

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI PADÉ

Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 24 (1907), p. 341-400

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__341_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHES SUR LA CONVERGENCE
DES
DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES

D'UNE CERTAINE CATÉGORIE DE FONCTIONS.

PAR M. HENRI PADÉ.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire et celui qui paraîtra à sa suite dans ces *Annales* ont été écrits pour répondre à la question mise au concours, par l'Académie des Sciences, pour le grand prix des Sciences mathématiques, en 1904 et 1906 : *Perfectionner en quelque point important l'étude de la convergence des fractions continues.*

Conformément aux règlements de ces concours, le premier de ces Mémoires a été envoyé au Secrétariat de l'Académie avant le 1^{er} juillet 1904, le second avant le 1^{er} janvier 1906.

Les seules modifications apportées, pour la publication, à leur rédaction primitive consistent en la suppression de la forme anonyme que j'avais conservée dans le premier d'entre eux, et en l'addition d'un petit nombre de notes nouvelles, que l'on reconnaîtra à ce qu'elles sont placées entre crochets [], et qui ont principalement pour objet de préciser des dates et, par conséquent, de contribuer à établir les droits de priorité des divers auteurs qui se sont occupés de la question.

En vue de réserver ces droits, j'ai déposé à l'Académie, dans les séances des 2 février et 22 juin 1903, deux Notes (voir *Comptes rendus*,

17 décembre 1906, p. 1001, Note) où étaient indiqués les principes fondamentaux qui forment la base du premier des deux Mémoires en question. J'indiquerai plus loin, exactement, à quelles parties de ce Mémoire se rapportent ces Notes. La substance de la première d'entre elles, celle du 2 février 1903, a, d'ailleurs, fait l'objet d'une Communication à l'Académie, séance du 12 décembre 1904.

I. — Aperçu historique. Objet du présent Mémoire.

1. Euler est le premier qui se soit occupé de la transformation en fraction continue d'une série ordonnée suivant les puissances d'une variable.

Une telle série ne fut jamais considérée par lui que comme le symbole d'une *fonction génératrice*, c'est-à-dire d'une fonction connue ou inconnue, qui, soumise à certaines règles de calcul, devait engendrer la série ou la suite de ses coefficients. La *sommation* d'une série ne fut jamais, pour Euler, que la recherche d'une telle fonction génératrice. Les grands débats sur les séries divergentes, qui agitèrent les analystes du xviii^e siècle, ont eu leur origine dans les contradictions auxquelles conduisait l'application, sans justification préalable et sur la seule foi en la généralité de l'analyse, des règles élémentaires du calcul aux séries infinies, considérées ainsi, simplement, comme symboles de fonctions génératrices. Cauchy et Abel devaient mettre fin à ces débats par l'introduction de la notion *restrictive* de la convergence qui donnait, justement, le moyen de démontrer la légitimité de l'application, aux séries qui la possédaient, des règles du calcul élémentaire.

Telles furent les idées d'Euler sur les séries, telles furent aussi ses idées sur les fractions continues. La *valeur* d'une fraction continue ne fut jamais, pour lui, que celle de la *fonction génératrice* de cette fraction, de la fonction qui, traitée suivant certaines règles, devait engendrer cette fraction; et, aujourd'hui même, la notion de la convergence intervient-elle vraiment au fond de la méthode classique par laquelle on développe en fraction continue une série ordonnée suivant les puissances descendantes de la variable?

Du vivant d'Euler, Lambert devait déjà signaler la convergence

d'une fraction continue provenant d'une série divergente; il y était conduit par l'induction provenant du calcul numérique et obtenait ainsi, comme il dit, « le moyen de calculer la valeur d'une série infinie alors même qu'elle est divergente ».

La question de la convergence n'apparaît pas dans les recherches de Lagrange et de Laplace sur la transformation en fractions continues de séries entières; non plus que dans celles de Gauss, à propos de sa célèbre fraction continue provenant du développement du quotient de deux fonctions hypergéométriques. On ne trouve rien, dans l'œuvre immense de Cauchy, qui ait trait à cette question; et, si l'on peut mentionner, vers le milieu du XIX^e siècle, les recherches, plus abondantes que fructueuses, de Stern et de Seidel, celles aussi de Heine, il faut arriver au travail posthume de Riemann (1863) : *Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita*, resté bien incomplet, malgré la restitution de M. Schwarz, et aux beaux et lumineux Mémoires de Thomé sur le même sujet et parus dans les tomes 66 et 67 (1866, 1867) du *Journal de Crelle*, pour rencontrer les premières Œuvres vraiment importantes se rapportant à cet objet. Nous en retiendrons particulièrement ce résultat que la fraction continue de Gauss pour la fonction $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ est convergente et a pour valeur $1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$ et son prolongement, dans tout le plan coupé suivant $+1$ — $+\infty$.

Depuis lors, se sont succédé les recherches de Laguerre, d'Halphen, de M. Pincherle, de Markoff; et, depuis dix ans, et à ne citer que les principales, celles de Stieltjes (1894), de MM. von Koch, van Vleck et Pringsheim; enfin, et tout récemment, deux Notes aux *Comptes rendus* et deux courts Mémoires parus dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1902) et dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (1903), de M. R. de Montessus de Ballore.

2. Les méthodes employées par ces divers auteurs se rattachent plus ou moins directement à deux principales.

S'il s'agit d'étudier la convergence d'une fraction continue donnée *a priori*, dont les éléments sont regardés comme constants ou fonctions d'une ou plusieurs variables, l'on fait l'étude de la *série équivalente*

à cette fraction ; c'est la nature et les propriétés de cette série qui font alors connaître la nature et les propriétés de la fonction définie par la fraction considérée. Tel est le point de départ des recherches de Stieltjes dans son Mémoire de 1894. La difficulté, dans cet ordre de recherches, est le choix des éléments de la fraction continue. S'ils demeurent trop généraux, l'étude de la série équivalente à la fraction devient impossible ; et l'on ne saurait les particulariser sans se laisser guider par l'induction résultant de l'examen de cas particuliers assez nombreux, sous peine de créer des êtres analytiques doués, comme à plaisir, de bizarreries qui en font de simples objets de curiosité. Mes recherches (1892) et la notion que j'ai introduite de *fraction continue holoïde* ont eu pour objet d'apporter quelque lumière sur ce point. Comme j'aurai, dans ce qui suit, à m'appuyer sur cette notion, je dirai ici quelques mots de ces recherches.

A chaque point (μ, ν) du plan, de coordonnées entières positives ou nulles, je fais correspondre la fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré μ et le numérateur de degré ν , qui, développée en série de Taylor, reproduit, dans ses $\mu + \nu + 1$ premiers termes, les $\mu + \nu + 1$ premiers termes d'une série entière ascendante donnée $f(x)$. Le plan (μ, ν) constitue alors la table des *fractions rationnelles approchées* ou *réduites* de $f(x)$.

Deux réduites (μ, ν) , (μ', ν') , distinctes, sont *contiguës et progressantes* dès que les différences $\mu' - \mu$, $\nu' - \nu$ sont nulles ou égales à l'unité.

Des réduites contiguës et progressantes choisies d'une manière quelconque dans la table sont les réduites d'une *fraction continue holoïde* : les numérateurs partiels d'une telle fraction sont des monomes où l'exposant de la variable est différent de zéro ; les dénominateurs partiels sont des polynomes où le terme constant n'est pas nul.

Les successions de réduites portées par les parallèles aux axes μ et ν donnent naissance aux *fractions continues régulières* où les numérateurs partiels sont du premier degré ainsi que les dénominateurs partiels. Celles portées par les parallèles à la bissectrice de l'angle des axes donnent les fractions continues régulières où les numérateurs partiels sont du second degré, et les dénominateurs partiels du premier degré. Enfin, celles qui dessinent dans la table une sorte de

chemin en zigzag, de telle manière que l'on passe d'un point au suivant en se déplaçant alternativement parallèlement à l'un des axes, puis à l'autre, donnent les fractions continues régulières les plus simples, où les numérateurs partiels sont du premier degré, et les dénominateurs partiels des constantes. Ces dernières fractions continues régulières ne sont que la superposition, chacune, de deux des fractions continues régulières de la catégorie précédente, donnant, l'une les réduites de rang pair, l'autre les réduites de rang impair : circonstance qui rend bien compte de la dualité des propriétés de ces deux catégories de réduites dans une fraction continue telle que celle de Stieltjes, qu'un changement de variable ramène immédiatement à une fraction continue régulière de cette espèce.

En particulierisant sa fraction continue comme il l'a fait, Stieltjes a donc eu l'ingéniosité de s'attacher à *la plus simple des fractions continues régulières les plus simples*, celle où tous les numérateurs partiels sont égaux à la variable indépendante, et tous les dénominateurs partiels des constantes positives. Peut-être, cependant, ressortirait-il d'une étude approfondie des éléments des fractions continues régulières correspondantes à une série donnée quelconque, que d'autres choix des éléments de la fraction continue pourraient être faits, qui conduiraient aussi à des résultats suffisamment généraux et applicables, cependant, aux fonctions les plus usuelles de l'analyse.

3. La seconde des deux méthodes principales que l'on peut discerner, sous des différences accessoires, parmi celles employées jusqu'ici pour l'étude de la convergence des fractions continues, se rapporte au cas où la fraction continue provient du développement formel d'une fonction connue d'avance. La méthode consiste alors à évaluer la différence entre cette fonction et la réduite, en l'obtenant, le plus souvent, sous forme de série entière ou d'intégrale définie, et à faire l'étude de ce *reste*. Telle est la méthode suivie par Riemann, par Thomé et par Laguerre.

Dans tout le cours de ses recherches sur les fractions continues, Laguerre ne s'est occupé qu'une seule fois de la question de la convergence, mais pour obtenir un exemple simple du beau résultat deviné, un siècle plus tôt, par Lambert et resté, depuis, sans démonstration.

Cet exemple, comme la plupart des recherches de Laguerre, se rapporte au développement classique, unique et bien déterminé, d'une série descendante en fraction continue : ce que nous nommerons *le développement canonique de la série*. Laguerre s'est particulièrement occupé de l'étude de ce développement pour une fonction satisfaisant à une équation différentielle linéaire et du premier ordre à coefficients rationnels; et cette étude repose sur la considération d'une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels dont une solution est le dénominateur même de la réduite; la méthode, un peu détournée, qu'il emploie pour arriver à cette équation ne lui permet cependant pas de l'explicitier complètement, en ce sens qu'elle demeure embarrassée de polynômes inconnus et qui doivent être déterminés, dans chaque cas particulier, au moyen d'identités obtenues, semble-t-il, un peu au hasard, et dont l'introduction est tout étrangère au fond de la question.

C'est à l'étude de la convergence de certains de ces développements canoniques de Laguerre que se rapportent les deux Notes parues récemment aux *Comptes rendus* et le second des deux Mémoires de M. de Montessus de Ballore. Bien qu'il s'agisse ici de développements de fonctions connues d'avance, cet auteur recourt à la première des deux méthodes générales que nous venons de décrire, et établit la convergence, dans le plan convenablement coupé, de la série équivalente au développement canonique étudié. Il s'ensuit que, si la convergence se trouve bien établie, on n'aperçoit pas immédiatement que la valeur du développement soit bien la fonction d'où on l'a déduit; et l'on doit attendre que M. de Montessus ait donné une exposition plus détaillée de ses résultats pour connaître la démonstration qu'il donne de ce point important (1).

4. Les recherches exposées dans le présent Mémoire constituent une sorte de synthèse et une très large généralisation des résultats que nous venons de rappeler de Thomé, Laguerre et M. de Montessus. Elles sont basées sur la notion de la Table des fractions rationnelles

(1) [La thèse de Doctorat de M. de Montessus, datée du 26 novembre 1904, a été soutenue en Sorbonne, le 8 mai 1905].

approchées correspondantes à une série entière donnée et ont pour objet ce problème :

Étudier le développement en fraction continue de la fonction génératrice d'une quantité qui satisfait à une équation aux différences finies, linéaire et du premier ordre, à coefficients linéaires relativement à l'indice.

Laplace a montré comment, de toute équation aux différences finies, linéaire et à coefficients rationnels relativement à l'indice, pouvait se déduire une équation différentielle linéaire ayant pour solution la fonction génératrice de la solution de l'équation aux différences finies. Cette proposition joue un rôle essentiel dans notre étude.

Elle montre, d'abord, que la fonction dont nous voulons étudier le développement en fraction continue est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Elle nous permettra, ensuite, de former complètement et par la voie la plus naturelle, une équation linéaire du second ordre dont les solutions sont étroitement reliées aux propriétés de la réduite (μ, ν) de la fonction, l'une de ces solutions étant le dénominateur de la réduite. De là, nous pourrons déduire tout ce qui touche au développement formel en fraction continue de la série, obtenir les relations de récurrence qui donnent les fractions continues holoïdes, former les fractions continues régulières, établir les formules dont dépend l'étude de la convergence.

L'étude de la convergence des fractions continues régulières nous donne alors, *dans le cas général*, les résultats suivants :

Les fractions continues régulières, dont les réduites sont portées par les parallèles à l'axe des ν , sont convergentes dans un cercle ayant l'origine pour centre et passant par un point déterminé A du plan; elles sont divergentes hors de ce cercle; dans le cercle, leur valeur est la fonction développée;

Les fractions continues régulières dont les réduites sont portées par des parallèles à la bissectrice de l'angle des axes μ, ν , sont convergentes dans le plan coupé suivant le prolongement de la droite qui va de l'origine au point A. Elles ont, dans ce domaine, la fonction pour valeur.

La proposition de Thomé relative à la fraction continue de Gauss pour la fonction $F(\alpha, \mathbf{r}, \gamma, x)$ et celles de M. de Montessus relatives à la convergence des développements canoniques de Laguerre ne sont que des cas particuliers de cette dernière proposition.

L'étude de la convergence des fractions continues holoïdes dont les réduites, dans la Table, progresseraient dans une direction intermédiaire entre celle de l'axe des v et celle de la bissectrice de l'angle des axes μ, v , se présente ici d'elle-même. Je n'ai pu, malheureusement, en surmonter les difficultés et j'ai dû me borner à indiquer le point auquel j'ai été forcé de m'arrêter. Jusqu'ici, donc, la fonction exponentielle demeure la seule pour laquelle l'étude complète de la convergence de la Table des réduites ait pu être faite.

Le cas général auquel se rapportent les théorèmes précédents comporte deux *cas limites*.

Dans le premier d'entre eux, on voit le point que nous avons appelé A s'éloigner indéfiniment, et les domaines de convergence des fractions continues régulières considérées s'étendre, par suite, à tout le plan. La fonction développée est alors une fonction de même nature que l'exponentielle et toutes les fractions continues holoïdes dont les réduites progressent, dans la Table, dans une direction intermédiaire à celle de l'axe des v et celle de la bissectrice, sont convergentes dans tout le plan et ont la fonction pour valeur.

Dans le second cas limite, opposé, pour ainsi dire, au premier, le point A vient, au contraire, se confondre avec l'origine. Le domaine de convergence des fractions régulières à réduites portées par les parallèles à l'axe des v , se réduit à l'origine; en particulier, la série développée, qui est la série équivalente à la première de ces fractions régulières, est divergente dans tout le plan, sauf à l'origine. Les fractions régulières à réduites portées par les parallèles à la bissectrice de l'angle des axes μ, v sont convergentes, et ont pour valeur la fonction développée, dans tout le plan coupé suivant une certaine demi-droite partant de l'origine.

Le cas de convergence, étudié par Laguerre, d'un développement canonique correspondant à une série toujours divergente, étendu ensuite par Stieltjes aux valeurs imaginaires de la variable, est un cas particulier de ce second cas limite.

5. Quelque spécial que soit le problème qui fait l'objet de ces recherches, il nous a semblé que les résultats auxquels nous a conduit son étude pouvaient être intéressants à un double point de vue.

