ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI PADÉ

Sur la généralisation des formules de Sylvester relatives aux fonctions qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm, et sur la convergence de la table des réduites d'une fraction rationnelle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 24 (1907), p. 519-534

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__519_0>

SUR LA

GÉNÉRALISATION DES FORMULES DE SYLVESTER

RELATIVES AUX FONCTIONS QUI SE PRÉSENTENT DANS L'APPLICATION DU THÉORÈME DE STURM, ET SUR LA CONVERGENCE DE LA TABLE DES RÉDUITES D'UNE FRACTION RATIONNELLE [1],

PAR M. HENRI PADÉ.

La première Partie de ce travail, qui a pour objet la démonstration de formules qui comprennent comme cas très particulier celles données par Sylvester pour la représentation des polynomes qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm, a pour origine le rapprochement de la théorie générale des réduites d'une fonction telle que je l'ai exposée dans des Mémoires antérieurs, des très nombreux travaux auxquels ont donné lieu ces célèbres formules, de ceux, en particulier, de Joachimstal, Brioschi, Hermann Hankel et Kronecker.

En faisant découler les formules de Sylvester de celles qui sont relatives à la fraction rationnelle approchée générale non seulement d'une fraction rationnelle, mais encore d'un développement de Taylor absolument quelconque, nous croyons avoir montré mieux qu'on ne l'a fait jusqu'ici la vraie place qu'elles occupent dans la théorie des fractions continues algébriques, où l'on n'a jamais hésité, depuis Sturm, à reconnaître leur véritable source.

---

(1) *Voir* l'introduction à mon Mémoire *Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions*, p. 341 de ces *Annales*.

Les formules générales que nous obtenons dans cette première Partie de notre travail permettent l'étude de la convergence des fractions continues holoïdes attachées à une fraction rationnelle, et c'est cette étude qui fait l'objet de la seconde Partie. Nous ne croyons pas qu'en dehors du cas de la fonction exponentielle, on soit jusqu'ici parvenu à traiter complètement la question de la convergence de *toutes* les fractions continues holoïdes d'une Table de réduites; et le problème semble des plus difficiles. Cette circonstance nous fera pardonner, sans doute, de nous être arrêtés à l'examen du cas de la fraction rationnelle qui, pour être simple, n'en est pas moins fertile en enseignements et propre à préparer de nouveaux progrès. Nos résultats s'accordent, d'ailleurs, dans ce qu'ils ont de commun avec eux, avec ceux obtenus par M. R. de Montessus dans ses belles recherches sur cette question de convergence (¹).

I.

1. Soit $f(x)$ une fonction développable par la formule de Taylor, en sorte que

$$f(x) = S_0 + S_1 x + \ldots + S_{h-1} x^{h-1} + x^h T_h(x),$$
$$T_h(x) = S_h + x T_{h+1}(x).$$

$S_0, S_1, \ldots$ représentent des constantes quelconques; nous regarderons, dans ce qui suit, une lettre S affectée d'un indice négatif comme représentant zéro, et les lettres T affectées d'indices négatifs comme définies par la dernière des relations précédentes.

Soit $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ une réduite *normale* de $f(x)$, c'est-à-dire une fraction rationnelle dont le dénominateur soit de degré μ, le numérateur de degré ν, et qui, pour x infiniment petit, diffère de $f(x)$ d'un infiniment petit d'ordre $\mu + \nu + 1$; on aura

$$V_{\mu\nu} f(x) - U_{\mu\nu} = x^{\mu+\nu+1} R_{\mu\nu}(x),$$
$$R_{\mu\nu}(0) \neq 0.$$

(¹) *Sur les fractions continues algébriques* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXX, 1902).

Si l'on pose

$$V_{\mu,\nu} = 1 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots + l_\mu x^\mu,$$

on voit immédiatement que

$$R_{\mu,\nu}(x) = T_{\mu+\nu+1}(x) + l_1 T_{\mu+\nu}(x) + \ldots + l_\mu T_{\nu+1}(x);$$

et, comme les coefficients $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_\mu$ sont déterminés par les équations

$$\begin{array}{l} S_{\nu+1} + S_\nu \quad l_1 + \ldots + S_{\nu-\mu+1} l_\mu = 0, \\ S_{\nu+2} + S_{\nu+1} \quad l_1 + \ldots + S_{\nu-\mu+2} l_\mu = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S_{\nu+\mu} + S_{\nu+\mu-1} l_1 + \ldots + S_\nu \quad l_\mu = 0, \end{array}$$

