GEORGES REMOUNDOS

Sur quelques points de la théorie des nombres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 367-386
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__367_0>

SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES NOMBRES,

PAR M. GEORGES REMOUNDOS.

INTRODUCTION.

On doit à Hermite (1) une célèbre méthode pour établir la transcendance de quelques nombres importants en Analyse (*voir*, par exemple, le *Cours d'Analyse* de M. Goursat, t. I, p. 192); ainsi Hermite a démontré la transcendance du nombre e et le mathématicien allemand Lindemann, s'inspirant par le procédé suivi par Hermite, a établi la transcendance du nombre π (2). Les démonstrations de ces deux géomètres ont été simplifiées par M. David Hilbert (3). M. Lindemann a, à cette occasion, établi un théorème d'une grande importance, à savoir :

Si les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont algébriques, l'égalité*

$$(1) \qquad A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_n e^{\alpha_n} = 0$$

entraîne la nullité de tous les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Ayant été récemment attiré par l'analogie visible que ce théorème présente avec celui de M. Borel, qui m'a servi de base dans mes recherches sur les zéros des fonctions multiformes, je me suis proposé les problèmes suivants :

Le théorème d'Hermite-Lindemann joue-t-il dans la théorie des nombres le même rôle que le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions?

---

(1) *Comptes rendus*, t. LXXVII, 1873.
(2) *Mathematische Annalen*, Vol. XX, 1882, p. 213.
(3) *Gottinger Nachrichten*, 1893.

Ces deux théorèmes ont-ils des conséquences analogues? Quel est le parti que nous pouvons tirer de cette analogie intéressante pour le développement de la théorie des nombres?

Dans un certain point de vue, on peut dire que le théorème de M. Lindemann présente de l'analogie surtout avec le cas particulier du théorème de M. Borel, qui consiste dans l'impossibilité de l'identité

$$(2) \qquad P_1(z)\,e^{H_1(z)} + P_2(z)\,e^{H_2(z)} + \ldots + P_n(z)\,e^{H_n(z)} = 0,$$

dans laquelle les coefficients $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_n(z)$ et les exposants $H_1(z)$, $H_2(z)$, ..., $H_n(z)$ désignent des polynomes [1].

J'ai annoncé quelques résultats de mes recherches sur ce sujet à l'Académie des Sciences de Paris dans sa séance du 16 janvier 1905 et ce travail n'est que le développement de la Note relative publiée dans les *Comptes rendus*.

CHAPITRE I.

LES CONSÉQUENCES DU THÉORÈME D'HERMITE-LINDEMANN.

1. Dans ce Chapitre nous établirons quelques résultats, acquis à l'aide du théorème de M. Lindemann et notre méthode d'élimination, qui, malgré sa simplicité, nous a conduit à l'extension du théorème de M. Picard aux fonctions multiformes.

Considérons un polynome $q(u)$

$$(3) \qquad q(u) = u^{\nu} + \gamma_1 u^{\nu-1} + \gamma_2 u^{\nu-2} + \ldots + \gamma_{\nu-1} u + \gamma_{\nu},$$

où les coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\nu}$ ne sont pas tous des nombres algébriques et une équation de la forme

$$(4) \qquad q(u) = A\,e^{\alpha},$$

[1] Ou bien encore des fonctions algébriques [*voir* mon Mémoire *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1906, fascicule I)].

les nombres A et α étant algébriques. Le second membre de cette équation sera un nombre transcendant conformément au théorème de M. Lindemann, dans le cas où α est différent de zéro.

Je démontrerai que les racines de l'équation (4) sont, en général, des nombres transcendants et qu'une équation de la forme (4) admettant des racines algébriques doit être regardée comme exceptionnelle.

Je commence par remarquer qu'il est impossible d'avoir ν équations distinctes de la forme

$$(5) \qquad q(u) = A_1, \quad q(u) = A_2, \quad \ldots, \quad q(u) = A_\nu,$$

admettant des racines algébriques, si les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ sont algébriques. En effet, supposons que ces équations (5) admettent respectivement les racines algébriques $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$. Nous aurions alors

$$(6) \qquad q(u_1) = A_1, \quad q(u_2) = A_2, \quad \ldots, \quad q(u_\nu) = A_\nu,$$

et les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seraient évidemment distincts; la résolution de ces ν équations par rapport aux coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ donnerait pour eux des valeurs algébriques, ce qui est contradictoire à notre hypothèse qu'un au moins des coefficients γ_i est transcendant. Nous en déduisons le théorème suivant :

Il n'y a pas ν valeurs algébriques de u, pour lesquelles le nombre $q(u)$ soit algébrique; le nombre de ces valeurs de u ne dépasse pas $\nu - 1$.

