ϖ, ϖ_{01}, ..., ϖ_{0n}. Sa structure est définie par les mêmes formules que $G^{(n)}$ à condition d'annuler identiquement dans ces formules les ϖ_{pq} pour lesquelles p est plus grand que zéro.

Soit n l'ordre minimum des invariants du groupe cherché, considéré comme sous-groupe de G_2. Soit

$$\theta = \sum A_{pq}\omega_{pq} + \sum B_q \varpi_{0q} = 0$$

l'une des équations du système qui définit ces invariants d'ordre n. Si nous formons encore θ', en négligeant les termes qui contiennent ω et ϖ, en tenant compte des équations du système et enfin en ne considérant que les coefficients de ω_{10}, ω_{01}, ϖ_{01}, et dans ces coefficients les termes d'ordre $\geqq 2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta' = \omega_{10}\sum(p-1)A_{pq}\omega_{pq} + \omega_{01}\sum A_{pq}(q\,\omega_{p+1,\,q-1} - \varpi_{pq}) \\ + \varpi_{01}\left[\sum q A_{pq}\omega_{pq} + \sum(q-1)B_q\varpi_{0q}\right] + \ldots \end{aligned}$$

Il résulte de là, qu'en négligeant les termes d'ordre 0 et 1, chaque équation du système peut être supposée de l'une des formes

$$\begin{gathered} \omega_{pq} + \ldots = 0 \qquad (p \neq 1,\ p+q = n), \\ A\omega_{1,n-1} + B\varpi_{0n} + \ldots = 0. \end{gathered}$$

De plus, le système comprend certainement l'une des équations

$$\varpi_{0n} + \ldots = 0,$$
$$\omega_{n0} + \ldots = 0.$$

Dans les deux cas d'ailleurs on démontre, comme il a été déjà indiqué, que n est au plus égal à 3.

1° *L'ordre minimum des invariants est* 3.

Nous distinguerons trois cas suivant que le système qui donne les invariants du troisième ordre ne contient pas l'équation $\varpi_{03} + \ldots = 0$, ne contient pas l'équation $\omega_{30} + \ldots = 0$, ou enfin contient ces deux équations.

a. Le système qui donne les invariants d'ordre 3 *ne contient pas d'équation de la forme* $\varpi_{03} + \ldots = 0$. Alors il contient l'équation

$$\theta = \omega_{30} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} = 0,$$

les coefficients de ω et ϖ pouvant être réduits à 0. On obtient alors

$$\theta' = 0, \qquad da = 2\theta, \qquad b = c = 0.$$

On a ainsi un type $g_{2,1}$, invariant dans lui-même, dont la structure s'obtient en faisant $\omega_{30} = 0$:

$$g_{2,1} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} &= \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} &= \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,1} \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{x f(y) + \varphi(y)}{x \psi(y) + 1} \\ Y &= \chi(y) \end{aligned} \right.}$$

invariant dans lui-même.

Si l'on considère maintenant le prolongement $g_{2,1}^{(n)}$ de ce groupe, il est défini par les expressions $\omega_{0q}(q \leqq n)$, $\omega_{1q}(q \leqq n-1)$, $\omega_{2q}(q \leqq n-2)$, $\varpi_{0q}(q \leqq n)$. Si l'un de ses sous-groupes admet des invariants d'ordre minimum $n \geqq 3$, le système qui donne ces invariants contient l'une des équations

$$\begin{aligned} \theta &\equiv \varpi_{0n} \quad + \ldots = 0, \\ \theta &\equiv \omega_{2,n-2} + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Le premier cas est impossible, car n devrait être égal à 3, et cela est contraire à l'hypothèse. Le deuxième cas est impossible également, car θ' contiendrait le terme $(n-2)\omega_{11}\,\omega_{2,n-3}$ qui ne pourrait pas se réduire.

b. Le système qui donne les invariants d'ordre 3 *ne contient pas d'équation de la forme* $\omega_{30} + \ldots = 0$. Alors il contient l'équation

$$\theta \equiv \varpi_{03} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} + h\omega = 0,$$

et l'on trouve

$$\theta' = 0, \qquad dc = 2\theta, \qquad a = b = h = 0.$$

On obtient ainsi un type $g_{2,2}$, invariant dans lui-même, et dont la structure s'obtient en faisant $\varpi_{03} \equiv 0$:

$$g_{2,2} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,2} \left\{ \begin{aligned} X &= f(x, y) \\ Y &= \frac{ay+b}{cy+h} \end{aligned} \right.}$$

invariant dans lui-même.

Le prolongement normal $g_{2,2}^{(n)}$ de $g_{2,2}$ est défini par les expressions ϖ, ϖ_{01}, ϖ_{02}, $\omega_{pq}(p+q \leqq n)$. Si l'un des sous-groupes de $g_{2,2}$ admet des invariants d'ordre minimum $n \geqq 3$, le système qui donne ces invariants contient nécessairement l'équation

$$\omega_{n0} + \ldots = 0;$$

mais cela n'est possible que si n est égal à 3, et cela est contraire à l'hypothèse.

c. Le système qui donne les invariants d'ordre 3 contient deux équations de la forme $\omega_{30} + \ldots = \varpi_{03} + \ldots = 0$. Ce cas réunit les deux précédents et donne d'abord naissance à un type $g_{2,3}$ dont la structure s'obtient en faisant $\omega_{30} \equiv \varpi_{03} \equiv 0$:

$$g_{2,3} \left\{ \begin{array}{l} \omega' \;\;= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \varpi' \;\;= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{array} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,3} \left\{ \begin{array}{l} X = \dfrac{x f(y) + \varphi(y)}{x \psi(y) + 1} \\ Y = \dfrac{ay + b}{cy + h} \end{array} \right.}$$

invariant dans lui-même.

Le prolongement $g''_{2,3}$ de $g_{2,3}$ est défini par les expressions ϖ, ϖ_{01}, ϖ_{02}, ω_{0q}, ω_{1q}, ω_{2q}. Si l'un des sous-groupes de $g_{2,3}$ admet des invariants d'ordre minimum $n \geqq 3$, le système qui donne ces invariants contient nécessairement une équation de la forme

$$\theta \equiv \omega_{2,n-2} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} + \delta\omega = 0,$$

mais θ' contiendrait le terme $(n-2)\omega_{11}\,\omega_{2,n-3}$ qui ne pourrait pas se réduire.

2° *L'ordre minimum des invariants est* 2.

Nous distinguerons encore trois cas.

a. Le système qui donne les invariants d'ordre 2 ne contient pas d'équation de la forme $\varpi_{02} + \ldots = 0$.

Alors il contient l'équation

$$\theta \equiv \omega_{20} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} = 0.$$

On obtient

$$\theta' = 0, \qquad da = \theta, \qquad b = c = 0.$$

Cela donne un type $g'_{2,4}$ invariant dans lui-même, dont la structure est donnée en faisant $\omega_{20} = 0$:

$$g_{2,4} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,4} \begin{cases} X = x f(y) + \varphi(y) \\ Y = \psi(y) \end{cases}}$$

invariant dans lui-même.

Le prolongement $g_{2,4}^{(n)}$ de $g_{2,4}$ est défini par les expressions ϖ_{0q}, ω_{0q}, ω_{1q}. Si l'un des sous-groupes de $g_{2,4}$ admet des invariants d'ordre minimum $n \geqq 2$, le système qui donne ces invariants contient, si $n = 2$, l'équation $\omega_{11} + \alpha\varpi_{02} + \ldots = 0$; si $n > 2$, l'une des équations

$$\omega_{1,n-1} + \alpha\varpi_{0n} + \ldots = 0,$$
$$\varpi_{0n} + \ldots = 0.$$

a_1. Le système qui donne les invariants d'ordre minimum $n \geqq 2$ ne contient pas l'équation $\varpi_{0n} + \ldots = 0$. Il contient alors l'équation

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} - m\varpi_{0n} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} + \delta\omega = 0.$$

On voit sans difficulté que n doit être égal à 2, et l'on a alors

$$\theta' = 0, \qquad dm = 0, \qquad d\gamma = \theta, \qquad \alpha = \beta = \delta = 0.$$

On obtient ainsi un type $g_{2,5}$ invariant dans lui-même, dont la structure s'obtient en faisant $\omega_{11} \equiv m\varpi_{02}$:

$$g_{2,5}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \omega'_{10} - m\,\varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,5}\begin{cases} X = a\,x f'^m(y) + \varphi(y) \\ Y = f(y) \end{cases}}$$

invariant dans lui-même.