on aura, en désignant par $\Delta_{\mu,\nu}(S)$ le déterminant des coefficients des inconnues, savoir

$$\Delta_{\mu,\nu}(S) = \begin{vmatrix} S_\nu & \ldots & S_{\nu-\mu+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ S_{\nu+\mu-1} & \ldots & S_\nu \end{vmatrix},$$

cette relation :

$$\Delta_{\mu,\nu}(S)\, R_{\mu,\nu} = (-1)^\mu \begin{vmatrix} S_{\nu+1} & \ldots & S_{\nu-\mu+1} \\ S_{\nu+2} & \ldots & S_{\nu-\mu+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ S_{\nu+\mu} & \ldots & S_\nu \\ T_{\nu+\mu+1} & \ldots & T_{\nu+1} \end{vmatrix}.$$

On voit aisément que toutes les lettres S, dans le déterminant du second membre, peuvent être remplacées par des lettres T, et l'on en conclut cette formule :

$$\Delta_{\mu,\nu}(S)\, R_{\mu,\nu}(x) = (-1)^\mu \Delta_{\mu+1,\nu+1}[T(x)].$$

Quant à $V_{\mu,\nu}$, il est immédiatement donné par

$$\Delta_{\mu,\nu}(S)\, V_{\mu,\nu} = (-1)^\mu \begin{vmatrix} S_{\nu+1} & \ldots & S_{\nu-\mu+1} \\ S_{\nu+2} & \ldots & S_{\nu-\mu+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ S_{\nu+\mu} & \ldots & S_\nu \\ 1 & \ldots & x^\mu \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{T}_h = S_h - x S_{h+1},$$

il viendra simplement

$$\Delta_{\mu,\nu}(S)\, V_{\mu,\nu} = \Delta_{\mu,\nu}(\mathfrak{T}).$$

On a ainsi cette proposition :

Théorème I. — *Si l'on a*

$$f(x) = S_0 + S_1 x + \ldots + S_h x^h + \ldots,$$

et que l'on regarde une lettre S *affectée d'un indice négatif comme représentant zéro; si l'on pose*

$$T_h = S_h + x T_{h+1}, \qquad T_0 = f(x),$$
$$\mathfrak{T}_h = S_h - x S_{h+1},$$

et, μ et ν désignant deux entiers positifs ou nuls,

$$\Delta_{\mu,\nu}(S) = \begin{vmatrix} S_\nu & \ldots & S_{\nu-\mu+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ S_{\nu+\mu+1} & \ldots & S_\nu \end{vmatrix},$$

alors, le dénominateur $V_{\mu,\nu}$ et le reste $R_{\mu,\nu}$ de la réduite (μ, ν), supposée normale, de $f(x)$, définis par les égalités

$$V_{\mu,\nu} f(x) - U_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu+1} R_{\mu,\nu}(x), \qquad V_{\mu,\nu}(0) = 1,$$

seront donnés par les formules

$$\Delta_{\mu,\nu}(S)\, V_{\mu,\nu} = \Delta_{\mu,\nu}(\mathfrak{T}),$$
$$\Delta_{\mu,\nu}(S)\, R_{\mu,\nu} = (-1)^\mu \Delta_{\mu+1,\nu+1}(T).$$

2. Supposons maintenant que $f(x)$ soit une fonction rationnelle dont le dénominateur, que nous désignerons par $\varphi(x)$, n'ait que des racines simples. Soient n et m les degrés du numérateur et du dénominateur; on aura, en décomposant en fractions simples,

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-m} x^{n-m} + \frac{M_1}{1 - \alpha_1 x} + \ldots + \frac{M_m}{1 - \alpha_m x},$$

où il faut entendre que toutes les constantes c sont nulles lorsque m est supérieur à n.