Il est clair qu'aucune telle valeur ne saurait exister dans le cas où les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ sont tous transcendants algébriquement distincts, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a entre ces nombres transcendants aucune relation linéaire à coefficients algébriques. Nous remarquons que ces valeurs de u sont analogues à celles que j'ai appelées (E) dans la théorie des fonctions au sujet des zéros des fonctions multiformes (valeurs exceptionnelles E) [1]. D'une façon plus précise, leur nombre ne peut dépasser $\nu - K$, lorsque le nombre des

---

[1] Voir *Comptes rendus*, 20 avril 1903, 8 février 1904, et *Bulletin de la Société mathématique*, 1904, fasc. I.

coefficients γ_i transcendants algébriquement distincts est égal à K. J'entends par là qu'il y a $\nu - k$ équations de la forme

$$(7)\quad \begin{cases} c_{1,0} + c_{1,1}\gamma_1 + c_{1,2}\gamma_2 + \ldots + c_{1,\nu}\gamma_\nu = A_1, \\ c_{2,0} + c_{2,1}\gamma_1 + c_{2,2}\gamma_2 + \ldots + c_{2,\nu}\gamma_\nu = A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_{\nu-k,0} + c_{\nu-k,1}\gamma_1 + c_{\nu-k,2}\gamma_2 + \ldots + c_{\nu-k,\nu}\gamma_\nu = A_{\nu-k}, \end{cases}$$

à coefficients algébriques, à l'aide desquelles le polynome $q(u)$ peut prendre la forme

$$(7')\qquad q(u) = \gamma_1 K_1(u) + \gamma_2 K_2(u) + \ldots + \gamma_K K_K(u) + K(u),$$

où les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ sont transcendants algébriquement distincts et les $K_1(u), K_2(u), \ldots, K_K(u)$ désignent des polynomes en u à coefficients algébriques.

2. Je démontrerai maintenant qu'il est impossible d'avoir $\nu + 1$ équations de la forme

$$(8)\qquad q(u) = A_1 e^{\alpha_1}, \qquad q(u) = A_2 e^{\alpha_2}, \qquad \ldots, \qquad q(u) = A_{\nu+1} e^{\alpha_{\nu+1}},$$

admettant des racines algébriques, si les seconds membres sont tous des nombres transcendants ($\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\ldots$, $\alpha_{\nu+1} \neq 0$).

Supposons que ces équations (8) admettent respectivement les racines algébriques $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, u_{\nu+1}$. Nous aurons

$$(9)\qquad \begin{cases} q(u_1) = A_1 e^{\alpha_1}, \qquad q(u_2) = A_2 e^{\alpha_2}, \qquad \ldots, \qquad q(u_\nu) = A_\nu e^{\alpha_\nu}, \\ \qquad\qquad q(u_{\nu+1}) = A_{\nu+1} e^{\alpha_{\nu+1}}, \end{cases}$$

et les nombres algébriques $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, u_{\nu+1}$ seront nécessairement distincts, parce que, s'il y en avait deux égaux, par exemple $u_k = u_\lambda$, nous aurions l'égalité

$$(10)\qquad A_k e^{\alpha_k} - A_\lambda e^{\alpha_\lambda} = 0$$

qui, conformément au théorème de Lindemann, est impossible si l'on n'a pas : ou bien

$$\alpha_k = \alpha_\lambda$$

et, par suite,

$$A_k = A_\lambda$$

ou bien

$$A_k = A_\lambda = 0.$$

Cela posé, l'élimination des coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ entre les $\nu+1$ équations (9) nous conduit à l'égalité

$$(11)\qquad \lambda_1 A_1 e^{\alpha_1} + \lambda_2 A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + \lambda_\nu A_\nu e^{\alpha_\nu} + \lambda_{\nu+1} A_{\nu+1} e^{\alpha_{\nu+1}} = \lambda,$$

où

$$(12)\qquad \lambda_i = \begin{vmatrix} 1 & u_{i+1} & \ldots & u_{i+1}^{\nu-1} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & u_{\nu+1} & \ldots & u_{\nu+1}^{\nu-1} \\ 1 & u_1 & \ldots & u_1^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ 1 & u_{i-1} & \ldots & u_{i-1}^{\nu-1} \end{vmatrix} \qquad \lambda = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & \ldots & u_1^{\nu-1} & u_1^\nu \\ 1 & u_2 & \ldots & u_2^{\nu-1} & u_2^\nu \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ 1 & u_\nu & \ldots & u_\nu^{\nu-1} & u_\nu^\nu \\ 1 & u_{\nu+1} & \ldots & u_{\nu+1}^{\nu-1} & u_{\nu+1}^\nu \end{vmatrix}$$

Le déterminant qui donne le nombre λ_i est d'ordre ν, tandis que celui qui donne λ est d'ordre $\nu+1$; nous voyons bien que ces nombres λ_i ($i = 1, 2, \ldots, \nu+1$) et λ sont algébriques et essentiellement différents de zéro.

Tous les termes du premier membre de l'égalité (11) sont des nombres transcendants, parce que les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$ ont été supposés différents de zéro, mais ces exposants ne sont pas nécessairement différents entre eux et il peut bien arriver que certains d'entre eux soient égaux. Dans ce cas, il y aura des réductions dans le premier membre de (11) et le nombre des termes transcendants distincts peut être tellement diminué qu'aucun des coefficients primitifs ne reste intact ; mais, quelles que soient ces réductions, le seul terme algébrique, qui constitue le second membre de (11), ne subira aucune réduction et restera intact.

Notre égalité (11) prendra donc une forme irréductible telle que

$$(13)\qquad \mathfrak{a}_1 e^{\alpha_{\rho_1}} + \mathfrak{a}_2 e^{\alpha_{\rho_2}} + \ldots + \mathfrak{a}_\mu e^{\alpha_{\rho_\mu}} = \lambda \qquad (\alpha_{\rho_1} \neq \alpha_{\rho_2} \neq \ldots \neq \alpha_{\rho_\mu}),$$

les coefficients $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mu$ étant toujours des nombres algébriques. D'après le théorème de Lindemann, l'égalité (12) est impossible, parce que le nombre λ est assurément différent de zéro.