Le prolongement $g_{2,5}^{(n)}$ de $g_{2,5}$ est défini par les expressions ω_{10}, ω_{0q}, ϖ_{0q}. Si un sous-groupe de $g_{2,5}$ admet des invariants d'ordre minimum $n \geqq 2$, la présence, dans le système qui les donne, de l'équation

$$A\,\omega_{0n} + B\varpi_{0n} + \ldots = 0$$

entraîne celle des équations

$$\begin{aligned} A\,\omega_{0n} + \ldots &= 0, \\ B\varpi_{0n} + \ldots &= 0, \\ (mn - 1)\,A\varpi_{0n} + \ldots &= 0. \end{aligned}$$

On voit d'abord que, si $B \neq 0$, n est supérieur à 2. Il y a encore deux cas distincts à considérer, suivant que l'équation $\varpi_{0n} + \ldots = 0$ n'entre pas ou entre.

Dans le premier cas, on a

$$m = \frac{1}{n} \qquad (n \geqq 2),$$

$$\theta \equiv \omega_{0n} + A\,\omega_{10} + B\,\omega_{01} + C\varpi_{10} = 0.$$

Si n est supérieur à 2, il y a dans θ' un terme $\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-1}$ qui ne peut se réduire. Il faut donc que n soit égal à 2. On trouve alors

$$\theta' = 0, \qquad dA = -\theta, \qquad C = -2A, \qquad B = 0.$$

En donnant à l'invariant A la valeur numérique 0, on obtient $\omega_{02} \equiv 0$

avec les formules

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\omega'_{10} &= \frac{1}{2}\varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{01} &= \frac{1}{2}\omega\varpi_{02} + \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\
\varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\
\varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02}.
\end{aligned}$$

Ces formules entraînent

$$\varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02} + \lambda\omega\varpi$$

et l'identité fondamentale, appliquée à la dernière formule, donne $\lambda = 0$. On est conduit ainsi à un type $g_{2,6}$ invariant dans lui-même, et dont la structure est donnée par les formules

$$g_{2,6}\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\omega'_{10} &= \frac{1}{2}\varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{01} &= \frac{1}{2}\omega\varpi_{02} + \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}),\\
\varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\
\varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\
\varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02}.
\end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,6}\left\{\begin{aligned}
X &= \frac{ax + by + c}{py + q}\\
Y &= \frac{mx + n}{py + q}
\end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

Dans le second cas, le système qui donne les invariants des sous-groupes cherchés de $g_{2,5}$ contient l'équation

$$\varpi_{0n} + \ldots = 0 \qquad (n \geqq 3),$$

ce qui exige $n = 3$. En posant

$$\theta \equiv \varpi_{03} + A\omega_{10} + B\omega_{01} + C\varpi_{01} + D\omega = 0,$$

on trouve

$$\theta' = 0, \qquad dC = 2\theta, \qquad A = B = D = 0.$$

Cela donne le type $g_{2,7}$ invariant dans lui-même, et dont la structure est

$$g_{2,7}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02}, \\ \omega'_{10} = m\,\varpi\varpi_{02}. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,7}\begin{cases} X = \dfrac{ax}{(py+q)^{2m}} + f(y) \\ Y = \dfrac{by+c}{py+q} \end{cases}}$$

invariant dans lui-même.

Ce groupe peut admettre lui-même des sous-groupes admettant un invariant d'ordre minimum $n \geqq 3$ donné par l'équation

$$\theta \equiv \omega_{0n} + A'\omega_{10} + B'\omega_{01} + C'\varpi_{01} + D'\omega = 0.$$

On a

$$\omega'_{0n} = \omega_{0n}\omega_{10} + \varpi\omega_{0,n+1} + n\varpi_{01}\omega_{0n} + n\left(\frac{n-1}{2} - m\right)\varpi_{02}\omega_{0,n-1}.$$

Cette formule montre qu'on doit avoir

$$m = \frac{n-1}{2},$$

ce qui donne

$$\theta' = 0, \qquad dA' = -\theta, \qquad C' = -nA', \qquad B' = D' = 0.$$

On arrive ainsi à un type qui contient $g_{2,6}$ comme cas particulier et que nous appellerons encore $g_{2,6}$. Sa structure s'obtient en faisant $\omega_{0n} \equiv 0$.

$$
g_{2,6}\left\{\begin{array}{ll}
\omega' & = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\
\omega'_{01} & = \omega_{01}\omega_{10} + \varpi\omega_{02} + \varpi_{01}\omega_{01} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega, \\
\omega'_{02} & = \omega_{02}\omega_{10} + \varpi\omega_{03} + 2\varpi_{01}\omega_{02} - (n-2)\varpi_{02}\omega_{01}, \\
\omega'_{03} & = \omega_{03}\omega_{10} + \varpi\omega_{04} + 3\varpi_{01}\omega_{03} - 3\,\dfrac{n-3}{2}\varpi_{02}\omega_{02}, \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
\omega'_{0,n-1} & = \omega_{0,n-1}\omega_{10} + C^1_{n-1}\varpi_{01}\omega_{0,n-1} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-2}, \\
\omega'_{10} & = \dfrac{n-1}{2}\varpi\varpi_{02}, \\
\varpi' & = \varpi\varpi_{01}, \\
\varpi'_{01} & = \varpi\varpi_{02}, \\
\varpi'_{02} & = \varpi_{01}\varpi_{02}.
\end{array}\right.
$$

On peut prendre

$$
\boxed{
g_{2,6}\left\{\begin{array}{l}
X = \dfrac{ax + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n}{(py+q)^{n-1}} \\
Y = \dfrac{by+c}{py+q}
\end{array}\right. \qquad (n \geqq 2)
}
$$

invariant dans lui-même.

a_2. *Le système qui donne les invariants d'ordre minimum $n \geqq 3$ des sous-groupes de $g_{2,4}$ contient l'équation $\varpi_{0n} + \ldots = 0$.*

On a alors nécessairement $n = 3$. Posons

$$\theta \equiv \varpi_{03} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} + \delta\omega = 0.$$

On obtient

$$\theta' = 0, \qquad d\gamma = 2\theta, \qquad d\alpha = d\beta = d\delta = 0.$$

On a, par suite, un type $g_{2,8}$ invariant dans lui-même, dont la structure s'obtient en faisant $\varpi_{03} \equiv 0$:

$$g_{2,8} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} &= \varpi\omega_{11}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02}. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,8} \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X} &= xf(y) + \varphi(y) \\ \mathrm{Y} &= \frac{ax+b}{cy+h} \end{aligned} \right.}$$

invariant dans lui-même.

Si ce groupe avait un sous-groupe admettant des invariants d'ordre $n \geqq 3$, le système qui donne ces invariants contiendrait l'équation

$$\theta \equiv \omega_{1,n-1} + \ldots = 0\,;$$

or il y a dans θ' un terme $\frac{(n-1)(n-2)}{2}\varpi_{02}\,\omega_{1,n-3}$ qui ne pourrait pas se réduire.

b. Le système qui donne les invariants d'ordre 2 des sous-groupes de g_2 ne contient pas d'équation de la forme $\omega_{20} + \ldots = 0$.

Alors il contient l'équation

$$\theta \equiv \varpi_{02} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} + h\omega = 0$$

et l'on trouve

$$\theta' = 0, \qquad dc = 0, \qquad a = b = h = 0.$$

On est donc d'abord conduit à un type $g_{2,9}$ invariant dans lui-même, dont la structure est donnée par

$$g_{2,9} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= 0. \end{aligned} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,9}\begin{cases} X = f(x, y) \\ Y = ay + b \end{cases}}$$

invariant dans lui-même.

