ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. CASTELNUOVO
F. ENRIQUES

Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 339-366
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__339_0>

SUR LES

INTÉGRALES SIMPLES DE PREMIÈRE ESPÈCE

D'UNE SURFACE OU D'UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE

A PLUSIEURS DIMENSIONS.

Par MM. G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES.

Les résultats sur les surfaces algébriques, qu'on vient d'obtenir tout dernièrement, ont établi une certaine analogie entre le *genre* d'une courbe et l'*irrégularité* d'une surface, c'est-à-dire le nombre des intégrales distinctes de différentielles totales de première espèce, dont la surface est douée. Les deux caractères sont liés en effet avec les connexions linéaires des *continua* de Riemann à deux et à quatre dimensions, qui représentent la courbe et la surface par des points réels.

L'analogie n'arrive pas pourtant à permettre de transporter aisément aux surfaces la plupart des propriétés connues des courbes. Il serait donc naturel de s'attendre à rencontrer de nouvelles difficultés, lorsqu'on aborderait l'étude des variétés algébriques à trois ou à plusieurs dimensions. Heureusement il n'en est rien, tant que l'on se borne aux questions qui se rapportent à la connexion linéaire, ou, si l'on veut, aux intégrales simples de première ou seconde espèce attachées à la variété algébrique. Nous démontrerons en effet que (nº 3) :

Le nombre des intégrales simples distinctes de première espèce appartenant à une variété algébrique à trois (ou plusieurs) dimensions est égal au nombre des intégrales analogues attachées à une surface section de la variété. Pour l'étude des intégrales, de leurs périodes, etc., on peut toujours remplacer la variété par la surface section. On sait bien que la substitution analogue n'est pas permise, lorsqu'on veut examiner les intégrales simples d'une surface algébrique en relation avec les intégrales abéliennes d'une courbe section plane de celle-ci.

Le nombre q des intégrales nommées appartenant à la variété est un caractère invariant de celle-ci, par rapport aux transformations birationnelles. Il est donc naturel d'examiner s'il y a des relations entre ce nombre q et les autres invariants auxquels on parvient soit par les méthodes géométriques, soit par des considérations d'*Analysis situs*.

Quelques invariants géométriques d'une variété à trois dimensions ont été définis par M. Nöther, dans un Mémoire classique sur les fonctions algébriques; ce sont des caractères des *surfaces canoniques* découpées sur la variété, d'ordre n, par les variétés *adjointes* d'ordre $n-5$, passant convenablement par les surfaces, les courbes et les points multiples de la variété. C'est ainsi que le genre géométrique $P_g^{(1)}$ et le genre arithmétique $P_a^{(1)}$ d'une surface canonique fournissent deux invariants de la variété, qu'on appelle les *genres superficiels géométrique* et *arithmétique* de celle-ci. Or nous parvenons à démontrer (n° 5) cette relation intéressante :

Le nombre des intégrales simples, distinctes, de première espèce, d'une variété à trois dimensions est égal à la différence $P_g^{(1)} - P_a^{(1)}$ *entre les genres superficiels géométrique et arithmétique de la variété;* fait *exception* le cas où la courbe intersection variable de deux surfaces canoniques est réductible. On remarquera l'analogie de ce théorème avec le résultat relatif aux surfaces, exprimé par l'égalité $q = p_g - p_a$, auquel a conduit une longue série de recherches dues à MM. Picard, Severi, Enriques, Castelnuovo. Une propriété analogue subsiste aussi pour les variétés à un nombre quelconque de dimensions.