Nous en déduisons le théorème suivant :

S'il y a des valeurs algébriques de u, pour lesquelles $q(u)$ soit un nombre transcendant de la forme : Ae^{α} *(les* A *et* α *étant des nombres algébriques), le nombre de ces valeurs ne dépasse jamais* ν.

Nous appellerons *exceptionnelles* ces valeurs de u, ainsi que celles pour lesquelles $q(u)$ est un nombre algébrique. Leur nombre total est au plus égal à $2\nu - 1$; dans le cas contraire, tous les coefficients du polynome seraient algébriques.

On appellera aussi *exceptionnelle* toute équation de la forme (4) admettant des racines algébriques et leur nombre total aura la même limite.

Il est aisé de s'assurer de l'existence de polynomes $q(u)$ avec des coefficients transcendants admettant ν valeurs algébriques exceptionnelles de u, parce que l'on peut déterminer les coefficients γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_ν par les équations

$$(14)\qquad q(u_1) = A_1 e^{\alpha_1}, \qquad q(u_2) = A_2 e^{\alpha_2}, \qquad \ldots, \qquad q(u_\nu) = A_\nu e^{\alpha_\nu},$$

les u_1, u_2, $\ldots$, u_ν étant des nombres algébriques, ainsi que les A_1, A_2, $\ldots$, A_ν, α_1, α_2, $\ldots$, α_ν. Il est remarquable que, lorsque le polynome $q(u)$ admet ν telles valeurs exceptionnelles, les coefficients γ_i sont des nombres de la forme

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \ldots + a_\nu e^{\alpha_\nu},$$

les nombres a_i étant aussi algébriques.

Si j'appelle $u = \varphi(z)$ la fonction algébrique de z, définie par l'équation

$$u^\nu + \gamma_1 u^{\nu-1} + \ldots + \gamma_{\nu-1} u + \gamma_\nu = z,$$

notre théorème prend la forme suivante :

Il est impossible d'avoir 2ν *nombres algébriques* a_1, a_2, $\ldots$, $a_{2\nu}$ *tels que les équations*

$$(15)\quad \varphi(z) = a_1, \qquad \varphi(z) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi(z) = a_{2\nu-1}, \qquad \varphi(z) = a_{2\nu}$$

admettent des racines de la forme Ae^{α}, *les nombres* A *et* α *étant algé-*

briques. Cette forme, ainsi que toutes les précédentes, rappelle immédiatement l'extension du théorème de M. Picard et de ses généralisations aux fonctions à ν *branches* (*Comptes rendus,* 20 avril 1903 et *Bulletin de la Société mathématique,* 1904, fasc. I).

Nous avons ici la limite supérieure $2\nu - 1$ au lieu de 2ν, que nous avions dans la théorie des fonctions, parce que l'*infini* n'a pas à intervenir dans la théorie des nombres.

3. Nous devons dire quelques mots sur les réductions qui peuvent avoir lieu dans le premier membre de l'égalité (11), et qui se présentent dans le cas où il y a des exposants égaux.

Supposons que l'on ait

$$\alpha_1 = \alpha_2;$$

alors l'élimination de e^{α_1} entre les deux équations

$$q(u_1) = A_1 e^{\alpha_1}, \qquad q(u_2) = A_2 e^{\alpha_1},$$

nous conduira à l'équation

$$A_2 q(u_1) - A_1 q(u_2) = 0, \tag{16}$$

ou bien

$$\begin{aligned}(17)\quad & [A_2 K(u_1) - A_1 K(u_2)] + [A_2 K_1(u_1) - A_1 K_1(u_2)]\gamma_1 \\ & + [A_2 K_2(u_1) - A_1 K_2(u_2)]\gamma_2 + \ldots + [A_2 K_k(u_1) - A_1 K_k(u_2)]\gamma_k = 0,\end{aligned}$$

si l'on utilise la forme réduite (7′) de $q(u)$.

Les transcendants $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ étant supposés algébriquement indépendants, l'égalité (17) entraînera les égalités suivantes

$$\begin{gathered} A_2 K(u_1) = A_1 K(u_2), \\ A_2 K_1(u_1) = A_1 K_1(u_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_2 K_k(u_1) - A_1 K_k(u_2) = 0, \end{gathered}$$

ou bien

$$\frac{K(u_1)}{K(u_2)} = \frac{K_1(u_1)}{K_1(u_2)} = \ldots = \frac{K_K(u_1)}{K_K(u_2)} = \frac{A_1}{A_2}. \tag{17'}$$

Ainsi ces nombres u_1 et u_2 sont liés par K équations algébriques de degré au plus égal à ν.

Deux nombres u_1 et u_2 seront appelés *équivalents* lorsque le quotient $q(u_1):q(u_2)$ est un nombre algébrique; ainsi, deux tels nombres satisfont aux équations (7), qui montrent que le nombre des équivalents à un certain nombre donné est au plus égal à $\nu - K$.

Nous croyons utile de citer aussi deux corollaires du paragraphe précédent, qui présentent un intérêt particulier.

