Annales scientifiques de l'É.N.S.

A. Korn

Sur les équations de l'élasticité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 24 (1907), p. 9-75
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1907_3_24__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LES

ÉQUATIONS DE L'ÉLASTICITÉ,

PAR M. A. KORN.

Pour résoudre d'une manière générale le problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les déplacements $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ des points de la surface sont donnés, il faut trouver un système de solutions u, v, w des équations différentielles

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} &= -X,\\ \Delta v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} &= -Y,\\ \Delta w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} &= -Z,\end{aligned}\right. \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

continues avec leurs dérivées premières dans le domaine τ du corps élastique et satisfaisant aux conditions-limite

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \overline{u},\\ v &= \overline{v},\\ w &= \overline{w},\end{aligned}\right.$$

à la surface σ de τ. X, Y, Z sont des fonctions de (x, y, z) données dans le domaine τ, et k est une constante inhérente du milieu élastique. En imposant certaines conditions de continuité aux fonctions X, Y, Z; $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ et à leurs dérivées on peut facilement démontrer que le problème énoncé a un système unique de solutions, si

$$(3) \qquad -1 < k < +\infty,$$

mais les démonstrations générales pour l'existence des solutions n'ont pas encore été données avec une rigueur parfaite. M. Lauricella [1] et MM. E. et F. Cosserat [2] ont bien reconnu que la méthode des approximations successives est la voie indiquée pour trouver ces solutions, mais la convergence des séries par lesquelles les solutions sont représentées n'a pas encore été démontrée avec une rigueur suffisante.

Je me propose de combler cette lacune et, après avoir démontré (Chap. I et II) un certain nombre de théorèmes nouveaux qui permettront du reste des applications assez intéressantes dans d'autres branches de la Mathématique, je donnerai (Chap. III) la solution complète du problème proposé.

Dans ce Mémoire je ne traiterai pas explicitement les équations *dynamiques* de l'élasticité, je me bornerai ici à énoncer le résultat que l'on peut déduire de ma solution du problème d'équilibre sur les vibrations d'un corps élastique dont la surface reste en repos [3].

D'une manière analogue à celle imaginée par M. Poincaré [4] dans son Mémoire célèbre : *Sur les équations de la Physique mathématique* on peut démontrer l'existence d'une infinité de constantes λ_j et de triplets $U_j V_j W_j$ continus avec leurs dérivées premières dans τ, satis-

---

(1) LAURICELLA, *Ann. della R. Scuola Norm. di Pisa*, 1894; *N. C.*, 4e série, t. IX et X, 1899; *Ann. di Math.*, 1905.

(2) E. et F. COSSERAT, *Comptes rendus*, t. CXXVI, 1898, p. 1098; t. CXXXIII, 1901, p. 145.

(3) *Cp.* mon Mémoire dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie de Bavière*, 1906.

(4) H. POINCARÉ, *Rendiconti del Circ. Math. di Palermo*, 1894.

faisant aux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta U_j + k\dfrac{\partial\Theta_j}{\partial x} + \lambda_j^2 U_j = 0, \\ \Delta V_j + k\dfrac{\partial\Theta_j}{\partial y} + \lambda_j^2 V_j = 0, \\ \Delta W_j + k\dfrac{\partial\Theta_j}{\partial z} + \lambda_j^2 W_j = 0, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} + \frac{\partial W_j}{\partial z},$$

$$(6)\qquad \int_\tau (U_j^2 + V_j^2 + W_j^2)\, d\tau = 1$$

et s'annulant à la surface, si k est un nombre fixe satisfaisant à l'inégalité

$$-1 < k < +\infty.$$

Chaque triplet de fonctions u, v, w s'annulant à la surface et continues avec leurs dérivées premières et secondes peut être développé en séries de la manière suivante

$$(7)\qquad \begin{cases} u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots, \\ v = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \ldots, \\ w = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \ldots, \end{cases} \qquad \begin{aligned} & C_j = \int_\tau (u U_j + v V_j + w W_j)\, d\tau, \\ & 0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots, \end{aligned}$$

et ces développements pourront servir à l'intégration des équations dynamiques de l'élasticité

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = \sigma^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z, \end{cases} \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

dans les cas où l'on suppose à la surface σ

$$(9)\qquad u = v = w = 0,$$

en désignant par k et σ^2 des constantes du milieu élastique, par X, Y, Z des fonctions données dans τ satisfaisant à de certaines conditions de continuité; je ne m'occuperai pas d'une manière détaillée de ces conséquences des développements (7), je me suis borné à démontrer l'existence des triplets élastiques U_j, V_j, W_j et la possibilité des développements (7).

Dans les Chapitres I et II je donnerai plusieurs théorèmes appartenant à la théorie générale des potentiels qui seront d'une grande utilité pour la solution du problème d'équilibre élastique.

CHAPITRE I.

QUELQUES THÉOREMES SUR LES POTENTIELS DES SURFACES.

§ 1.

Nous désignerons toujours par σ une surface fermée possédant en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés.

[Ajoutons la supposition que les cosinus directeurs de la normale intérieure

$$\cos(\nu x), \quad \cos(\nu y), \quad \cos(\nu z)$$

possèdent des dérivées *premières* continues de la manière

$$\text{abs.}\,|\,\mathrm{D}\cos(\nu x)|_1^2 \leqq \text{const. fin.}\, r_{12}^{\Lambda}, \qquad \ldots,$$

pour deux points 1 et 2 quelconques de la surface σ dont nous désignons la distance par r_{12}, où Λ peut être un nombre positif quelconque. Cette supposition ne sera du reste pas nécessaire pour la plupart de nos déductions. Les déductions où nous ferons cette supposition seront mises entre crochets.]

I (¹). *Le potentiel de simple couche*

$$V = \int_\sigma H \frac{d\sigma}{r}, \tag{10}$$

dont la densité H *est supposée finie et intégrable, est continu à la surface* σ *de manière que pour deux points* 1 *et* 2 *de la surface dont nous désignons la distance par* r_{12}

$$|V_2 - V_1| \overline{\gtrless} A \text{ max. abs. } H r_{12}^\Lambda, \tag{11}$$

où Λ *est un nombre réel quelconque satisfaisant à l'inégalité*

$$0 < \Lambda < 1, \tag{12}$$

A *une constante finie ne dépendant que de la surface* σ *et de* Λ.

En effet, construisons une sphère autour du point 0, milieu de la droite 1, 2, avec le rayon r_{12}; la ligne ρ commune à cette sphère et à la surface σ divise σ en une partie σ_0 contenant les points 1 et 2 et en une partie $\sigma - \sigma_0$ (²). On trouvera pour la partie de la différence $|V_2 - V_1|$ provenant de σ_0

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{abs.}\,|V_{\sigma_0}|_1^2 &\overline{\gtrless} 2 \int_{\sigma_0} |H| \frac{d\sigma}{r}, \\ &\overline{\gtrless} 2 \text{ max. abs. } H \int_{\sigma_0} \frac{d\sigma}{r}, \\ &\overline{\gtrless} \text{ const. fin. max. abs. } H r_{12} \;(^3); \end{aligned} \right.$$

pour la partie de la différence $|V_2 - V_1|$ provenant de $\sigma - \sigma_0$

$$\text{abs.}\,|V_{\sigma - \sigma_0}|_1^2 \overline{\gtrless} \left| \int_1^2 \int_{\sigma - \sigma_0} H \frac{\partial}{\partial S} \frac{1}{r} \, d\sigma \, dS \right|,$$

(¹) *Cp.* A. KORN, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, I (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin, 1899, p. 388).

(²) On supposera r_{12} tout de suite plus petite qu'une certaine longueur finie pour ne pas avoir besoin de traiter à part des cas spéciaux. (*Cp.* la remarque à la fin du Chap. I.)

(³) *Cp.* l'Ouvrage cité, formules (46) ou (47), p. 38 et 39.

en désignant par dS un élément de la droite 1, 2, donc

$$\text{abs.}\,|V_{\sigma-\sigma_0}|_1^2 \leqq \text{max. abs. H}\, r_{12}\, \text{max.} \int_{\sigma-\sigma_0} \frac{d\sigma}{r^2} \text{ sur la droite } 1, 2,$$

et comme

$$\text{max.} \int_{\sigma-\sigma_0} \frac{d\sigma}{r^2} \text{ sur la droite } 1, 2 \leqq a \frac{1}{r_{12}^{1-\Lambda}} \quad (^1),$$

en désignant par Λ un nombre réel quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$0 < \Lambda < 1$$

et par a une constante finie ne dépendant que de la surface et de Λ, on a

$$(14) \qquad \text{abs.}\,|V_{\sigma-\sigma_{10}}|_1^2 \leqq \text{const. fin. max. abs. H}\, r_{12}^{\Lambda},$$

et l'on n'a qu'à additionner (13) et (14) pour compléter la démonstration du théorème I.

I[a] (¹). *Le potentiel de double couche*

$$(15) \qquad W = \int_\sigma k \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\sigma$$

dont la densité k est supposée continue (par intervalles) a sur σ des valeurs

$$(16) \qquad W_\sigma = \tfrac{1}{2}(W_a + W_i),$$

dont la continuité satisfait à la condition

$$(17) \qquad \text{abs.}\,|W_\sigma|_1^2 \leqq \text{B max. abs. } k\, r_{12}^{\Lambda}$$

pour deux points quelconques 1 *et* 2 *de la surface dont nous désignons la distance par* r_{12}, *où* Λ *est un nombre réel quelconque satisfaisant à l'inégalité*

$$(18) \qquad 0 < \Lambda < 1,$$

B *une constante finie ne dépendant que de la surface* σ *et de* Λ.

(¹) *Cp.* l'Ouvrage cité p. 13, dernière formule p. 392.

Comme ce théorème est déjà connu [1], je n'ai plus besoin de le démontrer ici.

§ 2.

II. *Le potentiel de simple couche*

$$V = \int_\sigma H \frac{d\sigma}{r}, \tag{19}$$

dont la densité H *est supposée continue de la manière*

$$\text{abs.}\,|H|_1^2 \leqq A\, r_{12}^\lambda \qquad (A \text{ constante finie, } 0 < \lambda < 1), \tag{20}$$

pour deux points quelconques de la surface 1 *et* 2 *dont nous désignons la distance par* r_{12}, *a des dérivées premières dont la continuité à la surface* σ (*sur le côté intérieur ou extérieur de la surface ou sur la surface même*) *satisfait à la condition*

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|_1^2 \leqq (c_1 A + c_2 \max.\,\text{abs.}\,H)\, r_{12}^\lambda, \tag{21}$$

où s *représente une direction quelconque,* c_1, c_2 *des constantes finies ne dépendant que de la surface* σ *et du nombre* λ.

Nous divisons de la même manière, comme dans la démonstration du théorème I, la surface σ en deux parties σ_0 et $\sigma - \sigma_0$, et nous posons

$$\left\{\begin{aligned} V &= V' + \int_\sigma H_1 \frac{d\sigma}{r}, \\ V' &= \int_\sigma (H - H_1) \frac{d\sigma}{r}; \end{aligned}\right. \tag{22}$$

---

[1] J'avais déjà énoncé et démontré ce théorème il y a quelque temps pour $\lambda = \frac{1}{2}$ (*Comptes rendus*, t. CXXX, 1900, p. 1230; *Abhandlungen zur Potentialtheorie*, I; Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin, 1901). M. Liapounoff (*Comm. de la Soc. math. de Kharkow*, 1902) a généralisé ce théorème pour un λ réel quelconque satisfaisant à la condition $0 < \lambda < 1$.

on trouvera pour la partie de la différence abs. $\left|\frac{\partial V'}{\partial s}\right|_1^2$ provenant de σ_0

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \text{abs.}\left|\frac{\partial V'_{\sigma_0}}{\partial s}\right|_1^2 &\overline{\overline{<}} \left|\frac{\partial}{\partial s}\int_{\sigma_0}(\mathrm{H}-\mathrm{H}_1)\frac{d\sigma}{r}\right|_1 + \left|\frac{\partial}{\partial s}\int_{\sigma_0}(\mathrm{H}-\mathrm{H}_2)\frac{d\sigma}{r}\right|_2 \\ &\quad + |\mathrm{H}_2-\mathrm{H}_1|\left|\frac{\partial}{\partial s}\int_{\sigma_0}\frac{d\sigma}{r}\right|_2, \\ &\overline{\overline{<}}\, 2\mathrm{A}\int_{\sigma_0}\frac{d\sigma}{r^{2-\lambda}} + \text{const. fin. } \mathrm{A}r_{12}^{\lambda} \quad (^1), \\ &\overline{\overline{<}}\, \text{const. fin. } \mathrm{A}r_{12}^{\lambda} \quad (^2); \end{aligned}\right.$$

pour la partie de la différence abs. $\left|\frac{\partial V'}{\partial s}\right|_1^2$ provenant de $\sigma - \sigma_0$

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial V'_{\sigma-\sigma_0}}{\partial s}\right|_1^2 \overline{\overline{<}} \left|\int_1^2\int_{\sigma-\sigma_0}[|\mathrm{H}(\xi\eta\zeta)-\mathrm{H}(xyz)| + \mathrm{A}r_{12}^{\lambda}]\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial \mathrm{S}}\,d\sigma\,d\mathrm{S}\right|,$$

en désignant par dS un élément d'une ligne 1,2 sur la surface σ. En supposant r_{12} plus petite qu'une certaine longueur finie nous pouvons toujours choisir ([3]) cette ligne 1,2 de manière que sa distance de $\sigma - \sigma_0$ reste supérieure à αr_{12}, où α est un nombre fini, alors on aura

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial V'_{\sigma-\sigma_0}}{\partial s}\right|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{const. fin. A}\int_1^2\left(\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{d\sigma}{r^{3-\lambda}} + r_{12}^{\lambda}\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{d\sigma}{r^3}\right)d\mathrm{S},$$

et comme

$$\left.\begin{aligned} \int_{\sigma-\sigma_0}\frac{d\sigma}{r^{3-\lambda}} &\overline{\overline{<}} \text{const. fin. }\frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} \quad (^4), \\ \int_{\sigma-\sigma_0}\frac{d\sigma}{r^3} &\overline{\overline{<}} \text{const. fin. }\frac{1}{r_{12}} \quad (^4), \end{aligned}\right\} \quad \text{sur la ligne } 1,2,$$

([1]) Puisque $\frac{\partial}{\partial s}\int_{\sigma_0}\frac{d\sigma}{r}$ est toujours un nombre fini.

([2]) *Cp.* la note ([3]), p. 13.

([3]) Par exemple la ligne située dans le plan déterminé par la droite 1,2 et la normale de σ en 1.

([4]) *Cp.* la note ([3]) p. 13.

on trouve

$$\text{(24)} \qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial V'_{\sigma-\sigma_0}}{\partial s}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin. } A r_{12}^{\lambda}.$$

Enfin on sait que

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial}{\partial s}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin. } r_{12}^{\Lambda},$$

où Λ est un nombre positif quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < \Lambda < 1,$$

et que pour cette raison

$$\text{(25)} \qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial(V-V')}{\partial s}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin. max. abs. } H r_{12}^{\Lambda};$$

on n'a qu'à additionner (23), (24), (25) pour arriver à l'inégalité (21).

II^a. *Le potentiel de double couche*

$$\text{(26)} \qquad W = \int_\sigma k \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma,$$

dont la densité k est continue avec ses premières dérivées de manière que

$$\text{(27)} \qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial k}{\partial h}\right|_1^2 \overline{\gtrless} A r_{12}^{\lambda} \qquad (A \text{ constante finie, } 0 < \lambda < 1) \quad [1],$$

pour deux points quelconques de la surface 1 et 2 dont nous désignons la distance par r_{12}, a des dérivées premières dont la continuité à la suface σ (sur le côté intérieur ou extérieur de la surface même) satisfait à la con-

---

[1] Nous écrivons

$$\left|\frac{\partial k}{\partial h}\right|_1^2 \quad \text{pour} \quad \left|\frac{\partial k}{\partial h_2}\right|_2 - \left|\frac{\partial k}{\partial h_1}\right|_1,$$

où h_1 est une direction tangentielle de σ en 1, h_2 une direction tangentielle de σ en 2 et

$$\cos(h_2 x) = \cos(h_1 x) + \varepsilon_1, \qquad \ldots,$$
$$|\varepsilon_1| \overline{\gtrless} \text{const. fin. } r_{12}, \qquad \ldots.$$

dition

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial W}{\partial s}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \left(c_1 A + c_2 \max.\text{abs.}\frac{\partial k}{\partial h}\right) r_{12}^{\lambda}, \tag{28}$$

où s représente une direction quelconque, c_1, c_2 *des constantes finies ne dépendant que de la surface* σ *et du nombre* λ.

En partant de l'identité [1]

$$\frac{\partial W}{\partial s} \equiv \int_\sigma \frac{\partial k}{\partial \bar{s}} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma - \int_\sigma \cos(\nu s)\left[\frac{\partial k}{\partial \bar{x}} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial k}{\partial \bar{y}} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial k}{\partial \bar{z}} \frac{\cos(rz)}{r^2}\right] d\sigma, \tag{29}$$

où je désigne par $\bar{s}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ les directions tangentielles ayant les cosinus directeurs

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\bar{s}x) = \cos(sx) - \cos(\nu x)\cos(\nu s), \quad \dots, \\ \cos(\bar{x}x) = 1 - \cos^2(\nu x), \qquad \cos(\bar{x}y) = -\cos(\nu x)\cos(\nu y), \\ \cos(\bar{x}z) = -\cos(\nu x)\cos(\nu z), \quad \dots, \end{array}\right. \tag{30}$$

on voit que le théorème II^a n'est qu'une simple conséquence du théorème II.