Ils montrent, d'abord, le lien qui unit entre eux des travaux demeurés jusqu'ici séparés; ils les généralisent et les complètent de telle sorte que ceux-ci viennent se fondre, comme cas particuliers, dans l'étude générale de la Table des réduites de l'unique catégorie de fonctions définie dans l'énoncé de notre problème.

Ils apportent, ensuite, une contribution à l'étude des séries divergentes, en montrant nettement comment la Table des réduites d'une fonction définie par une équation linéaire du premier ordre comporte des catégories de fractions continues dont les domaines de convergence ne sont pas nécessairement les mêmes : les unes et, parmi elles, celle qui a pour série équivalente le développement en série entière de la fonction, pouvant être divergentes dans tout le plan; les autres étant, au contraire, convergentes et ayant pour valeur la fonction, dans tout le plan coupé suivant une certaine demi-droite.

6. Je prierai, en terminant cette Introduction, que l'on veuille bien me pardonner la concision de la forme : la brièveté du délai qui m'était imparti pour l'achèvement de ce travail ne m'a pas permis de transcrire toujours, avec assez de détails pour être suivis à la simple lecture, les calculs, d'ailleurs plus longs que difficiles, qu'il comporte. Et il me reste encore le regret de n'avoir pu accomplir que la moitié de la tâche que j'avais entreprise pour répondre au vœu de l'Académie, en ne parvenant pas à achever une autre catégorie de recherches ayant pour objet principal la *transformation et la généralisation des résultats du Mémoire de 1894 de Stieltjes, quand on passe du point de vue du développement canonique, par lui adopté, à celui des fractions continues holoïdes* (1).

(1) [La publication des beaux résultats obtenus dans cette voie par M. Van Vleck (*Transactions of the American mathematical Society*, juillet 1903) m'a fait interrompre ces recherches.

II. — Théorème de Laplace. Considérations générales.

7. Au n° 20 du Livre I de la *Théorie analytique des probabilités*, Laplace s'exprime ainsi : « Il est souvent utile ⁽¹⁾ de connaître la fonction génératrice d'une quantité donnée par une équation aux différences finies, ordinaires ou partielles, parce que, l'analyse offrant divers moyens pour développer les fonctions en séries, on peut ainsi obtenir d'une manière fort simple la valeur de la quantité cherchée. » Laplace montre ensuite comment on peut immédiatement former une équation différentielle ayant pour intégrale cette fonction génératrice, lorsque l'équation aux différences donnée est une équation aux différences ordinaires, linéaire et homogène, ayant pour coefficients des fonctions rationnelles et entières de l'indice. Cette équation différentielle est elle-même linéaire, et son ordre est égal au degré le plus élevé des coefficients de l'équation aux différences, relativement à l'indice; ses coefficients sont des polynomes entiers par rapport à la variable indépendante.

Réciproquement, si l'on substitue à la fonction, dans une telle équation différentielle, une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable, on trouvera, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de cette variable, que le coefficient du terme général de la série satisfait à une équation aux différences finies ordinaires, linéaire et homogène et dont les coefficients sont des fonctions entières et rationnelles de l'indice, de degré égal à l'ordre de l'équation différentielle.

Le cas le plus simple de ces propositions est celui des séries récurrentes.

8. Ces théorèmes peuvent intervenir utilement dans la théorie des fractions continues et l'étude de leur convergence ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Et non *inutile*, comme on le lit dans la dernière édition des *Œuvres complètes de Laplace*, Paris, 1886.

⁽²⁾ [J'ai donné le principe de cette méthode et son application développée pour le cas de la fonction exponentielle qui fait l'objet d'une section du chapitre IV du présent Mémoire (p. 361 et suivantes) dans le pli cacheté (*voir* l'Introduction) déposé à l'Académie dans la séance du 22 juin 1903.]

Considérons une série quelconque ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots;$$

désignons par μ et ν deux entiers positifs ou nuls quelconques, et soit $V_{\mu\nu}$ le polynome de degré μ ,

$$V_{\mu\nu} = l_0 + l_1x + l_2x^2 + \dots + l_\mu x^\mu.$$

Si nous formons, par la règle ordinaire de multiplication des séries, le produit $V_{\mu\nu} \times f(x)$, et que nous posons

$$V_{\mu\nu}f(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots,$$

on aura généralement

$$k_m = l_0 a_m + l_1 a_{m-1} + \dots + l_\mu a_{m-\mu},$$

en supposant les lettres a affectées d'indices négatifs remplacées par zéro.

Imaginons, maintenant, que la fonction a_n de l'indice n , dont $f(x)$ est la fonction génératrice, satisfasse à l'équation aux différences

$$(2) \quad (\alpha_0 + \beta_0 n) a_n + (\alpha_1 + \beta_1 n) a_{n+1} + \dots + (\alpha_p + \beta_p n) a_{n+p} = 0,$$

où $\alpha_0, \dots, \alpha_p, \beta_0, \dots, \beta_p$ désignent des constantes quelconques.

Au moyen de cette relation, on pourra exprimer toutes les quantités a en fonctions de p d'entre elles choisies arbitrairement; l'on pourra ainsi exprimer toutes les quantités a qui figurent dans $k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+p}$ en fonctions, par exemple, de $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+p-1}$; et, l'indice m demeurant indéterminé, on obtiendra, visiblement, $k_m, k_{m+1}, \dots, k_{m+p}$ sous la forme de fonctions linéaires de a_m, \dots, a_{m+p-1} , à coefficients rationnels en m . L'élimination des quantités a_m, \dots, a_{m+p-1} donnera alors une relation de la forme

$$(3) \quad A k_m + B k_{m+1} + \dots + L k_{m+p} = 0,$$

où A, B, \dots, L sont des polynomes entiers en m , c'est-à-dire une équation aux différences finies de la nature de celles auxquelles s'applique le théorème de Laplace rappelé dans le numéro précédent.

9. Les coefficients l_0, l_1, \dots, l_μ entrent dans les polynomes A, B, ..., L, et des simplifications de l'équation (3) pourront évidemment résulter du choix de ces coefficients.

Supposons-les déterminés de telle sorte que k_m s'annule pour les valeurs $\nu + 1, \nu + 2, \dots, \nu + \mu$ de l'indice m ; et désignons alors par $U_{\mu\nu}$ le polynome de degré ν ,

$$U_{\mu\nu} = k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu;$$

on aura, au point de vue seulement formel si la série (1) n'est pas convergente,

$$V_{\mu\nu} f(x) - U_{\mu\nu} = k_{\mu+\nu+1} x^{\mu+\nu+1} + k_{\mu+\nu+2} x^{\mu+\nu+2} + \dots,$$

$\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ est la réduite (μ, ν) de la série $f(x)$.

La fonction $V_{\mu\nu} f(x) - U_{\mu\nu}$ satisfera donc à l'équation différentielle linéaire de la fonction génératrice de k_m .

Mais $f(x)$ est déjà, en raison de l'équation aux différences (2), solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, en sorte que les dérivées de $f(x)$ s'exprimeront linéairement au moyen de cette fonction elle-même. La quantité $V_{\mu\nu} f(x) - U_{\mu\nu}$ et ses dérivées seront donc des fonctions linéaires de $f(x)$, à coefficients rationnels en x . En les substituant dans l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $V_{\mu\nu} f(x) - U_{\mu\nu}$, on obtiendra une équation de la forme

$$P f(x) + Q = 0,$$

où P est une fonction linéaire de $V_{\mu\nu}$ et ses dérivées, à coefficients entiers en x , et Q une fonction linéaire de $V_{\mu\nu}, U_{\mu\nu}$ et leurs dérivées.

Si $f(x)$ n'est pas simplement une série récurrente, on conclura de là que l'on a séparément

$$P = 0, \quad Q = 0;$$

et l'on aura ainsi deux équations différentielles linéaires auxquelles satisferont les polynomes $V_{\mu\nu}$ et $U_{\mu\nu}$, la première de ces équations étant relative au seul polynome $V_{\mu\nu}$, dénominateur de la réduite (μ, ν) .

L'étude de la réduite se trouve ainsi ramenée à l'étude des intégrales des équations $P = 0$ et $Q = 0$.

10. Une autre voie s'offre encore plus directement pour l'application du théorème de Laplace à l'étude de la convergence de certaines fractions continues (1).

Les termes des réduites successives

$$\frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \quad \frac{U_3}{V_3}, \quad \dots,$$

de la fraction continue entièrement quelconque

$$(4) \quad \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_3} + \dots,$$

donnent lieu à l'équation aux différences finies

$$\alpha_n W_{n-2} + \alpha_n W_{n-1} = W_n,$$

où W est mis à la place de U ou de V .

Supposons que α_n et α_n s'expriment par des polynomes entiers en n ; alors, on pourra former une équation différentielle linéaire, d'ordre égal au plus haut degré de ces polynomes, qui aura pour solution la fonction génératrice de W_n . L'étude de cette équation différentielle, en faisant connaître les points critiques de cette fonction génératrice, pourra faire connaître comment se comporte, pour n infini, le polynome W_n .

Au lieu de considérer ainsi directement U_n et V_n , on peut aussi, avec avantage, introduire seulement le rapport $\frac{V_{n-1}}{V_n}$. La fraction continue (4) est, en effet, équivalente à la série

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{V_1 V_2} - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{V_2 V_3} + \frac{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{V_3 V_4} - \frac{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5}{V_4 V_5} + \dots,$$

pour laquelle le rapport de deux termes consécutifs a pour expression

$$- \alpha_i \frac{V_{i-1}}{V_i} \frac{V_{i-2}}{V_{i-1}},$$

et dépend, par suite, essentiellement, du quotient $\frac{V_{n-1}}{V_n}$.

L'introduction de ce quotient rattache d'ailleurs la question aux

(1) [C'est l'exposé de cette méthode et l'indication de son emploi pour l'obtention immédiate et la généralisation des résultats de M. de Montessus donnés dans le chapitre III de ce Mémoire (p. 355 et suivantes), qui fait l'objet du pli cacheté (voir l'Introduction) déposé à l'Académie dans la séance du 2 février 1903].

recherches de M. Poincaré : *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* ⁽¹⁾, que M. Pincherle a déjà fait intervenir dans l'étude de la convergence d'une certaine fraction continue de forme canonique ⁽²⁾.

11. On voit, par ces indications générales, comment intervient la proposition de Laplace, en ramenant l'étude des termes des réduites de certaines fractions continues à celle des intégrales d'équations différentielles linéaires, intégrales qui sont, soit ces termes eux-mêmes, soit leurs fonctions génératrices. Nous envisageons, dans ce qui suit, des exemples de chacun de ces deux cas. Remarquons, dès maintenant, que le second se rapporte à l'étude d'une fraction continue donnée *a priori*, tandis que le premier se rapporte à l'étude de toutes les fractions continues correspondant à une série entière donnée, et offre un moyen de former ces fractions continues elles-mêmes.

Quant au théorème de Laplace qui fait le fond de ces méthodes, il s'obtient très simplement comme il suit ⁽³⁾ :

Soit

$$(5) \quad Pa_n + Qa_{n+1} + Ra_{n+2} + \dots + Ta_{n+p} = 0,$$

l'équation aux différences données, P, Q, ..., T désignant des polynomes entiers en n , de degré ω . On peut toujours mettre ces polynomes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P &= P_\omega n(n-1)\dots(n-\omega+1) && + P_{\omega-1}n(n-1)\dots(n-\omega+2) + \dots \\ & && + P_2n(n-1) + P_1n + P_0, \\ Q &= Q_\omega(n+1)n\dots(n-\omega+2) && + Q_{\omega-1}(n+1)n\dots(n-\omega+3) + \dots \\ & && + Q_2(n+1)n + Q_1(n+1) + Q_0, \\ R &= R_\omega(n+2)(n+1)\dots(n-\omega+3) && + R_{\omega-1}(n+2)(n+1)\dots(n-\omega+4) + \dots \\ & && + R_2(n+2)(n+1) + R_1(n+2) + R_0, \\ & \dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ T &= T_\omega(n+p)(n+p-1)\dots(n+p-\omega+1) && + T_{\omega-1}(n+p)(n+p-1)\dots(n+p-\omega+2) + \dots \\ & && + T_2(n+p)(n+p-1) + T_1(n+p) + T_0, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *American Journal of Mathematics*, t. VII, 1885.

⁽²⁾ *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1889. Il ne nous paraît pas que l'on doive tenir compte, comme le fait M. Pincherle, de l'ensemble P des zéros des dénominateurs des réduites, mais seulement des points limites de cet ensemble.

⁽³⁾ La démonstration et la formule données par Laplace (*loc. cit.*) sont incorrectes.

$P_\omega, P_{\omega-1}, \dots, P_1, Q_\omega, \dots, T_0$ désignant des constantes. La relation (5) devient alors

$$\begin{aligned}
 & P_\omega \ n(n-1)\dots(n-\omega+1)a_n + Q_\omega \ (n+1)n\dots(n-\omega+2)a_{n+1} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + T_\omega \ (n+p)(n+p-1)\dots(n+p-\omega+1)a_{n+p} \\
 + & P_{\omega-1}n(n-1)\dots(n-\omega+2)a_n + Q_{\omega-1}(n+1)n\dots(n-\omega+3)a_{n+1} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + T_{\omega-1}(n+p)(n+p-1)\dots(n+p-\omega+2)a_{n+p} \\
 + & \dots\dots\dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + P_1na_n \qquad + Q_1(n+1)a_{n+1} + \dots + T_1(n+p)a_{n+p} \\
 & \qquad \qquad \qquad + P_0 \ a_n \qquad + Q_0 \qquad a_{n+1} + \dots + T_0 \qquad a_{n+p} = 0.
 \end{aligned}$$

Si l'on désigne comme antérieurement par $f(x)$ la fonction génératrice de a_n , en sorte que

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

on voit que, dans l'expression

$$\begin{aligned}
 & (P_\omega \ x^p + Q_\omega \ x^{p-1} + \dots + T_\omega \)x^\omega \ f^{(\omega)}(x) \\
 + & (P_{\omega-1}x^p + Q_{\omega-1}x^{p-1} + \dots + T_{\omega-1})x^{\omega-1}f^{(\omega-1)}(x) \\
 + & \dots\dots\dots \\
 + & (P_1 \ x^p + Q_1 \ x^{p-1} + \dots + T_1)x f'(x) \\
 + & (P_0 \ x^p + Q_0 \ x^{p-1} + \dots + T_0) f(x),
 \end{aligned}$$

le coefficient de x^{n+p} est précisément le premier membre de l'équation aux différences (5). Cette expression se réduira donc à un polynôme de degré $p-1$, ce qui établit la proposition de Laplace.

III. — Première application. La fraction continue caonique de Laguerre et les recherches de M. de Montessus de Ballore.

12. Notre première application aura pour objet la démonstration et l'analyse des résultats obtenus récemment par M. de Montessus et qu'il a fait connaître dans deux Notes parues aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, du 23 juin 1902 et du 22 février 1904, ainsi que dans un article : *Sur la convergence de certaines fractions continues algébriques*, paru dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXVII, 1903. Ces résultats concernent la convergence de certaines

fractions continues *canoniques* et se rattachent étroitement aux travaux de Laguerre sur le développement en fraction continue de cette nature, d'une fonction satisfaisant à une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont les coefficients sont des polynomes relativement à la variable.

Nous établirons les résultats obtenus dans la Note du 23 juin, les méthodes très générales que nous allons employer s'appliquant sans modification à ceux obtenus dans les autres cas traités par M. de Montessus.