Corollaire I. — *S'il y a n équations exceptionnelles,*

$$(18)\quad \begin{cases} q(u) = A_1 e^{\alpha_1}, \quad q(u) = A_2 e^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad q(u) = A_n e^{\alpha_n} \\ \qquad (\alpha_1 \neq 0, \ \alpha_2 \neq 0, \ \ldots \ \alpha_n \neq 0), \end{cases}$$

dont la première admet μ_1 racines algébriques distinctes, la seconde μ_2 telles racines et ainsi de suite, la dernière μ_n racines algébriques distinctes, la somme $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ ne doit pas dépasser le nombre ν. Par conséquent, l'égalité $\mu_1 = \nu$ entraînera

$$\mu_2 = 0, \qquad \mu_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mu_n = 0.$$

Corollaire II. — *S'il y a une équation exceptionnelle de la forme*

$$q(u) = A_0 e^{\alpha_0} \qquad (\alpha_0 \neq 0),$$

ayant ses ν racines distinctes et algébriques, toute autre équation

$$q(u) = A e^{\alpha} \qquad (A e^{\alpha} \neq A_0 e^{\alpha_0}) \quad \alpha \neq 0$$

ne saurait admettre aucune racine algébrique.

4. Tous les résultats des paragraphes précédents s'étendent facilement aux équations de la forme

$$(19)\quad q(u) = A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_m e^{\alpha_m} \qquad [\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_{m\mu} \neq 0],$$

où les termes du second membre sont tous transcendants.

On y arrivera encore par la même méthode à l'aide du théorème d'Hermite-Lindemann. Il n'y a rien à changer dans l'analyse des paragraphes précédents : s'il y avait $\nu + 1$ équations de la forme (19) admettant des racines algébriques, on serait conduit encore à une égalité de M. Lindemann qui pourra avoir ici un nombre de termes exponentiels supérieur à $\nu + 1$. Le terme algébrique unique étant le même que dans le cas de $m = 1$, l'impossibilité de l'égalité en question sera bien conclue.

Ainsi nous obtenons un théorème, qui généralise bien le théorème correspondant du paragraphe 2. *Le nombre algébrique u_1 doit être considéré comme exceptionnel, lorsqu'on a*

$$(20) \qquad q(u_1) = A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_m e^{\alpha_m},$$

quel que soit l'entier m, où les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont, ou bien tous différents de zéro, ou bien tous nuls (1).

Je profite ici de l'occasion pour faire une remarque analogue concernant la théorie des fonctions.

Si nous envisageons la fonction $f(z, u)$

$$(21) \qquad f(z, u) = u^\nu + A_1(z) u^{\nu-1} + A_2(z) u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z) u + A_\nu(z),$$

les $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_\nu(z)$ désignant des fonctions entières quelconques et que nous désignions par $e^{M(r)}$ le plus grand des ordres de grandeur des coefficients $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_{\nu-1}(z), A_\nu(z)$, nous n'avons considéré comme *exceptionnelles*, jusqu'ici, que les valeurs de u, pour lesquelles $f(z, u)$ est de la forme

$$(22) \qquad Q(z)\, e^{H(z)},$$

où la fonction entière $H(z)$ croît comme $M(r)$, tandis que $Q(z)$ croît moins vite que

$$e^{[M(r)]^{(1-\alpha)}},$$

α étant un nombre positif quelconque, mais fixe.

Mais, d'une façon analogue à celle de la théorie des nombres, la

(1) C'est donc par exception que le polynome $q(u)$ peut donner, pour des valeurs algébriques de u, des nombres de la forme $\sin a$ et $\cos a$, a étant un nombre algébrique. Ainsi, les équations $q(u) = \sin a$ ou $q(u) = \cos a$, qui admettent des racines algébriques, sont *exceptionnelles*.

même méthode d'élimination nous conduit à une généralisation des cas d'exception très intéressante.

Ainsi, il faut considérer comme *exceptionnelle* toute valeur u_0 de u, pour laquelle on ait

$$(23)\quad f(z, u_0) = Q_1(z)\, e^{H_1(z)} + Q_2(z)\, e^{H_2(z)} + \ldots + Q_{m-1}(z)\, e^{H_{m-1}(z)} + Q_m(z)\, e^{H_m(z)},$$

où les $H_i(z)$ croissent tous comme $M(r)$, tandis que les $Q_i(z)$ croissent tous moins vite que $e^{M(r)^{1-\alpha}}$, α étant toujours un nombre positif quelconque, mais fixe.

En effet, il est impossible d'avoir $\nu+1$ valeurs de u, jouissant de la propriété (23), puisque, dans le cas contraire, l'élimination des coefficients $A_i(z)$ entre les $\nu+1$ équations

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} f(z, u_0) = Q_{0,1}(z)\, e^{H_{0,1}(z)} + Q_{0,2}(z)\, e^{H_{0,2}(z)} + \ldots + Q_{0,m_0}(z)\, e^{H_{0,m_0}(z)}, \\ f(z, u_1) = Q_{1,1}(z)\, e^{H_{1,1}(z)} + Q_{1,2}(z)\, e^{H_{1,2}(z)} + \ldots + Q_{1,m_1}(z)\, e^{H_{1,m_1}(z)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(z, u_\nu) = Q_{\nu,1}(z)\, e^{H_{\nu,1}(z)} + Q_{\nu,2}(z)\, e^{H_{\nu,2}(z)} + \ldots + Q_{\nu,m_\nu}(z)\, e^{H_{\nu,m_\nu}(z)}, \end{array}\right.$$

nous conduirait à une identité de M. Borel, prise dans sa forme la plus générale, dans laquelle le seul terme d'ordre de grandeur inférieur à $e^{M(r)}$ sera égal au nombre λ du paragraphe 2. Il est toujours aisé de comprendre que les réductions qui peuvent avoir lieu parmi les termes exponentiels ne sauraient jamais, grâce au théorème de M. Borel, donner naissance à un terme d'ordre de grandeur moindre que $e^{M(r)}$ qui ne soit pas nul.