[Il est facile d'ajouter des corollaires aux théorèmes II et II^a, sur les dérivées secondes de V et W, en faisant des suppositions analogues à (20) et (27) sur les dérivées premières de H, respectivement sur les dérivées secondes de k.]

§ 3.

III. *Le potentiel de double couche*

$$W = \int_\sigma k \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma, \tag{31}$$

dont la densité k est supposée continue de la manière

$$\text{abs.}\,|k|_1^2 \overline{\gtrless} A r_{12}^{\lambda} \qquad (\text{A constante finie, } 0 < \lambda < 1), \tag{32}$$

[1] *Cp.* l'Ouvrage cité p. 13, formule (59), p. 46.

pour deux points quelconques de la surface 1 *et* 2 *dont nous désignons la distance par* r_{12}, *a* sur σ *des valeurs*

$$W_\sigma = \frac{1}{2}(W_a + W_i) \tag{33}$$

possédant des dérivées premières dont la continuité satisfait à la condition

$$\text{abs.}\left(\left|\frac{\partial W_\sigma}{\partial h}\right|_2 - \left|\frac{\partial W_\sigma}{\partial h}\right|_1\right) \leqq a \mathrm{A}\, r_{12}^\lambda \,(^1), \tag{34}$$

pour deux points quelconques de la surface 1 *et* 2 *dont nous désignons la distance par* r_{12}, *où* a *représente une constante finie ne dépendant que de la surface* σ *et du nombre* λ.

On a [2]

$$\left\{\begin{aligned} \left|\frac{\partial W_\sigma}{\partial h}\right|_2 &= \left|\int_\sigma (k - k_2)\frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(r h_2)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\sigma\right|_2, \\ \left|\frac{\partial W_\sigma}{\partial h}\right|_1 &= \left|\int_\sigma (k - k_1)\frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(r h_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\sigma\right|_1. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Nous divisons de la même manière, comme dans la démonstration du théorème I, la surface σ en deux parties σ_0 et $\sigma - \sigma_0$, et l'on trouvera pour les parties des intégrales (35) provenant de σ_0

$$\left\{\begin{aligned} &\text{abs.}\left|\int_{\sigma_0} (k - k_{1(2)})\frac{\cos(\nu h_{1(2)}) - 3\cos(r h_{1(2)})\cos(r\nu)}{r^3}\,d\sigma\right|_{1(2)}, \\ &\qquad \leqq \text{const. fin. A} \int_{\sigma_0} \frac{d\sigma}{r^{2-\lambda}} \quad (^3), \\ &\qquad \leqq \text{const. fin. A}\, r_{12}^\lambda \ (^4). \end{aligned}\right. \tag{36}$$

---

(1) *Cp.* la note (1), p. 17.

(2) *Cp. Comptes rendus des séances de l'Académie de Bavière*, t. XXXIII, p. 13-18.

(3) Puisque

$$|k - k_{1(2)}| \leqq \mathrm{A}\, r^\lambda,$$
$$|\cos(\nu h_{1(2)})| \leqq r f,$$
$$|\cos(r\nu)| \leqq r \mathrm{F},$$

f et F représentant des valeurs restant au-dessous d'une constante finie ne dépendant que de la surface σ.

(4) *Cp.* la note (3), p. 13.

Pour calculer les parties provenant de $\sigma - \sigma_0$, nous remarquerons l'identité

$$(37)\quad \begin{aligned} &\left|\int_{\sigma-\sigma_0}(k-k_2)\frac{\cos(\nu h_2)-3\cos(rh_2)\cos(r\nu)}{r^3}d\sigma\right|_2 \\ &-\left|\int_{\sigma-\sigma_0}(k-k_1)\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}d\sigma\right|_1 \\ \equiv &\left|\int_{\sigma-\sigma_0}(k-k_1)\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}d\sigma\right|_1^2 \\ &-(k_2-k_1)\left|\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}d\sigma\right|_2 \\ &+\left|\int_{\sigma-\sigma_0}(k-k_2)\left[\frac{\cos(\nu h_2)-3\cos(rh_2)\cos(r\nu)}{r^3}\right.\right. \\ &\qquad\left.\left.-\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}\right]d\sigma\right|_2; \end{aligned}$$

nous examinerons maintenant les trois parties du second membre de cette identité. On trouvera d'abord

$$\begin{aligned} &\text{abs.}\left|\int_{\sigma-\sigma_0}(k-k_1)\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}d\sigma\right|_2^1 \\ &\overline{\overline{<}}\int_1^2\int_{\sigma-\sigma_0}\left\{|k(\xi\eta\zeta)-k(xyz)|+\mathrm{A}r_{12}^\lambda\right\}\left|\frac{\partial}{\partial \mathrm{S}}\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}\right|d\sigma\,d\mathrm{S}, \end{aligned}$$

en désignant par $d\mathrm{S}$ un élément d'une ligne 1, 2 sur la surface σ choisie de manière que sa distance de $\sigma - \sigma_0$ reste supérieure à αr_{12}, où α est un nombre fini (¹); donc

$$(38^a)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{abs.}\left|\int_{\sigma-\sigma_0}(k-k_1)\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}d\sigma\right|_1^2 \\ &\overline{\overline{<}}\,\text{const. fin.}\,\mathrm{A}\int_1^2\left(\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{d\sigma}{r^{3-\lambda}}+r_{12}^\lambda\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{d\sigma}{r^3}\right)d\mathrm{S}, \\ &\overline{\overline{<}}\,\text{const. fin.}\,\mathrm{A}\left(\frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}}+\frac{r_{12}^\lambda}{r_{12}}\right)\int_1^2 d\mathrm{S}\quad (^2), \\ &\overline{\overline{<}}\,\text{const. fin.}\,\mathrm{A}r_{12}^\lambda. \end{aligned}\right.$$

(¹) *Cp.* p. 16.
(²) *Cp.* la note (³), p. 13.

D'autre part, on a, si l'on fait pour le moment l'axe des x parallèle à h_1 :

$$\begin{aligned}&\text{abs.}(k_2-k_1)\left|\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\sigma\right|_2\\&\quad=|k_2-k_1|\,\text{abs.}\left|\int_\rho\frac{\cos(ry)\cos(\rho z)-\cos(rz)\cos(\rho y)}{r^3}\,d\rho\right|_2,\end{aligned}$$

et, si l'on fait pour le moment coïncider l'axe des y avec la normale intérieure ν_1 :

$$|\cos(ry)|\overline{\overline{<}}\text{const. fin.}\,r,$$
$$|\cos(\rho y)|\overline{\overline{<}}\text{const. fin.}\,r,$$

donc

$$(38^b)\quad\left\{\begin{aligned}&\text{abs.}(k_2-k_1)\left|\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}\,d\sigma\right|_2\\&\overline{\overline{<}}\,|k_2-k_1|\,\text{const. fin.}\left|\int_\rho\frac{d\rho}{r}\right|_2,\\&\overline{\overline{<}}\,\text{const. fin.}\,\mathrm{A}\,r_{12}^\lambda\ (^1).\end{aligned}\right.$$

Enfin, on trouvera

$$(38^c)\quad\left\{\begin{aligned}&\text{abs.}\left|\int_{\sigma-\sigma_0}(k-k_2)\left[\frac{\cos(\nu h_2)-3\cos(rh_2)\cos(r\nu)}{r^3}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\frac{\cos(\nu h_1)-3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3}\right]d\sigma\right|_2\\&\overline{\overline{<}}\,\text{const. fin.}\,\mathrm{A}\,r_{12}\left|\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{d\sigma}{r^{3-\lambda}}\right|_2,\\&\overline{\overline{<}}\,\text{const. fin.}\,\mathrm{A}\,r_{12}\frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}}\quad(^2),\\&\overline{\overline{<}}\,\text{const. fin.}\,\mathrm{A}\,r_{12}^\lambda.\end{aligned}\right.$$

En vertu de (38^a), (38^b), (38^c), l'inégalité (37) nous don-

---

(1) $\left|\int_\rho\frac{d\rho}{r}\right|_2$ est plus petit qu'un nombre fini, ne dépendant que de la surface σ.

(2) *Cp.* la note (3), p. 13.

nera

$$(39)\quad \begin{cases} \text{abs.}\Big[\Big| \displaystyle\int_{\sigma-\sigma_0} (k - k_2) \frac{\cos(\nu h_2) - 3\cos(rh_2)\cos(r\nu)}{r^3} d\sigma \Big|_2 \\ \qquad - \Big| \displaystyle\int_{\sigma-\sigma_0} (k - k_1) \frac{\cos(\nu h_1) - 3\cos(rh_1)\cos(r\nu)}{r^3} d\sigma \Big|_1 \Big] \\ \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin.} \, A r_{12}^{\lambda} \ (^1), \end{cases}$$

et les inégalités (36) et (39) démontrent [en ayant égard à (35)] complètement notre théorème III, c'est-à-dire l'inégalité (34).

III[a]. *Faisons les mêmes suppositions que pour le théorème III et posons*

$$(40)\qquad W_1 = \int_\sigma W_\sigma \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma,$$

alors cette fonction aura des dérivées premières dont la continuité à la surface σ (sur le côté intérieur ou extérieur de la surface ou sur la surface même) satisfera à la condition

$$(41)\qquad \text{abs.} \Big| \frac{\partial W_1}{\partial s} \Big|_1^2 \,\overline{\overline{<}}\, \text{const. fin.} \, A r_{12}^{\lambda},$$

où s représente une direction quelconque *et la constante finie ne dépend que de la surface et du nombre λ.*

Le théorème III[a] est une simple conséquence des théorèmes III et II[a], si l'on remarque encore que pour un point $(x_0 y_0 z_0)$ quelconque de la surface chaque

$$(42)\quad \begin{cases} \Big| \dfrac{\partial W_\sigma}{\partial h} \Big| = \Big| \displaystyle\int_\sigma (k - k_0) \frac{\cos(\nu h) - 3\cos(rh)\cos(r\nu)}{r^3} d\sigma \Big|, \\ \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin.} \, A \displaystyle\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^{3-\lambda}}, \\ \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin.} \, A. \end{cases}$$

[Il sera facile d'ajouter des corollaires aux théorèmes III et III[a] sur

---

(1) On n'a qu'à additionner les trois inégalités (38[a]), (38[b]), (38[c]).

les dérivées secondes de W_σ, si les dérivées premières de k satisfont à des inégalités analogues à (32)].

§ 4.

IV. *Si les valeurs limites $\bar{\theta}$ d'une fonction θ harmonique à l'intérieur de la surface σ satisfont à la condition*

$$\text{abs.}\,|\bar{\theta}|_1^2 \overline{\overline{<}}\, A\, r_{12}^\lambda \qquad (\text{A constante finie, } 0 < \lambda < 1), \tag{43}$$

pour deux points quelconques de la surface 1 et 2 dont nous désignons la distance par r_{12}, on aura pour deux points quelconques 1 et 2 de l'intérieur de σ [1] :

$$\text{abs.}\,|\theta|_1^2 \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin.}\, A\, r_{12}^\lambda, \tag{44}$$

où la constante finie ne dépend que de la surface σ et du nombre λ.

Construisons une sphère autour du point 0, milieu de la droite 1, 2 avec le rayon r_{12} et désignons le point de la surface dont la distance du segment 1, 2 est un minimum par 3; désignons enfin par σ_0 la partie de σ située à l'intérieur de la sphère tout en remarquant que σ_0 peut se réduire à zéro.

Posons

$$\left\{\begin{aligned} W &= \int_\sigma \bar{\theta}\, \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\sigma, \\ W_3 &= \theta_3 \int_\sigma \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\sigma \;(= 4\pi\theta_3), \end{aligned}\right. \tag{45}$$

on aura alors pour la partie de la différence

$$\text{abs.}\,|W - W_3|_1^2 = \left| \int_\sigma (\theta - \theta_3)\, \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\sigma \right|_1^2 \tag{46}$$

[1] Les points 1 et 2 peuvent aussi s'approcher indéfiniment de la surface σ.

provenant de σ_0

(47) $$\text{abs.}\,|\,W - W_3\,|_{\sigma_0}{}_1^2 \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\, A\, r_{12}^{\lambda} \quad (^1);$$

d'autre part, on trouvera pour la partie de la différence (46) provenant de $\sigma - \sigma_0$:

$$\text{abs.}\,|\,W - W_3\,|_{\sigma-\sigma_0}{}_1^2 \overline{\overline{<}} \left| \int_1^2 \int_{\sigma-\sigma_0} \text{abs.}\,(\theta - \theta'_3)\frac{2}{r^3}\,d\sigma\,dS \right|,$$

en désignant par dS un élément de la droite 1, 2; comme la distance

$$d\sigma \to 3 \overline{\overline{<}} r + \text{distance}\,[(xyz) \to 3],$$
$$\text{distance}\,[(xyz) \to 3] \overline{\overline{<}} r + 2\,r_{12},$$
$$r_{12} \overline{\overline{<}} 2\,r,$$

on aura toujours

$$\text{distance}\,(d\sigma \to 3) \overline{\overline{<}} 6\,r,$$

donc

$$\theta - \theta_3 \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\, A\, r^{\lambda},$$
$$[d\sigma \text{ sur } \sigma - \sigma_0, \quad (xyz) \text{ sur le segment } (1, 2)].$$

(48) $$\begin{cases} \text{abs.}\,|\,W - W_3\,|_{\sigma-\sigma_0}{}_1^2 \overline{\overline{<}} \text{const. fin.} \displaystyle\int_1^2 \int_{\sigma-\sigma_0} \frac{d\sigma}{r^{3-\lambda}}\,d\sigma, \\ \qquad \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\, r_{12}\dfrac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} \quad (^2), \\ \qquad \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\, r_{12}^{\lambda}. \end{cases}$$

On déduit de (47) et (48) :

(49) $$\begin{aligned} &\text{abs.}\,|\,W - W_3\,|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\, A\, r_{12}^{\lambda}, \\ &\text{abs.}\,|\,W\,|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\, A\, r_{12}^{\lambda}, \end{aligned}$$

pour deux points quelconques 1 et 2 de l'intérieur qui peuvent aussi s'approcher indéfiniment de la surface σ.

Comme la méthode de la moyenne arithmétique (³) donne

(50) $$\theta = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \bar{\theta}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + w,$$

(¹) Puisque l'on a sur σ_0 : $|\,\theta - \theta_3\,| \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\, A\, r_{12}^{\lambda}$.

(²) *Cp.* la note (³), p. 13.

(³) *Cp.* la démonstration générale à l'aide d'un théorème de M. Zaremba : A. Korn, *Abhandlungen zur Potentialtheorie* 5 (Ferd. Dümmler's Verlag, Berlin, 1901).

où w représente le potentiel d'une double couche continu avec ses dérivées premières dans tout le domaine intérieur de σ, d'après le théorème III^a (1), l'inégalité (49) démontre notre théorème IV.

IV^a. *Si les dérivées premières de $\overline{0}$ sont continues à la surface σ de la manière*

$$(51) \qquad \text{abs.} \left| \frac{\partial \overline{0}}{\partial h} \right|_1^2 \overline{\overline{<}} A r_{12}^\lambda \qquad (\text{A constante finie, } 0 < \lambda < 1) \ (^2),$$

pour deux points quelconques de la surface 1 *et* 2 *dont nous désignons la distance par* r_{12}, *les dérivées premières de la fonction harmonique* 0 *seront continues dans tout le domaine intérieur de* σ *de la manière*

$$(52) \qquad \text{abs.} \left| \frac{\partial 0}{\partial s} \right|_1^2 \overline{\overline{<}} \text{const. fin.} \, A r_{12}^\lambda$$

pour deux points quelconques 1 *et* 2 *de l'intérieur de* σ, *qui peuvent aussi s'approcher indéfiniment de la surface, en désignant par* s *une direction quelconque.*

On a, d'après la méthode de la moyenne arithmétique,

$$(53) \qquad 0 = \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \overline{0} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma}^{\text{W}} + w,$$

où les dérivées premières de W sont continues de la manière (52) d'après les théorèmes III, III^a et IV, et où les dérivées premières de w sont continues de la manière (52) d'après les théorèmes III^a et IV.

[Il sera facile d'ajouter un corollaire à IV^a sur les dérivées secondes de 0, si les dérivées secondes de $\overline{0}$ satisfont à une inégalité analogue à (51)].

---

(1) En tenant compte d'un théorème connu sur les dérivées premières d'une fonction harmonique (*Cp. ib., Abhandlung.* 1, p. 33-34). On aura, en tout cas,

$$\text{abs.} \, | w |_1^2 \overline{\overline{<}} \text{const. fin.} \, A r_{12}.$$

(2) *Cp.* la note (1), p. 8.