13. Laguerre a démontré que les termes de la réduite $\frac{f_n}{\varphi_n}$ de la fraction continue canonique pour la fonction

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$$

satisfont à l'équation aux différences

$$(6) \quad W_{n+1} - (2n+1)xW_n + (n^2 - \omega^2)W_{n-1} = 0;$$

en outre

$$f_0 = \varphi_0 = 1, \quad f_1 = x + \omega, \quad \varphi_1 = x - \omega.$$

Il suit de là que, dans la série équivalente à la fraction continue, le rapport R d'un terme au précédent a pour valeur

$$R = (n^2 - \omega^2) \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} = \lambda_n \frac{\psi_{n-1}}{\psi_n},$$

ψ_n satisfera à l'équation

$$\frac{\psi_{n+1}}{\lambda_{n+1}} - (2n+1)x\psi_n + (n^2 - \omega^2)\lambda_n\psi_{n-1} = 0,$$

qui conduit à prendre λ_n égal à l'inverse de $n + \omega$, d'où

$$(7) \quad (n + \omega + 1)\psi_{n+1} - (2n+1)x\psi_n + (n - \omega)\psi_{n-1} = 0,$$

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = \frac{x - \omega}{1 + \omega},$$

$$R = \frac{n - \omega}{n + 1 + \omega} \frac{\psi_{n-1}}{\psi_n} \frac{\psi_n}{\psi_{n+1}}.$$

L'application du théorème de Laplace à l'équation aux différences de ψ_n donne immédiatement l'équation différentielle linéaire du premier ordre à laquelle satisfait la fonction génératrice $y = \psi_0 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \dots$ de ψ_n . On a ainsi

$$(8) \quad t(t^2 - 2xt + 1) \frac{dy}{dt} + [(1 - \omega)t^2 - xt + \omega]y = \omega(1 - t);$$

l'intégration de cette équation donne alors

$$y = \omega t^{-\omega} (t^2 - 2xt + 1)^{-\frac{1}{2} + \omega} \int^t t^{\omega-1} (1-t) (t^2 - 2xt + 1)^{-\frac{1}{2} - \omega} dt.$$

De là se conclut que le *module de* $\frac{\psi_{n-1}}{\psi_n}$ *a pour limite le module de la plus petite racine de l'équation*

$$(9) \quad u^2 - 2xu + 1 = 0,$$

module qui est manifestement le rayon de convergence de y .

Mais les racines de cette équation ont toutes deux pour module l'unité, quand x est compris entre -1 et $+1$; sinon, ces modules sont inégaux, leur produit étant d'ailleurs égal à 1 . D'où, en se reportant à l'expression de R , cette conclusion que, *en tous les points du plan* (x), *sauf ceux situés sur la coupure* $-1 \text{ --- } +1$, *la fraction continue converge et représente la fonction* $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$.

14. En attendant qu'une démonstration plus complète de ces résultats ait été donnée par M. de Montessus, laquelle fera sans doute connaître l'origine qu'il donne à l'équation (8), qui joue le rôle fondamental et qui s'obtient, comme on vient de le voir, naturellement, par le théorème de Laplace, l'examen de cette méthode conduit aux remarques suivantes :

Il ne paraît pas indispensable de recourir à l'équation (8) pour obtenir la limite du *module de* $\frac{\psi_{n-1}}{\psi_n}$. Il résulte, en effet, immédiatement des théorèmes de M. Poincaré (*loc. cit.*) appliqués à l'équation (7), que la limite du *rapport* $\frac{\psi_n}{\psi_{n-1}}$ *lui-même* est la racine de l'équation (9) dont le module est le plus grand; les modules des racines de l'équa-

tion étant inverses l'un de l'autre, il s'ensuit que le module de $\frac{\psi_{n-1}}{\psi_n}$ a bien pour limite le module de la racine de moindre module.

En second lieu, il eût été plus direct encore, pour trouver la valeur asymptotique du rapport $\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$, de recourir à l'équation (6) elle-même, en y faisant, suivant la méthode générale (POINCARÉ, *loc. cit.*, p. 238), $\varphi_n = n! \psi_n$, ce qui eût donné immédiatement la valeur asymptotique désirée.

En troisième lieu, on peut observer que la limite du module de $\frac{\psi_{n-1}}{\psi_n}$ est déduite de la connaissance du rayon de convergence de la série γ . Or, l'on sait seulement que, *quand le rapport tend vers une limite*, cette limite est un point, d'ailleurs critique pour γ , du cercle de convergence.

Enfin, la convergence de la série équivalente à la fraction continue étant supposée établie, comment en résulte-t-il que sa somme, c'est-à-dire la valeur de la fraction continue, soit égale à la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$? Aucune indication sur la démonstration de ce point capital ne nous est fournie par les notes de M. de Montessus.

15. Ces recherches se rattachent à celles de Laguerre⁽¹⁾ desquelles il résulte que les termes des réduites du développement canonique d'une fonction Z satisfaisant à une équation telle que

$$(10) \quad (ax + b)(cx + d) \frac{dZ}{dx} = (px + q)Z + \mathbf{H}(x),$$

où a, b, c, d, p, q sont des constantes et $\mathbf{H}(x)$ un polynôme en x quelconque, satisfait à une équation aux différences finies telle que (6) et à laquelle les considérations précédentes s'appliquent sans modifi-

(1) *Œuvres (passim)*. Le Mémoire le plus important de Laguerre sur la théorie des fractions continues, ayant pour titre : *Sur la réduction en fraction continue d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels*, et qui a paru dans le Tome I, 4^e série, 1885, du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, n'a pas été réimprimé dans le Tome I des *Œuvres* de Laguerre (Paris, 1898). [Il a paru depuis, en tête du Tome II].

cations, la coupure $-1 \text{---} +1$ étant simplement remplacée par la droite qui va du point $-\frac{b}{a}$, au point $-\frac{d}{c}$.

Plus généralement, Laguerre considère une série Z ordonnée suivant les puissances descendantes de x et satisfaisant à l'équation

$$Wz' = 2Vz + U,$$

dans laquelle U, V, W sont des polynomes en x ; et le fondement de la méthode dont il fait usage pour former et étudier le développement en fraction continue canonique de Z est l'établissement d'une certaine équation différentielle linéaire du second ordre, homogène et dont les coefficients sont rationnels en x , à laquelle satisfait le polynome f_n , dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue.

L'équation qu'il obtient, par une méthode fort détournée, et qui est

$$W\Theta_n y'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta_n']y' + k_n y = 0,$$

contient, malheureusement, encore des polynomes inconnus Θ_n, k_n , dont la détermination ne peut se faire que par des identifications d'un caractère assez imprécis, et qui ne donnent que des formules de récurrence plus ou moins compliquées entre leurs coefficients ⁽¹⁾; en sorte que les seuls cas qui aient pu être traités complètement rentrent dans la catégorie de ceux que définit l'équation (10).

16. Nous allons montrer comment le problème du développement en fraction continue canonique, abordé par Laguerre, d'une fonction satisfaisant à l'équation (10), et le problème de la convergence de cette fraction, entrepris par M. de Montessus, se transforment et se généralisent quand on passe au point de vue de la théorie des fractions continues holoïdes.

Supposons que le développement de Z suivant les puissances décroissantes de x commence par un terme en x^m . Si l'on fait, dans l'équation (10), les changements de variable et de fonction définis par

⁽¹⁾ Voir, sur ce point, les exemples traités à la fin du Mémoire de 1885, et dans le Tome I des *Œuvres*, passim.

les formules

$$(11) \quad cx + d = \frac{1}{x'}, \quad x'^m Z = Z',$$

où x' et Z' sont la nouvelle variable et la nouvelle fonction, elle prend la forme

$$(12) \quad (A + Bx')x' \frac{dZ'}{dx'} + (M + Nx')Z' = \Pi'(x'),$$

où A, B, M, N sont des constantes et $\Pi'(x')$ un polynome de degré égal à $m + 1$, comme celui de $\Pi(x)$.

Le développement canonique de Z est de la forme

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots,$$

a_0 désignant un polynome de degré m en x , et a_1, a_2, \dots des binomes du premier degré. Si, dans ce développement, on fait le changement de variable (11), et que l'on multiplie par x'^m , on voit qu'il prend la forme

$$a'_0 + \frac{\alpha'_1}{a'_1} + \frac{\alpha'_2}{a'_2} + \frac{\alpha'_3}{a'_3} + \dots,$$

a'_0 désignant un polynome de degré m en x' ; α'_1 un monome de degré $m + 1$; a'_1, a'_2, a'_3, \dots des binomes du premier degré et, enfin, $\alpha'_2, \alpha'_3, \dots$, des monomes du second degré. On a donc la fraction continue régulière de Z' dont les réduites ont leurs points représentatifs sur la droite $y - x = m$.

Ainsi, l'étude de la fraction continue canonique correspondant à la série descendante Z , satisfaisant à l'équation (10) et commençant par un terme de degré m , revient à l'étude de la fraction continue régulière, dont les réduites sont sur la droite $y - x = m$, correspondant à la série ascendante Z' satisfaisant à l'équation (12) et commençant par un terme constant (1).

Mais alors la question se pose d'étudier, non pas seulement cette fraction continue régulière particulière, mais toutes celles qui appar-

(1) *Annales de l'École Normale*, 1899.

tiennent à la même catégorie; puis, celles des deux autres catégories; et enfin, généralement, les fractions holoïdes quelconques attachées à la fonction, c'est-à-dire sa Table de fractions rationnelles approchées.

17. C'est sous cette forme générale que nous allons entreprendre l'étude du développement en fractions continues de la série Z' satisfaisant à l'équation (12), et mener aussi loin qu'il nous sera possible l'étude de leur convergence.

La série Z' , satisfaisant à une équation linéaire du premier ordre, est la fonction génératrice d'une quantité qui satisfait à une équation aux différences finies, linéaire, et dont les coefficients ne sont que du premier degré par rapport à l'indice; cette équation est d'ailleurs aussi du premier ordre. C'est la considération *a priori* d'une telle équation qui nous servira de point de départ; c'est, comme on voit, le cas le plus simple auquel se rapporte la méthode d'étude indiquée dans le n° 9.

Nous supposons que le polynôme $\Pi(x')$ se réduit à une constante, de telle façon que l'on puisse supposer l'équation aux différences finies vérifiée à partir de la valeur 0 de l'indice. Cette hypothèse ne fait que modifier la région du plan des réduites que nous allons voir s'introduire nécessairement dans notre étude, sans altérer en rien ce qu'il y a d'essentiel dans les résultats.

Notons enfin que, par le changement de variable (11), la portion de droite qui, dans le plan (x) , va du point $-\frac{b}{a}$ au point $-\frac{d}{c}$, devient, dans le plan (x') , le prolongement de la droite qui va de l'origine au point $\frac{a}{ad-bc}$ ou $-\frac{A}{B}$.

IV. — Deuxième application. Les fractions continues holoïdes de la fonction $F(h, 1, h', u)$ et de ses dégénérescences.

1. Préliminaires. Cas particulier de la fonction exponentielle.

18. Nous considérons le cas où l'équation aux différences (2) de a_n se réduit à sa forme la plus simple, en étant du premier ordre seulement

$$(13) \quad (\alpha_0 + \beta_0 n)a_n + (\alpha_1 + \beta_1 n)a_{n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 \neq 0$, $\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ non entiers négatifs. Suivant que $\beta_0 \beta_1$ sera différent de zéro ou égal à zéro, la série $f(x)$ sera convergente dans le cercle ayant l'origine pour centre et passant par le point $-\frac{\beta_1}{\beta_0}$, qui sera un point critique de la fonction, ou bien le rayon de ce cercle sera infini ou nul.

En mettant, suivant la méthode indiquée, l'équation (13) sous la forme

$$\beta_0 n a_n + \beta_1 (n+1) a_{n+1} + \alpha_0 a_n + (\alpha_1 - \beta_1) a_{n+1} = 0,$$

on voit que son premier membre est le coefficient de x^{n+1} dans

$$(\beta_1 + \beta_0 x) x f'(x) + (\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_0 x) f(x),$$

en sorte que cette expression se réduit à une constante, égale manifestement à $(\alpha_1 - \beta_1) a_0$. L'équation différentielle à laquelle satisfait $f(x)$, et qui définit cette fonction quand la série (1) est divergente, est donc ici

$$(14) \quad (\beta_1 + \beta_0 x) x \frac{df}{dx} + (\alpha_0 x + \alpha_1 - \beta_1) f(x) = (\alpha_1 - \beta_1) a_0.$$

19. La détermination des coefficients l_0, l_1, \dots, l_μ du polynome $V_{\mu\nu}$ se fait au moyen des équations

$$k_{\nu+1} = 0, \quad k_{\nu+2} = 0, \quad \dots, \quad k_{\nu+\mu} = 0.$$

Si l'on substitue leurs valeurs dans k_m , on obtiendra, en désignant par c une constante relativement à m ,

$$c k_m = \begin{vmatrix} a_{\nu+1} & a_\nu & \dots & a_{\nu-\mu+1} \\ a_{\nu+2} & a_{\nu+1} & \dots & a_{\nu-\mu+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu+\mu} & a_{\nu+\mu-1} & \dots & a_\nu \\ a_m & a_{m-1} & \dots & a_{m-\mu} \end{vmatrix}.$$

En multipliant la dernière colonne de ce déterminant par $\alpha_0 + \beta_0(m - \mu)$, et lui ajoutant la précédente multipliée par $\alpha_1 + \beta_1(m - \mu)$, l'élément $a_{m-\mu}$ sera remplacé par zéro, et tous ceux qui sont au-dessus se décomposeront en deux facteurs, l'un

linéaire en m , l'autre indépendant de m ; car on a, par exemple,

$$\begin{aligned} & [\alpha_0 + \beta_0(m - \mu)]a_\nu + [\alpha_1 + \beta_1(m - \mu)]a_{\nu+1} \\ & = (\alpha_0 + \beta_0\nu)a_\nu + (\alpha_1 + \beta_1\nu)a_{\nu+1} + (m - \mu - \nu)(\beta_0 a_\nu + \beta_1 a_{\nu+1}). \end{aligned}$$

En opérant de même, on remplacera successivement les éléments $a_{m-\mu+1}, a_{m-\mu+2}, \dots, a_{m-1}$ de la dernière ligne du déterminant par des zéros, et l'on aura finalement

$$c[\alpha_0 + \beta_0(m - 1)][\alpha_0 + \beta_0(m - 2)] \dots [\alpha_0 + \beta_0(m - \mu)] k_m = \begin{vmatrix} a_{\nu+1} & (m - \nu - 1)(\beta_0 a_\nu + \beta_1 a_{\nu+1}) & \dots & (m - \nu - 1)(\beta_0 a_{\nu-\mu+1} + \beta_1 a_{\nu-\mu+2}) \\ a_{\nu+2} & (m - \nu - 2)(\beta_0 a_{\nu+1} + \beta_1 a_{\nu+2}) & \dots & (m - \nu - 2)(\beta_0 a_{\nu-\mu+2} + \beta_1 a_{\nu-\mu+3}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu+\mu} & (m - \nu - \mu)(\beta_0 a_{\nu+\mu-1} + \beta_1 a_{\nu+\mu}) & \dots & (m - \nu - \mu)(\beta_0 a_\nu + \beta_1 a_{\nu+1}) \\ a_m & \cdot 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$(15) \quad c[\alpha_0 + \beta_0(m - 1)] \dots [\alpha_0 + \beta_0(m - \mu)] k_m = (-1)^\mu (m - \nu - 1)(m - \nu - 2) \dots (m - \nu - \mu) \Lambda \times a_m,$$

en posant

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \beta_0 a_\nu + \beta_1 a_{\nu+1} & \dots & \beta_0 a_{\nu-\mu+1} + \beta_1 a_{\nu-\mu+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_0 a_{\nu+\mu-1} + \beta_1 a_{\nu+\mu} & \dots & \beta_0 a_\nu + \beta_1 a_{\nu+1} \end{vmatrix};$$

Λ ne dépend pas de m .

20. Ce calcul de k_m en fonction de a_m seulement souffre toutefois quelque exception. Nous avons déjà fait la convention que la lettre a affectée d'un indice négatif doit être remplacée par zéro. Or, en général, l'équation (13) n'est vérifiée que pour les valeurs $n = 0, 1, 2, \dots$, de l'indice, et non plus pour les valeurs négatives. Nous devons donc, en général, supposer que, dans le déterminant par lequel est exprimé ck_m , tous les indices sont positifs ou nuls, en sorte que l'on a

$$\mu \leq \nu + 1,$$

et aussi $m \geq \mu$.