Ainsi, notre théorème s'étend, sans aucune modification, à ces nouveaux cas d'exception [1].

---

[1] Par exemple, la valeur u_0 sera exceptionnelle, si l'on a

$$f(z, u_0) = \sin \Psi(z),$$

ou bien

$$f(z, u_0) = \cos \Psi(z),$$

$\Psi(x)$ étant une fonction entière, puisqu'on a

$$\sin \Psi(z) = \frac{e^{i\Psi(z)} - e^{-i\Psi(z)}}{2i}, \qquad \cos \Psi(z) = \frac{e^{i\Psi(z)} + e^{-i\Psi(z)}}{2}.$$

Le cas primitif, que nous considérions jusqu'ici, correspond aux valeurs

$$m_0 = m_1 = \ldots = m_\nu = 1.$$

Il est fort remarquable que, dans le cas d'exception (23) où $m > 1$, si les coefficients $A_i(z)$ sont d'ordre fini, le second membre aura son *ordre réel toujours égal à son ordre apparent,* grâce au théorème de M. Borel.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait une identité telle que

$$(25)\qquad Q_1(z)e^{H_1(z)} + Q_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + Q_m(z)e^{H_m(z)} = P(z)e^{H(z)},$$

$P(z)$ étant une fonction d'ordre inférieur à ρ [ρ étant le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$].

Si aucune réduction n'est possible parmi les termes de (25), cette identité entraîne

$$Q_1(z) = Q_2(z) = \ldots = Q_m(z) = 0.$$

Si le terme $P(z)e^{H(z)}$ peut être réduit avec un terme du premier membre, par exemple avec $Q_1(z)e^{H_1(z)}$, il ne saurait se réduire avec un autre, parce que le premier membre de (25) est supposé irréductible. Supposons donc que l'on ait

$$H(z) - H_1(z) = P_1(z),$$

$P_1(z)$ étant un polynome de degré inférieur à ρ. On en déduirait

$$(26)\qquad [Q_1(z) - P(z)e^{P_1(z)}]e^{H_1(z)} + Q_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + Q_m(z)e^{H_m(z)} = 0.$$

Aucune autre réduction n'étant possible, cette dernière identité entraînerait

$$(27)\qquad Q_2(z) = 0, \quad Q_3(z) = 0, \quad \ldots, \quad Q_m(z) = 0, \quad Q_1(z) = P(z)e^{P_1(z)},$$

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de $m > 1$.

Nous avons donc, dans le cas de $m > 1$, un fait contraire à celui qui caractérise le cas d'exception usuel de $m = 1$.

Si nous appelons $u = \varphi(z)$ la fonction à ν branches, définie par l'équation

$$f(z, u) = 0,$$

nous aurons des équations exceptionnelles telles que

$$\varphi(z) = u_0$$

ou bien

$$\varphi(z) = \omega(z),$$

$\omega(z)$ désignant une fonction entière croissant moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ dont le caractère d'exception ne provient pas de ce que la densité de leurs racines n'est pas celle qui convient à l'ordre de grandeur $e^{M(r)}$.

Je ne parlerai pas ici de l'extension de ce résultat au cas où les $A_i(z)$ sont uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, qui se fait aisément.

5. Il y a aussi d'autres cas d'exception dignes d'attirer notre attention : supposons qu'il y ait $\nu + 1$ valeurs de u, u_0, u_1, ..., u_ν telles que

$$(28) \qquad \begin{cases} f(z, u_0) = \theta_0(z) + Q_0(z)e^{H_0(z)}, \\ f(z, u_1) = \theta_1(z) + Q_1(z)e^{H_1(z)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f(z, u_\nu) = \theta_\nu(z) + Q_\nu(z)e^{H_\nu(z)}, \end{cases}$$

les $\theta_0(z)$, $\theta_1(z)$, ..., $\theta_\nu(z)$ croissant aussi moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$.

Je suppose de plus que parmi les exposants

$$H_0(z), \quad H_1(z), \quad \dots, \quad H_\nu(z),$$

il y en a au moins un, $H_0(z)$ par exemple, tel qu'aucune des différences

$$H_0(z) - H_1(z), \quad H_0(z) - H_2(z), \quad \dots, \quad H_0(z) - H_\nu(z)$$

n'ait un ordre de grandeur inférieur à $e^{M(r)}$.

Dans ces conditions, il est aisé de voir que l'élimination des coefficients $A_i(z)$ entre les équations (28) nous conduit à une identité de M. Borel, dans laquelle le terme exponentiel en $e^{H_0(z)}$ restera irréductible et son coefficient sera toujours égal à $\lambda_0 Q_0(z)$ dans la forme définitive, exigée par le théorème de M. Borel. λ_0, ayant la valeur citée dans le paragraphe 2, est une quantité essentiellement différente de zéro et, par conséquent, l'identité en question est impossible.