Remarque importante. — Dans la plupart des théorèmes démontrés dans ce Chapitre nous avons démontré des inégalités de la forme

$$\text{abs.}\,|\,\varphi\,|_1^2 \leqq \text{const. fin.}\,\mathrm{B}\,r_{12}^{\lambda},$$

où B représente une constante donnée par les suppositions du théorème en question. Pour faciliter les considérations nous nous sommes bornés dans la plupart des théorèmes au cas que r_{12} reste au-dessous d'une longueur finie R ne dépendant, du reste, que de la surface σ. Mais, comme on aura dans tous les cas

$$\text{max. abs.}\,\varphi \leqq \text{const. fin.}\,\mathrm{B} \quad (^1),$$

on aura toujours pour deux points 1 et 2 dont la distance est plus grande que R :

$$\begin{aligned}\text{abs.}\,|\,\varphi\,|_1^2 &\leqq 2\,\text{const. fin.}\,\mathrm{B},\\ &\leqq \frac{2}{\mathrm{R}^{\lambda}}\,\text{const. fin.}\,\mathrm{B}\,r_{12}^{\lambda};\end{aligned}$$

donc on n'a pas besoin d'ajouter la restriction

$$0 < r_{12} \leqq \mathrm{R};$$

cette remarque m'a permis de simplifier considérablement les démonstrations des théorèmes de ce Chapitre.

---

(1) Des théorèmes connus donnent facilement ce résultat dans tous les cas considérés.

CHAPITRE II.

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES POTENTIELS DES VOLUMES.

§ 1.

I. *Les dérivées premières du potentiel d'un volume τ, de l'intérieur de la surface σ :*

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r} \tag{1}$$

dont la densité E *est supposée finie et intégrable, sont continues dans tout le domaine τ de manière que pour deux points* 1 *et* 2 *de τ dont nous désignons la distance par r_{12} :*

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial V}{\partial s} \right|_1^2 \leqq A \text{ max. abs. } E r_{12}^\Lambda, \tag{2}$$

où Λ est un nombre réel quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$0 < \Lambda < 1, \tag{3}$$

A *une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de Λ.*

En effet, construisons une sphère autour du point O, milieu de la droite 1, 2, avec le rayon r_{12}; appelons le domaine de τ intérieur à cette sphère τ_0, sa surface σ_0.

On trouvera pour la partie de la différence abs. $\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|_1^2$ provenant de τ_0 :

$$\left\{\begin{aligned} \text{abs.} \left| \frac{\partial V}{\partial s} \right|_{\tau_0\,1}^{\;2} &\leqq 2 \int_{\tau_0} |E| \frac{d\tau}{r^2}, \\ &\leqq 2 \text{ max. abs. } E \int_{\tau_0} \frac{d\tau}{r^2}, \\ &\leqq \text{const. fin. max. abs. } E r_{12} \text{ [1]}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

---

[1] *Cp.* l'Ouvrage cité, page 13, formule (85), p. 60.

pour la partie de la différence abs. $\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|_1^2$ provenant de $\tau - \tau_0$:

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|_{\tau-\tau_0\ 1}^{\ 2} \overline{\overline{<}} \left|\int_1^2\int_{\tau-\tau_0} E\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial S}\frac{1}{r}\,d\tau\,dS\right|,$$

en désignant par dS un élément de la droite 1, 2, donc

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|_{\tau-\tau_0\ 1}^{\ 2} \overline{\overline{<}}\, 2\,\text{max. abs.}\, E r_{12}\ \text{max.}\int_{\tau-\tau_0}\frac{d\tau}{r^3}\ \text{sur la droite } 1, 2,$$

et, comme

$$\text{max.}\int_{\tau-\tau_0}\frac{d\tau}{r^3}\ \text{sur la droite } 1, 2\ \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\frac{1}{r_{12}^{1-\Lambda}}\quad (^1),$$

où Λ représente un nombre positif quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$0 < \Lambda < 1,$$

on a

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial V}{\partial s}\right|_{\tau-\tau_0\ 1}^{\ 2} \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin. max. abs.}\, E r_{12}^{\Lambda} \tag{5}$$

et l'on n'a qu'à additionner (4) et (5) pour compléter la démonstration du théorème I.

---

(1) Nous trouvons à l'aide d'une transformation de Green

$$\int_{\tau-\tau_0}\frac{d\tau}{r^\mu} = \frac{1}{3-\mu}\int_\sigma\frac{\cos(r\nu)}{r^{\mu-1}}\,d\sigma - \frac{1}{3-\mu}\int_{\sigma_0}\frac{\cos(r\nu)}{r^{\mu-1}}\,d\sigma$$

(ν normale inférieure de σ et de σ_0)

pour un μ quelconque, donc sur 1, 2 :

$$\begin{aligned}\int_{\tau-\tau_0}\frac{d\tau}{r^3} &\overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{r_{12}^{1-\Lambda}}\int_{\tau-\tau_0}\frac{d\tau}{r^{2+\Lambda}}\\ &\overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{r_{12}^{1-\Lambda}}\left[\frac{1}{1-\Lambda}\int_\sigma\frac{\cos(r\nu)}{r^{1+\Lambda}}\,d\sigma - \frac{1}{1-\Lambda}\int_{\sigma_0}\frac{\cos(r\nu)}{r^{1+\Lambda}}\,d\sigma\right],\\ &\overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{r_{12}^{1-\Lambda}}.\end{aligned}$$

§ 2.

II. *Le potentiel de volume*

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r}, \tag{6}$$

dont la densité E *est supposée continue de la manière*

$$\text{abs.} \,|E|_1^2 \lesseqgtr A r_{12}^\lambda \qquad (\text{A constante finie, } 0 < \lambda < 1) \tag{7}$$

pour deux points quelconques de τ *dont nous désignons la distance par* r_{12}, *a des dérivées secondes dont la continuité dans* τ *satisfait à la condition*

$$\text{abs.} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial s\, \partial t} \right|_1^2 \lesseqgtr (c_1 A + c_2 \max.\,\text{abs.}\, E)\, r_{12}^\lambda, \tag{8}$$

où s, t *représentent deux directions quelconques,* c_1, c_2 *des constantes finies ne dépendant que de la surface* σ *et du nombre* λ.

Nous divisons de la même manière, comme dans la démonstration du théorème I, le volume τ en deux parties τ_0 et $\tau - \tau_0$, et nous posons

$$\left\{ \begin{aligned} V &= V' + \int_\tau E_1 \frac{d\tau}{r}, \\ V' &= \int_\tau (E - E_1) \frac{d\tau}{r}; \end{aligned} \right. \tag{9}$$

on trouvera, pour la partie de la différence abs. $\left| \frac{\partial^2 V'}{\partial s\, \partial t} \right|_1^2$ provenant de τ_0 :

$$\left\{ \begin{aligned} \text{abs.} \left| \frac{\partial^2 V'_{\tau_0}}{\partial s\, \partial t} \right|_1^2 &\lesseqgtr \left| \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t} \int_{\tau_0} (E - E_1) \frac{d\tau}{r} \right|_1 + \left| \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t} \int_{\tau_0} (E - E_1) \frac{d\tau}{r} \right|_2 \\ &\quad + |E_2 - E_1| \left| \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t} \int_{\tau_0} \frac{d\tau}{r} \right|_2, \\ &\lesseqgtr 2A \int_{\tau_0} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} + \text{const. fin.}\, A r_{12}^\lambda \ (^1), \\ &\lesseqgtr \text{const. fin.}\, A r_{12}^\lambda \ (^2); \end{aligned} \right. \tag{10}$$

([1]) Puisque $\dfrac{\partial^2}{\partial s\, \partial t} \displaystyle\int_{\tau_0} \frac{d\tau}{r}$ est toujours un nombre fini.

([2]) D'après la note ([1]), p. 28, on aura dans τ_0

$$\int_{\tau_0} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \lesseqgtr \text{const. fin.}\, r_{12}^\lambda.$$

pour la partie de la différence abs. $\left|\frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial t}\right|_1^2$ provenant de $\tau - \tau_0$:

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2 V'_{\tau-\tau_0}}{\partial s\,\partial t}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \left|\int_1^2 \int_{\tau-\tau_0} [\,|\,E(\xi\eta\zeta) - E(xyz)\,| + A\,r_{12}^{\lambda}\,]\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s\,\partial t\,\partial S}\, d\tau\, dS\right|,$$

en désignant par dS un élément de la droite 1, 2; donc

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2 V'_{\tau-\tau_0}}{\partial s\,\partial t}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin.}\, A \int_1^2 \left(\int_{\tau-\tau_0} \frac{d\tau}{r^{4-\lambda}} + r_{12}^{\lambda} \int_{\tau-\tau_0} \frac{d\tau}{r^4}\right) dS,$$

et, comme

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\tau-\tau_0} \frac{d\tau}{r^{4-\lambda}} \overline{\gtrless} \text{const. fin.} \frac{1}{r_{12}^{1-\lambda}} \quad (^1) \\ &\int_{\tau-\tau_0} \frac{d\tau}{r^4} \overline{\gtrless} \text{const. fin.} \frac{1}{r_{12}} \quad (^1) \end{aligned}\right\} \quad (\text{sur } 1, 2),$$

on trouve

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2 V'_{\tau-\tau_0}}{\partial s\,\partial t}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin.}\, A\, r_{12}^{\lambda}. \tag{11}$$

Enfin, on sait que

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\int_{\tau} \frac{d\tau}{r}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin.}\, r_{12}^{\Lambda},$$

où Λ est un nombre positif quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < \Lambda < 1$$

et que, pour cette raison,

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2 (V - V')}{\partial s\,\partial t}\right|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin. max. abs.}\, E\, r_{12}^{\Lambda}; \tag{12}$$

on n'a qu'à additionner (10), (11) et (12) pour arriver à l'inégalité (8).

[Il sera facile d'ajouter un corollaire à II sur les dérivées troisièmes de V, si les dérivées premières de E satisfont à une inégalité analogue à (7)].

---

(1) Ces inégalités sont de simples conséquences de la note (1), p. 28.

§ 3.

III. *Soit $\bar{\theta}$ une fonction continue à la surface σ dont la continuité suffit à la condition*

$$\text{abs.}\,|\bar{\theta}|_1^2 \overline{\gtrless} \mathrm{A}\, r_{12}^{\lambda} \qquad (\mathrm{A} \text{ const. finie, } 0 < \lambda < 1), \tag{13}$$

pour deux points quelconques 1 *et* 2 *de la surface dont nous désignons la distance par* r_{12}; *soit* θ *la fonction harmonique ayant les valeurs-limite* $\bar{\theta}$ *à la surface* σ, *formons le potentiel du volume intérieur* τ :

$$\mathrm{V} = \int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}, \tag{14}$$

et à la surface σ *les valeurs*

$$\psi = \bar{\theta} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \nu^2}\right|_e \qquad (\nu \text{ normale intérieure de } \sigma), \tag{15}$$

alors on aura les inégalités

$$\max.\,\text{abs.}\,\psi \overline{\gtrless}\, a \max.\,\text{abs.}\,\bar{\theta}, \tag{16}$$

$$\text{abs.}\,|\psi|_1^2 \overline{\gtrless} \left(\varepsilon \mathrm{A} + \frac{b}{\varepsilon}\max.\,\text{abs.}\,\bar{\theta}\right) r_{12}^{\lambda} \quad (^1), \tag{17}$$

pour deux points quelconques 1 *et* 2 *de la surface dont nous désignons la distance par* r_{12}, *où* a, b *représentent deux constantes finies ne dépendant que de la surface* σ *et du nombre* λ, *et* ε *un nombre positif quelconque que l'on peut choisir aussi petit que l'on veut.*

Supposons d'abord que la surface σ soit une sphère de rayon R, alors on pourra, à cause de (13), développer $\bar{\theta}$ en série de polynomes

(1) Cette inégalité est un peu plus générale que celle que j'ai donnée dans ma Note dans les *Comptes rendus* du 22 janvier 1906 (*cp.* la démonstration dans les *Comptes rendus des Séances de l'Académie de Bavière*, 1906, p. 28); grâce à cette généralisation j'ai pu donner dans ce Mémoire à la solution du problème d'équilibre élastique (Chap. III) une forme un peu plus élégante que dans mon premier Mémoire sur ce problème (*Comptes rendus des Séances de l'Académie de Bavière*, 1906, p. 37).

sphériques

$$\bar{\theta} = \sum_{0}^{\infty}{}_j \, Y_j(\mu, \varphi) \quad (^1), \tag{18}$$

et l'on trouvera aisément

$$\theta = \sum_{0}^{\infty}{}_j \left(\frac{r_1}{R}\right)^j Y_j(\mu_1 \varphi_1), \tag{19}$$

pour tous les points $(x_1 y_1 z_1)$ (²) de τ,

$$V = \int_\tau \theta \frac{d\tau}{r} = 4\pi \sum_{0}^{\infty}{}_j \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \frac{R^{j+3}}{\rho^{j+1}} Y_j(\mu, \varphi), \tag{20}$$

pour tous les points extérieurs (xyz) (³),

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right|_e = 4\pi \sum_{0}^{\infty}{}_j \frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi),$$

$$\bar{\theta} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right|_e = -\sum_{0}^{\infty}{}_j \frac{4j+5}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi). \tag{21^a}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{2R}\frac{\partial V}{\partial \nu} = -\sum_{0}^{\infty}{}_j \frac{2(j+1)}{(2j+1)(2j+3)} Y_j(\mu, \varphi),$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left|\int_\sigma \theta \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma\right|_e = +\sum_{0}^{\infty}{}_j \frac{j}{2j+1} Y_j(\mu, \varphi) \quad (^4),$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left|\int_\sigma \bar{\theta} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\sigma\right|_i = -\sum_{0}^{\infty}{}_j \frac{j+1}{2j+1} Y_j(\mu, \varphi) \quad (^4),$$

(¹) $\xi = R\mu, \qquad \eta = R\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \qquad \zeta = R\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi.$

(²) $x_1 = r_1\mu_1, \qquad y_1 = r_1\sqrt{1-\mu_1^2}\cos\varphi_1, \qquad z_1 = r_1\sqrt{1-\mu_1^2}\sin\varphi_1.$

(³) $x = \rho\mu, \qquad y = \rho\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \qquad z = \rho\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi.$

(⁴) *Cp.* par exemple, A. Korn, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, t. I, les formules (196^a) et (196^b), p. 177.

donc

$$(21^b)\quad \frac{1}{2R}\frac{\partial V}{\partial \nu}-\frac{1}{4\pi}\left[\left|\int_\sigma \bar{\theta}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}d\sigma\right|_e + \left|\int_\sigma \bar{\theta}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}d\sigma\right|_i\right] = -\sum_0^\infty {}_j \frac{4j+5}{(2j+1)(2j+3)}Y_j(\mu,\varphi).$$

Il résulte de (21^a) et (21^b)

$$(22)\quad \bar{\theta}-\frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right|_e = \frac{1}{2R}\frac{\partial V}{\partial \nu}-\frac{1}{4\pi}\left(\left|\int_\sigma \theta\frac{\cos(r\nu)}{r^2}d\sigma\right|_e + \left|\int_\sigma \bar{\theta}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}d\sigma\right|_i\right).$$

Pour la sphère le théorème I de ce Chapitre et le théorème I^a du Chapitre précédent permettraient de tirer de (22) et (13) les conclusions suivantes :

$$\text{max. abs.}\,\psi \gtreqless \text{const. fin. max. abs.}\,\bar{\theta},$$
$$\text{abs.}\,|\psi|_1^2 \gtreqless \text{const. fin. max. abs.}\,\bar{\theta}\, r_{12}^{\Lambda},$$

pour un Λ quelconque satisfaisant à la condition

$$0<\Lambda<1,$$

mais nous voulons nous occuper maintenant du cas général, et nous supposerons dès à présent que la surface σ soit une surface fermée ne remplissant que les conditions générales mentionnées au commencement du Chapitre I.

Pour démontrer d'abord l'inégalité (16) considérons un point $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ de la surface et construisons une sphère τ_0 de rayon fini tout intérieure à σ et tangente à la surface σ en $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$. Grâce à la supposition (13) (¹) l'intégrale

$$\int_\tau (\theta-\theta_0)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2}d\tau$$

(¹) Cette supposition entraîne l'inégalité

$$\text{abs.}\,|\theta|_1^2 \gtreqless \text{const. fin.}\,A\, r_{12}^{\lambda}.$$

dans τ (théorème III du Chapitre précédent).

est convergente et peut être formée en excluant le point $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ de l'intégration. L'expression

$$(23) \qquad \left| \theta - \theta_0 - \frac{1}{\pi} \left| \int_{\tau_0} (\theta - \theta_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2} d\tau \right|_e \right| \gtreqless \text{const. fin. max. abs.} \bar{\theta}$$

d'après (22); pour démontrer (16) on n'a donc qu'à montrer que l'intégrale convergente

$$(24) \qquad \left| \int_{\tau - \tau} (\theta - \theta_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2} d\tau \right| \gtreqless \text{const. fin. max. abs.} \bar{\theta} \quad (^1).$$

Comme on a pour une partie T de $\tau - \tau_0$ voisine de $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$

$$(25) \qquad \int_T \frac{d\tau}{r^3} \gtreqless 2.2\pi \int_0^{\rho} \frac{r^2}{r^3} \int_0^{\eta r} d\varphi \, dr \gtreqless 4\pi\rho\eta \quad (^2),$$

où ρ et η sont des constantes finies et où les distances du domaine $\tau - \tau_0 - T$ de $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ sont plus grandes qu'une longueur finie ne dépendant que de la surface σ, on trouvera

$$\left| \int_T (\theta - \theta_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2} d\tau \right| \gtreqless \text{const. fin. max. abs.} \bar{\theta}.$$

On a du reste

$$\left| \int_{\tau - \tau_0 - T} (\theta - \theta_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2} d\tau \right| \gtreqless \text{const. fin. max. abs.} \bar{\theta},$$

---

(1) On a toujours

$$\int_\tau \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2} d\tau \gtreqless \text{const. fin.}$$

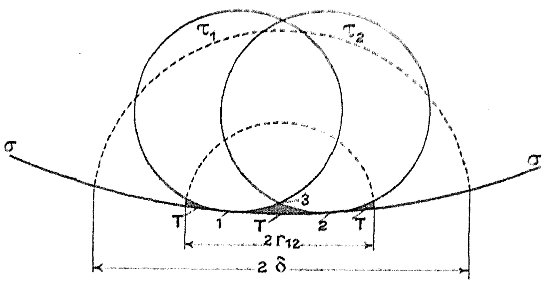
(2) En posant l'angle de la direction $r[d\tau \to (\xi_0 \eta_0 \zeta_0)]$ avec la normale extérieure $= \frac{\pi}{2} - \varphi$.

puisque les distances du domaine $\tau - \tau_0 - T$ du point $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ sont plus grandes qu'une longueur finie; l'inégalité (24), et en conséquence l'inégalité (16), est donc démontrée.