Le prolongement $g_{2,9}^{(n)}$ de $g_{2,9}$ est défini par les expressions ϖ, ϖ_{01}, $\omega_{pq}(p+q \leqq n)$. Si un sous-groupe de $g_{2,9}$ admet des invariants d'ordre $n \geqq 2$, le système qui les définit contient l'équation

$$\theta \equiv \omega_{n0} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} = 0.$$

L'entier n est égal à 3.

On a alors

$$\theta' = 0, \qquad d\alpha = 2\theta, \qquad \beta = \gamma = 0.$$

Cela conduit à un type $g_{2,10}$ invariant dans lui-même, et dont la structure est

$$g_{2,10}\begin{cases} \omega' \;\; = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \\ \varpi' \;\; = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,10}\begin{cases} X = \dfrac{x f(y) + \varphi(y)}{x \varphi(y) + 1} \\ Y = ay + b \end{cases}}$$

invariant dans lui-même.

On montre comme plus haut que ce groupe n'admet pas de sous-groupes ayant les mêmes invariants du troisième ordre.

c. Le système qui donne les invariants d'ordre 2 des sous-groupes de g_2 contient deux équations de la forme

$$\varpi_{02} + \ldots = \omega_{20} = \ldots = 0.$$

La présence de ces équations conduit d'abord à un groupe $g_{2,11}$, invariant dans lui-même, et dont la structure est donnée par

$$g_{2,11}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} &= \varpi\omega_{11},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= 0. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,11}\left\{\begin{aligned} X &= x f(y) + \varphi(y) \\ Y &= a y + b \end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

Si un sous-groupe de $g_{2,11}$ admet des invariants d'ordre minimum $n \geqq 2$, le système qui donne ces invariants contient une équation de la forme

$$\theta = \omega_{1,n-1} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\varpi_{01} + h\omega = 0.$$

On en déduit

$$\theta' = 0, \qquad dc = (n-1)\theta, \qquad a = b = h = 0.$$

Cela conduit à un groupe $g_{2,12}$, invariant dans lui-même, et dont la structure est

$$g_{2,12}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} &= \varpi\omega_{11},\\ \omega'_{11} &= \varpi\omega_{12} + \varpi_{01}\omega_{11},\\ \omega'_{12} &= \varpi\omega_{13} + 2\varpi_{01}\omega_{12},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega'_{1,n-2} &= (n-2)\varpi_{01}\omega_{1,n-3},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= 0. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,12}\left\{\begin{aligned} X &= x\, e^{P_{n-2}(y)} + f(y) \\ Y &= a y + b \end{aligned}\right. \qquad (n \geqq 2)}$$

invariant dans lui-même, en désignant par $P_{n-2}(y)$ un polynome arbitraire entier en y de degré $n-2$.

Si le groupe $g_{2,12}$ a des sous-groupes admettant des invariants d'ordre $n' \leqq n$, on voit sans difficulté que n doit être égal à 2; on peut alors prendre

$$\theta \equiv \omega_{0n} + \alpha\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi_{01} + \delta\omega,$$

ce qui donne

$$\theta' = 0, \qquad d\alpha = -\theta, \qquad \beta = \delta = 0, \qquad \gamma = -n\alpha.$$

On a ainsi un groupe $g_{2,13}$, invariant dans lui-même, dont la structure est donnée par

$$g_{2,13}\left\{\begin{array}{ll}
\omega' & = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\
\omega'_{10} & = 0, \\
\omega'_{01} & = \omega_{01}\omega_{10} + \varpi\omega_{02} + \varpi_{01}\omega_{01}, \\
\omega'_{02} & = \omega_{02}\omega_{10} + \varpi\omega_{03} + 2\varpi_{01}\omega_{02}, \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
\omega'_{0,n-1} & = \omega_{0,n-1}\omega_{10} + (n-1)\varpi_{01}\omega_{0,n-1}, \\
\varpi' & = \varpi\varpi_{01}, \\
\varpi'_{01} & = 0.
\end{array}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{2,13}\left\{\begin{array}{l} X = a\,x + P_{n-1}(y) \\ Y = b\,y + c \end{array}\right. \qquad (n \geqq 2)}$$

invariant dans lui-même, en désignant par $P_{n-1}(y)$ un polynome arbitraire entier en y de degré $n \geqq 2$.

42. IV. *Les groupes transitifs qui admettent les mêmes invariants du premier ordre que g_3.*

Le prolongement $G_3^{(n)}$ de G_3, qui est identique à $g_{2,5}$, peut être défini par les expressions ω_{10}, ω, ω_{0q}, ϖ, ϖ_{0q}. Le système complètement intégrable qui donne les invariants d'ordre inférieur ou égal à n des groupes cherchés contient toujours l'équation

$$\theta \equiv \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0.$$

Soit $n \geqq 2$ le plus petit entier pour lequel il contienne d'autres équations et soit

$$\theta_1 \equiv \sum_{q=2}^{q=n} A_q \omega_{0q} + \sum_{q=2}^{q=n} B_q \varpi_{0q} + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant d'ordre 0 ou 1. Si dans θ'_1 on tient compte des équations du système et qu'on ne conserve que les coefficients de ω_{01}, ϖ_{01}, et dans ces coefficients seulement les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, on trouve

$$\theta'_1 = \varpi_{01} \sum [(q-m) A_q \omega_{0q} + (q-1) B_q \varpi_{0q}] + \omega_{01} \sum A_q (mq-1) \varpi_{0q}.$$

Une discussion facile montre alors que le système contient soit une équation de la forme

$$\varpi_{0n} + \ldots = 0,$$

soit une équation de la forme

$$\omega_{0n} + \ldots = 0 \qquad \left(m = \frac{1}{n}\right).$$

1° *Le système contient une équation d'ordre n de la forme*

$$\theta_1 \equiv \varpi_{0n} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} + c\omega = 0.$$

Nous distinguerons deux cas suivant que $n = 3$ ou 2.

a. $n = 3$. En posant

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv \varpi_{03} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} + c\omega = 0, \\ \theta &\equiv \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0, \end{aligned}$$

on obtient

$$\theta' = \theta'_1 = 0, \qquad db = 2\theta_1, \qquad dc = c\theta, \qquad a = 0, \qquad (m+2)c = 0.$$

Si $c = 0$, on obtient un groupe $g_{3,1}$, invariant dans un groupe $G_{3,1}$, et les structures de $g_{3,1}$ et $G_{3,1}$ sont

$$g_{3,1}\left\{\begin{aligned} \omega' &= m\,\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02}, \end{aligned}\right. \qquad G_{3,1}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02},\\ \omega'_{10} &= m\,\varpi\varpi_{02}. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,1}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{(ah-bc)^m x}{(cy+h)^{2m}} + f(y)\\ Y &= \frac{ay+b}{cy+h} \end{aligned}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{3,1}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{kx}{(cy+h)^{2m}} + f(y)\\ Y &= \frac{ay+b}{cy+h} \end{aligned}\right.}$$

Si $c \neq 0$, $m = -2$, on peut donner aux invariants, indépendants b et c les valeurs numériques o et 1, et l'on obtient un type $g_{3,2}$, invariant dans lui-même, dont la structure est

$$g_{3,2}\left\{\begin{aligned} \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02} + \omega\varpi,\\ \omega' &= -2\,\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,2}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{x}{f'^2(y)} - \frac{f'''(y)}{f'^2(y)} + \frac{3}{2}\,\frac{f''^2(y)}{f'^4(y)}\\ Y &= f(y) \end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

On voit sans peine que $g_{3,2}$, qui est holomorphe au groupe infini d'une variable, ne peut pas donner naissance à d'autres groupes ultérieurs.