Une voie tout à fait différente pour découvrir des caractères invariants d'une variété algébrique est indiquée par M. Picard, dans ses profondes recherches sur ce sujet. Le rôle essentiel est joué ici par le *continuum* de Riemann à $2d$ dimensions attaché à une variété algébrique à d dimensions; en effet, les caractères de connexion du *continuum* fournissent des invariants de la variété. Tel est, par exemple, le nombre des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans le *continuum*, nombre qui, augmenté d'une unité, donne la *connexion* *linéaire* du *continuum*. Mais on ne parvient pas ainsi à un nouvel invariant, car on verra (nº 7) que :

Le nombre q des intégrales simples, distinctes, de première espèce d'une variété algébrique est la moitié du nombre des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans le relatif continuum *de Riemann.* Le théorème subsiste quel que soit le nombre d des dimensions de la variété. Pour $d = 1$, on a une proposition connue de Riemann. Le cas $d = 2$ a été épuisé tout dernièrement, et d'une manière assez indirecte, en profitant de la relation $q = p_g - p_a$. L'extension aux cas $d > 2$ est, au contraire, assez simple. Il résulte facilement de ce théorème que la connexion linéaire d'une variété algébrique à $d \geqq 3$ dimensions est égale à la connexion linéaire de la variété à $d-1$, $d-2$, ..., 2 dimensions qui est la section de celle-là par un espace linéaire. C'est une remarque qu'on peut aussi justifier directement par des considérations d'*Analysis situs*.

Une surface (irrégulière) possédant $q > 0$ intégrales simples de première espèce jouit de propriétés géométriques intéressantes, et en particulier de la propriété suivante : il existe sur la surface des systèmes ∞^q de courbes, parmi lesquelles il n'y en a pas ∞^1 appartenant à une série linéaire. Cette proposition, qu'on était amené à soupçonner d'après quelques remarques de M. Humbert concernant la proposition réciproque, vient d'être établie récemment par M. Enriques; elle sert à caractériser d'une façon complète, au point de vue géométrique, les surfaces irrégulières. Or, la même propriété subsiste aussi pour les variétés algébriques à $d > 2$ dimensions. On a, par exemple, si $d = 3$, le résultat suivant (nº 8) :

Une variété à trois dimensions possédant q intégrales simples, distinctes, de première espèce, renferme des systèmes algébriques ∞^q de surfaces, parmi lesquelles il n'y en a pas ∞^1 appartenant à une même série linéaire.

Revenons maintenant au théorème que nous avons énoncé tout d'abord. On peut en déduire des conséquences intéressantes. Il s'ensuit, par exemple, que *dans notre espace il n'existe aucun système linéaire, de dimension supérieure à* 1, *dont la surface générale soit irrégulière,* si l'on excepte le cas où la courbe intersection variable de deux surfaces du système est réductible.

Une autre conséquence, plus remarquable, concerne une question sur les surfaces (ou les variétés à plusieurs dimensions), à laquelle nous pouvons donner une réponse précise, tandis que la question analogue relative aux courbes est toujours ouverte. Il s'agit des relations qui passent entre les périodes d'un système d'intégrales simples de première espèce. On sait bien qu'on peut écrire le tableau des $2p^2$ périodes des p intégrales abéliennes normales appartenant à une courbe de genre p, lorsqu'on connaît $\frac{1}{2}p(p+1)$ de ces périodes. Mais on ne pourrait pas fixer arbitrairement ces dernières périodes si $p>3$, car seulement $3p-3$ d'entre elles sont indépendantes ; on ne connaît pas d'ailleurs, en général, les relations qui passent entre les $\frac{1}{2}p(p+1)$ périodes. Or, on peut poser une question analogue au sujet d'une surface possédant p intégrales simples de la première espèce. Mais ici la réponse est plus simple.

Nous démontrerons, en effet (n° 9), qu'*on peut toujours construire une surface algébrique ayant p intégrales simples, distinctes, de première espèce, dont* $\frac{1}{2}p(p+1)$ *périodes sont données arbitrairement*, de façon pourtant à satisfaire certaines inégalités qui assurent la convergence des séries p^{uples} Θ. Il faut remarquer cependant que le résultat relatif aux surfaces est moins expressif que le résultat concernant les courbes. En effet, une courbe est déterminée, à une transformation birationnelle près, dès que sont donnés ses $3p-3$ modules. Au contraire, on peut construire une infinité de surfaces, distinctes par rapport aux transformations birationnelles, dont les intégrales simples de première espèce ont les mêmes périodes.