Il s'agit maintenant de démontrer l'inégalité (17). Nous construisons une sphère de rayon δ autour du point 0, milieu de la droite 1,2, où δ représente une longueur finie mais que l'on peut choisir dès le début aussi petite que l'on veut, et nous imposerons à la distance r_{12} des points 1 et 2 la restriction

$$0 < r_{12} \leqq \frac{\delta}{2} \quad (^1).$$

Nous appellerons τ_δ la partie de la sphère (δ) intérieure à σ. Nous construirons encore les deux sphères τ_1 et τ_2 de rayon R tangentes à σ en 1 respectivement en 2 et tout intérieures à σ, ce que l'on peut toujours atteindre en choisissant le rayon R plus petit qu'une certaine longueur finie ne dépendant que de la surface σ.



Il nous faut enfin encore une sphère de rayon r_{12} autour du point 0 dont nous appellerons τ_0 la partie intérieure à σ, nous appellerons T la partie de τ_0 extérieure à τ_1 et τ_2.

Notre démonstration se divisera en deux parties :

1° Nous démontrerons que

$$(26) \qquad \text{abs.}\left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_T (\theta - \theta_1) \frac{d\tau}{r} \right|_c \leqq \text{const. fin. max. abs.}\, \bar{\theta}\, r_{12},$$

pour le point 1 et pour le point 2.

---

(1) On pourrait aussi bien imposer la condition $r_{12} \leqq \frac{\delta}{3}, \frac{\delta}{4}, \dots$

2° Nous démontrerons que

$$(27^a)\quad \left|\theta - \theta_1 - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau-T}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_e\right|_1^3 \leqq \left(\varepsilon A + \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\,\bar{\theta}\right) r_{12}^{\lambda},$$

$$(27^b)\quad \left|\theta - \theta_1 - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau-T}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_e\right|_2^3 \leqq \left(\varepsilon A + \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\,\bar{\theta}\right) r_{12}^{\lambda},$$

si nous désignons par 3 un point du cercle d'intersection des surfaces de τ_1 et τ_2 dont la distance de 1 et de 2 est plus petite que r_{12}, par la direction ν en 3 la direction de la normale intérieure en 1 ou de la normale intérieure en 2, et si ε représente un nombre positif quelconque que l'on peut choisir aussi petit que l'on veut.

Les formules (26) et (27) une fois démontrées on aura tout de suite (17) en remarquant que

$$(28)\qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_1\frac{d\tau}{r}\right|_{e\,1}^{\,2} \leqq \text{const. fin. max. abs.}\,\bar{\theta}\, r_{12}^{\Lambda} \quad (^1),$$

où Λ est un nombre quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < \Lambda < 1.$$

La première partie de la démonstration, l'inégalité (26), est déduite aisément d'une inégalité analogue à (25), en remarquant que l'on peut poser

$$\rho \leqq 3 r_{12}.$$

Il ne reste donc qu'à démontrer les inégalités (27^a) et (27^b), la seconde partie de notre démonstration. Il est d'abord facile à voir que

$$(29)\quad \text{abs.}\left|\theta - \theta_1 - \left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau_1}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_e\right|_1^3 \leqq \text{const. fin. max. abs.}\,\bar{\theta}\, r_{12}^{\Lambda},$$

où Λ est un nombre quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < \Lambda < 1,$$

---

(1) On a toujours

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \frac{d\tau}{r}\right|_{e\,1}^{\,2} \leqq \text{const. fin.}\, r_{12}^{\Lambda}.$$

si la direction ν en 3 désignait la normale intérieure de la sphère en 3; on trouvera cette inégalité facilement à l'aide de (22) et des théorèmes I[a] du Chapitre précédent et I de ce Chapitre. Les cosinus directeurs de cette direction diffèrent des cosinus directeurs de la normale intérieure en 2 par des nombres dont les valeurs absolues sont

$$\overline{\underset{<}{=}}\,\text{const. fin.}\, r_{12},$$

donc l'erreur que l'on commettra en choisissant dans (29), pour la direction ν en 3, la direction de la normale intérieure en 2 est

$$\overline{\underset{<}{=}}\,\text{const. fin.}\, r_{12}\,\text{max. abs.}\, \mathrm{D}_2 \int_{\tau_1} (\theta - \theta_1)\frac{d\tau}{r},$$

en désignant par D_2 une dérivée seconde quelconque du potentiel en question. En n'étendant l'intégration que sur la partie de τ_1 intérieure à τ_δ (¹) on a

$$\begin{aligned}\text{max. abs.}\, \mathrm{D}_2 \int (\theta - \theta_1)\frac{d\tau}{r} &\overline{\underset{<}{=}}\,\text{const. fin.}\, \mathrm{A} \int \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}},\\ &\overline{\underset{<}{=}}\,\text{const. fin.}\, \mathrm{A}\, \delta^{\lambda} \quad (^2);\end{aligned}$$

en étendant l'intégration sur la partie de τ_1 extérieure à τ_δ on a

$$\begin{aligned}\text{max. abs.}\, \mathrm{D}_2 \int (\theta - \theta_1)\frac{dr}{r} &\overline{\underset{<}{=}}\,\text{const. fin. max. abs.}\, \overline{\theta} \int \frac{d\tau}{r^3},\\ &\overline{\underset{<}{=}}\,\frac{\text{const. fin.}}{\delta^{\lambda}}\,\text{max. abs.}\, \overline{\theta} \quad (^3),\end{aligned}$$

donc l'erreur commise ne sera pas plus grande que

$$r_{12}\left(\varepsilon \mathrm{A} + \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\, \overline{\theta}\right),$$

en posant $\varepsilon = \text{const. fin.}\,\delta^{\lambda}$. On pourra donc écrire l'inégalité (29)

$$(30^a)\quad \text{abs.}\left|\theta - \theta_1 - \left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_{\tau_1}(\theta - \theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_e\right|_1^3 \overline{\underset{<}{=}} \left(\varepsilon \mathrm{A} + \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\, \overline{\theta}\right) r_{12}^{\lambda},$$

(¹) La sphère avec le rayon δ autour du point 0.

(²) *Cp.* la remarque (¹) p. 28.

(³) Puisque $\int \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}}$ est une constante finie.

et de la même manière

$$(30^b)\qquad \text{abs.}\left|\theta-\theta_1-\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau_2}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_c\right|_2^3$$

$$\overline{\overline{<}}\left(\varepsilon A+\frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\,\bar\theta\right)r_{12}^\lambda\quad (^1),$$

où

$$(31)\qquad \varepsilon = \text{const. fin.}\,\delta^\lambda,$$

et où l'on peut prendre pour la direction ν en 3 ou la direction de la normale intérieure en 1 ou la normale intérieure en 3.

Pour tirer (27^a) de (30^a) et (27^b) de (30^b) il faut encore examiner les différences

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau-\tau_1-T}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{c\;1}^{\;3}$$

et

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau-\tau_2-T}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{c\;2}^{\;3};$$

en n'étendant l'intégration que sur la partie de $\tau-\tau_1-T$ intérieure à τ_2 on a

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{c\;1}^{\;3}\overline{\overline{<}}\;\text{const. fin.}\,A\,r_{12}\left(\int\frac{d\tau}{r^{3-\lambda}}+r_{12}^\lambda\int\frac{d\tau}{r^3}\right)_{\text{max. sur }1,3}\;(^2),$$

$$\overline{\overline{<}}\;\text{const. fin.}\,A\,r_{12}^\lambda\left|\int\frac{d\tau}{r^{3-\lambda}}\right|_{\text{max. sur }1,3},$$

$$\overline{\overline{<}}\;\text{const. fin.}\,\delta^\lambda A\,r_{12}^\lambda,$$

$$\overline{\overline{<}}\;\varepsilon A\,r_{12}^\lambda;$$

---

(1) Pour voir que (30^b) est démontrée de la même manière que (30^a), on posera, après avoir trouvé l'inégalité analogue à (29),

$$\int_{\tau_2}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}=\int_{\tau_2}(\theta-\theta_2)\frac{d\tau}{r}+\int_{\tau_2}(\theta_2-\theta_1)\frac{d\tau}{r},$$

et l'on remarque que

$$\text{max. abs. D}_2\int_{\tau_2}(\theta_2-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\overline{\overline{<}}\,|\,\theta_2-\theta_1\,|\,\text{const. fin.}\overline{\overline{<}}\,\text{const. fin. max. abs.}\,\bar\theta.$$

(2) En effet, le premier membre de cette inégalité est

$$\overline{\overline{<}}\int_1^3\int\left[\,|\,\theta(\xi\eta\zeta)-\theta(xyz)\,|+A\,r_{12}^\lambda\,\right]\left|\frac{\partial^3}{\partial S\,\partial\nu^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right|d\tau\,dS,$$

en étendant l'intégration sur la partie de $\tau - \tau_1 - T$ extérieure à τ_δ, on a

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{e\ 1}^{\ 3} \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin. max. abs.}\,\overline{\theta}\,r_{12}\left|\int\frac{d\tau}{r^4}\right|_{\text{max. sur 1, 3}},$$

$$\overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\ \frac{r_{12}}{\delta}\ \text{max. abs.}\,\overline{\theta}\quad (^1),$$

$$\overline{\overline{<}}\ \text{const. fin. max. abs.}\,\overline{\theta}\,\frac{r_{12}^\lambda}{\delta^\lambda},$$

$$\overline{\overline{<}}\ \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\ \text{max. abs.}\,\overline{\theta}\,r_{12}^\lambda,$$

donc

$$(32^a)\qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau-\tau_1-T}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{e\ 1}^{\ 3} \overline{\overline{<}}\left(\varepsilon A + \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\ \text{max. abs.}\,\overline{\theta}\right)r_{12}^\lambda,$$

et d'une manière tout à fait analogue

$$(32^b)\qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau-\tau_2-T}(\theta-\theta_1)\frac{d\tau}{r}\right|_{e\ 2}^{\ 3} \overline{\overline{<}}\left(\varepsilon A + \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\ \text{max. abs.}\,\overline{\theta}\right)r_{12}^\lambda.$$

On tirera maintenant (27^a) de (30^a) et (32^a), et l'on tirera (27^b) de (30^b) et (32^b). C. Q. F. D.

Nous n'avons démontré (17) jusqu'à présent que pour

$$r_{12}\ \overline{\overline{<}}\ \frac{\delta}{2},$$

mais comme pour $r_{12}\ \overline{\overline{>}}\ \frac{\delta}{2}$:

$$\text{abs.}\,|\psi|_1^2\ \overline{\overline{<}}\ 2\,\text{max. abs.}\ \psi,$$

$$\overline{\overline{<}}\ \text{const. fin. max. abs.}\,\overline{\theta}\,\frac{r_{12}^\lambda}{\delta^\lambda},$$

$$\overline{\overline{<}}\ \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\ \text{max. abs.}\,\overline{\theta}\,r_{12}^\lambda,$$

---

en désignant par dS un élément de la droite 1, 3, et l'on a

$$|\,\theta(\xi\eta\zeta) - \theta(xyz)\,|\ \overline{\overline{<}}\ A\,r^\lambda.$$

(1) On a pour ce domaine

$$\left|\int\frac{d\tau}{r^4}\right|_{\text{max. sur 1, 3}}\ \overline{\overline{<}}\ \frac{\text{const. fin.}}{\delta},$$

cp. la remarque (1) p. 28.

l'inégalité (17) sera vraie pour deux points quelconques 1 et 2 de la surface σ.

§ 4.

IV. *Soit* $\bar{\theta}$ *une fonction continue à la surface* σ *dont la continuité suffit à la condition*

$$\text{abs.}\left|\bar{\theta}\right|_1^2 \overline{\overline{<}} A\, r_{12}^{\lambda} \qquad (\text{A const. finie; } 0 < \lambda < 1), \tag{33}$$

pour deux points quelconques 1 *et* 2 *de sa surface dont nous désignons la distance par* r_{12}; *supposons encore que* $\bar{\theta}$ *possède des dérivées premières continues de la manière*

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial h}\right|_1^2 \overline{\overline{<}} B\, r_{12}^{\lambda'} \qquad (\text{B const. finie; } 0 < \lambda' < 1) \quad (^1) \tag{34}$$

alors la fonction

$$\psi = \bar{\theta} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta\,\frac{d\tau}{r}\right|_\sigma, \tag{35}$$

considérée déjà dans le paragraphe précédent, aura des dérivées premières continues de la manière

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial\psi}{\partial h}\right|_1^2 \overline{\overline{<}} (c_1 \max.\text{abs.}\bar{\theta} + c_2 A + c_3 B)\, r_{12}^{\lambda} \quad (^1), \tag{36}$$

et satisfaisant à l'inégalité

$$\max.\text{abs.}\frac{\partial\psi}{\partial h} \overline{\overline{<}} (c \max.\text{abs.}\bar{\theta} + c' A) \quad (^2), \tag{37}$$

où c, c', c_1, c_2, c_3 *sont des constantes finies :* c *ne dépendant que de la surface* σ *et de* λ; c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de la surface* σ *et de* $\lambda\lambda'$.

Si nous pouvons démontrer (37) on en déduira (36) comme une

---

(1) *Cp.* la remarque (1) p. 17.

(2) Il est très important que cette inégalité ne dépende ni de B ni de λ'; la supposition (34) est pourtant nécessaire pour que la démonstration de l'inégalité (37) soit rigoureuse.

simple conséquence à l'aide du théorème II de ce Chapitre et des théorèmes IV et IV^a du Chapitre précédent en remarquant l'identité

$$(38) \qquad \frac{\partial}{\partial h}\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r} = \int_\sigma \theta \frac{\cos(\nu h)}{r}\,d\sigma + \int \frac{\partial\theta}{\partial h}\frac{d\tau}{r} \quad (^1).$$

Pour démontrer (37) on se servira de l'identité (38) pour mettre hors de doute que l'intégrale

$$\int_\tau \theta \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial\nu^2\,\partial h}\,d\tau$$

est convergente grâce à la supposition (34) et peut être formée en excluant de l'intégration le point $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ dans lequel nous allons considérer l'expression $\frac{\partial\psi}{\partial h}$. Construisons une sphère τ_0 de rayon fini tout intérieure à σ et tangente à la surface σ en $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$. On aura

$$(39) \qquad \frac{\partial}{\partial h}\left(\overline{\theta} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_{\tau_0}\theta\frac{d\tau}{r}\right|_\sigma\right) \leqq \text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs.}\,\overline{\theta},$$

d'après (22) et la supposition (33). Il ne reste donc qu'à démontrer que

$$(40) \qquad \left|\int_{\tau-\tau_0}(\theta-\theta_0)\frac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial\nu^2\,\partial h}\,d\tau\right| \leqq \text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs.}\,\overline{\theta},$$

---

(1) Pour démontrer l'inégalité

$$\left|\frac{\partial}{\partial\nu_2}\int_\sigma \overline{\theta}\frac{\cos(\nu h)\cos(r\nu_2)}{r^2}\,d\sigma - \frac{\partial}{\partial\nu_1}\int_\sigma \overline{\theta}\frac{\cos(\nu h)\cos(r\nu_1)}{r^2}\,d\sigma\right|$$
$$\leqq (\text{const. fin. A} + \text{const. fin. B})\,r_{12}^\lambda,$$

on n'a qu'à remarquer que

$$\cos(r\nu_2) = \cos(r\nu) + \varepsilon_2, \qquad \cos(r\nu_1) = \cos(r\nu) + \varepsilon_1,$$

où

$$|\varepsilon_2| \leqq r\,\text{const. fin.}, \qquad |\varepsilon_1| \leqq r\,\text{const. fin.}$$

et à appliquer les théorèmes I et II^a du Chapitre précédent.

puisque

$$(41)\qquad \left|\int_{\tau-\tau_0} \theta_0 \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2\, \partial h}\, d\tau\right| \leqq \text{const. fin. max. abs.}\, \overline{\theta}.$$

Comme on a, pour une partie T de $\tau - \tau_0$ voisine de $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$,

$$(42)\qquad \int_{\mathrm{T}} \frac{d\tau}{r^{4-\lambda}} \leqq 2.2\pi \int_0^{\rho} \frac{r^2}{r^{4-\lambda}} \int_0^{\eta r} d\varphi\, dr \leqq \frac{4\pi}{\lambda}\rho^{\lambda}\eta \quad (^1),$$

où ρ et η sont des constantes finies et où les distances du domaine $\tau - \tau_0 - \mathrm{T}$ de $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ sont plus grandes qu'une longueur finie ne dépendant que de la surface σ, on trouvera

$$(43)\qquad \left|\int_{\mathrm{T}} (\theta - \theta_0) \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2\, \partial h}\, d\tau\right| \leqq \text{const. fin. A};$$

on a du reste

$$(44)\qquad \left|\int_{\tau-\tau_0-\mathrm{T}} (\theta - \theta_0) \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial \nu^2\, \partial h}\, d\tau\right| \leqq \text{const. fin. max. abs.}\, \overline{\theta},$$

puisque les distances du domaine $\tau - \tau_0 - \mathrm{T}$ de (ξ_0, η_0, ζ_0) sont plus grandes qu'une longueur finie; l'inégalité (40), et en conséquence l'inégalité (37), est donc démontrée.]