L'identité

$$\frac{M_i}{1-\alpha_i x} = M_i(1+\alpha_i x+\ldots+\alpha_i^{h-1}x^{h-1}) + \frac{M_i\alpha_i^h}{1-\alpha_i x}x^h$$

donne immédiatement

$$S_p = c_p + M_1\alpha_1^p + \ldots + M_m\alpha_m^p,$$

où c_p est nul, si p n'est pas l'un des indices $0, 1, \ldots, n-m$. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que cette formule subsiste encore pour les valeurs négatives de p dès que p est supérieur à $n-m$. Dans cette hypothèse, la même identité donne aussi

$$T_p = \frac{M_1}{1-\alpha_1 x}\alpha_1^p + \ldots + \frac{M_m}{1-\alpha_m x}\alpha_m^p.$$

Enfin, l'on a

$$\varpi_p = S_p - xS_{p+1} = M_1(1-\alpha_1 x)\alpha_1^p + \ldots + M_m(1-\alpha_m x)\alpha_m^p.$$

Ces trois formules permettent de calculer les déterminants $\Delta_{\mu,\nu}(S)$, $\Delta_{\mu,\nu}(T)$, $\Delta_{\mu,\nu}(\varpi)$, en supposant seulement $\nu-\mu \geqq n-m$.

Le déterminant $\Delta_{\mu,\nu}(S)$ est le produit, effectué par horizontales, des deux matrices à μ lignes et m colonnes

$$\begin{vmatrix} M_1\alpha_1^{\nu-\mu+1} & \ldots & M_m\alpha_m^{\nu-\mu+1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ M_1\alpha_1^{\nu} & \ldots & M_m\alpha_m^{\nu} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{\mu-1} & \ldots & \alpha_m^{\mu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^0 & \ldots & \alpha_m^0 \end{vmatrix},$$

en sorte que, si l'on désigne par $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$ le produit

$$(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\ldots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1}),$$

on a immédiatement

$$\Delta_{\mu,\nu}(S) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}\Sigma M_1M_2\ldots M_\mu(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}\Delta^2(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu),$$

la somme Σ étant obtenue en remplaçant, dans le terme écrit, les indices $1, 2, \ldots, \mu$ par toutes les combinaisons μ à μ des indices $1, 2, \ldots, m$.

Les déterminants $\Delta_{\mu\nu}(\mathfrak{S})$ et $\Delta_{\mu\nu}(T)$ se déduisent simplement de $\Delta_{\mu\nu}(S)$ en remplaçant M_i par $M_i(1-\alpha_i x)$ et $\frac{M_i}{1-\alpha_i x}$; on en conclut que

$$\Delta_{\mu\nu}(\mathfrak{S}) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \Sigma M_1 \ldots M_\mu (\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)(1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_\mu x),$$

$$\Delta_{\mu\nu}(T) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \Sigma M_1 \ldots M_\mu (\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu) \frac{1}{(1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_\mu x)}.$$

En multipliant les deux membres de la dernière formule par

$$\varphi(x) = (1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_m x),$$

elle devient

$$\varphi(x)\Delta_{\mu\nu}(T) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \Sigma M_1 \ldots M_\mu (\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)(1-\alpha_{\mu+1} x)\ldots(1-\alpha_m x),$$

et l'on a cette proposition :

Théorème II. — *Si, n et m étant deux entiers positifs ou nuls, on a*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-m} x^{n-m} + \frac{M_1}{1-\alpha_1 x} + \ldots + \frac{M_m}{1-\alpha_m x},$$

la partie entière n'existant pas pour $n - m < 0$, $M_1, \ldots, M_m$ étant des constantes différentes de zéro, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des constantes différentes de zéro et différentes entre elles ; si l'on pose

$$\varphi(x) = (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\ldots(1-\alpha_m x);$$

si l'on suppose enfin

$$\nu - \mu \geqq n - m,$$

on aura

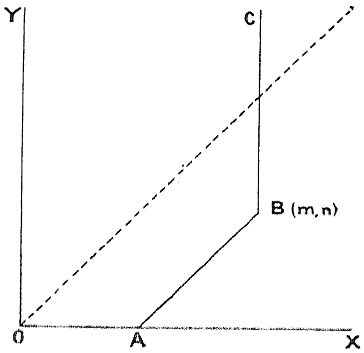
$$V_{\mu\nu} = \frac{\Sigma M_1 \ldots M_\mu (\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)(1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_\mu x)}{\Sigma M_1 \ldots M_\mu (\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)^{\nu+\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)},$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\Sigma M_1 \ldots M_{\mu+1} (\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu+1})^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu+1})(1-\alpha_{\mu+2} x)\ldots(1-\alpha_m x)}{\Sigma M_1 \ldots M_\mu (\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)},$$

les sommes étant obtenues par les combinaisons soit μ *à* μ, *soit* $\mu + 1$ *à* $\mu + 1$ *des indices* $1, 2, \ldots, m$.