L'équation (13) ne subsiste, pour les valeurs négatives de l'indice,

que si $\alpha_i = \beta_i$. Dans ce cas, les calculs faits pour obtenir k_m en fonction de α_m seulement sont toujours légitimes.

Notons encore les formules

$$A = (-1)^\mu c [l_0 \beta_0^\mu - l_1 \beta_0^{\mu-1} \beta_1 + l_2 \beta_0^{\mu-2} \beta_1^2 - \dots + (-1)^\mu l_\mu \beta_1^\mu],$$

$$k_m = (-1)^m [l_0 \beta_0^\mu - l_1 \beta_0^{\mu-1} \beta_1 + \dots + (-1)^\mu l_\mu \beta_1^\mu] \frac{(m-\nu-1)! \alpha_0 (\alpha_0 + \beta_0) \dots [\alpha_0 + (m-\mu-1) \beta_0]}{(m-\nu-\mu-1)! \alpha_1 (\alpha_1 + \beta_1) \dots [\alpha_1 + (m-1) \beta_1]} \alpha_0.$$

21. L'équation aux différences du premier ordre de k_m se déduit immédiatement de cette dernière formule, ou encore, suivant la méthode générale indiquée précédemment, de l'élimination de α_m et α_{m+1} entre l'équation (15), celle qui s'en déduit par le changement de m en $m+1$ et l'équation (13) où l'on fait $n = m$. On trouve ainsi

$$[\alpha_0 + (m-\mu)\beta_0](m-\nu)k_m + (\alpha_1 + m\beta_1)(m-\nu-\mu)k_{m+1} = 0.$$

Les coefficients étant du second degré relativement à l'indice, il s'ensuit que la fonction génératrice de k_m satisfera à une équation différentielle linéaire du second ordre.

22. Supposons, par exemple, que l'équation aux différences initiale (13) soit

$$a_n - (n+1)a_{n+1} = 0,$$

qui correspond à la fonction exponentielle.

On a alors $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = -1$, et l'équation aux différences pour k_m est

$$(m-\nu)k_m - (m+1)(m-\nu-\mu)k_{m+1} = 0.$$

En l'écrivant

$$-(m+1)mk_{m+1} + mk_m + (\mu+\nu)(m+1)k_{m+1} - \nu k_m = 0,$$

et posant

$$\varphi(x) = k_{\mu+\nu+1} x^{\mu+\nu+1} + k_{\mu+\nu+2} x^{\mu+\nu+2} + \dots,$$

on en déduit immédiatement

$$x\varphi'' - (\mu+\nu+x)\varphi' + \nu\varphi = 0.$$

Remplaçons maintenant φ par $V_{\mu,\nu}f - U_{\mu,\nu}$, en tenant compte de ce que f' est ici égal à f ; il viendra, en supprimant les indices μ, ν ,

$$[xV'' - (\mu + \nu - x)V' - \mu V]f - [xU'' - (\mu + \nu + x)U' + \nu U] = 0,$$

équation qui se décompose en les deux suivantes :

$$(16) \quad \begin{aligned} xV'' - (\mu + \nu - x)V' - \mu V &= 0, \\ xU'' - (\mu + \nu + x)U' + \nu U &= 0, \end{aligned}$$

auxquelles satisfont ainsi les éléments $V_{\mu,\nu}, U_{\mu,\nu}$ de la réduite générale (μ, ν) de la fonction e^x .

23. Je vais faire voir comment l'application, à ces équations, de la méthode d'intégration par des intégrales définies de Laplace ⁽¹⁾ donne simplement tous les résultats obtenus jusqu'ici, par des méthodes toutes différentes, relativement au développement en fractions continues de e^x .

Considérons donc l'équation

$$xy'' - (\mu + \nu - x)y' - \mu y = 0$$

et cherchons à y satisfaire en posant

$$y = \int_L U e^{ux} du,$$

U étant une fonction de u et L un chemin d'intégration convenablement déterminés.

La substitution de y donne l'équation

$$\int_L \{ u(u+1)Ux e^{ux} - [(\mu + \nu)u + \mu]U e^{ux} \} du = 0.$$

En déterminant U par la condition

$$\frac{d}{du} u(u+1)U = - [(\mu + \nu)u + \mu]U,$$

⁽¹⁾ H. POINCARÉ, *American Journal of Mathematics*, t. VII, 1885. — C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III.

qui donne

$$U = \frac{1}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}},$$

cette équation devient

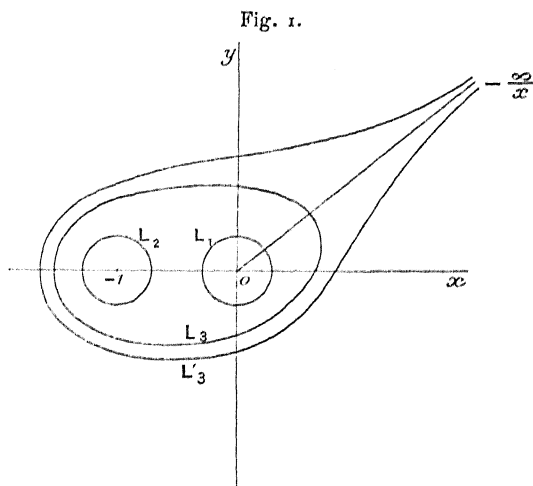
$$\left[\frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} \right]_L = 0,$$

et l'on voit que L peut être un contour fermé quelconque tel que l'intégrale

$$y = \int_L \frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} du$$

obtienne une valeur qui ne soit pas identiquement nulle.

L'intégration le long de contours L_1 , L_2 entourant respectivement



les pôles 0 et -1 (fig. 1) donne immédiatement les deux intégrales particulières suivantes :

$$(17) \quad \int_{L_1} \frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} du = (-1)^\mu \frac{2i\pi}{\mu! \nu!} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu! \nu!} V_{\mu\nu},$$

$$\int_{L_2} \frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} du = (-1)^{\mu+1} \frac{2i\pi}{\mu! \nu!} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu! \nu!} U_{\mu\nu} e^{-x},$$

où l'on a posé

$$V_{\mu\nu} = 1 - \frac{\mu}{\mu + \nu} \frac{x}{1} + \dots + (-1)^\mu \frac{\mu(\mu-1)\dots 1}{(\mu+\nu)\dots(\nu+1)} \frac{x^\mu}{\mu!},$$

$$U_{\mu\nu} = 1 + \frac{\nu}{\mu + \nu} \frac{x}{1} + \dots + \frac{\nu(\nu-1)\dots 1}{(\mu+\nu)\dots(\mu+1)} \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Considérons alors un contour L_3 entourant à la fois les deux pôles. Pour ce contour, on aura

$$(18) \quad \int_{L_3} \frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} du = (-1)^{\mu+2} i\pi \frac{(\mu+\nu)!}{\mu! \nu!} (V_{\mu\nu} - U_{\mu\nu} e^{-x}).$$

Mais on peut obtenir une autre expression du premier membre en déformant ce contour L_3 de façon qu'un de ses points s'éloigne indéfiniment dans la direction $\frac{-\infty}{x}$ de la droite qui joint l'origine au point $\frac{-1}{x}$. Soit L'_3 le chemin ainsi déformé.

Nous poserons

$$u = -\frac{t}{x}.$$

Quand u décrit, dans le sens direct, le chemin L'_3 , t décrit, dans le sens direct, un chemin de même nature Λ'_3 ayant son point à l'infini sur l'axe des abscisses positives. Nous supposons la valeur initiale de l'argument de t égale à 0 et ferons varier cet argument de 0 à 2π . On a ainsi

$$\int_{L'_3} \frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} du = \int_{\Lambda'_3} \frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} du$$

$$= (-1)^{\mu+\nu+1} x^{\mu+\nu+1} \int_{\Lambda'_3} e^{-t} t^{-\mu-\nu-2} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{-\nu-1} dt.$$

On peut toujours supposer le module de t supérieur à celui de x tout le long du chemin Λ'_3 ; on a alors

$$\left(1 - \frac{x}{t}\right)^{-\nu-1} = 1 + \frac{\nu+1}{1} \frac{x}{t} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{t^2} + \dots,$$

ce qui donne cette expression de notre intégrale :

$$\int_{\Lambda_3} \frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} du \\ = (-1)^{\mu+\nu+1} x^{\mu+\nu+1} \sum_0^{\infty} k \frac{(\nu+1)\dots(\nu+k)}{k!} x^k \int_{\Lambda_3'} e^{-t} t^{-\mu-\nu-2-k} dt.$$

Or on a, en général,

$$\int_{\Lambda_3'} e^{-t} t^{z-1} dt = (e^{2i\pi z} - 1) \Gamma(z).$$

Quand z a une valeur entière négative $-m$, le second membre se présente sous la forme $0 \times \infty$. Soit

$$z = -m + \varepsilon.$$

On a

$$\Gamma(z) = \Gamma(-m + \varepsilon) = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon(\varepsilon - 1)\dots(\varepsilon - m)}, \\ e^{2i\pi z} = e^{-2mi\pi} e^{2i\pi\varepsilon} = 1 + \frac{2i\pi}{1}\varepsilon + \dots, \\ (e^{2i\pi z} - 1) \Gamma(z) = \frac{2i\pi \Gamma(1 + \varepsilon)}{(\varepsilon - 1)\dots(\varepsilon - m)} + \dots,$$

d'où, en faisant tendre ε vers zéro :

$$\int_{\Lambda_3'} e^{-t} t^{-m-1} dt = \lim_{z \rightarrow -m} (e^{2i\pi z} - 1) \Gamma(z) = (-1)^m \frac{2i\pi}{m!}.$$

Au moyen de cette formule, on aura donc

$$\int_{\Lambda_3} \frac{e^{ux}}{u^{\mu+1}(u+1)^{\nu+1}} du \\ = 2i\pi \frac{x^{\mu+\nu+1}}{(\mu+\nu+1)!} \sum_0^{\infty} k (-1)^k \frac{(\nu+1)\dots(\nu+k)}{(\mu+\nu+2)\dots(\mu+\nu+k+1)} \frac{x^k}{k!},$$

et, substituant cette valeur dans (18), on obtient

$$V_{\mu\nu} - U_{\mu\nu} e^{-x} \\ = (-1)^\mu \frac{\mu! \nu!}{(\mu+\nu)! (\mu+\nu+1)!} x^{\mu+\nu+1} \sum_0^{\infty} k (-1)^k \frac{(\nu+1)\dots(\nu+k)}{(\mu+\nu+2)\dots(\mu+\nu+k+1)} \frac{x^k}{k!}.$$

Si l'on observe, enfin, que le second membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{(-1)^\mu}{(\mu + \nu)!} x^{\mu+\nu+1} \sum_0^\infty k (-1)^k \frac{\Gamma(\mu + 1) \Gamma(\nu + k + 1)}{\Gamma(\mu + \nu + k + 2)} \frac{x^k}{k!},$$

ou

$$\frac{(-1)^\mu}{(\mu + \nu)!} x^{\mu+\nu+1} \sum_0^\infty k (-1)^k \frac{x^k}{k!} \int_0^1 t^\mu (1-t)^{\nu+k} dt,$$

qui se transforme aisément en celle-ci :

$$\frac{(-1)^\mu}{(\mu + \nu)!} x^{\mu+\nu+1} e^{-x} \int_0^1 e^{tx} t^\mu (1-t)^\nu dt$$

on aura, finalement, la formule

$$V_{\mu\nu} e^x - U_{\mu\nu} = \frac{(-1)^\mu}{(\mu + \nu)!} x^{\mu+\nu+1} \int_0^1 e^{tx} t^\mu (1-t)^\nu dt,$$

identique à celle qui m'a servi de point de départ dans mon Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle (1).

24. La formule (17) conduit sans difficultés aux relations entre les polynômes $V_{\mu\nu}$ qui correspondent aux fractions continues holoïdes de e^x . Je n'indiquerai que le point de départ.

En dérivant cette formule, par rapport à x , sous sa forme primitive, et après l'avoir écrite

$$e^{-x} \int_{1,1}^x \frac{e^{(u+1)x}}{u^{\mu+1} (u+1)^{\nu+1}} du = (-1)^\mu 2i\pi \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} V_{\mu\nu},$$

on trouve

$$V_{\mu\nu}' = - \frac{\mu}{\mu + \nu} V_{\mu-1, \nu}$$

$$V_{\mu\nu}' = - V_{\mu\nu} + \frac{\nu}{\mu + \nu} V_{\mu, \nu-1}$$

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. XVI₃, 1899.
Ann. Éc. Norm., (3), XXIV. — Août 1907.

On voit alors, immédiatement, comment, en dérivant ces relations et faisant usage de l'équation (16), on obtiendra ces formules

$$\begin{aligned} & \frac{(\mu-1)x}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)} V_{\mu-2,\nu} + \left(1 - \frac{x}{\mu+\nu}\right) V_{\mu-1,\nu} = V_{\mu,\nu}, \\ & - \frac{(\nu-1)x}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)} V_{\mu,\nu-2} + \left(1 + \frac{x}{\mu+\nu}\right) V_{\mu,\nu-1} = V_{\mu,\nu}, \end{aligned}$$

qui sont deux des formules à obtenir. Les sept autres s'établiraient par la même méthode.

25. L'étude de la convergence des fractions continues holoïdes de e^x se fait, comme l'on sait, très aisément sur les expressions mêmes des polynômes $V_{\mu,\nu}$ et $U_{\mu,\nu}$, ces polynômes tendant, quand μ et ν croissent indéfiniment de telle sorte que leur rapport ait une limite $\frac{p}{q}$, vers des limites dont le quotient est toujours égal à e^x .

Nous noterons seulement comment les limites de $U_{\mu,\nu}$ et $V_{\mu,\nu}$ se déduisent immédiatement de l'équation (16). Si l'on pose

$$\mu = \mu_0 + pn, \quad \nu = \nu_0 + qn,$$

μ_0, ν_0, p et q étant des entiers positifs ou nuls, et n un entier positif qui grandit indéfiniment, et qu'après avoir substitué dans l'équation (16), on égale à zéro le coefficient de n , on obtient

$$-(p+q)y' - py = 0,$$

d'où, en supposant $y = 1$ pour $x = 0$:

$$y = e^{\frac{-px}{p+q}}.$$

Telle est la limite de $V_{\mu,\nu}$ et de $U_{\mu,\nu}e^{-x}$, en sorte que l'on a

$$\lim V_{\mu,\nu} = e^{\frac{-px}{p+q}}, \quad \lim U_{\mu,\nu} = e^{\frac{qx}{p+q}},$$

d'où, enfin,

$$\lim \frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}} = e^x.$$

2. — *Les fractions continues holoïdes de F(h, r, h', u).*

26. Revenons à la relation générale

$$[\alpha_0 + (m - \mu)\beta_0](m - \nu)k_m + (\alpha_1 + m\beta_1)(m - \mu - \nu)k_{m+1} = 0,$$

qui subsiste, lorsque α_1 et β_1 sont inégaux, sous les conditions

$$\mu \leq \nu + 1, \quad m \geq \mu,$$

et proposons-nous de former l'équation différentielle à laquelle satisfait le polynome $V_{\mu, \nu}$.