---

(1) *Cp.* la note (2) p. 34.

CHAPITRE III.

SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME D'ÉQUILIBRE DANS LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DANS LE CAS OU LES DÉPLACEMENTS DES POINTS DE LA SURFACE SONT DONNÉS.

§ 1.

Nous appellerons le problème suivant le *problème principal de l'équilibre élastique :*

Il s'agit de trouver trois fonctions u, v, w continues avec leurs dérivées premières satisfaisant à l'intérieur d'une surface fermée σ aux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -f_1 \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -f_2 \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -f_3 \end{cases} \qquad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

et se réduisant à zéro à la surface σ.

Nous supposerons que les fonctions f_1, f_2, f_3 soient des fonctions données à l'intérieur de σ continues de la manière

$$(2)\qquad \mathrm{abs.}\,|f_j|_1^2 < \underbrace{\text{const. fin.}}_{A}\; r_{12}^{\lambda} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

pour deux points quelconques 1 et 2 de l'intérieur dont nous désignons la distance par r_{12} et satisfaisant à l'équation

$$(3)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0.$$

Le problème ne peut avoir qu'un seul système de solutions (u, v, w) [1],

[1] Nous n'insisterons pas sur ce résultat qui est connu ; notre tâche est de trouver ce système (u, v, w).

si le nombre donné k satisfait à la condition

$$(4)\qquad -1 < k < +\infty.$$

Après avoir résolu ce problème, il sera facile de réduire des problèmes bien plus généraux à ce problème principal.

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{k}{2+k}, \qquad k = \dfrac{2\varkappa}{1-\varkappa}, \qquad -1 < \varkappa < +1, \\ F_1 = \dfrac{2}{2+k} f_1, \\ F_2 = \dfrac{2}{2+k} f_2, \\ F_3 = \dfrac{2}{2+k} f_3 \end{cases}$$

et écrivons les équations (1) de la manière suivante :

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta u = -F_1 + \varkappa\left(\Delta u - 2\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right), \\ \Delta v = -F_2 + \varkappa\left(\Delta v - 2\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right), \\ \Delta w = -F_3 + \varkappa\left(\Delta w - 2\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right). \end{cases}$$

En nous inspirant des méthodes des approximations successives nous formerons successivement les fonctions suivantes :

$$(7^a)\qquad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_1 \dfrac{d\tau}{r} - U_0, \\ v_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_2 \dfrac{d\tau}{r} - V_0, \\ w_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\tau F_3 \dfrac{d\tau}{r} - W_0; \end{cases}$$

$$(7^b)\qquad \begin{cases} u_j = u_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\dfrac{d\tau}{r} - U_j \\ v_j = v_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\dfrac{d\tau}{r} - V_j \qquad (j = 1, 2, \ldots), \\ w_j = w_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \theta_{j-1}\dfrac{d\tau}{r} - W_j \end{cases}$$

en désignant par U_j, V_j, W_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) les solutions du problème de Dirichlet pour l'intérieur de σ avec les valeurs-limite

$$
(8^a) \quad \left\{ \begin{aligned}
U_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_\tau F_1 \frac{d\tau}{r}, \\
V_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_\tau F_2 \frac{d\tau}{r}, \\
W_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_\tau F_3 \frac{d\tau}{r},
\end{aligned} \right.
$$

$$
(8^b) \quad \left\{ \begin{aligned}
U_j &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\
V_j &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\
W_j &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r}
\end{aligned} \right. \qquad (j = 1, 2, \ldots),
$$

à la surface σ.

Nous allons démontrer que les fonctions

$$
(9) \quad \left\{ \begin{aligned}
u &= \sum_0^\infty {}_j\, \varkappa^j u_j, \\
v &= \sum_0^\infty {}_j\, \varkappa^j v_j, \\
w &= \sum_0^\infty {}_j\, \varkappa^j w_j
\end{aligned} \right.
$$

représentent les solutions cherchées de notre problème principal.

Il faudra d'abord nous occuper des propriétés des fonctions successives u_j, v_j, w_j; après nous démontrerons la convergence des séries (9) [1] et de leurs dérivées premières; après cela, il ne sera plus difficile de démontrer que ces séries satisfont, en vérité, aux équations de notre problème principal.

---

[1] Pour $-1 < \varkappa < +1$, c'est-à-dire pour $-1 < k < +\infty$.

§ 2.

Examinons d'abord les fonctions u_0, v_0, w_0, leurs dérivées premières et secondes. Leurs dérivées premières seront continues de la manière

$$(10)\qquad \text{abs.}\,|\mathrm{D}_1 u_0|_1^2 \lesseqgtr \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)\, r_{12}^{\Lambda}, \qquad \ldots$$

(d'après le théorème I du Chap. II et le théorème IV^a du Chap. I), en désignant par D_1 une dérivée première quelconque et par Λ un nombre quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < \Lambda < 1,$$

on aura donc aussi

$$(11)\qquad \text{abs.}\,|\theta_0|_1^2 \lesseqgtr \underbrace{\text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)}_{\mathrm{C}_0}\, r_{12}^{\Lambda};$$

d'autre part

$$(12)\qquad \text{max. abs.}\,\theta_0 \lesseqgtr \underbrace{\text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)}_{\mathrm{B}_0}.$$

[Les dérivées secondes de u_0, v_0, w_0 seront continues de la manière

$$(10)'\qquad \text{abs.}\,|\mathrm{D}_2 u_0|_1^2 \lesseqgtr [\text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)]\, r_{12}^{\lambda}, \qquad \ldots$$

[à cause de (2), d'après le théorème II du Chap. II et le théorème IV^a du Chap. I (¹)], en désignant par D_2 une dérivée seconde quelconque, on aura donc aussi

$$(11)'\qquad \text{abs.}\,|\mathrm{D}_1 \theta_1|_1^2 \lesseqgtr \underbrace{[\text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)]}_{\Gamma_0}\, r_{12}^{\lambda},$$

d'autre part

$$(12)'\qquad \text{max. abs.}\,\mathrm{D}_1 \theta_0 \lesseqgtr \underbrace{\text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3)}_{\mathrm{B}_0}.$$

(¹) Ou plutôt d'un corollaire du théorème IV^a du Chapitre I facile à démontrer.

Nous n'aurons pas besoin de ces inégalités (10)', (11)', (12)' pour la solution de notre problème principal, mais nous les mentionnons pour une autre raison que nous connaîtrons plus tard.]

Comme on a

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta u_0 &= -F_1,\\ \Delta v_0 &= -F_2,\\ \Delta w_0 &= -F_3,\end{aligned}\right.$$

$$(14)\qquad \Delta\theta_0 = -\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0,$$

la fonction θ_0 sera harmonique à l'intérieur de σ.

Examinons maintenant les fonctions u_1, v_1, w_1, leurs dérivées premières et secondes. Leurs dérivées premières seront continues de la manière

$$(15)\qquad \text{abs.}\,|D_1 u_1|_1^2 \leqq \overbrace{(\text{const. fin. } B_0 + \text{const. fin. } C_0)}^{C_1}\, r_{12}^{\lambda}, \qquad \ldots$$

(à cause de (11) et (12), d'après le théorème II du Chap. II et le théorème IV^a du Chap. I), on aura donc aussi

$$(16)\qquad \text{abs.}\,|\theta_1|_1^2 \leqq C_1\, r_{12}^{\lambda},$$

d'autre part

$$(17)\qquad \text{max. abs. } \theta_1 < \underbrace{\text{const. fin. } B_0 + \text{const. fin. } C_0}_{B_1}.$$

[Les dérivées secondes de u_1, v_1, w_1 seront continues de la manière

$$(15)'\qquad \text{abs.}\,|D_2 u_1|_1^2 \leqq \overbrace{(\text{const. fin. } \Gamma_0 + \text{const. fin. } B_0)}^{\Gamma_1}\, r_{12}^{\lambda}, \qquad \ldots$$

[à cause de (11)' et (12)', d'après le théorème II du Chap. II et le théorème IV^a du Chap. I [1]], on aura donc aussi

$$(16)'\qquad \text{abs.}\,|D_1 \theta_1|_1^2 \leqq \Gamma_1\, r_{12}^{\lambda};$$

---

[1] Ou plutôt d'après des corollaires de ces deux théorèmes faciles à démontrer.

d'autre part

$$(17)' \qquad \text{max. abs. } D_1\theta_1 \leqq \overbrace{(\text{const. fin. } B_0 + \text{const. fin. } \Gamma_0)}^{B_1}. \Big]$$

Comme on a

$$(18) \qquad \begin{cases} \Delta u_1 = \Delta u_0 - 2\dfrac{\partial\theta_0}{\partial x}, \\ \Delta v_1 = \Delta v_0 - 2\dfrac{\partial\theta_0}{\partial y}, \\ \Delta w_1 = \Delta w_0 - 2\dfrac{\partial\theta_0}{\partial z} \end{cases}$$

à l'intérieur de τ (1), θ_0 étant une fonction harmonique du domaine τ, on trouvera

$$(19) \qquad \Delta\theta_1 = 0,$$

θ_1 sera aussi harmonique à l'intérieur de σ.

On trouvera de cette manière successivement :

Les dérivées premières de u_j, v_j, w_j $(j = 1, 2, \ldots)$ seront continues de la manière

$$(20) \qquad \text{abs.} \,|\, D_1 u_j \,|_1^2 \leqq \overbrace{(\text{const. fin. } B_{j-1} + \text{const. fin. } C_{j-1})}^{C_j} r_{12}^{\lambda}, \qquad \ldots,$$

on aura donc aussi

$$(21) \qquad \text{abs.} \,|\, \theta_j \,|_1^2 \leqq C_j r_{12}^{\lambda};$$

d'autre part

$$(22) \qquad \text{max. abs. } \theta_j \leqq \overbrace{\text{const. fin. } B_{j-1} + \text{const. fin. } C_{j-1}}^{B_j}.$$

[Les dérivées secondes de u_j, v_j, w_j seront continues de la manière

$$(20)' \qquad \text{abs.} \,|\, D_2 u_j \,|_1^2 \leqq \overbrace{(\text{const. fin. } B_{j-1} + \text{const. fin. } \Gamma_{j-1})}^{\Gamma_j} r_{12}^{\lambda},$$

(1) D'après (11)', même *dans tout le domaine* τ.

on aura donc aussi

$$(21)' \qquad \text{abs.}\,|D_1\theta_j|_2^1 < \Gamma_j r_{12}^{\lambda};$$

d'autre part

$$(22)' \qquad \text{max. abs. } D_1\theta_j < \overbrace{\text{const. fin. } B_{j-1} + \text{const. fin } \Gamma_{j-1}}^{B_j}.$$

Comme on a

$$(23) \qquad \begin{cases} \Delta u_j = \Delta u_{j-1} - 2\dfrac{\partial\theta_{j-1}}{\partial x}, \\ \Delta v_j = \Delta v_{j-1} - 2\dfrac{\partial\theta_{j-1}}{\partial y}, \\ \Delta w_j = \Delta w_{j-1} - 2\dfrac{\partial\theta_{j-1}}{\partial z} \end{cases}$$

à l'intérieur de τ (¹), on trouvera successivement

$$(24) \qquad \Delta\theta_j = 0,$$

chaque θ_j sera harmonique à l'intérieur de σ.

Nous nous proposons de démontrer que les séries

$$\sum_0^{\infty} \varkappa^j A_j, \qquad \varkappa^j B_j, \qquad \varkappa^j C_j, \qquad [\varkappa^j B_j] \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

sont absolument convergentes si $\varkappa$ satisfait à la condition

$$-1 < \varkappa < +1.$$

§ 3.

Nous démontrerons d'abord que

$$(24) \qquad \varkappa^{2j} I_j < \text{const. fin. (max. abs. } F_1 F_2 F_3)^2 \varkappa^{2j} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

si nous posons

$$(25) \qquad I_j = \int_\tau \theta_j^2 \, d\tau,$$

la constante finie ne dépendant que de la surface σ.

(¹) D'après $(21)'$ (pour θ_{j-1}), même *dans tout le domaine* τ.

En effet, si nous nous servons des abréviations

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{u}_j &= \frac{\partial w_j}{\partial y} - \frac{\partial v_j}{\partial z}, \\ \mathfrak{v}_j &= \frac{\partial u_j}{\partial z} - \frac{\partial w_j}{\partial x}, \\ \mathfrak{w}_j &= \frac{\partial v_j}{\partial x} - \frac{\partial u_j}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

nous trouverons, en vertu de (23),

$$\begin{aligned} \int_\tau (\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau &= -\int_\tau \Bigg\{ \quad u_j \left[\frac{\partial \theta_j}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial z}\right)\right] \\ &\qquad + v_j \left[\frac{\partial \theta_j}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial x}\right)\right] \\ &\qquad + w_j \left[\frac{\partial \theta_j}{\partial z} - \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial y}\right)\right] \Bigg\}\, d\tau, \\ &= -\int_\tau (u_j \Delta u_j + v_j \Delta v_j + w_j \Delta w_j), \\ &= -\int_\tau \Bigg[+ u_j \left(\Delta u_{j-1} - 2\frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}\right) \\ &\qquad + v_j \left(\Delta v_{j-1} - 2\frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial y}\right) \\ &\qquad + w_j \left(\Delta w_{j-1} - 2\frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial z}\right)\Bigg]\, d\tau, \\ &= \int_\tau (\theta_j \theta_{j-1} + \mathfrak{u}_j \mathfrak{u}_{j-1} + \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}_{j-1} - 2\theta_j \theta_{j-1})\, d\tau; \end{aligned}$$

donc

$$(27)\qquad \int_\tau (\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau = \int_\tau (-\theta_j \theta_{j-1} + \mathfrak{u}_j \mathfrak{u}_{j-1} + \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}_{j-1} + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}_{j-1})\, d\tau;$$

d'où nous pouvons tirer l'inégalité suivante :

$$(28)\qquad \int_\tau (\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau \leqq \int_\tau (\theta_{j-1}^2 + \mathfrak{u}_{j-1}^2 + \mathfrak{v}_{j-1}^2 + \mathfrak{w}_{j-1}^2)\, d\tau \ (^1);$$

---

(1) On a, en effet, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\begin{aligned} \left[\int_\tau (\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau\right]^2 \leqq \int_\tau (\theta_j^2 + \mathfrak{u}_j^2 + \mathfrak{v}_j^2 + \mathfrak{w}_j^2)\, d\tau. \\ \int_\tau (\theta_{j-1}^2 + \mathfrak{u}_{j-1}^2 + \mathfrak{v}_{j-1}^2 + \mathfrak{w}_{j-1}^2)\, d\tau. \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{I}_j = \int_\tau (\theta_0^2 + \mathfrak{u}_0^2 + \mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{w}_0^2)\, d\tau,$$
$$\leqq \text{const. fin.} [\,\text{max. abs.} (\mathrm{F}_1 \mathrm{F}_2 \mathrm{F}_3)]^2 \qquad [\text{en vertu de } (10);$$

on en déduit immédiatement l'inégalité (24).

§ 4.