1. Pour démontrer le théorème fondamental de ce Mémoire il convient d'établir d'abord un lemme sur les intégrales abéliennes réductibles d'une courbe algébrique. Nous y parvenons, d'une manière naturelle, par les considérations suivantes.

Envisageons une courbe C_p de genre p, dont nous désignons par I_1, I_2, ..., I_p un système de p intégrales abéliennes, distinctes, de la première espèce. Soient Ω_{i1}, ..., Ω_{i2p} les $2p$ périodes de I_i, ordonnées de manière que les périodes Ω_{i1}, Ω_{i3}, ..., Ω_{i2p-1} se rapportent aux coupures de la surface de Riemann qu'on désigne d'habitude par a_1, a_2, ..., a_p, et les périodes Ω_{i2}, Ω_{i4}, ..., $\Omega_{i,2p}$ aux coupures b_1, b_2, ..., b_p.

Supposons maintenant que $q(<p)$ parmi les intégrales nommées,

par exemple $I_1, I_2, \ldots, I_q$, se réduisent à q intégrales avec $2q$ périodes. Cela revient à dire que les périodes de $I_i (i = 1, 2, \ldots, q)$ s'expriment par des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, de $2q$ quantités $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \ldots, \omega_{i2q}$; on aura précisément les relations suivantes :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{i1} = m_{11}\,\omega_{i1} + m_{12}\,\omega_{i2} + \ldots + m_{12q}\,\omega_{i2q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{i2p} = m_{2p1}\,\omega_{i1} + m_{2p2}\,\omega_{i2} + \ldots + m_{2p\,2q}\,\omega_{i2q}, \end{array} \right.$$

où

$$i = 1, \; 2, \; \ldots, \; q.$$

On remarquera que les nombres entiers m ne dépendent pas de l'indice i relatif à l'intégrale considérée; ils dépendent, au contraire, de la coupure à laquelle se rapporte la période Ω. Formons une combinaison linéaire quelconque

$$I = \sum_{1}^{q}{}_i \lambda_i I_i,$$

des q intégrales réductibles, et désignons par $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$ les périodes de I $\left(\text{où } \Omega_k = \sum_{1}^{q}{}_i \lambda_i \Omega_{ik}\right)$, et par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$ les expressions analogues formées avec les ω_{ik}; on aura, d'après la remarque qui précède,

$$(2) \qquad \Omega_k = m_{k1}\omega_1 + m_{k2}\omega_2 + \ldots + m_{k2q}\omega_{2q}.$$

C'est ce qu'on peut exprimer en disant que les intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_q$ déterminent un système linéaire ∞^{q-1} d'intégrales I réductibles avec $2q$ périodes, système qui est lié aux $4pq$ nombres entiers m_{ki}.

En dehors de ce système existera-t-il une autre intégrale I_{q+1} de C_p, dont les périodes puissent s'exprimer par des combinaisons linéaires de certaines quantités $\omega_{q+1,1}, \ldots, \omega_{q+1,2q}$ formées avec les *mêmes entiers* m_{ki} ?

D'une manière précise, est-il possible que les relations (1) subsistent pour les valeurs $1, 2, \ldots, q, q+1$ de i, si l'on suppose que $I_1, I_2, \ldots, I_q, I_{q+1}$ soient des intégrales *distinctes* de C_p ?

C'est une réponse négative qu'il faut donner à la question qui précède. Il s'agit d'ailleurs d'un résultat qui peut être envisagé comme connu, puisqu'il découle aisément de résultats connus. Néanmoins, nous nous arrêterons un moment à le justifier, attendu que nous ne l'avons pas vu énoncé explicitement dans les travaux qui se rapportent au sujet.