Nous devons d'abord, suivant la méthode générale, construire l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfait la fonction génératrice $\varphi(x)$ de k_m . Pour y arriver, nous écrirons l'équation aux différences précédente ainsi :

$$\begin{aligned} & \{ \beta_0 m(m-1) + [\alpha_0 - (\mu + \nu - 1)\beta_0] m - (\alpha_0 - \mu\beta_0)\nu \} k_m \\ & + \{ \beta_1(m+1)m + [\alpha_1 - (\mu + \nu + 1)\beta_1](m+1) + (\mu + \nu + 1)(\beta_1 - \alpha_1) \} k_{m+1} = 0. \end{aligned}$$

Elle exprime que, dans l'expression

$$\begin{aligned} & \beta_0 x^3 \varphi'' + [\alpha_0 - (\mu + \nu - 1)\beta_0] x^2 \varphi' - (\alpha_0 - \mu\beta_0)\nu x \varphi \\ & + \beta_1 x^2 \varphi'' + [\alpha_1 - (\mu + \nu + 1)\beta_1] x \varphi' + (\mu + \nu + 1)(\beta_1 - \alpha_1)\varphi, \end{aligned}$$

le coefficient de x^{m+1} est nul. On en conclut que, $\varphi(x)$ étant égal à $k_{\mu+\nu+1}x^{\mu+\nu+1} + k_{\mu+\nu+2}x^{\mu+\nu+2} + \dots$, on aura

$$A x^2 \varphi'' + B x \varphi' + C \varphi = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} A &= \beta_1 + \beta_0 x, \\ B &= \alpha_1 - (\mu + \nu + 1)\beta_1 + [\alpha_0 - (\mu + \nu - 1)\beta_0]x, \\ C &= (\mu + \nu + 1)(\beta_1 - \alpha_1) - (\alpha_0 - \mu\beta_0)\nu x. \end{aligned}$$

Nous devons, maintenant, remplacer φ par $V_{\mu, \nu} f - U_{\mu, \nu}$, ce qui donne, en supprimant les indices des lettres V et U :

$$\begin{aligned} (19) \quad & (A x^2 V'' + B x V' + C V) f \\ & + (2 A x^2 V' + B x V) f' + A x^2 V f'' - A x^2 U'' - B x U' - C U = 0. \end{aligned}$$

Or, on a (14)

$$Ax f' = (\beta_1 - \alpha_1 - \alpha_0 x) f - (\beta_1 - \alpha_1) \alpha_0,$$

et l'on en conclut aisément

$$\begin{aligned} A^2 x^2 f'' = & [\alpha_1(\alpha_1 - \beta_1) + 2(\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_1 - \beta_1)x + \alpha_0(\alpha_0 + \beta_0)x^2] f \\ & + (\beta_1 - \alpha_1) \alpha_0 [\alpha_1 + (2\beta_0 + \alpha_0)x]. \end{aligned}$$

En tenant compte de ces formules, l'équation (19) prend la forme

$$Pf + Q = 0,$$

et, en égalant à zéro P et Q, on aura deux équations différentielles linéaires auxquelles satisfont les polynômes $V_{\mu\nu}$ et $U_{\mu\nu}$. La première d'entre elles, qui ne contient pas $U_{\mu\nu}$, est, en représentant par y la fonction,

$$\begin{aligned} (20) \quad & (\beta_1 + \beta_0 x) x y'' \\ & - \{ \alpha_1 + (\mu + \nu - 1) \beta_1 + [\alpha_0 + (\mu + \nu - 1) \beta_0] x \} y' + \mu(\alpha_0 + \beta_0 \nu) y = 0. \end{aligned}$$

L'autre, dont nous ne ferons d'ailleurs pas usage, est

$$A x^2 U''_{\mu\nu} + B x U'_{\mu\nu} + C U_{\mu\nu} = (\beta_1 - \alpha_1) \alpha_0 [(\mu + \nu + 1) V_{\mu\nu} - 2x V'_{\mu\nu}].$$

27. Nous avons ainsi ce théorème :

Soit

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots$$

une suite de quantités satisfaisant à l'équation

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + \beta_0 n) a_n + (\alpha_1 + \beta_1 n) a_{n+1} &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 &\neq 0; \end{aligned}$$

$\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ non entiers négatifs.

Posons

$$k_m = l_0 a_m + l_1 a_{m-1} + \dots + l_\mu a_{m-\mu} \quad (m \geq \mu),$$

μ désignant un nombre entier positif ou nul, et les lettres l des quantités constantes.

Si l'on suppose ces constantes déterminées par les équations

$$k_{\nu+1} = 0, \quad k_{\nu+2} = 0, \quad \dots, \quad k_{\nu+\mu} = 0 \quad (\nu \geq \mu - 1),$$

on aura la relation

$$[\alpha_0 + (m - \mu)\beta_0](m - \nu)k_m + (\alpha_1 + m\beta_1)(m - \nu - \mu)k_{m+1} = 0.$$

Le polynome

$$V_{\mu,\nu} = l_0 + l_1x + \dots + l_\mu x^\mu$$

est, alors, le dénominateur de la réduite (μ, ν) de la série

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

et il est une solution de l'équation

$$(\beta_1 + \beta_0 x)xy'' - [\alpha_1 + (\mu + \nu - 1)\beta_1 + [\alpha_0 + (\mu + \nu - 1)\beta_0]x]y' + \mu(\alpha_0 + \beta_0\nu)y = 0.$$

La fonction $f(x)$ satisfait à l'équation

$$(\beta_1 + \beta_0 x)xf' - (\beta_1 - \alpha_1 - \alpha_0 x)f = (\alpha_1 - \beta_1)a_0$$

qui sert à la définir lorsque la série $a_0 + a_1x + \dots$ est divergente dans tout le plan, sauf l'origine.

28. Les solutions de l'équation (20) sont de nature différente suivant que les constantes β_0 et β_1 sont nulles ou non; nous excluons le cas où elles seraient toutes deux nulles.

Supposons-les d'abord toutes deux différentes de zéro.

Si l'on fait le changement de variable

$$(21) \quad x = -\frac{\beta_1}{\beta_0}u,$$

l'équation devient

$$u(1-u)\frac{d^2y}{du^2} + \left[-\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \mu - \nu + 1 - \left(-\frac{\alpha_0}{\beta_0} - \mu - \nu + 1 \right)u \right] \frac{dy}{du} - \mu \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} + \nu \right) y = 0.$$

Par la transformation (21), le plan (x) se déduit du plan (u) au moyen d'une rotation et d'une homothétie relatives à l'origine et définies par l'argument et le module de $-\frac{\beta_1}{\beta_0}$; les réduites de $f(x)$ deviennent les réduites de $f\left(-\frac{\beta_1}{\beta_0}u\right)$; toute fraction continue holoïde de $f(x)$ devient la fraction continue holoïde correspondante de $f\left(-\frac{\beta_1}{\beta_0}u\right)$; enfin, en supposant $\alpha_0 = 1$, on a

$$f\left(-\frac{\beta_1}{\beta_0}u\right) = F\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}, 1, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, u\right).$$

Nous poserons pour abrégier

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} = h, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = h';$$

nous avons donc affaire à la fonction $F(h, 1, h', u)$, et à l'équation

$$(22) \quad u(1-u) \frac{d^2y}{du^2} + [-h' - \mu - \nu + 1 - (-h - \mu - \nu + 1)u] \frac{dy}{du} - \mu(h + \nu)y = 0.$$

Cette équation est vérifiée par $F(\alpha, \beta, \gamma, u)$, où l'on ferait

$$\alpha = -\mu, \quad \beta = -h - \nu, \quad \gamma = -h' - \mu - \nu + 1.$$

Les racines de l'équation déterminante pour $u = 0$ sont 0 et $h' + \mu + \nu$, et, laissant actuellement de côté le cas où h' serait entier, il leur correspond les deux solutions particulières

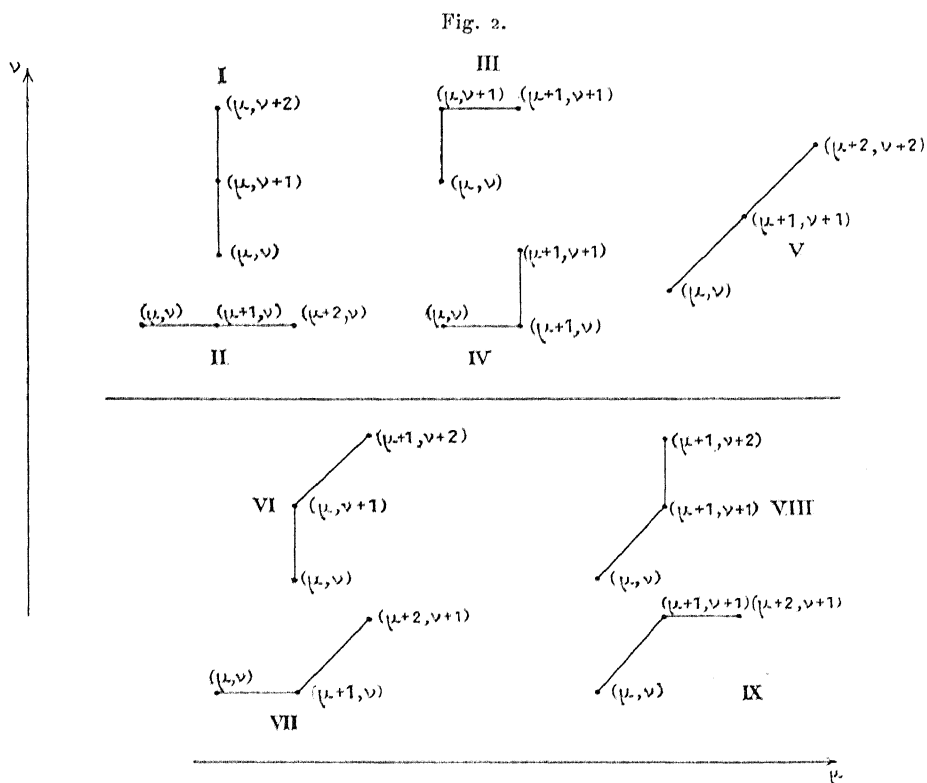
$$(23) \quad \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, u) &= F(-\mu, -h - \nu, -h' - \mu - \nu + 1, u), \\ &u^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, u) \\ &= u^{h'+\mu+\nu} F(h' + \nu, h' - h + \mu, h' + \mu + \nu + 1, u) \end{aligned}$$

dont nous allons faire maintenant l'étude.

29. La première de ces solutions, polynome de degré μ , est le dénominateur $V_{\mu\nu}(u)$ de la réduite (μ, ν) de $F(h, 1, h', u)$.

La manière dont y entrent μ et ν montre que la recherche des rela-

tions de récurrence qui existent entre les termes de trois réduites consécutives et progressantes revient au calcul de relations entre trois fonctions $F(\xi, \eta, \zeta, u)$, où les trois premiers éléments ne diffèrent que de nombres entiers. Ces relations sont au nombre de neuf, correspondant aux neuf dispositions des points représentatifs de trois réduites consécutives d'une fraction continue holoïde, données par la figure suivante; les cinq premières d'entre elles sont celles qui donnent naissance aux fractions continues régulières.



Par exemple, pour la première disposition, si l'on désigne par $F(\xi, \eta, \zeta, u)$ le dénominateur de la réduite finale $(\mu, \nu + 2)$, celui de la précédente $(\mu, \nu + 1)$ sera $F(\xi, \eta + 1, \zeta + 1, u)$, et celui de la première (μ, ν) sera $F(\xi, \eta + 2, \zeta + 2, u)$.

Or, on a, entre ces trois fonctions, la relation, où nous n'écrivons

pas le quatrième élément u des polynomes F :

$$\frac{(\xi - \zeta - 1)(\eta + 1)}{\zeta(\zeta + 1)} u F(\xi, \eta + 2, \zeta + 2) \\ + \left(1 + \frac{\eta - \zeta + 1}{\zeta} u \right) F(\xi, \eta + 1, \zeta + 1) = F(\xi, \eta, \zeta).$$

En procédant ainsi, on obtient les neuf relations suivantes, correspondant respectivement aux neuf dispositions de la figure :

- (I)
$$\frac{(\xi - \zeta - 1)(\eta + 1)}{\zeta(\zeta + 1)} u F(\xi, \eta + 2, \zeta + 2) \\ + \left(1 + \frac{\eta - \zeta + 1}{\zeta} u \right) F(\xi, \eta + 1, \zeta + 1) = F(\xi, \eta, \zeta),$$
- (II)
$$\frac{(\xi + 1)(\eta - \zeta - 1)}{\zeta(\zeta + 1)} u F(\xi + 2, \eta, \zeta + 2) \\ + \left(1 + \frac{\xi - \eta + 1}{\zeta} u \right) F(\xi + 1, \eta, \zeta + 1) = F(\xi, \eta, \zeta),$$
- (III)
$$\frac{(\xi - \zeta)\eta}{\zeta(\zeta + 1)} u F(\xi + 1, \eta + 1, \zeta + 2) \\ + F(\xi + 1, \eta, \zeta + 1) = F(\xi, \eta, \zeta),$$
- (IV)
$$\frac{\xi(\eta - \zeta)}{\zeta(\zeta + 1)} u F(\xi + 1, \eta + 1, \zeta + 2) \\ + F(\xi, \eta + 1, \zeta + 1) = F(\xi, \eta, \zeta),$$
- (V)
$$- \frac{(\xi + 1)(\xi - \zeta - 1)(\eta + 1)(\eta - \zeta - 1)}{(\zeta + 1)(\zeta + 2)^2(\zeta + 3)} u^2 F(\xi + 2, \eta + 2, \zeta + 4) \\ + \left[1 - \frac{(\xi + \eta + 1)\zeta - 2\xi\eta}{\zeta(\zeta + 2)} u \right] F(\xi + 1, \eta + 1, \zeta + 2) = F(\xi, \eta, \zeta),$$
- (VI)
$$\frac{(\xi - \zeta - 1)(\eta + 1)}{(\zeta + 1)(\zeta + 2)} u F(\xi + 1, \eta + 2, \zeta + 3) \\ + \left[1 + \frac{\xi(\eta - \zeta)}{\zeta(\zeta + 1)} u \right] F(\xi + 1, \eta + 1, \zeta + 2) = F(\xi, \eta, \zeta),$$
- (VII)
$$\frac{(\xi + 1)(\eta - \zeta - 1)}{(\zeta + 1)(\zeta + 2)} u F(\xi + 2, \eta + 1, \zeta + 3) \\ + \left[1 + \frac{(\xi - \zeta)\eta}{\zeta(\zeta + 1)} u \right] F(\xi + 1, \eta + 1, \zeta + 2) = F(\xi, \eta, \zeta),$$

$$(VIII) \quad - \frac{\xi(\xi - \zeta - 1)(\eta + 1)(\eta - \zeta)}{\zeta(\zeta + 1)^2(\zeta + 2)} u^2 F(\xi + 1, \eta + 2, \zeta + 3) \\ + \left[1 + \frac{\xi(\eta - \zeta)}{\zeta(\zeta + 1)} u \right] F(\xi, \eta + 1, \zeta + 1) = F(\xi, \eta, \zeta),$$

$$(IX) \quad - \frac{(\xi + 1)(\xi - \zeta)\eta(\eta - \zeta - 1)}{\zeta(\zeta + 1)^2(\zeta + 2)} u^2 F(\xi + 2, \eta + 1, \zeta + 3) \\ + \left[1 + \frac{(\xi - \zeta)\eta}{\zeta(\zeta + 1)} u \right] F(\xi + 1, \eta, \zeta + 1) = F(\xi, \eta, \zeta).$$

Les relations (III) et (IV) sont celles que Gauss a employées pour obtenir sa célèbre fraction continue; les quatre premières seulement sont parmi les trois cent vingt-cinq qu'il signale dans l'article 14 de ses *Disquisitiones*, mais il ne donne pas explicitement les deux premières et semble surtout s'être attaché à celles de ces relations où deux des fonctions F ont un coefficient égal à ± 1 .

30. Ces neuf relations donnent le moyen d'écrire immédiatement une fraction continue holoïde quelconque de la fonction $F(h, 1, h', u)$, connaissant la disposition de ses réduites et les deux premières d'entre elles, et ne sortant d'ailleurs pas de la région où μ est inférieur ou égal à $\nu + 1$.