L'inégalité (24) nous permet déjà de nous assurer de la convergence des séries

$$\sum_0^\infty{}_j \varkappa^j \theta_j, \quad \sum_0^\infty{}_j \varkappa^j \mathrm{D}_1 \theta_j, \quad \ldots$$

pour tous les points intérieurs de τ dont la distance de σ est plus grande qu'une longueur finie. En effet, soit (xyz) un tel point dont la distance la plus petite de σ soit $\mathfrak{v}$. Construisons une sphère de rayon $\mathfrak{v}$ autour de ce point, alors on aura

$$\theta_j(x, y, z) = \frac{3}{4\pi\mathfrak{v}^3} \int \theta_j\, d\tau$$

en intégrant sur le volume de la sphère; donc

$$|\theta_j(x, y, z)| \leqq \frac{3}{4\pi\mathfrak{v}^3} \sqrt{\int \theta_j^2\, d\tau \int d\tau},$$
$$\leqq \text{const. fin.} \frac{\text{max. abs.} (\mathrm{F}_1 \mathrm{F}_2 \mathrm{F}_3)}{\mathfrak{v}^{\frac{3}{2}}}$$

et

(29) $$|\varkappa_j \theta_j| \leqq \text{const. fin.} \frac{\text{max. abs.} (\mathrm{F}_1 \mathrm{F}_2 \mathrm{F}_3)}{\mathfrak{v}^{\frac{3}{2}}} |\varkappa|^j.$$

Des inégalités analogues peuvent être démontrées pour

$$|\varkappa^j \mathrm{D}_1 \theta_j|, \quad |\varkappa^j \mathrm{D}_2 \theta_j|, \quad \ldots,$$

de manière que la convergence de la série

(30) $$\theta = \theta_0 + \varkappa\theta_1 + \varkappa^2\theta_2 + \ldots$$

et de ses dérivées est assurée pour tous les points intérieurs de σ dont la distance de σ est plus grande qu'une longueur finie; de la même manière, la convergence des séries

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \sum_0^\infty{}_j\, \varkappa^j u_j \\ v &= \sum_0^\infty{}_j\, \varkappa^j v_j \\ w &= \sum_0^\infty{}_j\, \varkappa^j w_j \end{aligned}\right. \qquad \text{(et de leurs dérivées);}$$

et les équations

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta u &= -F_1 + \varkappa\left(\Delta u - 2\frac{\partial\theta}{\partial x}\right), \\ \Delta v &= -F_2 + \varkappa\left(\Delta v - 2\frac{\partial\theta}{\partial y}\right), \\ \Delta w &= -F_3 + \varkappa\left(\Delta w - 2\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \end{aligned}\right.$$

découleront aussitôt de (13) et (18) pour tous les points de τ dont la distance de σ peut être aussi petite que l'on veut.

Pour démontrer que les séries (31) sont les solutions cherchées de notre problème principal, il ne reste donc qu'à démontrer que les séries (31) et leurs dérivées premières restent convergentes, même si l'on s'approche indéfiniment de la surface σ.

Nous allons d'abord nous occuper de la convergence de la série (30), et il faut chercher de quelle manière les C_j et les B_j dans les inégalités (21) et (22)

$$\text{abs.}\,|\,\theta_j\,|_1^2 \leqq C_j\, r_{12}^\Lambda,$$
$$\text{max. abs.}\,\theta_j \leqq B_j$$

dépendent de j.

Partons des équations (7^b),

$$u_j = u_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r} - U_j, \qquad \ldots,$$

où U_j, V_j, W_j sont les fonctions harmoniques de τ avec les valeurs-limite

$$(33)\qquad \begin{cases} U_j = \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x} \\ V_j = \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y} \\ W_j = \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{à la surface } \sigma),$$

en posant, pour abréger,

$$(34)\qquad \Psi_{j-1} = \frac{1}{2\pi}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}.$$

On aura, d'après la méthode de la moyenne arithmétique,

$$(35)\qquad \begin{cases} U_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + X_{j1}, \\ V_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + X_{j2}, \\ W_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + X_{j3} \end{cases}$$

où, d'après le théorème III^a du Chapitre I, X_{j1}, X_{j2}, X_{j3} auront des dérivées premières continues dans τ de la manière

$$(36)\qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial X_{j1}}{\partial s}\right|_1^2 \leqq \text{const. fin. max. abs.}\,\theta_{j-1}\,r_{12}^{\Lambda}, \qquad \ldots,$$

parce que les fonctions $\dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}$, $\dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}$ sont continues de la manière

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial s}\right|_1^2 \leqq \text{const. fin. max. abs.}\,\theta_{j-1}\,r_{12}^{\Lambda}$$

d'après (34) et le théorème I du Chap. II.

D'autre part, $\dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z}$ représentent, à l'extérieur de σ, des fonctions harmoniques avec des valeurs-limite

$$\frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi},\quad \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta},\quad \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta} \qquad (\text{à la surface } \sigma);$$

on a donc, d'après la méthode de la moyenne arithmétique,

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial x} = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + Y_{j1} \\ \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial y} = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \eta}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + Y_{j2} \\ \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial z} = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \dfrac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \zeta}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + Y_{j3} \end{cases} \qquad \text{(à l'extérieur de } \sigma\text{)},$$

où, d'après le théorème III^a du Chapitre I, Y_{j1}, Y_{j2}, Y_{j3} auront des dérivées premières continues dans le domaine extérieur de σ de la manière

$$(38)\qquad \text{abs.}\left|\frac{\partial Y_{j1}}{\partial s}\right|_1^2 \lesseqgtr \text{const. fin. max. abs.}\,\theta_{j-1}\,r_{12}^{\Lambda}, \qquad \ldots$$

Comme on a [1]

$$\left|\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\sigma \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma\right|_i = \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\sigma \frac{\partial \Psi_{j-1}}{\partial \xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma\right|_e, \qquad \ldots,$$

on tirera, de (35) et (37), les relations

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_j}{\partial \nu} = -\left|\dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial x\,\partial \nu}\right|_a + Z_{j1}, \\ \dfrac{\partial V_j}{\partial \nu} = -\left|\dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial y\,\partial \nu}\right|_a + Z_{j2}, \\ \dfrac{\partial W_j}{\partial \nu} = -\left|\dfrac{\partial^2 \Psi_{j-1}}{\partial z\,\partial \nu}\right|_a + Z_{j3}, \end{cases}$$

où Z_{j1}, Z_{j2}, Z_{j3} représentent des fonctions continues à la surface σ de la manière

$$(40)\qquad \text{abs.}\,|Z_{j1}|_1^2 \lesseqgtr \text{const. fin. max. abs.}\,\theta_{j-1}\,r_{12}^{\Lambda}.$$

---

(1) Pour s'assurer que ces équations sont vraies, on n'a qu'à se rappeler que les deuxièmes dérivées de Ψ_{j-1} sont continues de la manière

$$\text{abs.}\,|D_2\Psi_{j-1}|_1^2 \lesseqgtr \text{const. fin.}\,C_{j-1}\,r_{12}^{\Lambda} \qquad [\text{d'après (21) et le théorème II du Chap. II}].$$

(*Cp.* l'*Ouvrage cité,* 3e Partie, t. I, p. 394.)

Puisque

$$u_j = v_j = w_j = 0 \qquad (\text{à la surface } \sigma),$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned} \theta_j &= \frac{\partial u_j}{\partial \nu}\cos(\nu x) + \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\cos(\nu y) + \frac{\partial w_j}{\partial \nu}\cos(\nu z) \\ \theta_{j-1} &= \frac{\partial u_{j-1}}{\partial \nu}\cos(\nu x) + \frac{\partial v_{j-1}}{\partial \nu}\cos(\nu y) + \frac{\partial w_{j-1}}{\partial \nu}\cos(\nu z) \end{aligned}\right\} \quad (\text{à la surface } \sigma);$$

donc, d'après (7^b),

$$\begin{aligned} \theta_j &= \theta_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_i - \left[\frac{\partial U_j}{\partial \nu}\cos(\nu x) + \frac{\partial V_j}{\partial \nu}\cos(\nu y) + \frac{\partial W_j}{\partial \nu}\cos(\nu z)\right], \\ &= \theta_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_i + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_e + H_j \end{aligned}$$

[d'après (39)]; ou

$$\theta_j = -\left(\theta_{j-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_e\right) + H_j, \tag{41}$$

où

$$H_j = -[Z_{j1}\cos(\nu x) + Z_{j2}\cos(\nu y) + Z_{j3}\cos(\nu z)]$$

est une fonction continue à la surface σ de la manière

$$\text{abs.}\,|H_j|_1^2 \leq \text{const. fin. max. abs.}\,\theta_{j-1}\, r_{12}^\lambda. \tag{42}$$

Le théorème III du Chapitre II nous apprend maintenant l'inégalité suivante :

$$\text{abs.}\left|\theta_{j-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial \nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_e\right|_1^2 \leq \left(\varepsilon C_{j-1} + \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\,\theta_{j-1}\right) r_{12}^\lambda, \tag{43}$$

où ε représente un nombre positif que l'on peut choisir aussi petit que l'on veut, puisque

$$\text{abs.}\,|\theta_{j-1}|_1^2 \leq C_{j-1}\, r_{12}^\lambda \qquad [Cp. (21)],$$

nous avons donc, en vertu de (41), (42), (43),

$$\text{abs.}\,|\theta_j|_1^2 \leq \left(\varepsilon C_{j-1} + \frac{c}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\,\theta_{j-1}\right) r_{12}^\lambda \tag{44}$$

à la surface σ et aussi dans τ, d'après le théroème IV du Chapitre I, puisque θ_j est harmonique à l'intérieur de σ, où c est une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de A et où ε représente un nombre positif quelconque que l'on peut, du reste, choisir aussi petit que l'on veut.

Construisons la normale intérieure de σ dans un point $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ quelconque de la surface et sur cette normale un point $(\xi_0'\eta_0'\zeta_0')$ dont nous désignons la distance de $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ par $\mathfrak{v}_j$. Alors on a

$$\theta_j(\xi_0\eta_0\zeta_0) = \theta_j(\xi_0'\eta_0'\zeta_0') + |\theta_j|_{\xi_0'\eta_0'\zeta_0'}^{\xi_0\eta_0\zeta_0}$$

et, en vertu de (29) et (44),

$$|\theta_j| \leqq \frac{\alpha}{\mathfrak{v}_j^{\frac{3}{2}}} + \left(\varepsilon C_{j-1} + \frac{c}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\,\theta_{j-1}\right)\mathfrak{v}_j^{\lambda}, \tag{45}$$

où

$$\alpha = \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3), \tag{46}$$

et en choisissant, par exemple, $\varepsilon = \bar{k}$, $0 < \bar{k} < 1$,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{B}_j \leqq \alpha\frac{\bar{k}^j}{\mathfrak{v}_j^{\frac{3}{2}}} + (\mathfrak{C}_{j-1} + c\,\mathfrak{B}_{j-1})\,\mathfrak{v}_j^{\lambda} \text{ (1)} \qquad [\text{d'après (45)}],\\ &\mathfrak{C}_j \leqq \mathfrak{C}_{j-1} + c\,\mathfrak{B}_{j-1} \qquad [\text{d'après (44)}], \end{aligned}\right. \tag{47}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \text{abs. max.}(\bar{k}^j\,\theta_j) &= \mathfrak{B}_j,\\ \bar{k}^j\,C_j &= \mathfrak{C}_j, \end{aligned}\right. \tag{48}$$

de manière que

$$\left\{\begin{aligned} |\bar{k}^j\,\theta_j| &\leqq \mathfrak{B}_j,\\ \text{abs.}|\bar{k}^j\,\theta_j|_1^2 &\leqq \mathfrak{C}_j\, r_{12}^{\lambda}. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Soit L un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$\bar{k} < L < 1 \tag{50}$$

---

(1) Puisque $\bar{k} < 1$.

et posons

$$(51) \qquad \vartheta_j = \left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{2j}{3}},$$

alors nous pourrons écrire les inégalités (47) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_j &\leqq \alpha L^j + (\mathfrak{C}_{j-1} + c\mathfrak{B}_{j-1}) \left(\frac{k}{L}\right)^{j\frac{2\Lambda}{3}}, \\ \mathfrak{C}_j &\leqq \mathfrak{C}_{j-1} + c\mathfrak{B}_{j-1} \end{aligned}$$

ou, en désignant par

(52) μ le plus grand des deux nombres L et $\left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{2\Lambda}{3}}$,

$$(53) \qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_j \leqq (\alpha + \mathfrak{C}_{j-1} + c\mathfrak{B}_{j-1})\mu^j, \\ \mathfrak{C}_j \leqq \mathfrak{C}_{j-1} + c\mathfrak{B}_{j-1}. \end{cases}$$

Posons

$$(54) \qquad \mathfrak{A}_j = \mathfrak{C}_j + c\mathfrak{B}_j,$$

alors on trouvera, en vertu de (53),

$$(55) \qquad \mathfrak{A}_j \leqq \mathfrak{A}_{j-1} + c(\alpha + \mathfrak{A}_{j-1})\mu^j.$$

On déduira de (55) (¹)

$$(56) \qquad \mathfrak{A}_j \leqq \text{const. fin.}(\mathfrak{A}_0 + \alpha)$$

et comme

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_0 &= B_0 \leqq \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3) \\ \mathfrak{C}_0 &= C_0 \leqq \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3) \end{aligned}\right\} \quad \text{[d'après (11) et (12)]},$$

(¹) *Cp.* LIAPOUNOFF, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journ. de Math.*, 1898, p. 278). En effet, on a, d'après l'équation (55),

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_j + \alpha &\leqq (\mathfrak{A}_{j-1} + \alpha)(1 + c\mu^j), \\ \mathfrak{A}_j + \alpha &\leqq (\mathfrak{A}_0 + \alpha)(1 + c\mu)(1 + c\mu^2)(1 + c\mu^3)\ldots(1 + c\mu^j), \\ &\leqq \text{const. fin.}(\mathfrak{A}_0 + \alpha), \end{aligned}$$

on arrivera donc à l'inégalité (56).

on déduira de (56), (54) et (46) :

$$\mathfrak{A}_j = \mathfrak{C}_j + c\mathfrak{B}_j \gtrless \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3),$$

donc

$$(57) \qquad \begin{cases} \left| \overline{k}^j \theta_j \right| \gtrless \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3), \\ \text{abs.} \left| \overline{k}^j \theta_j \right|_1^2 \gtrless \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3) r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

si $\overline{k}$ est un nombre positif quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$0 < \overline{k} < 1.$$

Pour un $\varkappa$ quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$|\varkappa| < 1$$

nous pouvons toujours choisir un nombre $\overline{k}$ satisfaisant à l'inégalité

$$(58) \qquad |\varkappa| < \overline{k} < 1,$$

de manière que

$$(59) \qquad m = \frac{|\varkappa|}{\overline{k}}$$

satisfait à la condition

$$(60) \qquad 0 < m < 1,$$

et l'on trouvera, d'après (57),

$$(61) \qquad \begin{cases} |\varkappa^j \theta_j| \gtrless \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3) m^j, \\ \text{abs.} |\varkappa^j \theta_j|_1^2 \gtrless \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3) m^j r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

les constantes finies ne dépendant que de la surface σ et du nombre A.

Nous arrivons donc au résultat que la série

$$(62) \qquad \theta = \theta_0 + \varkappa\theta_1 + \varkappa^2\theta_2 + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente dans tout le domaine τ, et la continuité de θ satisfait à la condition

$$(63) \qquad \text{abs.} |\theta|_1^2 \gtrless \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3) r_{12}^{\lambda},$$

où Λ est toujours un nombre positif quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < \Lambda < 1,$$

et où la constante finie ne dépend que de la surface σ et du choix de Λ.

§ 5.

Il est maintenant très facile de démontrer la convergence des séries

$$u = \sum_0^j i\,\varkappa^j u_j, \qquad \ldots$$

et de leurs dérivées premières. En effet, on a, d'après (61),

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \left|\overline{k}^j \theta_j\right| &\leqq \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3)\,\overline{m}^j, \\ \text{abs.}\left|\overline{k}^j \theta_j\right|_1^2 &\leqq \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3)\,\overline{m}^j r_{12}^{\Lambda} \qquad (0 < \overline{m} < 1), \end{aligned} \right.$$

si k est un nombre positif quelconque satisfaisant à la condition

$$(65) \qquad 0 < \overline{k} < 1.$$

On déduira des équations (7^a) et (7^b) qui définissent les fonctions u_j, v_j, w_j, les équations suivantes :

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{k}^j u_j &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_1 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \sum_1^{j-1} i\,\overline{k}^i \theta_i \frac{d\tau}{r} - \sum_0^j i\,\overline{k}^i U_i, \\ \overline{k}^j v_j &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_2 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \sum_1^{j-1} i\,\overline{k}^i \theta_i \frac{d\tau}{r} - \sum_0^j i\,\overline{k}^i V_i, \\ \overline{k}^j w_j &= \frac{1}{4\pi}\int_\tau F_3 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \sum_1^{j-1} i\,\overline{k}^i \theta_i \frac{d\tau}{r} - \sum_0^j i\,\overline{k}^i W_i; \end{aligned} \right.$$

on trouvera donc, d'après (64),

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} \left|\overline{k}^j u_j\right| &\leqq \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3), \qquad \ldots, \\ \left|\overline{k}^j D_1 u_j\right| &\leqq \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3), \qquad \ldots \end{aligned} \right.$$

et

$$(68)\qquad \text{abs.}\left|\overline{k}^{j}\,\mathrm{D}_1 u_j\right|_1^2 \leqq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)\, r_{12}^{\Lambda}, \qquad \ldots$$

(théorème I du Chapitre II et théorème IV^a du Chapitre I), donc

$$(69)\qquad \begin{cases} |\varkappa^j u_j| \leqq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)\, m^j, & \ldots, \\ |\varkappa^j \mathrm{D}_1 u_j| \leqq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)\, m^j, & \ldots \end{cases}$$

et

$$(70)\qquad \text{abs.}\left|\varkappa^j \mathrm{D}_1 u_j\right|_1^2 \leqq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)\, m^j r_{12}^{\Lambda}, \qquad \ldots$$

en désignant par D_1 une dérivée première quelconque.