Supposons donc, s'il est possible, que les (1) subsistent pour $i = 1, 2, \ldots, q, q+1$, et formons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \sum_{1}^{q+1}{}_i \lambda_i \mathrm{I}_i,$$

dont les périodes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$ sont des combinaisons linéaires des Ω_{ik}. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$ les combinaisons linéaires correspondantes formées par les ω_{ik}, par exemple

$$\omega_k = \lambda_1 \omega_{1k} + \lambda_2 \omega_{2k} + \ldots + \lambda_{q+1} \omega_{q+1\,k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2q). \tag{3}$$

Les Ω_k et les ω_k sont liées par les relations (2), même dans la nouvelle hypothèse où nous nous sommes placés.

Séparons les parties réelles et imaginaires des Ω_k, ω_k en écrivant

$$\Omega_k = \mathrm{A}_k + i\mathrm{B}_k, \qquad \omega_k = \alpha_k + i\beta_k,$$

et rappelons l'inégalité de Riemann

$$\sum_{1}^{p}{}_k (\mathrm{A}_{2k-1}\mathrm{B}_{2k} - \mathrm{A}_{2k}\mathrm{B}_{2k-1}) > 0.$$

Celle-ci, en vertu des (2), se transforme en une inégalité de la forme

$$\sum_{1}^{2q}{}_r \sum_{1}^{2q}{}_s c_{rs}\alpha_r\beta_s > 0,$$

où les c_{rs} sont des nombres entiers. Mais on peut donner à la dernière inégalité la forme plus simple

$$\sum_{1}^{q}{}_t c_t(\alpha_{2t-1}\beta_{2t} - \alpha_{2t}\beta_{2t-1}) > 0, \tag{4}$$

pourvu que l'on applique aux quantités ω_{ik} des transformations convenables à coefficients entiers, qui ne modifient pas la forme des relations (1) ([1]). Si nous supposons donc, ce qui est loisible, que les (1) ont déjà subi la transformation nommée, nous pourrons conclure, en examinant la (4), que les α et les β ayant l'indice impair ne peuvent pas s'évanouir à la fois. Donc, les q égalités

$$(5) \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_{2q-1} = 0$$

ne peuvent pas coexister. Mais, d'ailleurs, si l'on fait attention aux (3), on reconnaît qu'on pourra toujours choisir des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1}$, ne s'annulant pas à la fois, telles que les (5) soient satisfaites. La contradiction que l'on rencontre ainsi démontre que l'hypothèse dont nous sommes partis est absurde. Il faut donc conclure que le système linéaire des intégrales réductibles I a effectivement la dimension $q-1$, et ne saurait avoir une dimension plus élevée.

En dehors du système ∞^{q-1}, que nous avons envisagé, il peut bien exister, d'ailleurs, d'autres intégrales réductibles de notre courbe C_p. Mais ces nouvelles intégrales seront liées à des groupes de nombres entiers *essentiellement différents* des m_{ik}, qui entrent dans les (1). Il s'ensuit que les systèmes des intégrales réductibles de C_p ou bien sont en nombre fini, ou bien forment une série discontinue (ce qui peut avoir lieu pour $q=1$). Nous pouvons donc énoncer le lemme qui suit:

Une courbe algébrique ne peut jamais posséder une série continue de systèmes linéaires d'intégrales abéliennes réductibles ([2]).

([1]) On peut voir, par exemple, à ce sujet le Traité de M. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, page 121.