Supposons maintenant que la différence $H_0(z) - H_1(z)$ croît moins vite que $[M(r)]^{1-\alpha}$ et écrivons la fonction $f(z, u)$ sous la forme

$$(29)\quad f(z, u) = \sigma_0(u) + \sigma_1(u) B_1(z) + \sigma_2(u) B_2(z) + \ldots + \sigma_\mu(u) B_\mu(z),$$

où les fonctions entières $B_i(z)$, étant toutes d'ordre de grandeur $e^{M(r)}$, ne sont liées par aucune relation linéaire à coefficients d'ordre de grandeur inférieur à $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ (α étant un nombre positif quelconque).

Posons

$$H_0(z) - H_1(z) = E(z)$$

et éliminons l'exponentielle $e^{H_1(z)}$ entre les équations

$$f(z, u_0) = \theta_0(z) + Q_0(z) e^{E(z)} e^{H_1(z)}, \qquad f(z, u_1) = \theta_1(z) + Q_1(z) e^{H_1(z)},$$

nous obtiendrons l'identité suivante :

$$(30)\quad \begin{aligned} &[\sigma_0(u_0) Q_1(z) - \sigma_0(u_1) Q_0(z) e^{E(z)}] \\ &+ [\sigma_1(u_0) Q_1(z) - \sigma_1(u_1) Q_0(z) e^{E(z)}] B_1(z) + \ldots = 0 \end{aligned}$$

qui entraine

$$(31)\quad \frac{\sigma_0(u_0)}{\sigma_0(u_1)} = \frac{\sigma_1(u_0)}{\sigma_1(u_1)} = \ldots = \frac{\sigma_\mu(u_0)}{\sigma_\mu(u_1)} = \frac{Q_0(z) e^{E(z)}}{Q_1(z)},$$

puisque l'identité (30) est linéaire entre les $B_1(z)$, $B_2(z)$, ..., $B_\mu(z)$ avec des coefficients d'ordre de grandeur inférieur à $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ (α étant un certain nombre positif).

Les équations (31) prouvent que, si u_0 est donné, les valeurs u_1, qui jouissent de la propriété en question (elles pourraient être aussi appelées *équivalentes à* u_0), sont, en nombre fini, au plus égales à $\nu - \mu - 1$.

Tous ces résultats montrent bien clairement que les équations de la forme

$$f(z, u_0) = \theta_0(z) + Q_0(z) e^{H_0(z)}$$

doivent être considérées comme exceptionnelles et le nombre de ces valeurs exceptionnelles de u ne dépasse jamais

$$\nu - \mu - 1 + \nu = 2\nu - \mu - 1. \tag{32}$$

Nous sommes donc en présence d'un nouveau cas d'exception.

On démontre aussi bien aisément qu'il est impossible d'avoir $\nu + 1$ valeurs de u telles que

$$\left\{\begin{array}{l} f(z, u_0) = \theta_0(z) + Q_{0,1}(z) e^{H_{0,1}(z)} + Q_{0,2}(z) e^{H_{0,2}(z)} + \ldots + Q_{0,m_0}(z) e^{H_{0,m_0}(z)}, \\ f(z, u_1) = \theta_1(z) + Q_{1,1}(z) e^{H_{1,1}(z)} + Q_{1,2}(z) e^{H_{1,2}(z)} + \ldots + Q_{1,m_1}(z) e^{H_{1,m_1}(z)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ f(z, u_\nu) = \theta_\nu(z) + Q_{\nu,1}(z) e^{H_{\nu,1}(z)} + Q_{\nu,2}(z) e^{H_{\nu,2}(z)} + \ldots + Q_{\nu,m_\nu}(z) e^{H_{\nu,m_\nu}(z)}, \end{array}\right. \tag{33}$$

où il y a une exponentielle au moins non commune : j'entends par là qu'il y a une exponentielle qui ne figure que dans une des équations (33). Les entiers $m_0, m_1, \ldots, m_\nu$ sont quelconques et les $\theta_i(z)$ et $Q_{ij}(z)$ sont toujours supposées croître moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$.

En effet, l'élimination nous conduira à une identité de M. Borel, dans laquelle le terme contenant l'exponentielle non commune sera irréductible et son coefficient sera essentiellement différent de zéro.

De même on peut démontrer le théorème suivant :

S'il y a ν équations de la forme (33) dont les seconds membres n'ont pas exactement les mêmes exponentielles (c'est-à-dire s'il y a une exponentielle qui ne soit pas commune à tous les seconds membres), il ne saurait y avoir qu'un nombre fini d'autres équations de la même forme.

D'une façon plus claire, s'il y a un nombre infini d'équations de la forme (33), elles auront toutes les mêmes exponentielles dans leurs seconds membres et en même nombre; les équations de la forme (33), qui différeraient au point de vue des exponentielles, sont en *nombre fini*.

En effet, supposons qu'une exponentielle figurant dans l'expression des $f(z, u_1), f(z, u_2), \ldots, f(z, u_\nu)$ ne figure pas dans celle de $f(z, u_0)$; alors l'élimination nous conduirait à une identité de M. Borel qui, après toutes les réductions, jouirait de la propriété suivante : le coefficient de l'exponentielle en question sera une fonction des u_0, $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ (un polynome) dont les coefficients ne dépendront pas de u_0. Par conséquent, les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ étant fixés, les valeurs de u_0 seront en nombre fini.