Nous arrivons donc au résultat que les séries

$$(71)\qquad \begin{cases} u = u_0 + \varkappa u_1 + \varkappa^2 u_2 + \ldots, \\ v = v_0 + \varkappa v_1 + \varkappa^2 v_2 + \ldots, \\ w = w_0 + \varkappa w_1 + \varkappa^2 w_2 + \ldots \end{cases}$$

et leurs dérivées premières sont absolument et uniformément convergentes dans tout le domaine τ, et l'on trouvera

$$(72)\qquad \text{abs. max.}(u, v, w, \mathrm{D}_1 u, \mathrm{D}_1 v, \mathrm{D}_1 w) \leqq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)\ [1],$$

$$(73)\qquad \text{abs.}\left|\mathrm{D}_1 u\right|_1^2 \leqq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)\, r_{12}^{\Lambda}\ [1], \qquad \ldots.$$

Les séries (71) représentent les solutions du problème principal proposé.

§ 6.

[Nous allons démontrer que les dérivées secondes des séries u, v, w sont des fonctions continues dans tout le domaine τ, en vertu de notre supposition (2), page 43.]

---

(1) Comme nous sommes partis des inégalités (11) et (12), page 34, on peut remplacer max. abs.$(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)$ par la plus grande des deux constantes C_0 et B_0, si

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}\int_\tau \mathrm{F}_1\frac{d\tau}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi}\int_\tau \mathrm{F}_2\frac{d\tau}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi}\int_\tau \mathrm{F}_3\frac{d\tau}{r}\right) - \frac{\partial \mathrm{U}_0}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{W}_0}{\partial z}\right| \leqq \mathrm{B}_0,$$

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}\int_\tau \mathrm{F}_1\frac{d\tau}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi}\int_\tau \mathrm{F}_2\frac{d\tau}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi}\int_\tau \mathrm{F}_3\frac{d\tau}{r}\right) - \frac{\partial \mathrm{U}_0}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{W}_0}{\partial z}\right|_1^2 \leqq \mathrm{C}_0\, r_{12}^{\Lambda}.$$

Rappelons-nous d'abord les équations (7^b), (35), (37), (39), (41). La fonction

$$\Psi_{j-1} = \frac{1}{2\pi}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}$$

considérée dans les équations (35) a des dérivées secondes qui satisfont [d'après (61) et le théorème II du Chapitre II] aux conditions

$$\begin{gathered} |z^{j-1}\mathrm{D}_2\Psi_{j-1}| \leq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)m^{j-1}, \\ \text{abs.}|z^{j-1}\mathrm{D}_2\Psi_{j-1}|_1^2 \leq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)m^{j-1}r_{12}^\Lambda, \end{gathered}$$

donc les fonctions X_{j1}, X_{j2}, X_{j3} dans les équations (35) et les fonctions Y_{j1}, Y_{j2}, Y_{j3} dans les équations (37) auront (d'après le théorème III^a du Chapitre I ou plutôt d'après un corollaire de ce théorème facile à démontrer) des dérivées secondes satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} |z^j\mathrm{D}_2\mathrm{X}_{j1}| &\leq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)m^j, \qquad \ldots, \\ \text{abs.}|z^j\mathrm{D}_2\mathrm{X}_{j1}|_1^2 &\leq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)m^jr_{12}^\Lambda, \qquad \ldots, \end{aligned}$$

et les fonctions Z_{j1}, Z_{j2}, Z_{j3} dans les équations (39), en conséquence aussi la fonction H_j dans l'équation (41) :

$$\theta_j = -\left(\theta_{j-1} - \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \theta_{j-1}\frac{d\tau}{r}\right|_e\right) + \mathrm{H}_j \tag{74}$$

auront des dérivées premières satisfaisant à des conditions que nous n'écrirons que pour la fonction H_j :

$$\left\{\begin{aligned} |z^j\mathrm{D}_1\mathrm{H}_j| &\leq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)m^j, \\ \text{abs.}|z^j\mathrm{D}_1\mathrm{H}_j|_1^2 &\leq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)m^jr_{12}^\Lambda. \end{aligned}\right. \tag{75}$$

L'équation (74), les inégalités (61), (21') et (75) nous donneront, à l'aide du théorème IV du Chapitre II,

$$\left|z^j\frac{\partial\theta_j}{\partial h}\right| \leq \text{const. fin. max. abs.}(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3)m^j \tag{76}$$

à la surface σ, si h représente une direction tangentielle quelconque, et

$$(77)\quad \text{abs.}\left|\varkappa^j \mathrm{D}_1 \theta_j\right|_1^2 \leqq \overbrace{(\text{const. fin.}\,|\varkappa|^j \Gamma_{j-1} + \text{const. fin.}\,|\varkappa|^j \mathrm{B}_{j-1})}^{|\varkappa|^j\Gamma_j}\, r_{12}^{\lambda} \quad (\text{dans } \tau).$$

Les inégalités (76) nous démontrent que la série

$$\theta = \theta_0 + \varkappa\theta_1 + \varkappa^2\theta_2 + \ldots$$

a des dérivées premières tangentielles à la surface σ continues sur σ. Nous pouvons démontrer des inégalités analogues à (76) et (77) pour les fonctions

$$\mathfrak{u}_j = \frac{\partial w_j}{\partial y} - \frac{\partial v_j}{\partial z}, \qquad \ldots.$$

En effet, écrivons les équations (7^b) de la manière suivante :

$$(78)\quad \begin{cases} u_j = -u_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \mathfrak{U}_j, \\ v_j = -v_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \mathfrak{V}_j, \\ w_j = -w_{j-1} + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}_{j-1}\frac{d\tau}{r} - \mathfrak{W}_j \end{cases}$$

où $\mathfrak{U}_j$, $\mathfrak{V}_j$, $\mathfrak{W}_j$ sont des fonctions harmoniques de τ avec les valeurs-limites :

$$(79)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}_j = \dfrac{\partial \mathrm{P}_{j-1}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{X}_{j-1}}{\partial z} \\ \mathfrak{V}_j = \dfrac{\partial \Pi_{j-1}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{P}_{j-1}}{\partial x} \\ \mathfrak{W}_j = \dfrac{\partial \mathrm{X}_{j-1}}{\partial x} - \dfrac{\partial \Pi_{j-1}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{à la surface } \sigma),$$

en posant, pour abréger,

$$(80)\quad \begin{cases} \Pi_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}_j\frac{d\tau}{r}, \\ \mathrm{X}_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}_j\frac{d\tau}{r}, \\ \mathrm{P}_j = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}_j\frac{d\tau}{r}. \end{cases}$$

On aura, d'après la méthode de la moyenne arithmétique [1],

$$(81)\qquad \mathfrak{u}_j = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial P_{j-1}}{\partial \eta} - \frac{\partial X_{j-1}}{\partial \zeta}\right)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + \Xi_{j1}, \qquad \ldots$$

dans τ,

$$(82)\qquad \frac{\partial P_{j-1}}{\partial y} - \frac{\partial X_{j-1}}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial P_{j-1}}{\partial \eta} - \frac{\partial X_{j-1}}{\partial \zeta}\right)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\sigma + H_{j1}, \qquad \ldots$$

à l'extérieur de σ, où d'après (61), le théorème du Chapitre II et le théorème III^a du Chapitre I ou plutôt d'après un corollaire de ce théorème facile à démontrer, les fonctions $\Xi_{j1}, \ldots, H_j, \ldots$ auront déjà des dérivées secondes satisfaisant aux conditions

$$|z^j D_2 \Xi_{j1}| < \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3)\, m^j,$$
$$\text{abs.}\,|z^j D_2 \Xi_{j1}| < \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3)\, m^j\, r_{12}^{\lambda}.$$

On tirera de (81) et (82) les relations

$$(83)\qquad \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial \nu} = -\left(\left|\frac{\partial^2 P_{j-1}}{\partial y\,\partial \nu}\right|_e - \left|\frac{\partial^2 X_{j-1}}{\partial z\,\partial \nu}\right|_e\right) + Z_{j1}, \qquad \ldots$$

où les fonctions $Z_{j1}, \ldots$ possèdent des dérivées premières satisfaisant aux conditions

$$|z^j D_1 Z_{j1}| < \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3)\, m^j,$$
$$\text{abs.}\,|z^j D_1 Z_{j1}| < \text{const. fin. max. abs.}(F_1 F_2 F_3)\, m^j\, r_{12}^{\lambda}.$$

Puisque

$$u_j = v_j = w_j = 0 \qquad (\text{à la surface } \sigma),$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_j &= \frac{\partial w_j}{\partial \nu}\cos(\nu y) - \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\cos(\nu z), \qquad \ldots\\ \mathfrak{u}_{j-1} &= \frac{\partial w_{j-1}}{\partial \nu}\cos(\nu y) - \frac{\partial v_{j-1}}{\partial \nu}\cos(\nu z), \qquad \ldots \end{aligned}\right\} \quad (\text{à la surface } \sigma)$$

[1] *Cp.* les déductions analogues, p. 45 et 53.

donc, d'après (78),

$$(84)\qquad \mathfrak{u}_j = -\mathfrak{u}_{j-1} + \left(\left| \frac{\partial^2 X_{j-1}}{\partial x\, \partial \nu} \right|_i - \left| \frac{\partial^2 \Pi_{j-1}}{\partial y\, \partial \nu} \right|_i \right) \cos(\nu y)$$
$$- \left(\left| \frac{\partial^2 \Pi_{j-1}}{\partial z\, \partial \nu} \right|_i - \left| \frac{\partial^2 P_{j-1}}{\partial x\, \partial \nu} \right|_i \right) \cos(\nu z)$$
$$- \left[\frac{\partial \mathfrak{w}_j}{\partial \nu} \cos(\nu y) - \frac{\partial \mathfrak{v}_j}{\partial \nu} \cos(\nu z) \right], \qquad \ldots$$

ou, d'après (83),

$$(84)'\qquad \mathfrak{u}_j = -\mathfrak{u}_{j-1} + \left(\left| \frac{\partial^2 X_{j-1}}{\partial x\, \partial \nu} \right|_i - \left| \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial \nu} \right|_i \right) \cos(\nu y)$$
$$- \left(\left| \frac{\partial^2 \Pi_{j-1}}{\partial z\, \partial \nu} \right|_i - \left| \frac{\partial^2 P_{j-1}}{\partial x\, \partial \nu} \right|_i \right) \cos(\nu z)$$
$$+ \left(\left| \frac{\partial^2 X_{j-1}}{\partial x\, \partial \nu} \right|_e - \left| \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial \nu} \right|_e \right) \cos(\nu y)$$
$$- \left(\left| \frac{\partial^2 \Pi_{j-1}}{\partial z\, \partial \nu} \right|_e - \left| \frac{\partial^2 P_{j-1}}{\partial x\, \partial \nu} \right|_e \right) \cos(\nu z) + K_{j1}, \qquad \ldots,$$

où les fonctions $K_{j1}, \ldots$ possèdent des données premières satisfaisant aux conditions

$$(85)\qquad \begin{cases} |\varkappa^j D_1 K_{j1}| \leqq \text{const. fin. max. abs. } (F_1, F_2, F_3)\, m^j, \\ \text{abs. } |\varkappa^j D_1 K_{j1}|_1^2 \leqq \text{const. fin. max. abs. } (F_1, F_2, F_3)\, m^j\, r_{12}^{\lambda}. \end{cases}$$

Si l'on remarque que

$$\left(\frac{\partial^2 X_{j-1}}{\partial x\, \partial \nu} - \frac{\partial^2 \Pi_{j-1}}{\partial y\, \partial \nu} \right) \cos(\nu y) - \left(\frac{\partial^2 \Pi_{j-1}}{\partial z\, \partial \nu} - \frac{\partial^2 P_{j-1}}{\partial x\, \partial \nu} \right) \cos(\nu z) = -\frac{\partial^2 \Pi_{j-1}}{\partial \nu^2} \quad (^1),$$

les équations (84)' nous donneront

$$\mathfrak{u}_j = -\mathfrak{u}_{j-1} - \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_\tau \mathfrak{u}_{j-1} \frac{d\tau}{r} \right|_i - \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_\tau \mathfrak{u}_{j-1} \frac{d\tau}{r} \right|_e + K_{j1}, \qquad \ldots$$

ou

$$(86)\qquad \mathfrak{u}_j = \mathfrak{u}_{j-1} - \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_\tau \mathfrak{u}_{j-1} \frac{d\tau}{r} \right|_e + K_{j1}, \qquad \ldots.$$

(1) A des termes du genre K_j, près, *cp.* ma Note : *Sur les potentiels de volume dont la densité satisfait à l'équation de Laplace* (*Comptes rendus*, t. CXLIII, 1906).

Les équations (86), les inégalités (61), (21)' et (85) nous donneront, à l'aide du théorème IV du Chapitre II [1],

$$(87)\qquad \left| z^j \frac{\partial \mathfrak{u}_j}{\partial h} \right| \leq \text{const. fin. max. abs.} (F_1, F_2, F_3) m^j, \qquad \ldots$$

à la surface σ, si h représente une direction tangentielle quelconque, et nous savons du reste que

$$(88)\qquad \text{abs.} \,|z^j D_1 \mathfrak{u}_j|_1^2 \leq (\text{const. fin.} \,|z|^j \Gamma_{j-1} + \text{const. fin.} \,|z|^j B_{j-1}) r_{12}^\lambda, \qquad \ldots.$$

Les inégalités (87) nous démontrent que les séries

$$(89)\qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 + z\mathfrak{u}_1 + z^2\mathfrak{u}_2 + \ldots$$

ont des dérivées premières tangentielles à la surface σ continues sur σ.

Écrivons les équations

$$\Delta u_j = \Delta u_{j-1} - 2\frac{\partial \theta_{j-1}}{\partial x}, \qquad \ldots$$

à la surface σ de la manière suivante :

$$\frac{\partial(\theta_j + \theta_{j-1})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{w}_j - \mathfrak{w}_{j-1}) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{v}_j - \mathfrak{v}_{j-1}), \qquad \ldots;$$

alors on verra que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\bar{k}^j (\theta_j + \theta_{j-1}) \right] \right| \leq \text{const. fin. max. abs.} (F_1, F_2, F_3) \bar{m}^j$$

[d'après (87)] à la surface σ, où

$$0 < \bar{m} < 1,$$

si

$$0 < \bar{k} < 1,$$

---

[1] Quoiqu'on n'ait pas toujours $\Delta \mathfrak{u}_j = 0$, ..., on a toutefois $\Delta(\mathfrak{u}_j - \mathfrak{u}_{j-1}) = 0$, ...; on peut donc démontrer (87), d'abord pour les fonctions $\bar{k}^j(\mathfrak{u}_j - \mathfrak{u}_{j-1})$, ... et, aprés cela, facilement pour les fonctions $z^j(\mathfrak{u}_j)$, ...

donc aussi

$$(90) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial\nu}(\varkappa^j\,\theta_j)\right| \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin. max. abs.}\,(F_1, F_2, F_3)\,m^j$$

à la surface σ.

Les inégalités (76) et (90) nous démontrent que dans tout le domaine τ

$$(91) \qquad |\varkappa^j\,D_1\theta_j| \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin. max. abs.}\,(F_1, F_2, F_3)\,m^j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

et de la même manière

$$(92) \qquad |\varkappa^j\,\Delta u_j| \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin. max. abs.}\,(F_1, F_2, F_3)\,m^j, \qquad \ldots \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

et du reste d'après (77) et (88)

$$(93) \qquad \text{abs.}\,|\varkappa^j\,\Delta u_j|_1^2 \overline{\overline{<}}\, (\overbrace{\text{const. fin.}\,|\varkappa|^j\,\Gamma_{j-1} + \text{const. fin.}\,|\varkappa|^j\,B_{j-1}}^{|\varkappa|^j\,\Gamma_j})\,r_{12}^{\lambda}.$$

Comme

$$(94) \qquad B_{j-1} = \text{max. abs.}\,D_1\,\theta_{j-1} \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin. max. abs.}\,(F_1, F_2, F_3)\,m^j,$$

on aura en tout cas, d'après (11)′, (12)′, (15)′, (17)′, (20)′, (22)′,

$$(95) \qquad |\varkappa|^j\,\Gamma_j \overline{\overline{<}}\, [\text{const. fin.}\,A + \text{const. fin. max. abs.}\,(F_1, F_2, F_3)]\,M^j,$$

où M représente une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de λ, qui n'a pourtant pas la qualité de m d'être plus petit que 1. Nous pourrons donc conclure

$$(96) \qquad \text{abs.}\,|\varkappa^j\,D_2\,u_j|_1^2 \overline{\overline{<}}\, [\text{const. fin.}\,A + \text{const. fin. max. abs.}\,(F_1, F_2, F_3)]\,M^j\,r_{12}^{\lambda}, \qquad \ldots$$

si

$$(97) \qquad \text{abs.}\,|f_j|_1^2 \overline{\overline{<}}\, A\,.\,r_{12}^{\lambda} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Nous allons nous servir des inégalités (92), (96), (76), (87) pour démontrer la continuité des dérivées secondes de u, v, w dans τ.