Quant à $g_{3,1}$, s'il a un sous-groupe admettant un invariant d'ordre $n \geqq 3$, il est donné par l'équation

$$\theta_1 \equiv \omega_{0n} + \lambda \varpi_{02} + \alpha \omega_{01} + \beta \varpi_{01} + \gamma \omega = 0 \qquad (m - n + 1)\lambda = 0.$$

Or on a

$$\omega'_{0n} = \varpi \omega_{0,n+1} + (n\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{0n} - n\left(m - \frac{n-1}{2}\right)\varpi_{02}\omega_{0,n-1}.$$

Il faut donc qu'on ait

$$m = \frac{n-1}{2}, \qquad \lambda = 0,$$

et l'on trouve

$$\theta' = 0, \qquad \theta'_1 = -\theta\theta_1, \qquad d\beta = \frac{n+1}{2}\theta_1 - \beta\theta, \qquad \alpha = \gamma = 0.$$

On arrive ainsi à un type $g_{3,3}$ invariant dans un groupe $G_{3,3}$; leurs structures sont données par

$$g_{3,3} \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \frac{n-1}{2}\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02}, \\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02}, \\ \omega'_{10} &= \varpi\omega_{02} - \frac{n-3}{2}\varpi_{01}\omega_{01} - \frac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega, \\ \omega'_{02} &= \varpi\omega_{03} - \frac{n-5}{2}\varpi_{01}\omega_{02} - 2\,\frac{n-2}{2}\varpi_{02}\omega_{01}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} &= \frac{n-1}{2}\varpi_{01}\omega_{0,n-1} - \frac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-2} \end{aligned} \right.$$

et

$$
G_{3,3}\left\{
\begin{array}{ll}
\omega' & = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\varpi' & = \varpi\varpi_{01},\\
\varpi'_{01} & = \varpi\varpi_{02},\\
\varpi'_{02} & = \varpi_{01}\varpi_{02},\\
\omega'_{10} & = \dfrac{n-1}{2}\varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{01} & = \varpi\omega_{02} + (\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{01} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega\\
\omega'_{02} & = \varpi\omega_{03} + (2\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{02} - 2\dfrac{n-2}{2}\varpi_{02}\omega_{01},\\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill,}\\
\omega'_{0,n-1} & = [(n-1)\varpi_{01} - \omega_{10}]\omega_{0,n-1} - \dfrac{n-1}{2}\varpi_{02}\omega_{0,n-2}.
\end{array}\right.
$$

On peut prendre

$$
\boxed{g_{3,3}\left\{
\begin{array}{l}
X = \dfrac{(ah-bc)^{\frac{n-1}{2}}x + k_1y^{n-1} + k_2y^{n-2} + \ldots + k_n}{(cy+h)^{n-1}}\\
Y = \dfrac{ay+b}{cy+h}
\end{array}\right. \qquad (n \geqq 3)}
$$

invariant dans

$$
\boxed{G_{3,3}\left\{
\begin{array}{l}
X = \dfrac{kx + k_1y^{n-1} + \ldots + k_n}{(cy+h)^{n-1}}\\
Y = \dfrac{ay+b}{cy+h}
\end{array}\right.}
$$

Nous verrons plus loin que le groupe existe aussi pour $n = 2$.

b. Le système qui donne les invariants des sous-groupes de g_3 contient l'équation

$$\theta_1 \equiv \varpi_{02} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} + c\omega = 0.$$

En posant toujours

$$\theta \equiv \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0,$$

on obtient

$$\theta' = \theta'_1 = 0, \qquad db = \theta_1, \qquad da = a\theta, \qquad dc = c\theta, \qquad ma = (m+1)c = 0.$$

b_1. Si $a = c = 0$, on obtient un groupe $g_{3,4}$ invariant dans $G_{3,4}$, les structures de $g_{3,4}$ et $G_{3,4}$ étant

$$g_{3,4}\left\{\begin{aligned} \omega' &= m\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad G_{3,4}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= 0,\\ \omega'_{10} &= 0. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,4}\left\{\begin{aligned} X &= a^m x + f(y)\\ Y &= ay \quad + b \end{aligned}\right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_{3,4}\left\{\begin{aligned} X &= cx + f(y)\\ Y &= ay + b \end{aligned}\right.}$$

Si $g_{3,4}$ admet un sous-groupe ayant des invariants d'ordre minimum $n \geqq 2$, ils sont donnés par

$$\begin{aligned} \theta &= \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0,\\ \theta_1 &= \omega_{0n} + \alpha\omega_{01} + \beta\varpi_{01} + \gamma\omega = 0, \end{aligned}$$

et l'on trouve

$$\theta' = 0, \qquad \theta'_1 = \theta_1\theta, \qquad d\beta = (n-m)\theta_1 - \beta\theta, \qquad \alpha = \gamma = 0.$$

Si $m - n$ est différent de zéro, on obtient un groupe $g_{3,5}$ invariant dans $G_{3,5}$, avec les structures

$$g_{3,5}\left\{\begin{aligned} \omega' &= m\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= 0,\\ \omega'_{01} &= \varpi\omega_{02} + (1-m)\varpi_{01}\omega_{01},\\ \omega'_{02} &= \varpi\omega_{03} + (2-m)\varpi_{01}\omega_{02},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \omega'_{0,n-1} &= (n-1-m)\varpi_{01}\omega_{0,n-1} \end{aligned}\right.$$

et

$$\mathrm{G}_{3,5}\left\{\begin{array}{ll}\omega' & = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} & = 0,\\ \varpi' & = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} & = 0,\\ \omega'_{01} & = \varpi\omega_{02} + (\ \varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{01},\\ \omega'_{02} & = \varpi\omega_{03} + (2\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{02},\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \omega'_{0,n-1} & = [(n-1)\varpi_{01} - \omega_{10}]\omega_{0,n-1}.\end{array}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,5}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{X} = a^m x + c_1 y^{n-1} + \dots + c_{n-1}y + c_n\\ \qquad\qquad (n \geqq 2;\ m \neq n)\\ \mathrm{Y} = ay + b\end{array}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{\mathrm{G}_{3,5}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{X} = hx + c_1 y^{n-1} + \dots + c_n\\ \mathrm{Y} = ay + b\end{array}\right.}$$

Si $m - n$ est nul, ainsi que β, on obtient un groupe $g_{3,6}$ invariant dans $\mathrm{G}_{3,6}$, avec les structures

$$g_{3,6}\left\{\begin{array}{ll}\omega' & = n\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01},\\ \varpi' & = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} & = 0,\\ \omega'_{01} & = \varpi\omega_{02} + (1-n)\varpi_{01}\omega_{01},\\ \omega'_{02} & = \varpi\omega_{03} + (2-n)\varpi_{01}\omega_{02},\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \omega'_{0,n-1} & = -\varpi_{01}\omega_{0,n-1},\end{array}\right.$$

$$\mathrm{G}_{3,6}\left\{\begin{array}{ll}\omega' & = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\ \omega'_{10} & = 0,\\ \varpi' & = \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} & = 0,\\ \omega'_{01} & = \varpi\omega_{02} + (\ \varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{01},\\ \omega'_{02} & = \varpi\omega_{03} + (2\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{02},\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \omega'_{0n} & = (n\varpi_{01} - \omega_{10})\omega_{0n}.\end{array}\right.$$

On peut prendre

$$g_{3,6}\left\{\begin{array}{l} X = a^n x + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_{n-1} y + c_n \\ Y = a y + b \end{array}\right. \qquad (n \geqq 2)$$

invariant dans

$$G_{3,6}\left\{\begin{array}{l} X = h x + c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n \\ Y = a y + b \end{array}\right.$$

Si enfin $m - n$ est nul et β différent de zéro, on peut donner à β la valeur -1, ce qui donne $\theta = 0$. On a un groupe $g_{3,7}$ invariant dans $G_{3,7}$ avec les structures

$$g_{3,7}\left\{\begin{array}{ll} \omega' & = n\,\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' & = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} & = 0, \\ \omega'_{01} & = \varpi\omega_{02} + (1-n)\varpi_{01}\omega_{01}, \\ \omega'_{02} & = \varpi\omega_{03} + (2-n)\varpi_{01}\omega_{02}, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\ \omega'_{0,n-1} & = \varpi\varpi_{01} - \varpi_{01}\omega_{0,n-1}, \end{array}\right.$$

$$G_{3,7}\left\{\begin{array}{ll} \omega' & = n\,\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' & = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} & = 0, \\ \omega'_{01} & = \varpi\omega_{02} + (1-n)\varpi_{01}\omega_{01}, \\ \omega'_{02} & = \varpi\omega_{03} + (2-n)\varpi_{01}\omega_{02}, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\ \omega'_{0,n-1} & = \varpi\omega_{0n} - \varpi_{01}\omega_{0,n-1}, \\ \omega'_{0n} & = 0. \end{array}\right.$$

On peut prendre

$$g_{3,7}\left\{\begin{array}{l} X = a^n x + a^n \mathrm{L}a\, y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n \\ Y = a y + b \end{array}\right.$$

invariant dans

$$\boxed{G_{3,7}\left\{\begin{array}{l} X = a^n x + c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n \\ Y = a y + b \end{array}\right.}$$

b_2. Si $a \neq 0$, on a $m = 0$, $c = 0$, et l'on obtient un type $g_{3,8}$ invariant dans lui-même et dont la structure s'obtient en faisant $\varpi_{02} \equiv \omega_{01}$:

$$g_{3,8}\left\{\begin{array}{l} \omega' \quad = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' \quad = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\omega_{01}. \end{array}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,8}\left\{\begin{array}{l} X = x + \mathrm{L} f'(y) + a \\ Y = f(y) \end{array}\right.}$$

invariant dans lui-même.