Il est facile de voir dans quelle région du plan supposé rapporté à deux axes rectilignes rectangulaires doit se trouver le point (μ, ν) pour que ces formules soient applicables : elle résulte des hypothèses faites que la réduite (μ, ν) est normale et que l'on a $\nu - \mu \geqq n - m$. Il suffit (*fig.* 1) de mener par le point $B(m, n)$ la parallèle BA à la

Fig. 1.



bissectrice de l'angle XOY jusqu'à sa rencontre avec l'un des axes, et la parallèle BC à OY : *le point* (μ, ν) *devra appartenir à la région* YOABC *avec exclusion de la partie* BC *du contour*.

3. Nous allons maintenant établir cette proposition :

Théorème III. — *La suite des polynomes de Sturm, sous la forme indiquée par Sylvester, s'obtient par l'application de la formule qui donne* $R_{\mu,\nu}$ *quand on spécialise convenablement la fraction rationnelle* $f(x)$ *et que l'on suppose que le point* (μ, ν) *parcoure la portion* AB *du contour de la région où les formules qui donnent* $V_{\mu,\nu}$ *et* $R_{\mu,\nu}$ *sont applicables.*

Dans le théorème de Sturm, tel qu'il est exposé, par exemple, dans le *Cours d'Algèbre supérieure* de Serret (5^e édit., t. I, p. 570), on pose

$$V = (x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$
$$V_1 = \quad \Sigma(x-b) \quad \ldots(x-l),$$

puis

$$\begin{aligned}
V &= V_1\, Q_1 - V_2,\\
V_1 &= V_2\, Q_2 - V_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
V_{m-2} &= V_{m-1}\, Q_{m-1} - V_m,
\end{aligned}$$

les polynomes Q_p étant tous du premier degré, et les degrés des polynomes V_p diminuant d'une unité quand on passe d'un polynome au suivant.

Remplaçons $a, b, \ldots, l$ par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et posons

$$\begin{aligned}
x^m\, V\left(\frac{1}{x}\right) &= \varphi(x) = (1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_m x),\\
x^{m-p}\, V_p\left(\frac{1}{x}\right) &= \varphi_p(x),\\
x\, Q_p\left(\frac{1}{x}\right) &= q_p(x);
\end{aligned}$$

les égalités précédentes deviendront

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi_1(x)\quad q_1 - x^2\varphi_2(x),\\
\varphi_1(x) &= \varphi_2(x)\quad q_2 - x^2\varphi_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_{m-2}(x) &= \varphi_{m-1}(x)\, q_{m-1} - x^2\varphi_m.
\end{aligned}$$

On en conclut d'abord, en posant $\varphi_{m-1} = \varphi_m q_m$,

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{x^2}{q_2 - \ldots - \cfrac{x^2}{q_m}}};$$

puis, par les formules élémentaires de la théorie des fractions continues, et en désignant par $\frac{P_1}{\Pi_1}, \frac{P_2}{\Pi_2}, \cdots$ les réduites successives de celle-ci :

$$\Pi_{i-1}\varphi_1 - P_{i-1}\varphi = x^{2i-2}\varphi_i.$$

Les polynomes Π_{i-1} et P_{i-1} étant respectivement de degrés $i-1$ et $i-2$, on voit que $\frac{P_{i-1}}{\Pi_{i-1}}$ est la réduite $(i-1, i-2)$ de la fraction rationnelle $\frac{\varphi_1}{\varphi}$, et il s'ensuit que, en désignant par ϖ_{i-1} le terme indépendant de x dans le polynome Π_{i-1}, on a

$$\frac{\varphi_i}{\varpi_{i-1}\varphi} = R_{i-1,\,i-2}.$$

Faisons alors application de la formule générale du numéro précédent relative à $R_{\mu\nu}$. On a

$$\nu - \mu + 1 = 0,$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^{m-1}V_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^m V\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1-\alpha_1 x} + \ldots + \frac{1}{1-\alpha_m x};$$

d'où

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_m = 1.$$

On a donc simplement

$$\varphi_i = \varpi_{i-1}\frac{\Sigma\,\Delta^2(\alpha_1\ldots\alpha_i)(1-\alpha_{i+1}x)\ldots(1-\alpha_m x)}{\Sigma\,\Delta^2(\alpha_1\ldots\alpha_{i-1})}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer la valeur de la constante ϖ_{i-1}. Nous ferons usage de la formule élémentaire

$$\Pi_{i-1}\frac{\varphi_1}{\varphi} - P_{i-1} = \frac{x^{2i-2}}{\Pi_i} + x^{2i}(\ldots).$$