([2]) Voici une application de ce résultat. Supposons que sur la courbe C_p il existe une involution ∞^1, de genre $q > 0$, de groupes de n points; chaque point de C_p appartient donc à *un* groupe de l'involution. On sait qu'alors, parmi les p intégrales abéliennes de première espèce de C_p, il y en aura q réductibles au genre q; chacune de celles-ci reprend la même valeur aux points d'un groupe de l'involution. Si C_p possède plusieurs involutions irrationnelles, on aura à considérer plusieurs systèmes d'intégrales réductibles. Mais *les involutions irrationnelles de la courbe ne peuvent jamais former une série continue,* car le même caractère appartiendrait aux systèmes d'intégrales réductibles de C_p. C'est là un théorème que MM. Humbert et Castelnuovo ont démontré en même temps (1893), mais qui est déjà contenu implicitement en une proposition de M. Painlevé (*Annales de l'École Normale supérieure,* t. VIII, 1891, p. 135).

2. Proposons-nous maintenant d'examiner les relations qui passent entre les intégrales simples d'une variété algébrique et les intégrales d'une section de celle-ci. Envisageons d'abord le cas bien connu où il s'agit d'une surface (variété à deux dimensions) et d'une courbe tracée sur elle.

Soit F une surface possédant $q > 0$ intégrales simples, distinctes, de la première espèce, et soit $J(x)$ une d'entre elles. On sait que $J(x)$ est une fonction continue, partout finie, du point x variable sur la surface, déterminée à des multiples près de certaines *périodes* ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{2q}$. Si le point x parcourt une courbe algébrique irréductible C_p tracée sur F, la fonction $J(x)$ nous fournit une intégrale abélienne $I(x)$, de première espèce, de C_p, dont les périodes, relatives aux $2p$ coupures de Riemann, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des quantités ω.

Supposons maintenant que C_p soit la courbe générale d'un système algébrique existant sur F. Si l'on fait varier, d'une manière continue, C_p dans ce système, les coefficients entiers qu'on vient de nommer et les ω, qui dépendent seulement de la F, restent invariables; par suite, les intégrales $I(x)$, subordonnées par $J(x)$ sur les courbes du système, auront les mêmes périodes. Si donc $J(x)$ se maintient constante lorsque x parcourt une certaine courbe du système, c'est-à-dire si les périodes de $I(x)$ s'évanouissent, la même particularité aura lieu sur toute courbe du système; ces courbes seront des *lignes de niveau* pour la fonction $J(x)$, et formeront un *faisceau* irrationnel (c'est-à-dire une série algébrique ∞^1, de genre supérieur à zéro, dont une seule courbe passe par un point de F). On conclut: si une intégrale simple, de première espèce, d'une surface garde une valeur constante le long d'une courbe algébrique de celle-ci, ou bien la courbe n'appartient à aucun système continu, ou bien elle appartient à un faisceau irrationnel.

En dehors de ces cas, les q intégrales simples de première espèce, avec $2q$ périodes, que la surface F possède, fournissent q intégrales abéliennes distinctes, réductibles à $2q$ périodes, sur chaque courbe algébrique de F. Cela est vrai en particulier pour les sections planes de F. Le genre p de ces sections est donc supérieur ou égal à q.

On a, en général, $p > q$ si l'on excepte les surfaces réglées; en effet, une partie seulement des intégrales abéliennes de la section C_p provient d'intégrales simples de la surface F. On peut déterminer ces dernières par un procédé de M. Picard; il suffit de déterminer les intégrales de C_p dont les périodes ne changent pas avec la section plane considérée. C'est, d'ailleurs, une recherche qui ne manque pas de présenter quelques difficultés.

3. Or ces difficultés ne se présentent plus lorsqu'on se propose de construire, d'une façon analogue, les intégrales d'une variété algébrique à plusieurs dimensions. Ici, en effet, on reconnaît que les intégrales simples, distinctes, de première espèce, sont en même nombre que les intégrales d'une surface section générale de celle-ci. C'est ce que nous allons démontrer, en nous bornant, pour plus de clarté, au cas d'une variété algébrique de l'espace à quatre dimensions :

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{6}$$

Le raisonnement, d'ailleurs, s'étend facilement aux autres variétés.