Ce groupe peut admettre lui-même un sous-groupe en prenant un nouvel invariant du second ordre défini par l'équation

$$\omega_{02} + \ldots = 0.$$

Cela donne un nouveau type $g_{3,9}$ invariant dans lui-même et dont la structure est

$$g_{3,9}\left\{\begin{array}{l} \omega' \quad = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' \quad = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{01} = \varpi_{01}\omega_{01}. \end{array}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,9}\left\{\begin{array}{l} X = x + k - 2\mathrm{L}(cy + h) \\ Y = \dfrac{ay + b}{cy + h} \end{array}\right.}$$

invariant dans lui-même.

b_3. Si $c \neq 0$, on a $m = -1$, $a = 0$, et l'on obtient un type $g_{3,10}$ invariant dans lui-même; sa structure s'obtient en faisant $\varpi_{02} \equiv \omega$, $\omega_{10} \equiv -\varpi_{01}$:

$$g_{3,10} \left\{ \begin{array}{l} \omega' = -\omega\varpi_{01} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\omega. \end{array} \right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{3,10} \left\{ \begin{array}{l} X = \dfrac{x}{f'(y)} - \dfrac{f''(y)}{f'^2(y)} \\ Y = f(y) \end{array} \right.}$$

invariant dans lui-même.

Ce groupe n'a pas de sous-groupe admettant des invariants d'ordre $\geqq 2$.

2° *Le système qui donne les invariants d'ordre minimum n des sous-groupes de g_3 ne contient pas d'équation de la forme $\varpi_{0n} + \ldots = 0$.*

Il contient alors une équation de la forme

$$\theta_1 \equiv \omega_{0n} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} = 0 \qquad \left(m = \frac{1}{n}\right),$$

à laquelle il faut ajouter

$$\theta \equiv \omega_{10} - m\varpi_{01} = 0.$$

Le covariant ω'_{0n} contenant, lorsqu'on tient compte des équations précédentes, le terme $-\dfrac{n+1}{2}\omega_{02}\varpi_{0,n-1}$, il est nécessaire que n soit égal à 2 :

$$n = 2, \qquad m = \frac{1}{2}.$$

On obtient alors

$$\theta' = 0, \qquad \theta'_1 = \theta_1\theta, \qquad db = \frac{3}{2}\theta_1 - b\theta, \qquad a = 0.$$

Cela donne, en faisant $b = 0$, $\omega_{02} \equiv 0$,

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01},\\
\varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\
\varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{10} &= \frac{1}{2}\varpi\varpi_{02},\\
\omega'_{01} &= \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}) + \frac{1}{2}\omega\varpi_{02}.
\end{aligned}$$

De ces formules on déduit la suivante :

$$\varpi'_{02} = \varpi_{01}\varpi_{02} + \lambda\omega\varpi,$$

et l'identité fondamentale, appliquée à cette dernière, donne $\lambda = 0$. On arrive ainsi à un type qui est contenu comme cas particulier dans $g_{3,3}$; il suffit de donner à l'entier n, dont dépend le groupe $g_{3,3}$, la valeur 2.

43. V. *Les groupes transitifs qui admettent les mêmes invariants du premier ordre que g_4.*

On obtient sans difficulté cinq types $g_{4,1}$, $g_{4,2}$, $g_{4,3}$, $g_{4,4}$, $g_{4,5}$, chacun étant invariant dans lui-même.

La structure de $g_{4,1}$ est donnée par les formules

$$g_{4,1}\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10},\\
\varpi' &= \omega\varpi_{01},\\
\omega'_{10} &= 0,\\
\varpi'_{01} &= 0,
\end{aligned}\right.$$

et l'on peut prendre

$$\boxed{g_{4,1}\left\{\begin{aligned} X &= ax + b\\ Y &= cy + h\end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

La structure de $g_{4,2}$ est donnée par les formules

$$g_{4,2}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \omega'_{10} &= \omega\omega_{20},\\ \varpi'_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\ \omega'_{20} &= \omega_{10}\omega_{20},\\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02},\end{aligned}\right.$$

et l'on peut prendre

$$\boxed{g_{4,2}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{ax+b}{cx+h}\\ Y &= \frac{a'y+b'}{c'y+h'}\end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

La structure de $g_{4,3}$ est donnée par les formules

$$g_{4,3}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi_{01} &= \varpi\varpi_{02},\\ \varpi'_{02} &= \varpi_{01}\varpi_{02},\end{aligned}\right.$$

et l'on peut prendre

$$\boxed{g_{4,3}\left\{\begin{aligned} X &= f(x)\\ Y &= \frac{ay+b}{cy+h}\end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

La structure de $g_{4,4}$ est donnée par les formules

$$g_{4,4}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10},\\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\ \varpi'_{01} &= 0,\end{aligned}\right.$$

et l'on peut prendre

$$\boxed{g_{4,4}\left\{\begin{aligned} X &= f(x)\\ Y &= ay+b\end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

Enfin la structure de $g_{4,5}$ est donnée par les formules

$$g_{4,5}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= \omega\omega_{20}, \\ \omega'_{20} &= \omega_{10}\omega_{20}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= 0, \end{aligned}\right.$$

et l'on peut prendre

$$\boxed{g_{4,5}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{ax+b}{cy+h} \\ Y &= a'y+b' \end{aligned}\right.}$$

invariant dans lui-même.

44. V'. *Les groupes transitifs qui admettent les mêmes invariants du premier ordre que g'_4.*

Le problème a été résolu précédemment, puisque g_4 est le groupe des représentations conformes du plan. On obtient deux types $g'_{4,1}$ et $g'_{4,2}$, chacun invariant dans lui-même.

La structure de $g'_{4,1}$ est donnée par les formules symboliques

$$g'_{4,1}\left\{\begin{aligned} \omega' + i\varpi' &= (\omega + i\varpi)(\omega_{10} + i\varpi_{01}), \\ \omega'_{10} + i\varpi'_{01} &= 0, \end{aligned}\right.$$

et l'on peut prendre

$$\boxed{g'_{4,1}\ \}\ X + iY = (a + ia')(x + iy) + b + ib'}$$

invariant dans lui-même.

La structure de $g'_{4,2}$ est donnée par les formules

$$g'_{4,2}\left\{\begin{aligned} \omega' + i\varpi' &= (\omega + i\varpi)(\omega_{10} + i\varpi_{01}), \\ \omega'_{10} + i\varpi'_{01} &= (\omega + i\varpi)(\omega_{20} + i\varpi_{02}), \\ \omega'_{20} + i\varpi_{02} &= (\omega_{10} + i\varpi_{01})(\omega_{20} + i\varpi_{02}), \end{aligned}\right.$$

et l'on peut prendre

$$\boxed{g'_{4,2} \left\{ \mathrm{X} + i\mathrm{Y} = \frac{(a + ia')(x + iy) + b + ib'}{(c + ic')(x + iy) + h + ih'} \right.}$$

invariant dans lui-même.