Nous nous proposons d'écrire celles de ces fractions continues qui sont régulières et qui ont leur point de départ sur l'un des axes de coordonnées. On peut d'ailleurs, sauf pour une seule de ces fractions, *en utilisant les relations précédentes autrement que comme relations de récurrence entre les dénominateurs*, arriver à limiter ces fractions; et c'est ainsi que nous allons procéder.

La région du plan où nous nous trouvons enfermés par la condition $\mu \leq \nu + 1$, est celle (*fig. 3*) qui est limitée par Oy , la portion de l'axe des x qui va de o à 1 , et la partie de la droite $x = y + 1$ qui est au-dessus de l'axe des x .

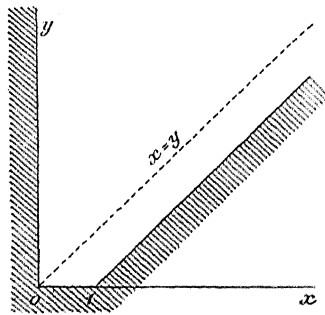
Si l'on désigne par p un nombre entier positif ou nul, on a

$$U_{0p} = 1 + \frac{h}{h'} u + \frac{h(h+1)}{h'(h'+1)} u^2 + \dots + \frac{h(h+1)\dots(h+p-1)}{h'(h'+1)\dots(h'+p-1)} u^p, \quad V_{0p} = 1,$$

$$(24) \quad F(h, 1, h', u) \\ = U_{0p} + \frac{h(h+1)\dots(h+p)}{h'(h'+1)\dots(h'+p)} u^{p+1} F(h+p+1, 1, h'+p+1, u);$$

et les fractions continues partant du point p de l'axe des y s'obtiendront en remplaçant, dans la dernière formule, la fonction $F(h + p + 1, 1, h' + p + 1, u)$ par des développements convenables.

Fig. 3.



Pour les points de l'axe des x , les réduites nous sont, au contraire, inconnues, ce qui tient à ce que l'on ne connaît pas le développement en série de Taylor de l'inverse de $F(h, 1, h', u)$, dont la loi semble très compliquée. Les premiers éléments des fractions que nous allons former demeureront donc inconnus pour celles de ces fractions qui partent d'un point de Ox .

L'expression générale de $V_{\mu\nu}$ s'applique toutefois pour le point $(1, 0)$ et l'on a, en ce point, comme on peut le vérifier directement :

$$\frac{U_{10}}{V_{10}} = \frac{1}{1 - \frac{h}{h'} u}.$$

31. Formons d'abord les fractions continues dont les réduites sont sur les parallèles aux axes. Les relations de récurrence entre les dénominateurs successifs sont données par les formules (I) et (II).

Si nous considérons les réduites dont les points représentatifs sont (fig. 4) sur la droite $x = q$, les termes des réduites

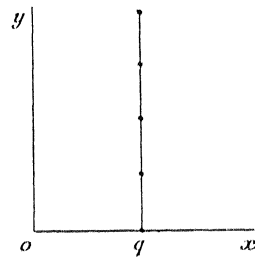
$$(q, 0), (q, 1), \dots, (q, q-2)$$

nous sont entièrement inconnus, et correspondront à une portion de

la fraction continue

$$\frac{1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \dots + \frac{\alpha_{q-1}}{a_{q-1}}$$

Fig. 4.



dont les éléments resteront inconnus. Les réduites suivantes

$$(q, q-1), (q, q), (q, q+1), \dots$$

ont des dénominateurs qui nous sont connus, en sorte que, par la formule (I), nous pourrons calculer les éléments de la fraction continue à partir de ceux qui concourent à la formation de la troisième de ces réduites. On obtient ainsi la fraction continue suivante :

$$(25) \quad \frac{1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \dots + \frac{\alpha_{q+1}}{a_{q+1}}$$

$$= \frac{(h+q)(h'+q-1)}{(h'+2q-1)(h'+2q)} u \cdot \frac{(h+q+1)(h'+q)}{(h'+2q)(h'+2q+1)} u$$

$$\cdot \frac{(h+q+2)(h'+q+1)}{(h'+2q+1)(h'+2q+2)} u \cdot \dots$$

Nous ne savons pas obtenir cette fraction sous forme limitée.

En y faisant $q = 0$ et $\alpha_i = a_i = 1$, elle donne la fraction continue d'Euler

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{\frac{h}{h'} u}{1 + \frac{h}{h'} u} \cdot \frac{\frac{h+1}{h'+1} u}{1 + \frac{h+1}{h'+1} u} \cdot \frac{\frac{h+2}{h'+2} u}{1 + \frac{h+2}{h'+2} u} \cdot \dots$$

qui a pour réduites successives les polynomes obtenus en limitant la série $F(h, \tau, h', u)$ à ses différents termes.

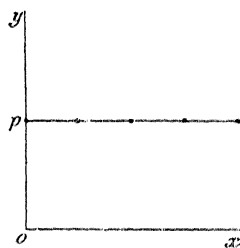
La fraction correspondant à l'hypothèse $q = 1$ est

$$\frac{1}{1 - \frac{h}{h'} u} + \frac{\frac{h(h-h')}{h'^2(h'+1)} u^2}{1 + \frac{h-h'}{h'(h'+1)} u} + \frac{\frac{(h+1)h'}{(h'+1)(h'+2)} u}{1 + \frac{h}{h'+2} u} + \dots,$$

et l'on peut déjà y observer la complication des premiers éléments.

Pour les réduites dont les points représentatifs sont (fig. 5) sur la droite $y = p$, nous recourons à la formule (24), et, en faisant un usage convenable de la formule (II), nous obtiendrons cette fraction sous forme limitée.

Fig. 5.



Changeons, dans cette formule (II), ξ et ζ en $\xi + n$ et $\zeta + n$, et posons

$$f_n = F(\xi + n, \eta, \zeta + n, u),$$

$$\sigma_n = \frac{\zeta - \eta + n + 1}{\zeta + n},$$

$$\rho_n = \frac{(\xi + n + 1)(\eta - \zeta - n - 1)}{(\zeta + n)(\zeta + n + 1)};$$

elle devient

$$f_n = (1 + \sigma_n u) f_{n+1} + \rho_n u f_{n+2}.$$

On déduit de là

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{1 + \sigma_0 u} + \frac{\rho_0 u}{1 + \sigma_1 u} + \frac{\rho_1 u}{1 + \sigma_2 u} + \dots + \rho_{n-1} u \frac{f_{n+1}}{f_n}.$$

Si l'on fait, dans cette formule,

$$\xi = 0, \quad \eta = h + p + 1, \quad \zeta = h' + p,$$

le premier membre se réduit à $F(h + p + 1, 1, h' + p + 1, u)$, et l'on obtient cette formule

$$\begin{aligned}
 & F(h + p + 1, 1, h' + p + 1, u) \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{h + p}{h' + p} u} + \frac{1(h - h')}{(h' + p)(h' + p + 1) u} + \frac{2(h - h' - 1)}{(h' + p + 1)(h' + p + 2) u} + \dots \\
 & \quad + \frac{n(h - h' - n + 1)}{(h' + p + n - 1)(h' + p + n) u} \frac{F(h + p + 1, n + 1, h' + p + n + 1)}{F(h + p + 1, n, h' + p + n)}.
 \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à introduire cette expression de

$$F(h + p + 1, 1, h' + p + 1, u)$$

dans la formule (24) pour avoir la fraction continue cherchée.

Les seules réduites dont le dénominateur nous soit connu, sur la droite $y = p$, sont les réduites

$$(0, p), (1, p), (2, p), \dots, (p + 1, p).$$

On peut s'assurer très aisément que les réduites de la fraction continue ne sont aussi celles de la fonction $F(h, 1, h', u)$ que jusqu'à la $(p + 2)^{\text{ième}}$ inclusivement; au delà, elles ne conviennent pas, en sorte que, tandis que la formule limitée donne toujours une expression de $F(h, 1, h', u)$, nous devons écrire la fraction continue illimitée sous cette forme

$$\begin{aligned}
 (26) \quad F(h, 1, h', u) &= U_{0,p} + \frac{h(h + 1) \dots (h + p)}{h'(h' + 1) \dots (h' + p)} u^{p+1} \\
 & \quad \frac{1}{1 - \frac{h + p}{h' + p} u} \\
 & \quad + \frac{1(h' - h)}{(h' + p)(h' + p + 1) u} + \frac{2(h' - h + 1)}{(h' + p + 1)(h' + p + 2) u} + \dots \\
 & \quad + \frac{p(h' - h + p - 1)}{(h' + 2p - 1)(h' + 2p) u} + \frac{\alpha_{p+3}}{\alpha_{p+3}} + \frac{\alpha_{p+4}}{\alpha_{p+4}} + \dots, \\
 & \quad \frac{1}{1 - \frac{h}{h' + 2p} u}
 \end{aligned}$$

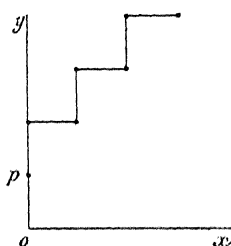
les éléments $\alpha_{p+3}, \alpha_{p+3}, \alpha_{p+4}, \dots$ demeurant inconnus.

32. Ces considérations montrent suffisamment comment s'obtiennent les autres fractions continues régulières. Nous nous contenterons de les transcrire.

La fraction continue dont les réduites sont (*fig. 6*)

$$(0, p), (0, p+1), (1, p+1), (1, p+2), (2, p+2), (2, p+3), \dots$$

Fig. 6.



est

$$(27) \quad U_{0,p} + \frac{h(h+1)\dots(h+p)}{h'(h'+1)\dots(h'+p)} u^{p+1} \div \frac{r_1 u}{1} \div \frac{r_2 u}{1} \div \dots \div \frac{r_{n-1} u}{1} \div r_n u \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

où

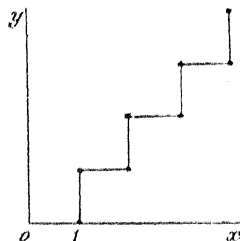
$$r_{2i} = -\frac{i(h'-h-1+i)}{(h'+p+2i-1)(h'+p+2i)}, \quad f_{2i} = F(h+p+i+1, i, h'+p+2i, u),$$

$$r_{2i+1} = -\frac{(h+p+i+1)(h'+p+i)}{(h'+p+2i)(h'+p+2i+1)}, \quad f_{2i+1} = F(h+p+i+1, i+1, h'+p+2i+1, u).$$

Celle dont les réduites sont (*fig. 7*)

$$(q, 0), (q+1, 0), (q+1, 1), (q+2, 1), (q+2, 2), \dots$$

Fig. 7.



nous est inconnue, sauf pour $q = 0$, et celle-ci est la fraction continue

de Gauss pour $F(h, 1, h', u)$, savoir

$$(28) \quad \frac{1}{1} \dot{+} \frac{r_1 u}{1} \dot{+} \frac{r_2 u}{1} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{r_{n-1} u}{1} \dot{+} r_n u \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

où

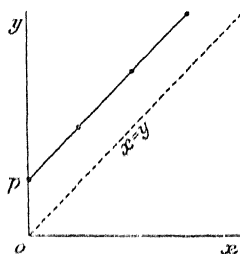
$$r_{2i} = -\frac{i(h' - h - 1 + i)}{(h' + 2i - 2)(h' + 2i - 1)}, \quad f_{2i} = F(h + i, i, h' + 2i - 1, u),$$

$$r_{2i+1} = -\frac{(h + i)(h' + i - 1)}{(h' + 2i - 1)(h' + 2i)}, \quad f_{2i+1} = F(h + i, i + 1, h' + 2i, u).$$

La fraction continue qui donne les réduites (*fig. 8*)

$$(0, p), (1, p + 1), (2, p + 2), \dots$$

Fig. 8.



est

$$(29) \quad U_{0p} + \frac{h(h+1)\dots(h+p)}{h'(h'+1)\dots(h'+p)} u^{p+1} \dot{+} \frac{r_1 u^2}{1+s_0 u} \dot{+} \frac{r_2 u^2}{1+s_1 u} \dot{+} \dots \dot{+} r_n u^2 \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

où

$$= -\frac{i(h+p+i)(h'-h+i-1)(h'+p+i-1)}{(h'+p+2i-2)(h'+p+2i-1)^2(h'+p+2i)} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} f_i = F(h+p+i, i, h'+p+2i-1, u),$$

$$= -\frac{(h+p+1)(h'+p-1) + 2i(h'+p+i)}{(h'+p+2i-1)(h'+p+2i+1)}$$

Celle enfin qui a pour réduites (*fig. 9*) les fractions

$$(1, 0), (2, 1), (3, 2), \dots$$

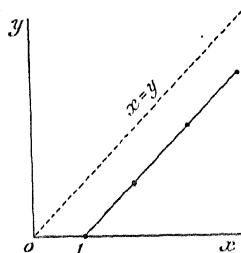
est

$$\frac{1}{1+s_0 u} \dot{+} \frac{r_1 u^2}{1+s_1 u} \dot{+} \frac{r_2 u^2}{1+s_2 u} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{r_{n-1} u^2}{1+s_{n-1} u} \dot{+} r_n u^2 \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

où

$$\left. \begin{aligned} r_i &= -\frac{i(h+i-1)(h'-h+i-1)(h'+i-2)}{(h'+2i-3)(h'+2i-2)^2(h'+2i-1)} \\ s_i &= -\frac{h(h'-2)+2i(h'+i-1)}{(h'+2i-2)(h'+2i)} \end{aligned} \right\} f_i = \mathbf{F}(h+i-1, i, h'+2i-2, u).$$

Fig. 9.



Remarquons que la condition $\mu \leq \nu + 1$ disparaîtrait si l'on avait, dans (13), la relation $\alpha_i = \beta_i$. Les formules précédentes donneraient alors, en particulier, toutes les fractions continues des deux fonctions e^x , $(1+x)^m$ déjà obtenues antérieurement et auxquelles se ramènent toutes les fonctions pour lesquelles cette condition $\alpha_i = \beta_i$ est remplie.

33. Revenons maintenant à la seconde des solutions de l'équation

$$u(1-u) \frac{d^2 y}{du^2} + [-h' - \mu - \nu + 1 - (-h - \mu - \nu + 1)u] \frac{dy}{du} - \mu(h+\nu)y = 0,$$

savoir

$$(30) \quad u^{h'+\mu+\nu} \mathbf{F}(h'+\nu, h'-h+\mu, h'+\mu+\nu+1, u);$$

elle est dans un rapport étroit avec les éléments de la réduite (μ, ν) .