Remarquons d'abord qu'une intégrale simple de première espèce de f fournit une intégrale de la même espèce pour la surface

$$f(x, y, z, \bar{t}) = 0 \tag{7}$$

découpée par l'hyperplan (ou espace à trois dimensions)

$$t = \bar{t} \text{ (const.)}; \tag{8}$$

et, en outre, que des intégrales distinctes de (6) fournissent des intégrales distinctes de (7) (on suppose naturellement que les axes coordonnées aient des positions tout à fait générales par rapport à f). C'est là une remarque qu'on justifie de suite par le même raisonnement appliqué au cas des surfaces.

Mais ici nous pouvons démontrer, en outre, que *toute* intégrale de première espèce de la surface (7) provient d'une intégrale de la variété (6). Voici d'abord la partie essentielle de la démonstration, que nous allons exposer ensuite d'une façon plus précise.

Considérons, dans la variété (6), un faisceau linéaire de surfaces; par exemple le faisceau formé par les surfaces (7), où l'on regarde $\bar{t}$ comme un paramètre variable. Ces surfaces ont une courbe commune C, qui est la section de (6) par le plan à l'infini des espaces (8). Supposons maintenant que la surface (7) possède q intégrales simples distinctes de la première espèce, $J_1, J_2, \ldots, J_q$, douées de $2q$ périodes. Ces intégrales fournissent q intégrales abéliennes réductibles, à $2q$ périodes, de la courbe C, que nous désignerons par $I_1, I_2, \ldots, I_q$. Toute intégrale I de C, qui appartient au système linéaire $\sum_1^q {}_i \lambda_i I_i$, provient, d'une manière parfaitement déterminée, d'une intégrale $\sum_1^q {}_i \lambda_i J_i$ de la surface (7).

Que l'on laisse varier maintenant par continuité le paramètre $\bar{t}$ dans la (7). La surface (7) changera en passant toujours par la courbe C; et, avec elle, varieront en conséquence les intégrales J_i. Mais les intégrales réductibles déterminées par les J_i sur la courbe C ne pourront pas sortir du système $\sum_1^q {}_i \lambda_i I_i$, car ce système ne peut pas varier d'une façon continue, ainsi que nous le savons par le lemme du n° 1. A chaque intégrale I de ce système correspond donc une intégrale déterminée J sur chacune des ∞^1 surfaces (7), intégrale dont les périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$ ne dépendent pas de $\bar{t}$, car elles sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de I sur C. Par un point général (x, y, z, t) de la variété (6) passe *une* surface (7). L'intégrale J de (7) que nous venons de considérer a en ce point une valeur finie $J(x, y, z, t)$, déterminée à des multiples près des périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$. Par conséquent, $J(x, y, z, t)$ est une fonction du point (x, y, z, t) de (6) finie et déterminée, à des multiples des périodes près. C'est cette fonction $J(x, y, z, t)$ qui nous fournira une intégrale simple de première espèce de (6), correspondant à l'intégrale simple arbitrairement choisie sur la surface (7), ou, si l'on aime mieux, à l'intégrale réductible I choisie sur la courbe C.

Les q intégrales J_i de la surface (7) donnent lieu ainsi à q intégrales distinctes de la variété (6).

Examinons maintenant les détails de la démonstration. Soient

$$(9) \qquad J_i = \int M_i\,dx + N_i\,dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

les q intégrales distinctes, de première espèce, appartenant à la surface

$$(7) \qquad f(x, y, z, t) = 0, \qquad t = \bar{t};$$

M_i et N_i sont des fonctions rationnelles de x, y, z, dont les coefficients contiennent rationnellement le paramètre t. L'intégrale générale de première espèce de (7) sera donc