Les groupes $g'_{4,1}$ et $g'_{4,2}$ sont respectivement semblables à $g_{4,1}$ et $g_{4,2}$ par une transformation imaginaire.

45. VI. *Les groupes transitifs qui admettent les mêmes invariants du premier ordre que g_5.*

Le prolongement $G_5^{(n)}$ de G_5 est défini par les expressions ϖ, ϖ_{01}, ω, $\omega_{pq}(p + q \leqq n)$. Le système complètement intégrable qui donne les invariants d'ordre inférieur ou égal à n d'un des groupes cherchés contient toujours l'équation

$$\theta = \varpi_{01} = 0.$$

Soit n le plus petit entier pour lequel le système contienne d'autres équations, et soit

$$\theta_1 = \sum \mathrm{A}_{pq}\omega_{pq} + \ldots = 0$$

l'une de ces équations, les termes non écrits étant d'ordre 0 ou 1. Si l'on forme θ'_1, en tenant compte des équations du système, en ne conservant que les termes en ω_{10}, ω_{01} et, dans les coefficients de ω_{10}, ω_{01}, que les termes dont l'ordre est $\geqq 2$, on obtient

$$\theta'_1 = \omega_{10}\sum (p - 1)\mathrm{A}_{pq}\omega_{pq} + \omega_{01}\sum q\,\mathrm{A}_{pq}\omega_{p+1,q-1} + \ldots.$$

Il résulte de là que le système contient une équation de la forme

$$\theta_1 = \omega_{n0} + a\omega_{10} + b\omega_{01} = 0.$$

Comme nous l'avons déjà vu souvent, cela n'est possible que si n est égal à 3 ou à 2.

1° *L'ordre minimum des invariants est* 3. Prenons donc

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{30} + a\omega_{10} + b\omega_{01} \equiv 0.$$

On obtient

$$\theta' = \theta'_1 = 0, \qquad da = 2\theta_1, \qquad b = 0,$$

ce qui donne un type $g_{5,1}$ invariant dans $G_{5,1}$; les structures sont données par les formules

$$g_{5,1}\left\{\begin{array}{l} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}, \end{array}\right. \qquad G_{5,1}\left\{\begin{array}{l} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{10} = \omega\omega_{20} + \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{20} = \omega_{10}\omega_{20} + \varpi\omega_{21}. \end{array}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{5,1}\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{x\,f(y) + \varphi(y)}{x\,\psi(y) + 1} \\ Y = y + a \end{array}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{5,1}\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{x\,f(y) + \varphi(y)}{x\,\psi(y) + 1} \\ Y = ay + b \end{array}\right.}$$

Si $g_{5,1}$ a un sous-groupe admettant des invariants d'ordre minimum $n \geq 3$, ces invariants sont donnés par un système qui contient les deux équations

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{2,n-2} + \alpha_1\omega_{2,n-3} + \ldots + \alpha_{n-2}\omega_{20} + a\omega_{10} + b\omega_{01} + c\omega = 0;$$

mais on se rend compte facilement que cela est impossible, θ'_1 contenant le terme $\omega_{1,n-2}\omega_{20}$ qui ne peut se réduire.

2° *L'ordre minimum des invariants est* 2. Prenons

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{20} + a\omega_{10} + b\omega_{01} = 0.$$

On obtient

$$\theta' = \theta'_1 = 0, \qquad da = \theta_1, \qquad b = 0.$$

Cela donne un type $g_{5,2}$ invariant dans $G_{5,2}$; les structures sont

$$g_{5,2} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \end{cases} \qquad G_{5,2} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{5,2} \begin{cases} X = x f(y) + \varphi(y) \\ Y = y + a \end{cases}}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{5,2} \begin{cases} X = x f(y) + \varphi(y) \\ Y = ay + b \end{cases}}$$

Si $g_{5,2}$ a un sous-groupe admettant des invariants d'ordre minimum $n \geqq 2$, ces invariants sont donnés par un système qui contient les deux équations

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{1,n-1} + \alpha_1\omega_{1,n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{10} + \beta\omega_{01} + \gamma\varpi = 0.$$

On obtient

$$\theta' = 0, \qquad \theta'_1 = (n-1)\theta\theta_1, \qquad \beta = \gamma = 0,$$
$$d\alpha_1 = \alpha_1\theta, \qquad d\alpha_2 = 2\alpha_2\theta, \qquad \ldots, \qquad d\alpha_{n-1} = (n-1)\alpha_{n-1}\theta.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que les coefficients α sont tous nuls ou non.

a. Les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ *sont tous nuls*. On obtient un type $g_{5,3}$ invariant dans $G_{5,3}$. Les structures sont données par les formules

$$g_{5,3}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12}, \\ \omega'_{12} = \varpi\omega_{13}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-2} = 0, \end{cases} \qquad G_{5,3}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12} + \varpi_{01}\omega_{11}, \\ \omega'_{12} = \varpi\omega_{13} + 2\varpi_{01}\omega_{12}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-2} = \varpi\omega_{1,n-1} + (n-2)\varpi_{01}\omega_{1,n-2}, \\ \omega'_{1,n-1} = (n-1)\varpi_{01}\omega_{1,n-1}. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{5,3}\begin{cases} X = xe^{a_1y^{n-2}+a_2y^{n-3}+\ldots+a_{n-1}} + f(y) \\ Y = y + a \end{cases}}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{5,3}\begin{cases} X = xe^{a_0y^{n-1}+a_1y^{n-2}+\ldots+a_{n-1}} + f(y) \\ Y = ay + b \end{cases}}$$

Si $g_{5,3}$ a un sous-groupe admettant des invariants d'ordre minimum $n' \leqq n$, ces invariants sont donnés par un système de la forme

$$\begin{aligned} \theta &= \varpi_{01} = 0, \\ \theta_1 &= \omega_{1,n-1} = 0, \\ \theta_2 &= \omega_{0n'} + A_1\omega_{0,n'-1} + \ldots + A_{n'-1}\omega_{0,1} + A_{n'}\omega + B\omega_{10} = 0. \end{aligned}$$

On voit facilement que cela ne peut avoir lieu que si $n = 2$. Si nous écrivons alors n à la place de n', nous obtenons

$$\theta' = 0, \qquad \theta'_1 = \theta\theta_1, \qquad \theta'_2 = n\theta\theta_2,$$

$$\begin{aligned} dB &= -\theta_2 + nB\theta, \\ dA_1 &= n\theta_1 + A_1\theta, \\ dA_2 &= (n-1)A_1\theta_1 + 2A_2\theta, \\ dA_3 &= (n-2)A_2\theta_1 + 3A_3\theta, \\ dA_n &= A_{n-1}\theta_1 + nA_n\theta. \end{aligned}$$

On peut toujours donner aux deux invariants indépendants B et A_1 les valeurs numériques zéro, ce qui donne $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv 0$. Deux cas sont alors à distinguer.

a_1. $A_2 = A_3 = \ldots = A_n = 0$. On a un type $g_{5,4}$ invariant dans $G_{5,4}$; les structures sont respectivement

$$g_{5,4}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + \omega_{01}\omega_{10}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + \omega_{02}\omega_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = \omega_{0,n-1}\omega_{10}, \end{cases} \qquad G_{5,4}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}), \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + \omega_{02}(\omega_{10} - 2\varpi_{01}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = \omega_{0,n-1}[\omega_{10} - (n-1)\varpi_{01}]. \end{cases}$$