Comme u_j, v_j, w_j ont les valeurs limites zéro à la surface σ, on a

$$(98)\qquad u_j = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \Delta u_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial u_j}{\partial \nu}\frac{d\sigma}{r}, \qquad \ldots;$$

en vertu des relations

$$(99)\qquad \frac{\partial u_j}{\partial \nu} = \theta_j \cos(\nu x) - [\mathfrak{w}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos_j(\nu z)], \qquad \ldots,$$

on peut donner aux équations (98) la forme suivante :

$$(100)\qquad u_j = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \Delta u_j \frac{d\tau}{r}$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \{\theta_j \cos(\nu x) - [\mathfrak{w}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v}_j \cos(\nu z)]\}\frac{d\sigma}{r}, \qquad \ldots.$$

Soit (x, y, z) un point quelconque du domaine τ, construisons une sphère de rayon R autour de ce point et appelons le domaine de τ intérieur à cette sphère τ_0, alors on aura

$$\left| D_2 \int_\tau \Delta u_j \frac{d\tau}{r} \right| \leqq 2 \,\text{max. abs.}\, \Delta u_j \int_{\tau - \tau_0} \frac{d\tau}{r^3}$$
$$+ \text{const. fin. } \Gamma_j \int_{\tau_0} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} + \text{const. fin. max. abs. } \Delta u_j,$$

donc

$$\left| D_2\, \varkappa^j \int_\tau \Delta u_j \frac{d\tau}{r} \right|$$
$$\leqq \text{const. fin. max. abs. } (F_1, F_2, F_3)\,[m^j - \log R\ (^1)\ m^j] + R^\lambda \Gamma_j M^j\ (^2),$$

et l'on voit qu'en posant

$$R = L^j, \qquad L < \frac{1}{M},$$

---

(1) Si σ_0 représente la surface de $\tau - \tau_0$, on a au point (x, y, z)

$$\int_{\tau - \tau_0} \frac{d\tau}{r^3} = -\int_{\sigma_0} \log r \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\sigma,$$
$$= \text{const. fin. } \log R.$$

(2) Puisque

$$\int_{\tau_0} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} \leqq \text{const. fin. } R^\lambda,$$

comp. la remarque (1), p. 28.

on trouvera

$$(101)\qquad \left| D_2 k^j \int_\tau \Delta u_j \frac{d\tau}{r} \right| \overline{\gtrless} [\text{const. fin. } A + \text{const. fin. max. abs.} (F_1, F_2, F_3)] \mu^j,$$

où

$$0 < \mu < 1.$$

D'autre part, soit (x, y, z) un point quelconque de la surface σ, construisons une sphère de rayon R autour de ce point et appelons σ_0 la partie de σ intérieure à cette sphère; alors on aura, puisque

$$\begin{aligned} D_2 \int_\sigma \{ \theta_j \cos(\nu x) - [\mathfrak{w}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v}_j \cos(\nu z)] \} \frac{d\sigma}{r} \\ = \int_\sigma \Big[\Psi_1(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos(rx)}{r^2} + \Psi_2(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos(ry)}{r^2} \\ + \Psi_3(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos(rz)}{r^2} \Big] d\sigma, \qquad \ldots \text{ [1]}, \end{aligned}$$

Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 étant des fonctions se composant linéairement des dérivées premières de θ_j, $\mathfrak{v}_j$, $\mathfrak{w}_j$, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \left| D_2 \int_\sigma \{ \theta_j \cos(\nu x) - [\mathfrak{w}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v}_j \cos(\nu z)] \} \frac{d\sigma}{r} \right| \\ \overline{\gtrless} 3 \text{ max. abs.} (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \int_{\sigma - \sigma_0} \frac{d\sigma}{r^2} \\ + \text{const. fin. } \Gamma_j \int_{\sigma_0} \frac{d\sigma}{r^{2-\lambda}} + \text{const. fin. max. abs.} (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left| D_2 k^j \int_\sigma \{ \theta_j \cos(\nu x) - [\mathfrak{w}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v}_j \cos(\nu z)] \} \frac{\partial\sigma}{r} \right| \\ \overline{\gtrless} \text{const. fin. max. abs.} (F_1, F_2, F_3) [m^j + \log R \text{ [2] } m^j] + R^\lambda \Gamma_j M^j \text{ [3]}, \end{aligned}$$

---

(1) *Comp.* l'Ouvrage cité, formule (54), p. 42, et formule (59), p. 46.

(2) Puisque

$$\int_{\sigma - \sigma_0} \frac{d\sigma}{r^2} \overline{\gtrless} \text{const. fin. } \log R,$$

comp. l'Ouvrage cité p. 3, t. I, p. 263.

(3) Puisque

$$\int_{\sigma_0} \frac{d\sigma}{r^{2-\lambda}} \overline{\gtrless} \text{const. fin. } R^\lambda,$$

comp. la remarque (3), p. 13.

et l'on voit qu'en posant

$$R = L^j, \qquad L < \frac{1}{M},$$

on trouvera

$$(102) \qquad \left| D_2 \varkappa^j \int_\sigma \{ \theta_j \cos(\nu x) - [\mathfrak{w}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v}_j \cos(\nu z)] \} \frac{d\sigma}{r} \right|$$
$$\leqq [\text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs.}(F_1, F_2, F_3)] \mu^j \qquad (0 < \mu < 1).$$

Les équations (100) *nous démontrent, à l'aide des inégalités* (101) *et* (102), *que toutes les dérivées secondes de* u, v, w *seront continues dans* τ. C. Q. F. D.

On trouvera

$$\text{max. abs.}(D_2 u, D_2 v, D_2 w) \leqq \text{const. fin. A} + \text{const. fin. max. abs.}(F_1, F_2, F_3).]$$

§ 7.

Pour les déductions des paragraphes 3-6, afin d'établir que les séries

$$u = u_0 + \varkappa u_1 + \varkappa^2 u_2 + \ldots, \qquad \ldots$$

représentent les solutions de notre problème principal, nous n'avons pas besoin d'autres suppositions sur les fonctions f_1, f_2, f_3 que des suppositions suivantes :

En posant

$$u_0 = \frac{1-\varkappa}{4\pi} \int_\tau f_1 \frac{d\tau}{r} - U_0,$$
$$v_0 = \frac{1-\varkappa}{4\pi} \int_\tau f_2 \frac{d\tau}{r} - V_0,$$
$$w_0 = \frac{1-\varkappa}{4\pi} \int_\tau f_3 \frac{d\tau}{r} - W_0$$

(*comp.* p. 44-45), on doit supposer

$$|\theta_0| \leqq B_0,$$
$$\text{abs.} |\theta_0|_1^2 \leqq \varphi_0 r_{12}^\lambda,$$

où B_0 et C_0 sont des constantes finies, et

$$\Delta \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta_0 \frac{d\tau}{r} = -4\pi \frac{\partial \theta_0}{\partial x}, \qquad \ldots$$

à l'intérieur de τ, à une distance quelconque de σ aussi petite que l'on veut.

Comme nous l'avons déjà dit dans la remarque de la page 60, il faut, si nous ne pouvons pas démontrer que B_0 et C_0 sont

$$\overline{\gtrless} \text{const. fin. max. abs.} (f_1, f_2, f_3),$$

où la constante finie est indépendante des fonctions f_1, f_2, f_3, que toutes les déductions des paragraphes 3-6 restent tout de même vraies; on n'a qu'à remplacer partout le max. abs. (f_1, f_2, f_3) par la plus grande des deux constantes B_0 et C_0.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= X + \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \\ f_2 &= Y + \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \\ f_3 &= Z + \frac{\partial\Theta}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{103}$$

où X, Y, Z sont continues dans τ de la manière

$$\text{abs.} \,|\, X \,|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin.} \, r_{12}^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1), \tag{104}$$

et où Θ représente une fonction harmonique de τ dont la continuité dans τ suffit à la condition

$$\text{abs.} \,|\, \Theta \,|_1^2 \overline{\gtrless} \text{const. fin.} \, r_{12}^{\lambda}. \tag{105}$$

On aura, dans ce cas,

$$\left\{\begin{aligned} \theta_0 = {} & \frac{1-\varkappa}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau X \frac{d\tau}{r} + \frac{1-\varkappa}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau Y \frac{d\tau}{r} + \frac{1-\varkappa}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau Z \frac{d\tau}{r} \\ & + \frac{1-\varkappa}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial x} \frac{d\tau}{r} + \frac{1-\varkappa}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial y} \frac{d\tau}{r} + \frac{1-\varkappa}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \frac{\partial\Theta}{\partial z} \frac{d\tau}{r} \\ & - \frac{\partial U_0}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial y} - \frac{\partial W_0}{\partial z}, \\ = {} & -\frac{1-\varkappa}{2} \left\{ \Theta - \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \int_\tau \Theta \frac{d\tau}{r} \right|_e \right\} + H_0 \qquad (\text{à la surface } \sigma) \end{aligned}\right. \tag{106}$$

(*cp.* les déductions p. 53-55), où H_0 représente une fonction de (xyz) à la surface σ satisfaisant aux inégalités

$$(107)\qquad \begin{cases} \text{max. abs. } H_0 \leq \text{const. fin. max. abs.}(XYZ\Theta), \\ \text{abs.}\,|H_0|_1^2 \leq \text{const. fin. max. abs.}(XYZ\Theta)\, r_{12}^{\Lambda}, \end{cases}$$

où Λ est un nombre positif quelconque < 1.

L'équation (106) nous démontre, à l'aide du théorème III du Chapitre II et des inégalités (107), que θ_0 suffit à toutes les conditions qui sont nécessaires pour la démonstration que les séries

$$u = u_0 + \kappa u_1 + \kappa^2 u_2 + \ldots$$

représentent les solutions du problème

$$(108)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\left(X + \dfrac{\partial\Theta}{\partial x}\right) \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -\left(Y + \dfrac{\partial\Theta}{\partial y}\right) \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -\left(Z + \dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\right) \end{cases} \qquad (\text{dans } \tau),$$

$$(109)\qquad u = v = w = 0 \qquad (\text{à la surface } \sigma).$$

Nous pouvons réduire à ce problème (108)-(109) le problème suivant :

$$(110)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -X \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -Y \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -Z \end{cases} \qquad (\text{dans } \tau),$$

$$(111)\qquad \begin{cases} u = \bar{u} \\ v = \bar{v} \\ w = \bar{w} \end{cases} \qquad (\text{à la surface } \sigma),$$

si X, Y, Z satisfont aux mêmes conditions qu'avant et si $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ représentent des fonctions continues avec leurs dérivées premières à la surface σ de manière que

$$(112)\qquad \text{abs.}\,|D_1 \bar{u}|_1^2 \leq \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda}, \qquad \ldots.$$

En effet, posons

$$(113)\quad \begin{cases} u' = u - \frac{1}{k}\,U, \\ v' = v - \frac{1}{k}\,V, \\ w' = w - \frac{1}{k}\,W, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \theta' &= \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ \Theta &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned}$$

où U, V, W représentent les fonctions harmoniques de τ avec les valeurs-limites

$$(114)\quad \begin{cases} U = k\overline{u} \\ V = k\overline{v} \\ W = k\overline{w} \end{cases} \quad \text{à la surface } \sigma;$$

alors on aura réduit le problème (110)-(111) au problème suivant :

$$(115)\quad \begin{cases} \Delta u' + k\dfrac{\partial \theta'}{\partial x} = -\left(X + \dfrac{\partial \Theta}{\partial x}\right), \quad \ldots \quad (\text{dans } \tau), \\ u' = v' = w' = 0 \quad (\text{à la surface } \sigma). \end{cases}$$

Θ aura du reste, d'après le théorème IV^a du Chapitre I, la propriété (105), le problème (110)-(111) est donc réduit au problème (108)-(109).

§ 8.

Il ne nous reste plus qu'à nous débarrasser de la condition

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0.$$

Supposons que la fonction

$$(116)\quad F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

soit $\neq 0$, mais continue dans τ de la manière

$$(117)\quad \text{abs.}\,|F|_1^2 \leq \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Proposons-nous le problème

$$(118)\quad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -f_1, \quad \ldots \quad (\text{dans } \tau), \\ u = v = w = 0 \quad (\text{à la surface } \sigma), \end{cases}$$

et posons

$$\Psi = +\frac{1}{4\pi(1+k)}\int_\tau F\frac{d\tau}{r}, \tag{119}$$

$$\left\{\begin{aligned} u &= u' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{U},\\ v &= v' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \Psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{V},\\ w &= w' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \Psi\frac{d\tau}{r} + \mathfrak{W},\end{aligned}\right. \tag{120}$$

où $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ représentent les fonctions de τ avec les valeurs-limites

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Psi\frac{d\tau}{r}\\ \mathfrak{V} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \Psi\frac{d\tau}{r}\\ \mathfrak{W} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \Psi\frac{d\tau}{r}\end{aligned}\right. \qquad (\text{à la surface } \sigma); \tag{121}$$

alors le problème (118) se réduira au problème suivant pour les fonctions u', v', w' :

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u' + k\frac{\partial\theta'}{\partial x} &= -g_1\\ \Delta v' + k\frac{\partial\theta'}{\partial y} &= -g_2\\ \Delta w' + k\frac{\partial\theta'}{\partial z} &= -g_3\end{aligned}\right. \qquad (\text{dans } \tau), \tag{122}$$

$$u' = v' = w' = 0 \qquad (\text{à la surface } \sigma), \tag{123}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} g_1 &= f_1 - (1+k)\frac{\partial\Psi}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right),\\ g_2 &= f_2 - (1+k)\frac{\partial\Psi}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right),\\ g_3 &= f_3 - (1+k)\frac{\partial\Psi}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right),\end{aligned}\right. \tag{124}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = 0. \tag{125}$$

Ce problème est donc aussi réduit à notre problème principal; la remarque suivante sera souvent utile. Supposons, comme toujours, que f_1, f_2, f_3 soient continues de manière que

$$(126) \qquad \text{abs.}\,|f_j|_1^2 \leqq A r_{12}^{\lambda} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

alors la fonction Ψ, définie par (119), aura des dérivées premières satisfaisant aux conditions

$$(127) \qquad |D_1\Psi| \leqq \text{const. fin. } A + \text{const. fin. max. abs.}(f_1 f_2 f_3),$$

$$(128) \qquad \text{abs.}\,|D_1\Psi|_1^2 \leqq [\text{const. fin. } A + \text{const. fin. max. abs.}(f_1 f_2 f_3)]\, r_{12}^{\lambda},$$

et l'on trouvera aussi

$$(129) \qquad \left| D_1\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right| \leqq \text{const. fin. } A + \text{const. fin. max. abs.}(f_1 f_2 f_3),$$

$$(130) \qquad \text{abs.}\left| D_1\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right|_1^2$$
$$\leqq [\text{const. fin. } A + \text{const. fin. max. abs.}(f_1 f_2 f_3)]\, r_{12}^{\lambda},$$

donc

$$(131) \qquad \begin{cases} |g_j| \leqq \text{const. fin. } A + \text{const. fin. max. abs.}(f_1 f_2 f_3) \\ \text{abs.}\,|g_j|_1^2 \leqq [\text{const. fin. } A + \text{const. fin. max. abs.}(f_1 f_2 f_3)]\, r_{12}^{\lambda} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3).$$

On tirera des déductions des paragraphes 5 et 6 la conclusion que les solutions u', v', w', donc aussi les solutions u, v, w du problème

$$\Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial x} = -f_1, \qquad \ldots \qquad (\text{dans } \tau),$$
$$u = v = w = 0 \qquad (\text{à la surface } \sigma),$$

satisferont aux inégalités

$$(132) \qquad \text{max. abs.}(u, v, w, D_1 u, D_1 v, D_1 w, D_2 u, D_2 v, D_2 w)$$
$$\leqq \text{const. fin. } A + \text{const. fin. max. abs.}(f_1 f_2 f_3)$$

aussi dans les cas où

$$F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0.$$

Quoiqu'il soit nécessaire, pour notre réduction du problème au problème principal, de supposer F continue dans τ et même continue de la manière (117), le second membre de l'inégalité (132) ne contiendra que le max. abs. $(f_1 f_2 f_3)$ et la constante A.

Si, au lieu de

$$u = v = w = 0 \qquad (\text{à la surface } \sigma),$$

on doit avoir

$$u = \bar{u}, \qquad v = \bar{v}, \qquad w = \bar{w} \qquad (\text{à la surface } \sigma),$$

on fera la même réduction qu'au paragraphe 7, et nous arrivons donc au résultat suivant :

On peut toujours trouver des fonctions u, v, w continues avec leurs dérivées premières satisfaisant aux conditions

$$\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} = -f_1, \qquad \ldots \qquad [(\text{dans } \tau) \ (-1 < k < +\infty)],$$

$$u = \bar{u}, \qquad v = \bar{v}, \qquad w = \bar{w} \qquad (\text{à la surface } \sigma),$$

si les fonctions données $f_1 f_2 f_3$ et

$$F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

sont continues dans τ de la manière

$$\begin{aligned} &\text{abs.}\,|f_j|_1^2 \leqq \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda} \\ &\text{abs.}\,|F|_1^2 \leqq \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda} \end{aligned} \qquad (0 < \lambda < 1),$$

et si les fonctions $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ données à la surface sont continues avec leurs dérivées premières, de manière que

$$\text{abs.}\,|D_1 \bar{u}|_1^2 \leqq \text{const. fin. } r_{12}^{\lambda}, \qquad \ldots \qquad (0 < \lambda < 1).$$