En en divisant les deux membres par ϖ_{i-1}, on voit que le coefficient de x^{2i-2} dans le second membre sera

$$\frac{1}{\varpi_{i-1}\varpi_i}.$$

Or ce coefficient est aussi $R_{i-1,\,i-2}(0)$; on a donc

$$\frac{1}{\varpi_{i-1}\varpi_i} = \frac{\Sigma\,\Delta^2(\alpha_1\ldots\alpha_i)}{\Sigma\,\Delta^2(\alpha_1\ldots\alpha_{i-1})};$$

d'où

$$\varphi_i = \frac{1}{\lambda_i}\Sigma\,\Delta^2(\alpha_1\ldots\alpha_i)(1-\alpha_{i+1}x)\ldots(1-\alpha_m x),$$

en posant

$$\lambda_i = \varpi_i \Sigma \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_i).$$

On a

$$\varpi_1 = \Pi_1(o) = q_1(o) = \frac{\varphi(o)}{\varphi_1(o)} = \frac{1}{m},$$

$$\varpi_2 = \frac{1}{\varpi_1} \frac{\Sigma \Delta^2(\alpha_1)}{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2)} = \frac{m^2}{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2)},$$

$$\varpi_3 = \frac{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2)}{m^2} \frac{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2)}{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)},$$

$$\varpi_4 = \frac{m^2}{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2)} \frac{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)}{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2)} \frac{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)}{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où

$$\lambda_1 = \frac{1}{m} m = 1,$$

$$\lambda_2 = \varpi_2 \Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2) \qquad = m^2,$$

$$\lambda_3 = \varpi_3 \Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \quad = \left[\frac{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2)}{m}\right]^2,$$

$$\lambda_4 = \varpi_4 \Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = \left[\frac{m \Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)}{\Sigma \Delta^2(\alpha_1 \alpha_2)}\right]^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin, on a

$$V_i(x) = x^{m-i} \varphi_i\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\lambda_i} \Sigma \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_i)(x - \alpha_{i+1}) \ldots (x - \alpha_m);$$

c'est l'expression même, telle qu'elle est donnée par Serret, des formules de Sylvester.

II.

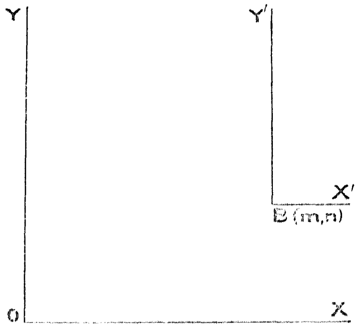
4. Revenons au cas d'une fraction rationnelle $f(x)$ quelconque et aux formules obtenues dans le n° 2. Nous avons appelé n et m les degrés du numérateur et du dénominateur, et représenté ce dénominateur par

$$\varphi(x) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \ldots (1 - \alpha_m x),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant des constantes différentes entre elles.

Dans la Table des réduites de $f(x)$, toutes les réduites (μ, ν) pour lesquelles les deux nombres μ, ν sont au moins égaux respectivement aux degrés m et n des termes de $f(x)$ sont égales à la fraction elle-même, qui occupe ainsi (*fig.* 2) tout l'angle X'BY' formé par les

Fig. 2.



parallèles aux axes menées par le point B(m, n). Nous supposons normales toutes les autres réduites.

Il suit de là que toutes les fractions continues régulières venant aboutir au contour X'BY' sont limitées et ont pour valeur $f(x)$, sauf $m+n$ d'entre elles, appartenant au type eulérien et correspondant, les m premières aux réduites placées sur les droites

$$X = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

et les n autres aux réduites placées sur les droites

$$Y = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Nous allons chercher les domaines de convergence et les valeurs de ces $m - n$ fractions continues régulières illimitées.

5. Considérons d'abord l'une des m premières, celle qui donne les réduites placées sur la droite

$$X = \mu.$$

Dès que ν dépasse une certaine valeur, la réduite (μ, ν) de cette fraction se trouve dans la région où les formules du n° 2 sont applicables; supposons ν choisi de telle manière qu'il en soit ainsi.