On peut prendre

$$g_{5,4}\begin{cases} X = ax + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_n \\ Y = y + b \end{cases} \qquad (n \geqq 2)$$

invariant dans

$$G_{5,4}\begin{cases} X = ax + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_n \\ Y = by + c \end{cases}$$

a_2. Les coefficients $A_2, A_3, \ldots, A_n$ ne sont pas tous nuls. On peut donner à l'un de ceux qui ne sont pas nuls la valeur numérique 1. On obtient des types $g_{5,3}$, chacun invariant dans lui-même, et de structure

$$g_{5,3}\begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = 0, \\ \omega'_{01} = \varpi\omega_{02} + \omega_{01}\omega_{10}, \\ \omega'_{02} = \varpi\omega_{03} + \omega_{02}\omega_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{0,n-1} = \varpi(m_2\omega_{0,n-2} + m_3\omega_{0,n-3} + \ldots + m_n\omega) + \omega_{0,n-1}\omega_{10}; \end{cases}$$

les coefficients $m_2, \ldots, m_n$ sont des constantes dont l'une est égale à 1. On peut prendre

$$\boxed{g_{5,5} \begin{cases} X = ax + P(y) \\ Y = y + b \end{cases}}$$

invariant dans lui-même, en désignant par $P(y)$ la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants, celle dont l'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \ldots, & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \ldots, & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & \ldots, & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & \ldots, & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots, & -r & 1 \\ m_n & m_{n-1} & m_{n-2} & \ldots, & m_2 & -r \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$r^n - m_2 r^{n-2} - m_3 r^{n-3} - \ldots - m_{n-1} r - m_n = 0.$$

b. Les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ *ne sont pas tous nuls.* Alors on peut donner à l'un de ceux qui ne sont pas nuls la valeur numérique 1. On obtient alors un type $g_{5,6}$ invariant dans $G_{5,6}$. Les structures sont respectivement

$$g_{5,6} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-2} = -\varpi(\alpha_1\omega_{1,n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{10}), \end{cases}$$

$$G_{5,6} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \\ \omega'_{10} = \varpi\omega_{11}, \\ \omega'_{11} = \varpi\omega_{12}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_{1,n-2} = \varpi\omega_{1,n-1}, \\ \omega'_{1,n-1} = -\varpi(\alpha_1\omega_{1,n-1} + \alpha_2\omega_{1,n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{11}). \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{5,6}\begin{cases} X = xe^{P(y)} + f(y) \\ Y = y + a \end{cases}}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{5,6}\begin{cases} X = xe^{P(y)} + f(y) \\ Y = y + a \end{cases}}$$

en désignant par $P(y)$ la solution la plus générale de l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$P^{(n)}(y) + \alpha_1 P^{(n-1)}(y) + \ldots + \alpha_{n-1} P'(y) = 0.$$

On démontre sans difficulté que, si $g_{5,6}$ a un sous-groupe admettant des invariants d'ordre minimum $n' \geqq n$, il faut que $n = 2$; ensuite que c'est impossible.

46. VII. *Les groupes transitifs qui admettent les mêmes invariants du premier ordre que g_6.*

Les groupes g_6 et G_6 ont leurs structures définies par les formules

$$g_6 \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_6 \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0, \\ \omega'_{10} = 0. \end{cases}$$

Le système complètement intégrable qui donne les invariants d'ordre $\leqq n$ d'un des groupes cherchés contient toujours les équations

$$\theta = \omega_{10} = 0,$$
$$\theta_1 = \varpi_{01} = 0.$$

Soit $n \geqq 2$ le plus petit entier pour lequel il en contienne une autre; soit

$$\theta_2 = \omega_{0n} + a_1\omega_{0,n-1} + a_2\omega_{0,n-2} + \ldots + a_{n-1}\omega_{01} + a_n\omega = 0$$

cette équation. On trouve

$$\theta' = 0, \qquad \theta'_1 = 0, \qquad \theta'_2 = \theta_2(\theta - n\theta_1),$$
$$\begin{aligned} da_1 &= a_1\theta_1, \\ da_2 &= 2a_2\theta_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ da_{n-1} &= (n-1)a_{n-1}\theta_1, \\ da_n &= na_n\theta_1. \end{aligned}$$

1° *Les n coefficients* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont tous nuls*. On obtient alors un type $g_{6,1}$ invariant dans $G_{6,1}$, les structures étant

$$g_{6,1}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= 0, \\ \omega'_{01} &= \varpi\omega_{02}, \\ \omega'_{02} &= \varpi\omega_{03}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0,n-1} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad G_{6,1}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10} + \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= 0, \\ \omega'_{10} &= 0, \\ \omega'_{01} &= \varpi\omega_{02} + \omega_{01}(\omega_{10} - \varpi_{01}), \\ \omega'_{02} &= \varpi\omega_{03} + \omega_{02}(\omega_{10} - 2\varpi_{01}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_{0n} &= \omega_{0n}(\omega_{10} - n\varpi_{01}). \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{6,1}\left\{\begin{aligned} X &= x + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_n \\ Y &= y + b \end{aligned}\right.}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{6,1}\left\{\begin{aligned} X &= hx + a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_n \\ Y &= by + c \end{aligned}\right.}$$

2° *Les coefficients* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ne sont pas tous nuls*. On peut donner à l'un de ceux qui ne sont pas nuls la valeur 1, ce qui revient à faire $\varpi_{01} = 0$. On a alors un type $g_{6,2}$ invariant dans $G_{6,2}$; les structures sont données par les formules

$$g_{6,2}\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \varpi\omega_{01},\\
\varpi' &= 0,\\
\omega'_{01} &= \varpi\omega_{02},\\
\omega'_{02} &= \varpi\omega_{03},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_{0,n-1} &= -\varpi(m_1\omega_{n-1}+\ldots+m_n\omega),
\end{aligned}\right.$$

$$G_{6,2}\left\{\begin{aligned}
\omega' &= \omega\omega_{10}+\varpi\omega_{01},\\
\varpi' &= 0,\\
\omega'_{10} &= 0,\\
\omega'_{01} &= \varpi\omega_{02}+\omega_{01}\omega_{10},\\
\omega'_{02} &= \varpi\omega_{03}+\omega_{02}\omega_{10},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\omega'_{0,n-1} &= \varpi\omega_{0n}+\omega_{0,n-1}\omega_{10},\\
\omega'_{0n} &= -\varpi(m_1\omega_{0n}+m_2\omega_{0,n-1}+\ldots+m_n\omega_{01})+\omega_{0n}\omega_{10}.
\end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{6,2}\left\{\begin{aligned} X &= x+P'(y)\\ Y &= y+a\end{aligned}\right.}\quad \text{invariant dans}\quad \boxed{G_{6,2}\left\{\begin{aligned} X &= bx+P(y)\\ Y &= y+a\end{aligned}\right.}$$

en désignant par $P(y)$ la solution la plus générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$P^{(n+1)}(y)+m_1 P^{(n)}(y)+\ldots+m_{n-1}P''(y)+m_n P'(y)=0;$$

l'un des coefficients m_i est égal à 1.

47. VIII. *Les groupes transitifs qui admettent les mêmes invariants du premier ordre que g_7.*

La structure de G_7 est donnée par

$$\begin{aligned}
\omega' &= \varpi\omega_{01},\\
\varpi' &= \varpi\varpi_{01},\\
\varpi'_{01} &= \varpi\omega_{01}.
\end{aligned}$$

Il n'y a qu'un type possible, obtenu en considérant le système

$$\theta \equiv \omega - \varpi_{01},$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{02} + a\omega_{01} + b\varpi_{01} = 0.$$

On trouve

$$\theta' = 0, \qquad \theta'_1 = 0,$$
$$db = 2\theta_1, \qquad a = 0.$$

On a ainsi un type $g_{7,1}$ invariant dans $G_{7,1}$. Les structures sont

$$g_{7,1} \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = -\omega\varpi, \\ \omega'_{01} = \omega\omega_{01}, \end{cases} \qquad G_{7,1} \begin{cases} \omega' = \varpi\omega_{01}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = \varpi\omega_{01}, \\ \omega'_{10} = \varpi_{01}\omega_{01}. \end{cases}$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{7,1} \begin{cases} X = \dfrac{x(cy+h)^2}{ah-bc} \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}}$$

invariant dans

$$\boxed{G_{7,1} \begin{cases} X = kx(cy+h)^2 \\ Y = \dfrac{ay+b}{cy+h} \end{cases}}$$

48. IX. *Les groupes transitifs qui admettent les mêmes invariants du premier ordre que g_{11}.*

Les structures de g_{11} et G_{11} sont données par

$$g_{11} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = 0, \end{cases} \qquad G_{11} \begin{cases} \omega' = \omega\omega_{10}, \\ \varpi' = \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} = 0. \end{cases}$$

Si g_{11} a un sous-groupe admettant par rapport à G_{11}, en plus de l'invariant de g_{11}, des invariants d'ordre minimum $n \geq 2$, ces invariants sont donnés par le système

$$\theta \equiv \varpi_{01} = 0,$$
$$\theta_1 \equiv \omega_{n0} + a\omega_{10} + b\varpi = 0,$$

et l'entier n est égal à 2 ou à 3.