Nous avons une infinité de valeurs exceptionnelles de u dans l'exemple suivant :

$$(34)\qquad f(z, u) = u^\nu + e^{H_1(z)}u^{\nu-1} + e^{H_2(z)}u^{\nu-2} + \ldots + e^{H_{\nu-1}(z)}u + e^{H_\nu(z)},$$

où les exponentielles sont toutes d'ordre de grandeur $e^{M(r)}$ et telles qu'il n'y ait entre elles aucune relation de la forme

$$(35)\qquad \mathfrak{S}_0(z) + \mathfrak{S}_1(z)e^{H_1(z)} + \mathfrak{S}_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + \mathfrak{S}_\nu(z)e^{H_\nu(z)} = 0,$$

les $\mathfrak{S}_0(z), \mathfrak{S}_1(z), \ldots, \mathfrak{S}_\nu(z)$ croissant moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$ (α un nombre positif quelconque).

Dans cet exemple, $f(z, u)$ est, pour toute valeur de u, de la forme (33); mais on voit bien que toutes ces valeurs de $f(z, u)$ présentent exactement les mêmes exponentielles et il n'y a exception que pour $u = 0$. Pour cette valeur $u = 0$, on a

$$f(z, 0) = e^{H_\nu(z)}$$

où il manque les $\nu - 1$ autres exponentielles.

6. Ces remarques intéressantes peuvent servir de base pour établir une généralisation du théorème cité au commencement du paragraphe précédent, généralisation que je ne ferai pas dans ce travail.

Nous avons encore des cas d'exception qui ne se caractérisent pas par une densité de racines autre que celle qu'exige l'ordre de grandeur $e^{M(r)}$. Tout au contraire, une expression de la forme

$$(36)\qquad Q_0(z) + Q_1(z)e^{H_1(z)} + Q_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + Q_m(z)e^{H_m(z)}$$

ne peut être égale à $Q(z)e^{H(z)}$, $Q(z)$ croissant moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\alpha}}$.

Les résultats exposés dans le paragraphe précédent se transportent à la théorie des nombres.

Ainsi, par la même méthode appuyée sur le théorème d'Hermite-Lindemann, nous établissons les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Les équations de la forme $q(u) = a + A e^{\alpha}$ (les nombres A, α et a étant algébriques, qui admettent des racines algébriques, sont exceptionnelles et leur nombre ne dépasse jamais la limite $2\nu - \mu - 1$, ν étant le degré du polynome $q(u)$ et μ le nombre des coefficients de $q(u)$ algébriquement distincts. D'une façon particulière, il est impossible d'avoir $\nu + 1$ équations de la forme*

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} q(u) = a_0 + A_0 e^{\alpha_0}, \\ q(u) = a_1 + A_1 e^{\alpha_1}, \\ q(u) = a_2 + A_2 e^{\alpha_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ q(u) = a_\nu + A_\nu e^{\alpha_\nu} \\ (\alpha_0 \neq \alpha_1,\ \alpha_0 \neq \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_0 \neq \alpha_\nu), \end{array}\right.$$

si l'exposant α_0 est distinct de tous les autres, admettant des racines algébriques aussi : il n'y a plus que $\nu - \mu - 1$ équations de la forme

$$(38)\qquad q(u) = a + A e^{\alpha}$$

ayant leur exposant α égal à un nombre donné α_0 admettant des racines algébriques.

Théorème II. — *Il est impossible d'avoir $\nu + 1$ équations de la forme*

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} q(u) = a_{0,0} + A_{0,1} e^{\alpha_{0,1}} + A_{0,2} e^{\alpha_{0,2}} + \dots + A_{0,\nu} e^{\alpha_{0,\nu}}, \\ q(u) = a_{1,0} + A_{1,1} e^{\alpha_{1,1}} + A_{1,2} e^{\alpha_{1,2}} + \dots + A_{1,\nu} e^{\alpha_{1,\nu}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ q(u) = a_{\nu,0} + A_{\nu,1} e^{\alpha_{\nu,1}} + A_{\nu,2} e^{\alpha_{\nu,2}} + \dots + A_{\nu,\nu} e^{\alpha_{\nu,\nu}} \end{array}\right.$$

admettant des racines algébriques s'il y a au moins un exposant ne figurant que dans un des seconds membres de ces équations (un exposant non commun à deux seconds membres).

Théorème III. — *S'il y a une infinité d'équations de la forme (39) admettant des racines algébriques, elles contiennent, sauf peut-être un nombre fini d'entre elles, dans leurs seconds membres exactement les mêmes exponentielles. En d'autres termes, ces équations ne peuvent différer que par les coefficients des exponentielles.*

CHAPITRE II.

α'. UNE GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

7. Considérons maintenant une fonction algébrique $Q(u)$ de la forme suivante :

$$(40)\qquad Q(u) = \sigma_0(u) + \gamma_1\sigma_1(u) + \gamma_2\sigma_2(u) + \ldots + \gamma_n\sigma_n(u)$$

où un, au moins, des nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ est transcendant et les $\sigma_0(u), \sigma_1(u), \ldots, \sigma_n(u)$ désignent des fonctions algébriques de u uniformes (polynomes) ou bien multiformes.

Le cas où les $\sigma_0(u), \sigma_1(u), \ldots, \sigma_n(u)$ désignent des polynomes a été étudié dans le Chapitre précédent. Nous allons, dans ce Chapitre, étudier le cas où ces fonctions algébriques sont multiformes en établissant un théorème qui n'en est pas moins applicable au cas où $Q(u)$ est un polynome en u.