Rangeons par ordre de modules décroissants les constantes α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et soit

$$|\alpha_1| \geqq |\alpha_2| \geqq \ldots \geqq |\alpha_\mu| > |\alpha_{\mu+1}| \geqq |\alpha_{\mu+2}| \geqq \ldots$$

Si l'on divise par le produit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}$ les deux termes de la fraction $V_{\mu,\nu}$, il est visible que le numérateur se réduira, pour ν infini, au seul terme

$$M_1 \ldots M_\mu \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)(1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_\mu x),$$

et le dénominateur au terme

$$M_1 \ldots M_\mu \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu);$$

on a donc simplement

$$\lim_{\nu=\infty} V_{\mu,\nu} = (1-\alpha_1 x)\ldots(1-\alpha_\mu x).$$

Considérons maintenant le produit

$$x^{\mu+\nu+1} R_{\mu,\nu},$$

savoir

$$\frac{x^{\mu+\nu+1}}{\varphi(x)} \frac{\Sigma M_1 \ldots M_{\mu+1}(\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu+1})^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu+1})(1-\alpha_{\mu+2} x)\ldots(1-\alpha_m x)}{\Sigma M_1 \ldots M_\mu (\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu)}.$$

La somme qui figure au numérateur est obtenue en remplaçant, dans le terme écrit, les indices $1, \ldots, \mu+1$ par toutes les combinaisons $\mu+1$ à $\mu+1$ des indices $1, \ldots, m$. Si l'on divise cette somme par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu+1})^{\nu-\mu+1}$ et que l'on fasse croître ν indéfiniment, on obtiendra une limite égale à

$$M_1 \ldots M_{\mu+1} \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu+1})(1-\alpha_{\mu+2} x)\ldots(1-\alpha_m x),$$

ou à la somme d'un certain nombre de termes analogues. La somme qui figure au dénominateur, divisée par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}$, tend, quand ν grandit indéfiniment, vers

$$M_1 \ldots M_\mu \Delta^2(\alpha_1 \ldots \alpha_\mu).$$

Il suit de là que $x^{\mu+\nu+1} R_{\mu,\nu}$ ne diffère que par un facteur ayant, pour

ν infini, une limite finie de l'expression

$$\frac{x^{\mu+\nu+1}}{\varphi(x)}\,\frac{(\alpha_1\ldots\alpha_{\mu+1})^{\nu-\mu+1}}{(\alpha_1\ldots\alpha_\mu)^{\nu-\mu+1}}$$

ou

$$\frac{x^{2\mu}}{\varphi(x)}(\alpha_{\mu+1}x)^{\nu-\mu+1};$$

elle tendra donc, quand ν grandit indéfiniment, vers zéro pour les valeurs de x, et pour celles-là seulement, qui satisfont aux deux conditions

$$\varphi(x)\neq 0, \qquad |\alpha_{\mu+1}x|<1,$$

c'est-à-dire en tous les points intérieurs au cercle ayant l'origine pour centre et de rayon $\frac{1}{|\alpha_{\mu+1}|}$, sauf les points $\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_\mu}$.

Il suffit maintenant d'observer que l'on a

$$f(x)-\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}=\frac{x^{\mu+\nu+1}R_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$$

pour en conclure qu'en ces mêmes points la fraction continue régulière dont nous nous occupons et qui a $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ pour $(\nu+1)^{\text{ième}}$ réduite est convergente et a pour limite $f(x)$.

Dans le cas général, les modules des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont tous différents; alors, la première de nos m fractions continues, qui a ses réduites sur la droite $X=0$ et qui n'est autre que la fraction continue d'Euler, transformation identique de la série de Maclaurin, est convergente dans le cercle de rayon $\frac{1}{|\alpha_1|}$, divergente en dehors; la deuxième est convergente dans le cercle de rayon $\frac{1}{|\alpha_2|}$, sauf au point $\frac{1}{\alpha_1}$, et divergente en dehors; la troisième dans le cercle de rayon $\frac{1}{|\alpha_3|}$, sauf aux points $\frac{1}{\alpha_1}$ et $\frac{1}{\alpha_2}$, et divergente en dehors, etc., le cercle pour la $m^{\text{ième}}$ ayant pour rayon $\frac{1}{|\alpha_m|}$. Quant à la fraction suivante, elle est limitée et égale à $f(x)$ dans tout le plan, ainsi que toutes celles qui la suivent.