Pour le montrer, nous établirons d'abord une relation qui lie ces éléments et qui est une conséquence immédiate de leur définition. On a, pour la réduite (μ, ν) ,

$$\mathbf{F}(h, 1, h', u) = \frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}} + P u^{\mu+\nu+1} + \dots \quad (P \neq 0),$$

d'où l'on tire

$$F'(h, 1, h', u) = \frac{U'_{\mu\nu} V_{\mu\nu} - U_{\mu\nu} V'_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}^2} + (\mu + \nu + 1) P u^{\mu+\nu} + \dots;$$

substituant dans l'équation

$$(31) \quad u(1-u)F' - (1-h'+hu)F + (1-h') = 0,$$

à laquelle se réduit, par le changement de variable (21), l'équation (14), on obtient

$$u(1-u)(U'_{\mu\nu} V_{\mu\nu} - U_{\mu\nu} V'_{\mu\nu}) - (1-h'+hu)U_{\mu\nu} V_{\mu\nu} + (1-h')V_{\mu\nu}^2 \\ = -(\mu + \nu + h') P u^{\mu+\nu+1} + \dots$$

Mais, puisque l'on a $\mu \leq \nu + 1$, le premier membre est un polynome de degré $\mu + \nu + 1$ au plus, et il s'ensuit que le second membre se réduit à son seul premier terme. On a ainsi cette relation

$$(32) \quad u(1-u)(U'_{\mu\nu} V_{\mu\nu} - U_{\mu\nu} V'_{\mu\nu}) - (1-h'+hu)U_{\mu\nu} V_{\mu\nu} + (1-h')V_{\mu\nu}^2 \\ = -(\mu + \nu + h') P u^{\mu+\nu+1}.$$

34. Formons l'équation linéaire du second ordre qui a pour solutions particulières

$$y_1 = V_{\mu\nu}, \\ y_2 = e^{-\int \frac{1-h'+hu}{u(1-u)} du} (U_{\mu\nu} - V_{\mu\nu} F) = u^{h'-1} (1-u)^{h-h'+1} (U_{\mu\nu} - V_{\mu\nu} F).$$

En la représentant par

$$u(1-u)y'' + Qy' + Ry = 0,$$

on a

$$-\frac{Q}{u(1-u)} = \frac{d}{dx} \ell(y'_1 y_2 - y'_2 y_1).$$

Or, on trouve aisément, en tenant compte de l'équation (31),

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = u^{h'-2} (1-u)^{h-h'} [u(1-u)(U'_{\mu\nu} V_{\mu\nu} - U_{\mu\nu} V'_{\mu\nu}) \\ - (1-h'+hu)U_{\mu\nu} V_{\mu\nu} + (1-h')V_{\mu\nu}^2],$$

qui se réduit, en vertu de la relation (32), à

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = -(h' + \mu + \nu) P u^{h'+\mu+\nu-1} (1-u)^{h-h'}.$$

Donc

$$-\frac{Q}{u(1-u)} = \frac{h' + \mu + \nu - 1}{u} - \frac{h - h'}{1-u},$$

et l'on en conclut

$$Q = -h' - \mu - \nu + 1 - (-h - \mu - \nu + 1)u.$$

L'équation cherchée est donc

$$u(1-u)y'' + [-h' - \mu - \nu + 1 - (-h - \mu - \nu + 1)u]y' + Ry = 0,$$

où R est encore à déterminer. Mais il suffit de comparer cette équation à l'équation (22) pour en conclure, puisque $V_{\mu\nu}$ satisfait à l'une et à l'autre,

$$R = -\mu(h + \nu).$$

35. L'équation (22) a donc pour solution la fonction

$$u^{h'-1}(1-u)^{h-h'+1}(U_{\mu\nu} - V_{\mu\nu}F).$$

Comme, dans le voisinage de l'origine, l'on a

$$U_{\mu\nu} - V_{\mu\nu}F = -Pu^{\mu+\nu+1} + \dots,$$

on voit que cette solution est le produit d'une fonction holomorphe par la fonction $u^{h'+\mu+\nu}$; elle ne diffère donc pas de la solution (30) que nous étudions, et l'on a ainsi

$$(33) \quad V_{\mu\nu}F - U_{\mu\nu} \\ = Pu^{\mu+\nu+1}(1-u)^{h'-h-1}F(h'+\nu, h'-h+\mu, h'+\mu+\nu+1, u).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient numérique P.

Pour y parvenir, nous observerons que $Pu^{\mu+\nu+1}$ est le premier terme du développement de $F - \frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$. D'un autre côté, la fraction $\frac{U_{\mu+1,\nu}}{V_{\mu+1,\nu}}$ coïncide avec F jusqu'au terme en $x^{\mu+\nu+1}$ inclusivement; $Pu^{\mu+\nu+1}$ est donc aussi le premier terme du développement de $\frac{U_{\mu+1,\nu}}{V_{\mu+1,\nu}} - \frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$. Or, si l'on considère la fraction continue dont les réduites sont

$$(0, \nu), \quad (1, \nu), \quad \dots, \quad (\mu, \nu), \quad (\mu + 1, \nu),$$

et qu'on la suppose écrite sous la forme

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_3} + \dots + \frac{\alpha_{\mu+2}}{\alpha_{\mu+2}},$$

on sait que l'on a

$$\frac{U_{\mu+1,\nu}}{V_{\mu+1,\nu}} - \frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}} = \frac{(-1)^{\mu+2} \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{\mu+2}}{V_{\mu\nu} V_{\mu+1,\nu}}.$$

Il suffit alors de recourir à la formule (26) où l'on fait $p = \nu$ pour obtenir la formule

$$P = \mu! \frac{\Gamma(h')}{\Gamma(h)\Gamma(h'-h)} \frac{\Gamma(h+\nu+1)\Gamma(h'+\nu)\Gamma(h'-h+\mu)}{\Gamma(h'+\mu+\nu)\Gamma(h'+\mu+\nu+1)}.$$

36. On peut encore obtenir la relation (33), en partant de l'une quelconque des fractions continues limitées précédemment obtenues et appliquant les formules élémentaires de la théorie des fractions continues. On sait que, si l'on a, généralement,

$$\sigma = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_3} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_n}{\Lambda_n},$$

on en conclut que

$$V_i \sigma - U_i = \frac{(-1)^{i+1} \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{i+1}}{\Lambda_2 \Lambda_3 \dots \Lambda_{i+1}}.$$

Reportons-nous à la fraction continue qui donne les réduites

$$(0, \nu - \mu), (1, \nu - \mu + 1), (2, \nu - \mu + 2), \dots, (\mu, \nu), (\mu + 1, \nu + 1), \dots;$$

on a alors (29), puisque $p = \nu - \mu$:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{h(h+1)\dots(h+\nu-\mu)}{h'(h'+1)\dots(h'+\nu-\mu)} u^{\nu-\mu+1}, \\ \alpha_k = r_{k-2} u^2 &= -\frac{(k-2)(h+\nu-\mu+k-2)(h'-h+k-3)(h'+\nu-\mu+k-3)}{(h'+\nu-\mu+2k-6)(h'+\nu-\mu+2k-5)^2(h'+\nu-\mu+2k-4)} u^2 \\ &\quad (k = 3, 4, \dots), \\ \Lambda_k &= \frac{f_{k-2}}{f_{k-1}}, \quad f_k = F(h+\nu-\mu+k, k, h'+\nu-\mu+2k-1, u). \end{aligned}$$

Faisant donc $i = \mu + 1$, et remplaçant σ , U_i et V_i par $F(h, 1, h', u)$,

$U_{\mu\nu}$ et $V_{\mu\nu}$, on obtient

$$V_{\mu\nu}F - U_{\mu\nu} = (-1)^{\mu+2} \frac{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{\mu+2}}{\frac{f_0}{f_1} \frac{f_1}{f_2} \dots \frac{f_{\mu}}{f_{\mu+1}}} = (-1)^{\mu+2} \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{\mu+2} f_{\mu+1},$$

ou, en remplaçant dans le second membre les lettres par leurs valeurs

$$(34) \quad V_{\mu\nu}F - U_{\mu\nu} = P u^{\mu+\nu+1} F(h+\nu+1, \mu+1, h'+\mu+\nu+1, u),$$

formule identique à celle déjà obtenue, si l'on tient compte de la relation connue

$$F(\alpha, \beta, \gamma, u) = (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, u).$$

37. La seconde solution (30) de l'équation (22) peut s'obtenir aisément sous forme d'intégrale hypergéométrique.

Si l'on dérive, en effet, μ fois cette équation, on obtient une relation linéaire homogène entre les dérivées d'ordres μ , $\mu+1$ et $\mu+2$ de y . Mais, cette relation étant vérifiée par le polynôme de degré μ , $V_{\mu\nu}$, le coefficient de $y^{(\mu)}$ doit être identiquement nul. On trouve ainsi la relation

$$u(1-u)y^{(\mu+2)} + [h' - \nu + 1 - (-h + \mu - \nu + 1)u]y^{(\mu+1)} = 0,$$

et l'on en déduit

$$y^{(\mu+1)} = C u^{h'+\nu-1} (1-u)^{h-h'-\mu},$$

qui est ainsi, pour une valeur convenable de C , une expression de la dérivée d'ordre $(\mu+1)$ de notre seconde solution. D'ailleurs, visiblement,

$$C = (h'+\mu+\nu)(h'+\mu+\nu-1)\dots(h'+\nu) = \frac{\Gamma(h'+\mu+\nu+1)}{\Gamma(h'+\nu)}.$$

En intégrant et supposant positive la partie réelle de $h'+\nu$, on a, pour cette seconde solution, l'expression

$$y = \frac{C}{\mu!} \int_0^u t^{h'+\nu-1} (1-t)^{h-h'-\mu} (u-t)^\mu dt,$$

ou encore, en faisant le changement de variable $t = uz$:

$$y = \frac{C}{\mu!} u^{h'+\mu+\nu} \int_0^1 z^{h'+\nu-1} (1-z)^\mu (1-uz)^{h-h'-\mu} dz.$$

On adoptera pour z l'argument 0, et, pour $(1-uz)^{h-h'-\mu}$, la détermination qui se réduit à 1 pour $z = 0$. Il est facile de voir que l'intégrale est alors égale à $\frac{\mu!}{C}$ pour $u = 0$, et que cette expression de y coïncide alors complètement avec notre seconde solution. On a donc la formule bien connue

$$F(h'+\nu, h'-h+\mu, h'+\mu+\nu+1, u) = \frac{C}{\mu!} \int_0^1 z^{h'+\nu-1} (1-z)^\mu (1-uz)^{h-h'-\mu} dz,$$

et, par suite, en se reportant à la formule (33),

$$(35) \quad V_{\mu\nu}F - U_{\mu\nu} = \frac{\Gamma(h')}{\Gamma(h)\Gamma(h'-h)} \frac{\Gamma(h+\nu+1)\Gamma(h'-h+\mu)}{\Gamma(h'+\mu+\nu)} \\ \times u^{\mu+\nu+1} (1-u)^{h'-h-1} \int_0^1 z^{h'+\nu-1} (1-z)^\mu (1-uz)^{h-h'-\mu} dz.$$

38. Ainsi donc, en résumé :

Le dénominateur de la réduite (μ, ν) de la fonction $F(h, 1, h', u)$ est donné, en supposant $\mu \leq \nu + 1$, par la formule

$$V_{\mu\nu} = F(-\mu, -h-\nu, -h'-\mu-\nu+1, u);$$

et la différence $V_{\mu\nu}F(h, 1, h', u) - U_{\mu\nu}$ peut être mise sous l'une quelconque des trois formes

$$P u^{\mu+\nu+1} (1-u)^{h'-h-1} F(h'+\nu, h'-h+\mu, h'+\mu+\nu+1, u), \\ P u^{\mu+\nu+1} F(h+\nu+1, \mu+1, h'+\mu+\nu+1, u), \\ \frac{\Gamma(h')}{\Gamma(h)\Gamma(h'-h)} \frac{\Gamma(h+\nu+1)\Gamma(h'-h+\mu)}{\Gamma(h'+\mu+\nu)} \\ \times u^{\mu+\nu+1} (1-u)^{h'-h-1} \int_0^1 z^{h'+\nu-1} (1-z)^\mu (1-uz)^{h-h'-\mu} dz,$$

où l'on a

$$P = \frac{\Gamma(h')}{\Gamma(h)\Gamma(h'-h)} \Gamma(\mu+1) \frac{\Gamma(h+\nu+1)\Gamma(h'+\nu)\Gamma(h'-h+\mu)}{\Gamma(h'+\mu+\nu)\Gamma(h'+\mu+\nu+1)},$$

et où, dans l'intégrale, on adopte pour z l'argument 0, et, pour $(1-uz)^{h-h'-\mu}$, la détermination qui se réduit à 1 pour $z=0$.

39. Les formules (35) et (33) ou (34) se prêtent également à l'étude de la convergence des fractions continues régulières de la fonction $F(h, 1, h', u)$.

Considérons d'abord la fraction (25) dont les réduites ont des dénominateurs de même degré q .

Si, dans le polynôme $F(-\mu, -h-\nu, -h'-\mu-\nu+1, u)$, on suppose μ constant et égal à q , et que l'on fasse croître ν indéfiniment, on obtient, à la limite, $(1-u)^q$.

Il suit de là ⁽¹⁾ que la fraction continue, dans toute région du plan à laquelle le point 1 est extérieur, sera convergente ou divergente en même temps que la série entière formée par les numérateurs de la *série équivalente*. Or, l'expression des numérateurs partiels de la fraction continue montre immédiatement que le rayon du cercle de convergence de cette série entière est l'unité. La fraction continue est donc convergente dans ce cercle, divergente en dehors.

Il reste à faire voir qu'à l'intérieur du cercle, la valeur de la fraction continue est bien égale à $F(h, 1, h', u)$.

Pour établir ce point, nous aurons recours à la formule (35) où μ doit être remplacé par q . Le point u étant supposé intérieur au cercle, la fonction à intégrer est continue quand z varie de 0 à 1, et son module, dès que ν a une valeur suffisamment grande, reste inférieur à un nombre fixe; l'intégrale est donc elle-même finie, pour ν infiniment grand.

Or, la partie du multiplicateur de cette intégrale qui varie avec ν , savoir :

$$\frac{\Gamma(h+\nu+1)}{\Gamma(h'+q+\nu)} u^\nu,$$

(1) Sur la représentation, etc. (*Annales de l'École Normale*, 1892, n^o 43 et suiv.).

est égale à

$$\frac{\Gamma(h)}{\Gamma(h'+q)} \frac{h(h+1)\dots(h+v)}{(h'+q)(h'+q+1)\dots(h'+q+v-1)} u^v,$$

et a manifestement zéro pour limite quand v grandit indéfiniment. Le second membre de la formule a donc zéro pour limite, et la valeur de la fraction continue est bien $F(h, 1, h', u)$. On a donc ce théorème :

Les fractions continues régulières de la fonction $F(h, 1, h', u)$ dont les réduites correspondent aux points des parallèles à l'axe des v sont convergentes dans le cercle qui a l'origine pour centre et l'unité pour rayon, et divergentes hors de ce cercle.

Dans le cercle elles convergent vers $F(h, 1, h', u)$.

40. Considérons maintenant la fraction (29) dont les réduites sont sur une même parallèle $y - x = p$ à la bissectrice de l'angle des axes. On aura $v = \mu + p$, et μ devra croître indéfiniment. Nous aurons recours à la formule (34) qui s'écrit alors

$$(36) \quad V_{\mu, \mu+p} F - U_{\mu, \mu+p} = P u^{2\mu+p+1} F(h+\mu+p+1, \mu+1, h'+2\mu+p+1, u),$$

où

$$P = \frac{\Gamma(h')}{\Gamma(h)\Gamma(h'-h)} \mu! \frac{\Gamma(h+\mu+p+1)\Gamma(h'+\mu+p)\Gamma(h'-h+\mu)}{\Gamma(h'+2\mu+p)\Gamma(h'+2\mu+p+1)}.$$

Les fonctions F qui figurent dans cette formule sont uniformes dans le plan coupé suivant $+1 \dots +\infty$. Dans ce plan coupé, la fraction continue est convergente et a pour valeur la fonction $F(h, 1, h', u)$. Pour l'établir, il nous suffira de recourir au beau résultat dont Thomé⁽¹⁾ a fait la base de sa démonstration de la convergence de la fraction continue de Gauss.

Ce résultat consiste en ce que, quand m grandit indéfiniment par des valeurs réelles positives ou négatives, la fonction de z

$$(1+z)^{-2m} F\left[\xi+m, \eta+m, \zeta+2m, \frac{4z}{(1+z)^2}\right],$$

(1) *Journal de Crelle*, t. 66 et 67.

où z est l'affixe d'un point du cercle décrit de l'origine pour centre avec l'unité pour rayon, a une limite égale à

$$(1-z)^{\frac{2\xi-2\eta-1}{2}}(1+z)^{\frac{2\xi+2\eta-1}{2}}.$$

A l'intérieur de ce cercle, correspondra, d'ailleurs, si l'on pose

$$(37) \quad u = \frac{4z}{(1+z)^2},$$

le plan (u) coupé suivant $+1 \dots +\infty$.