Nous pouvons, sans nuire à la généralité du problème, supposer que les coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sont tous des nombres transcendants et même algébriquement et linéairement distincts.

J'entends par là qu'il n'y a pas entre ces nombres une relation de la forme

$$(41)\qquad b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + \ldots + b_n\gamma_n = b,$$

les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ et b étant aussi algébriques.

En effet, lorsqu'il y a de telles relations, je n'ai qu'à faire des éliminations entre celles-ci et l'équation (37) pour réduire les coefficients γ_i au nombre minimum et obtenir une forme irréductible de la fonction $Q(u)$.

Cela posé, supposons qu'il y a une valeur algébrique u_0 de u telle que

$$(42)\qquad Q(u_0) = A_0,$$

A_0 étant aussi un nombre algébrique.

Il est clair, alors, que cette valeur u_0 doit annuler simultanément toutes les fonctions $\sigma_0(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, ..., $\sigma_n(u)$ et l'on aura

$$(43) \quad \sigma_0(u_0)=0, \quad \sigma_1(u_0)=0, \quad \sigma_2(u_0)=0, \quad \ldots, \quad \sigma_n(u_0)=0.$$

Il s'ensuit que le nombre de ces valeurs de u ne peut dépasser le nombre des racines communes des équations algébriques

$$\sigma_0(u)=0, \quad \sigma_1(u)=0, \quad \ldots, \quad \sigma_n(u)=0;$$

ce nombre sera donc fini.

Supposons maintenant qu'il y ait $n+1$ valeurs algébriques de u, les u_0, u_1, u_2, ..., u_n pour lesquelles $Q(u)$ soit de la forme

$$(44) \quad \begin{gathered} A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_m e^{\alpha_m} \\ (\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0,\ \ldots,\ \alpha_m \neq 0). \end{gathered}$$

La méthode d'élimination, exposée dans le Chapitre précédent, combinée avec le théorème d'Hermite-Lindemann nous conduit à la conclusion que les nombres algébriques u_0, u_1, ..., u_n doivent satisfaire à l'équation

$$\Phi(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} \sigma_0(u_0) & \sigma_1(u_0) & \ldots & \sigma_n(u_0) \\ \sigma_0(u_1) & \sigma_1(u_1) & \ldots & \sigma_n(u_1) \\ \sigma_0(u_2) & \sigma_1(u_2) & \ldots & \sigma_n(u_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sigma_0(u_n) & \sigma_1(u_n) & \ldots & \sigma_n(u_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Il en résulte que le nombre des valeurs algébriques de u, pour lesquelles $Q(u)$ est de la forme (41), est fini. De telles valeurs de u doivent donc être considérées comme exceptionnelles.

Je n'insisterai pas davantage sur cette question.

β'. L'ANALOGIE DU THÉORÈME DE M. BOREL AVEC LE THÉORÈME D'HERMITE-LINDEMANN.

8. Je tiens ici à appeler l'attention des mathématiciens sur l'analogie remarquable entre le théorème de M. Borel et celui d'Hermite-

Lindemann mise en lumière dans ce travail. C'est là un point de contact de la théorie des nombres avec la théorie des fonctions qui me paraît très important. L'analogie en question est triple :

1° Analogie de forme;
2° Analogie des conséquences de ce théorème;
3° Analogie des méthodes qui nous conduisent à ces conséquences.

Mais il n'est pas difficile de comprendre que l'analogie de forme n'est pas parfaite. Le théorème de M. Borel, pris dans toute sa généralité, s'énonce comme il suit :

Si les fonctions entières $Q_1(z), Q_2(z), \ldots, Q_n(z)$ *croissent moins vite que* $e^{\mu(r)}$ *et les fonctions* $H_i(z) - H_k(z)$ *croissent plus vite que* $e^{[\mu(r)]^{1+\alpha}}$ *(*α *étant un nombre positif quelconque), l'identité*

$$Q_1(z)e^{H_1(z)} + Q_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + Q_n(z)e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne la nullité de tous les coefficients $Q_1(z), Q_2(z), \ldots, Q_n(z)$.

On voit bien que le théorème de M. Borel a des conditions qui sont basées sur une comparaison entre les coefficients $Q_i(z)$ et les exposants $H_i(z)$ et cette comparaison est due à la notion de l'*ordre de grandeur* [module maximum pour $|z| = r$] et, en particulier, au classement des fonctions entières d'ordre fini.

Le théorème d'Hermite-Lindemann n'a pas de telles conditions; les coefficients et les exposants de l'égalité de M. Lindemann ne sont que des nombres algébriques; il n'y a aucune autre condition.

Ce défaut me fait penser que ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème très général qui supposerait des égalités ayant des coefficients et des exposants quelconques, pourvu qu'une condition analogue à celle du théorème de M. Borel soit réalisée. Il est très probable que, si nous n'avons pas aujourd'hui ce théorème, qui correspondrait complètement au théorème de M. Borel, c'est parce que nous ne possédons pas la classification nécessaire des nombres transcendants. Je pense aussi que ce défaut intéressant, signalé dans l'analogie entre le théorème de M. Borel et celui de M. Lindemann, pourrait servir de point de départ pour une classification des nombres transcendants analogue à celle des fonctions entières et pour un développement de la théorie des nombres conforme à celui de la théorie des fonctions.

Le problème de la généralisation du théorème d'Hermite-Lindemann se pose donc d'une façon très intéressante. C'est là un sujet de recherches très difficile et très important.