Ces résultats s'accordent entièrement avec ceux obtenus dans un cas plus général par M. de Montessus; mais les méthodes sont entièrement différentes. Celle que nous avons suivie montre avec la plus grande clarté comment le polynome $V_{\mu,\nu}$ a pour limite, pour ν infini, le polynome par lequel il faut multiplier $f(x)$ pour faire disparaître les pôles de cette fonction les plus rapprochés de l'origine; or l'étude de ce polynome dans le cas d'une série de Taylor quelconque est l'un des points principaux des recherches de M. Hadamard sur cette série, et c'est grâce à cette circonstance que M. de Montessus a pu tirer de ces recherches ses beaux résultats dans la théorie de la convergence des fractions continues.

6. Passons maintenant à l'étude des n fractions continues régulières dont les réduites sont sur les droites

$$Y = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Cette étude se rattachera immédiatement à celle qui précède en remarquant que si $\frac{A}{B}$ est la réduite qui, pour une fonction y quelconque, correspond au couple (μ, ν), $\frac{B}{A}$ sera la réduite qui correspond au couple (ν, μ) pour la fonction $\frac{1}{y}$.

Désignons donc par T la Table des réduites de la fraction rationnelle $f(x)$ et par T^{-1} celle des réduites de $\frac{1}{f(x)}$. Supposons, ce que l'on peut faire sans inconvénient, $f(0) = 1$, et soit

$$(1-\beta_1 x)(1-\beta_2 x)\ldots(1-\beta_n x)$$

le numérateur de $f(x)$. Supposons inégaux les modules des quantités $\beta_1, \ldots, \beta_n$, et soit

$$|\beta_1| > |\beta_2| > \ldots > |\beta_n|.$$

La réduite (ν, μ) de T^{-1} est l'inverse de la réduite (μ, ν) de T. Or, si nous attribuons à ν l'une des valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, nous savons que la fraction continue qui a pour réduites celles qui, dans T^{-1}, sont placées sur la droite $X = \nu$ est convergente dans le cercle qui a l'origine pour centre et $\frac{1}{|\beta_{\nu+1}|}$ pour rayon, en excluant les points $\frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_\nu}$, qu'elle a pour valeur $\frac{1}{f(x)}$, et qu'elle est divergente hors du cercle. L'inverse de cette fraction continue a les mêmes propriétés, avec cette différence que sa valeur est $f(x)$. Mais cette dernière fraction continue est celle qui a pour réduites les réduites de T qui sont sur la droite $Y = \nu$, et la question de la convergence de cette fraction continue se trouve ainsi complètement élucidée.

On voit que les zéros $\frac{1}{\beta_1}, \dots, \frac{1}{\beta_n}$ de $f(x)$ règlent les domaines de convergence des n fractions continues régulières dont nous nous occupons ici, exactement comme les pôles $\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_m}$ réglaient ceux des m fractions considérées tout d'abord. En résumé :

Théorème IV. — *Soit $f(x)$ une fraction rationnelle ayant m pôles et n zéros; supposons qu'il n'y ait pas deux pôles ayant le même module, non plus que deux zéros, et tous ces modules différents de zéro; supposons enfin normales toutes les réduites de $f(x)$ autres que celles qui sont égales à $f(x)$ elle-même.*

Dans ces conditions, les fractions continues régulières qui ont leurs réduites sur les droites

$$X = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

sont convergentes respectivement dans les m cercles ayant l'origine pour centre et passant par les pôles de $f(x)$ considérés dans l'ordre des modules croissants, à condition d'exclure de chacun de ces cercles les pôles qui y sont contenus; la valeur des fractions est alors $f(x)$; elles sont divergentes hors de leurs cercles respectifs.

Les fractions continues régulières qui ont leurs réduites sur les droites

$$Y = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

jouissent de propriétés pareilles où les pôles sont seulement remplacés par les n zéros de $f(x)$.

Enfin, toutes les autres fractions continues régulières sont limitées et ont pour valeur $f(x)$.

Les fractions continues holoïdes auxquelles donne naissance la Table des réduites de $f(x)$ étant, ou bien limitées et égales à $f(x)$, ou bien illimitées mais donnant alors, à partir d'un certain rang, les mêmes réduites que les fractions régulières illimitées, auront, elles aussi, leur convergence réglée par le théorème que nous venons d'établir.