Dans sa démonstration, Thomé suppose que m ne prenne que des valeurs entières; mais elle s'applique, sans y rien changer, en laissant m prendre des valeurs quelconques.

Faisant, alors, le changement de variable (37) dans le polynome $V_{\mu, \mu+p}$, savoir

$$F(-\mu, -h-p-\mu, -h'-p+1-2\mu, u),$$

on voit immédiatement que le produit de la fonction de z obtenue, par $(1+z)^{2\mu}$, tendra, pour $\mu = \infty$, vers la limite

$$(1-z)^{\frac{2h-2h'+1}{2}}(1+z)^{\frac{-2h-2p-1}{2}}.$$

Le même changement de variable effectué dans le second membre de la formule (36) conduira à un produit de trois facteurs, savoir : 1° le produit

$$P(4z)^{2\mu+p+1},$$

terme général d'une série convergente pour $|z| < 1$, et qui tend par suite vers zéro, quand μ grandit indéfiniment; 2° le produit

$$(1+z)^{-2\mu} F \left[h+p+1+\mu, 1+\mu, h'+p+1+2\mu, \frac{4z}{(1+z)^2} \right],$$

qui, en vertu du théorème de Thomé, tend vers une limite finie; 3° le facteur

$$\frac{1}{(1+z)^{2\mu}(1+z)^{2p+2}}.$$

Si l'on divise les deux membres de la formule (36) par $V_{\mu, \mu+p}$, et que l'on fasse figurer ce diviseur au dénominateur du dernier facteur, on voit, en faisant croître μ indéfiniment, le second membre tendre vers zéro, d'où il résulte que la réduite $(\mu, \mu + p)$ a pour limite $F(h, 1, h', u)$. Ainsi :

Les fractions continues régulières de la fonction $F(h, 1, h', u)$ dont les réduites correspondent aux points des droites $y - x = p$, $p = -1, 0, 1, 2, \dots$ sont convergentes dans le plan coupé suivant $+1 \dots +\infty$, et ont pour valeur la fonction $F(h, 1, h', u)$.

41. Le même théorème s'applique aux fractions continues (27) et (28); cette dernière n'est autre que la fraction continue de Gauss étudiée par Thomé et sa méthode s'applique immédiatement aux autres. Ces fractions ne sont d'ailleurs que la superposition, pour ainsi dire, de deux fractions du type précédent et, *par contraction*, elles se résolvent immédiatement en deux telles fractions, l'une donnant les réduites de rang pair; l'autre les réduites de rang impair.

42. Pour ce qui est des fractions régulières (26) dont les réduites sont sur les parallèles à l'axe des μ , elles ne nous sont connues que pour un nombre limité de leurs éléments, et les formules obtenues ne nous donnent pas le moyen d'étudier directement leur convergence. Il y aurait exception pour $h' = 1$, qui correspond au cas du binôme $(1 + x)^m$ et, comme cas limite, à l'exponentielle e^x . Dans ce cas, en effet, nos formules s'étendent sans restriction à toutes les valeurs de μ et ν . Nous n'avons rien à ajouter à ce qui a déjà été dit relativement à la convergence des fractions de e^x . Pour ce qui concerne $(1 + x)^m$, on voit aisément que le domaine de convergence des fractions dont les réduites sont sur les parallèles à l'axe des μ est, de nouveau, le cercle $|u| < 1$, comme pour les fractions dont les réduites étaient sur les parallèles à l'axe des ν .

Des considérations d'une autre nature nous feront voir que le domaine de convergence des fractions continues dont il est ici question, pour le cas général de la fonction $F(h, 1, h', u)$, est le cercle

ayant l'origine pour centre et passant par le point singulier, le plus rapproché de l'origine, de la fonction $\frac{1}{F(h, \tau, h', u)}$.

43. Le fait que le domaine de convergence des fractions continues régulières à réduites placées sur une parallèle à l'axe des v est le cercle de convergence de la série $F(h, \tau, h', u)$, tandis que celui des fractions continues régulières à réduites placées sur une parallèle à la bissectrice de l'angle des axes est le plan (u) entier, sauf la coupure $+\tau \dots +\infty$, la valeur de la fraction étant le prolongement, dans le même domaine, de la série $F(h, \tau, h', u)$, montre l'intérêt qu'il y aurait à étudier la convergence des fractions continues, non plus régulières, mais simplement holoïdes, dont les réduites progressent, dans le plan, μ, ν , dans une direction quelconque intermédiaire entre celles de l'axe des v et de la bissectrice. La question semble, malheureusement, des plus ardues.

Si l'on approfondit la méthode de Thomé, on reconnaît qu'elle repose uniquement sur cette circonstance que, tandis que, dans les coefficients de l'équation linéaire du second ordre à laquelle satisfait la fonction $F(\xi + m, \eta + m, \zeta + 2m, u)$, le paramètre m entre au second degré, il n'entre plus qu'au premier degré dans celle à laquelle satisfait la fonction de z , $(1+z)^{-2m} F\left[\xi + m, \eta + m, \zeta + 2m, \frac{4z}{(1+z)^2}\right]$; en égalant à zéro le coefficient de m , on obtient, alors, comme nous l'avons fait pour l'exponentielle, l'équation qui détermine la limite de la fonction pour m infini. Pour généraliser, on est ainsi conduit à considérer la fonction

$$(38) \quad (1+z)^{-\mu-\nu} F(\xi + \mu, \eta + \nu, \zeta + \mu + \nu, u),$$

où u est une fonction d'une nouvelle variable z , et à chercher à déterminer cette fonction de telle manière que, si l'on pose

$$\mu = \mu_0 + pn, \quad \nu = \nu_0 + qn,$$

μ_0, ν_0, p, q et n étant des entiers positifs ou nuls, l'équation du second ordre à laquelle satisfait la fonction de z (38) ait ses coefficients du premier degré seulement par rapport à n . On trouve que la relation

entre z et u est la suivante

$$\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} (1+z)^{p+q} (1+t)^{p+q} = (t+\omega)^q (t-\omega)^p,$$

où l'on a posé

$$t^2 = \frac{1-\omega^2 u}{1-u}, \quad \omega = \frac{q-p}{q+p}.$$

Lorsque $p = q$, cette relation se simplifie considérablement et devient simplement la relation (37) dont s'est servi Thomé. Mais, dans le cas général, où p et q sont inégaux, il semble très difficile de l'interpréter et d'arriver à reconnaître quelle représentation conforme elle réalise du plan (u) sur le plan (z), et quelle est la limite de la fonction (38).

3. Étude des dégénérescences de $F(h, 1, h', u)$.

44. Les résultats obtenus pour la convergence des fractions continues de $F(h, 1, h', u)$ se transportent immédiatement aux fractions continues de la fonction $f(x)$ par le changement de variable (21). Les domaines de convergence sont alors : le cercle ayant l'origine pour centre et passant par le point $-\frac{\beta_1}{\beta_0}$, pour les fractions continues dont les réduites sont sur les parallèles à l'axe des v ; le plan (x), coupé suivant le prolongement de la droite qui va de l'origine au point $-\frac{\beta_1}{\beta_0}$, pour celles dont les réduites sont sur les parallèles à la bissectrice de l'angle $\mu O v$.

Il nous reste à examiner les deux cas où l'une des constantes β_0, β_1 serait nulle.

45. Si l'on suppose d'abord β_0 différent de zéro et tendant vers zéro, on voit les deux domaines de convergence s'étendre à tout le plan, et l'on en peut conclure que, dans ce cas, les fractions continues régulières à réduites sur les parallèles à l'axe des v ou à la bissectrice de l'angle $\mu O v$ sont convergentes dans tout le plan. Il est alors naturel de penser que tel est aussi le domaine de convergence des fractions

holoïdes dont les réduites progressent dans une direction intermédiaire entre ces deux directions particulières. C'est ce que l'on peut établir comme il suit, ce cas, où $\beta_0 = 0$, n'étant qu'une sorte de généralisation du cas de la fonction exponentielle e^x , et $f(x)$ étant alors égale à

$$1 + \frac{ax}{m+1} + \frac{a^2 x^2}{(m+1)(m+2)} + \dots,$$

où l'on a posé

$$a = -\frac{\alpha_0}{\beta_1}, \quad m = \frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1.$$

La relation (21) entre x et u peut s'écrire

$$u = \frac{ax}{h}.$$

On passera alors du cas général, où β_0 est différent de zéro, à celui où il est nul, en faisant ce changement de variable, puis faisant croître h indéfiniment. D'ailleurs, comme on peut toujours supposer l'argument de β_0 égal à celui de α_0 , on sera en droit de supposer h réel.

On trouve, d'abord, en se reportant à l'expression (23) de $V_{\mu\nu}$,

$$V_{\mu\nu} = 1 - \frac{\mu}{h' + \mu + \nu - 1} \frac{ax}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{(h' + \mu + \nu - 1)(h' + \mu + \nu - 2)} \frac{a^2 x^2}{1 \cdot 2} - \dots \\ + (-1)^\mu \frac{\mu(\mu-1)\dots 1}{(h' + \mu + \nu - 1)\dots(h' + \nu)} \frac{a^\mu x^\mu}{\mu!},$$

et il est facile d'en conclure que, pour $\mu = \mu_0 + pn$, $\nu = \nu_0 + qn$, et n infini, la limite de $V_{\mu\nu}$ est

$$e^{-\frac{\mu a x}{\rho + q}},$$

ce que l'on aurait pu conclure aussi de l'équation linéaire à laquelle satisfait $V_{\mu\nu}$, les coefficients de cette équation devenant linéaires en μ et ν lorsque $\beta_0 = 0$.

En remplaçant u par $\frac{ax}{h}$ dans (35), puis faisant croître h indéfiniment, on trouve la formule

$$V_{\mu\nu} f(x) - U_{\mu\nu} = \frac{\Gamma(h')}{\Gamma(h' + \mu + \nu)} (ax)^{\mu+\nu+1} e^{ax} \int_0^1 z^{h'+\nu-1} (1-z)^\mu e^{-axz} dz.$$

Elle met immédiatement en évidence que, quand μ et ν grandissent indéfiniment, la différence $V_{\mu\nu}f(x) - U_{\mu\nu}$ tend vers zéro. Il s'ensuit bien que, quel que soit x , la réduite (μ, ν) a pour limite la fonction $f(x)$.

46. Passons à l'examen du cas où $\beta_1 = 0$.

Si l'on suppose encore cette quantité d'abord différente de zéro et tendant vers zéro, on voit le cercle de rayon $\left| \frac{\beta_1}{\beta_0} \right|$ se réduire au point situé à l'origine et l'on en doit conclure que toutes les fractions continues à réduites placées sur les parallèles à l'axe des ν sont divergentes dans tout le plan, sauf à l'origine.

Pour ce qui est de la coupure formée par le prolongement de la droite qui va de l'origine au point $-\frac{\beta_1}{\beta_0}$, elle devient une droite partant de l'origine et s'étendant à l'infini, mais sans que l'on puisse apercevoir immédiatement dans quelle direction.

Pour $\beta_1 = 0$, on a, pour $f(x)$, la série divergente dans tout le plan, sauf à l'origine,

$$f(x) = 1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1}x + \frac{\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0)}{\alpha_1^2}x^2 - \frac{\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_0 + 2\beta_0)}{\alpha_1^3}x^3 + \dots,$$

ou, en posant

$$(39) \quad \begin{aligned} a &= -\frac{\alpha_1}{\beta_0}, & m &= \frac{\alpha_0}{\beta_0} - 1, \\ f(x) &= 1 + \frac{m+1}{a}x + \frac{(m+1)(m+2)}{a^2}x^2 + \dots \end{aligned}$$

L'équation (14) est, dans le cas actuel,

$$x^2 f' - [a - (m+1)x]f + a = 0;$$

elle a pour intégrale générale

$$-ae^{-\frac{a}{x}}x^{-m-1} \int_0^x e^{\frac{a}{z}} z^{m-1} dz + Ce^{-\frac{a}{x}}x^{-m-1},$$

où l'intégration est effectuée le long d'un chemin qui part de l'origine avec l'argument de $-a$, et où C est la constante arbitraire.

Si l'on suppose $C = 0$, et que l'on fasse le changement de variable

$$\frac{a}{z} = \frac{a}{x} - t,$$

on obtient l'intégrale particulière

$$f = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{\left(1 - \frac{x}{a} t\right)^{m+1}},$$

où l'on peut supposer l'intégration faite le long de l'axe réel, et dont le développement par la formule de Taylor donne la série divergente (39).

Cette expression de f met en évidence la coupure dont est affectée la fonction, à savoir, la droite partant de l'origine et passant par le point a . C'est dans le plan ainsi coupé que sont convergentes, vers la fonction f , les fractions continues régulières à réduites placées sur les parallèles à la bissectrice de l'angle $\mu O\nu$.

Pour obtenir les formules qui se rapportent à ce cas limite, il suffit de faire, dans celles du cas général,

$$a = \frac{h'x}{a},$$

puis de supposer que h' grandit indéfiniment par des valeurs réelles et positives. Si, en effet, h' grandit indéfiniment par de telles valeurs, c'est que β_1 est de la forme $\lambda\alpha_1$, λ étant un nombre réel et positif infiniment petit; on voit alors l'origine de la coupure,

$$-\frac{\beta_1}{\beta_0} = -\frac{\alpha_1}{\beta_0}\lambda = a\lambda,$$

venir se confondre avec l'origine des coordonnées sans quitter la droite qui joint l'origine au point a .

On trouve ainsi, d'abord, au moyen de (23), et en remarquant que $h = m + 1$,

$$V_{\mu\nu} = 1 - \frac{\mu(m+\nu+1)}{1} \frac{x}{a} + \frac{\mu(\mu-1)(m+\nu+1)(m+\nu)}{1.2} \frac{x^2}{a^2} - \dots \\ + (-1)^\mu \frac{\mu(\mu-1)\dots 2.1(m+\nu+1)\dots(m+\nu-\mu+2)}{1.2\dots\mu} \frac{x^\mu}{a^\mu}.$$

Les formules (27), (29) donneraient ensuite, immédiatement, les fractions continues régulières dont il vient d'être question. Enfin, la formule (35) donne, après quelques modifications et l'emploi du changement de variable

$$\frac{a}{x^2} = \frac{a}{x} - t,$$

cette relation

$$V_{p,\nu} \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{\left(1 - \frac{x}{a} t\right)^{m+1}} - U_{p,\nu} = \frac{\Gamma(m + \nu + 2)}{\Gamma(m + 1)} \left(\frac{x}{a}\right)^{\nu+1} \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^\nu dt}{\left(1 - \frac{x}{a} t\right)^{m+\nu+2}},$$

où les intégrations sont faites le long de l'axe réel, et où l'on prend pour argument initial de $1 - \frac{x}{a} t$ l'argument zéro. Cette dernière relation peut, d'ailleurs, être établie directement en partant de l'intégrale qui figure au second membre, au moyen d'intégrations par parties convenablement dirigées.

47. Laguerre (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1879) a étudié le développement en fraction continue canonique de la fonction $e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$, et mis, à cette occasion, le premier en évidence la convergence de ce développement, tandis que la série entière en $\frac{1}{x}$ correspondante est toujours divergente.

Sa démonstration était bornée aux valeurs réelles et positives de x . Les recherches de Stieltjes ont étendu ce résultat à toutes les valeurs réelles et imaginaires de x , et établi l'existence de la coupure formée par la partie négative de l'axe des x (*Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1894).

Plus tard, Laguerre (*Journal de Jordan*, 1885) a étendu son résultat à l'intégrale plus générale

$$e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx,$$

en s'en tenant toujours au seul développement canonique et aux valeurs réelles et positives de x .

Ces résultats sont des cas particuliers du cas limite dont nous venons de faire l'étude, le développement canonique de Laguerre devenant, par le changement de la variable indépendante en son inverse, l'une des fractions continues holoïdes régulières à réduites placées sur une parallèle à la bissectrice de l'angle $\mu O\nu$.