1° $n = 3$. On a

$$\theta_1' = 0, \qquad da = 2\theta_1, \qquad b = 0,$$

ce qui donne un type $g_{11,1}$ invariant dans $G_{11,1}$. Les structures sont

$$g_{11,1}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= \omega\omega_{20}, \\ \omega'_{20} &= \omega_{10}\omega_{20}, \\ \varpi' &= 0, \end{aligned}\right. \qquad G_{11,1}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= \omega\omega_{20}, \\ \omega'_{20} &= \omega_{10}\omega_{20}, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= 0. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{11,1}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{ax+b}{cx+h} \\ Y &= y + a' \end{aligned}\right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_{11,1}\left\{\begin{aligned} X &= \frac{ax+b}{cx+h} \\ Y &= a'y + b' \end{aligned}\right.}$$

2° $n = 2$. On trouve de même un type $g_{11,2}$ invariant dans $G_{11,2}$. Les structures sont

$$g_{11,2}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \\ \varpi' &= 0, \end{aligned}\right. \qquad G_{11,2}\left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega\omega_{10}, \\ \omega'_{10} &= 0, \\ \varpi' &= \varpi\varpi_{01}, \\ \varpi'_{01} &= 0. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre

$$\boxed{g_{11,2}\left\{\begin{aligned} X &= ax + b \\ Y &= y \;\; + c \end{aligned}\right.} \quad \text{invariant dans} \quad \boxed{G_{11,2}\left\{\begin{aligned} X &= ax + b \\ Y &= cy + h \end{aligned}\right.}$$

49. L'énumération des différents types de groupes transitifs réels à deux variables est ainsi achevée. On peut réduire un peu leur nombre en remarquant que, si l'on écrit les équations de g_{12} de la

manière suivante :

$$X = a^{m-1}x + b,$$
$$Y = a^{m+1}y + c,$$

le groupe g_8 rentre dans le type g_{12} en faisant $m = 0$; de même g'_8 rentre dans g'_{12}.

Remarquons de plus que les groupes

$$g'_4, \quad g'_9, \quad g''_9, \quad g'_{12}, \quad g'_{4,1}, \quad g'_{4,2}$$

deviennent homologues aux groupes

$$g_4, \quad g_9, \quad g_{12}, \quad g_{4,1}, \quad g_{4,2}$$

par un changement de variables imaginaires.

Parmi les 64 types ainsi obtenus, les types

$$g_3, \quad g_{12}, \quad g'_{12}, \quad g_{2,5}, \quad g_{2,7}, \quad g_{3,1}, \quad g_{3,4}$$

dépendent d'un paramètre arbitraire;

Les types

$$g_{2,6}, \quad g_{2,12}, \quad g_{2,13}, \quad g_{3,3}, \quad g_{3,6}, \quad g_{3,7}, \quad g_{5,3}, \quad g_{5,4}, \quad g_{6,1}$$

dépendent d'un entier arbitraire positif;

Le type $g_{3,5}$ dépend d'un paramètre arbitraire et d'un entier arbitraire positif;

Les types

$$g_{5,5}, \quad g_{5,6}, \quad g_{6,2}$$

dépendent d'un entier arbitraire n et de paramètres arbitraires dont le nombre est lié à l'entier n.

D'un autre point de vue, parmi les 64 types obtenus, 33 sont infinis et 31 sont finis. Parmi les groupes infinis :

g	dépend de 2 fonctions arbitraires de 2 arguments
$g_1, g_2, g_5, g_{6,1}, g_{2,2}, g_{2,9}$	dépendent de 1 fonction arbitraire de 2 arguments
$g_{2,1}, g_{2,3}, g_{2,4}, g_{2,10}, g_{2,11}$	dépendent de 3 fonctions arbitraires de 1 argument
$g_3, g_4, g'_4, g_{2,5}, g_{2,8}, g_{2,11}, g_{5,2}$	» 2 » 1 »
$g_6, g_7, g_{11}, g_{2,7}, g_{2,12}, g_{3,1}, g_{3,2}, g_{3,4}, g_{3,8}, g_{3,10}, g_{4,3}, g_{4,4}, g_{5,3}, g_{5,6}$	» 1 » 1 »

Les 31 autres groupes

$$g_9,\quad g'_9,\quad g''_9,\quad g_{10},\quad g_{12},\quad g'_{12},\quad g_{13},\quad g_{14},\quad g_{15},\quad g_{0,2},\quad g_{0,3},\quad g_{1,1},\quad g_{2,6},$$
$$g_{2,13},\quad g_{3,3},\quad g_{3,5},\quad g_{3,6},\quad g_{3,7},\quad g_{3,9},\quad g_{4,1},\quad g'_{4,1},\quad g_{4,2},\quad g'_{4,2},\quad g_{4,5},\quad g_{5,4},$$
$$g_{5,5},\quad g_{6,1},\quad g_{6,2},\quad g_{7,1},\quad g_{11,1},\quad g_{11,2}$$

sont finis.

Les 34 groupes

$$\mathrm{G},\quad g_2,\quad g_4,\quad g'_4,\quad g_9,\quad g_9,\quad g''_9,\quad g_{0,1},\quad g_{0,2},\quad g_{0,3},\quad g_{2,1},\quad g_{2,2},\quad g_{2,3},\quad g_{2,4},$$
$$g_{2,5},\quad g_{2,6},\quad g_{2,7},\quad g_{2,8},\quad g_{2,9},\quad g_{2,10},\quad g_{2,11},\quad g_{2,12},\quad g_{2,13},\quad g_{3,2},\quad g_{3,8},$$
$$g_{3,9},\quad g_{3,10},\quad g_{4,1},\quad g'_{4,1},\quad g_{4,2},\quad g'_{4,2},\quad g_{4,3},\quad g_{4,4},\quad g_{4,5},\quad g_{5,5}$$

ne sont invariants que dans eux-mêmes ;

Chaque groupe du type $g_{5,6}$ qui dépend d'un entier arbitraire n est invariant dans un autre groupe du même type, mais pour lequel l'entier n est supérieur d'une unité ;

Enfin le Tableau suivant indique, à côté de chacun des 26 autres groupes, à quel type appartient le plus grand groupe dans lequel il est invariant :

g_1	$g_{0,1}$	g_{14}	$g_{0,3}$	$g_{5,2}$	$g_{2,11}$
g_3	$g_{2,5}$	g_{15}	$g_{5,5}$	$g_{5,3}$	$g_{2,12}$
g_5	$g_{2,9}$	$g_{1,1}$	$g_{0,3}$	$g_{5,4}$	$g_{2,13}$
g_6	$g_{2,12}$	$g_{3,1}$	$g_{2,7}$	$g_{6,1}$	$g_{3,5}$
g_7	$g_{3,8}$	$g_{3,3}$	$g_{2,6}$	$g_{6,2}$	$g_{5,5}$
g_{10}	$g_{1,1}$	$g_{3,4}$	$g_{2,12}$	$g_{7,1}$	$g_{3,9}$
g_{11}	$g_{4,4}$	$g_{3,5}$	$g_{2,13}$	$g_{11,1}$	$g_{4,5}$
g_{12}	$g_{4,1}$	$g_{3,6}$	$g_{2,13}$	$g_{11,2}$	$g_{4,1}$
g'_{12}	$g'_{4,1}$	$g_{3,7}$	$g_{3,5}$		
g_{13}	$g_{3,5}$	$g_{5,1}$	$g_{2,10}$		

Les groupes

$$\mathrm{G},\quad g_1,\quad g_7,\quad g_9,\quad g'_9,\quad g_{0,2},\quad g_{1,1},\quad g_{3,2},\quad g_{3,10},\quad g_{7,1}$$

sont *simples*.