$$(10) \qquad J = \int M\,dx + N\,dy$$

où

$$(11) \qquad M = \sum_1^q \lambda_i M_i, \qquad N = \sum_1^q \lambda_i N_i.$$

L'intégrale J fournit sur toute section plane de (7) et, en particulier, sur la courbe à l'infini C, une intégrale abélienne de première espèce I, dont la différentielle, égalée à zéro, représente une courbe d'ordre $n-3$ adjointe à ladite courbe, supposée d'ordre n. Soit

$$(12) \qquad \varphi(x, y, z) \equiv \sum_1^q {}_i\, \lambda_i\, \varphi_i(x, y, z) = 0$$

l'équation de la courbe adjointe à C qui correspond à l'intégrale J; φ_i ayant la même signification par rapport à l'intégrale J_i. On peut former ce polynome φ, homogène en x, y, z, si l'on remarque que les produits $y\varphi$ et $-x\varphi$ donnent l'ensemble des termes de degré maximum $(n-2)$ contenus dans les polynomes $M f'_z$, $N f'_z$ (¹); on formera φ_i d'une façon analogue. Il s'ensuit que les coefficients de $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_q$ dépendent rationnellement du paramètre t.

(¹) Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. I, p. 118, 128.

Si nous attribuons à ce paramètre une valeur constante $\bar{t}$, et laissons varier les λ, la courbe $\varphi = 0$ décrit un système linéaire ∞^{q-1} de courbes adjointes à la courbe C. Faisons varier maintenant le paramètre t et, par suite, la surface (7) qui, cependant, passera toujours par la courbe C. La courbe $\varphi = 0$ adjointe à C pourra bien changer; mais elle ne pourra pas sortir du système linéaire ∞^{q-1} qu'on vient de nommer; *ce système ne changera pas*. C'est ce qui résulte du lemme établi au n° 1; car nous savons que le système ∞^{q-1} des intégrales réductibles I, fournies sur C par les intégrales J de la surface (7), ne peut pas varier lorsque le paramètre t prend une succession continue de valeurs. Si donc nous désignons par $\psi(x, y, z)$ un polynome du degré $n-3$, adjoint à la courbe C et appartenant au système linéaire ∞^{q-1} nommé, ψ ne dépendra pas de t, et nous pourrons toujours déterminer les paramètres λ de façon à vérifier l'identité

$$\lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \ldots + \lambda_q \varphi_q(x, y, z) \equiv \psi(x, y, z).$$

Puisque les φ contiennent rationnellement le paramètre t, on trouvera, pour les λ, des expressions rationnelles de t. Remplaçons les λ par ces expressions dans les (11). Nous obtiendrons deux fonctions rationnelles M, N de x, y, z, t, telles que l'intégrale de première espèce

$$\text{(10)} \qquad J = \int M\,dx + N\,dy$$

relative à la surface

$$\text{(7)} \qquad f(x, y, z, t), \qquad t = \bar{t},$$

fournit, *quelle que soit t*, la même intégrale abélienne I sur la courbe à l'infini C des surfaces (7). Il résulte que *les périodes de l'intégrale* (10) *ne dépendent pas de t*.

Il suffit maintenant d'appliquer un procédé connu [dont M. Picard a fait usage souvent dans la théorie des surfaces (¹) et qui s'étend de suite à notre cas] pour construire une troisième fonction ration-

(¹) *Voir*, par exemple, Picard et Simart, *Ouvrage cité*, t. I, p. 102.

nelle P de x, y, z, t, telle que de l'expression

$$(12') \qquad M\,dx + N\,dy + P\,dt$$

résulte une différentielle exacte, lorsqu'on regarde z comme fonction de x, y, t définie par l'équation

$$(6) \qquad f(x, y, z, t) = 0.$$

On obtient ainsi une intégrale de différentielle totale de la (6)

$$(13) \qquad Y = \int M\,dx + N\,dy + P\,dt,$$

qui fournit l'intégrale de première espèce (10) sur chacune des ∞^1 surfaces (7).

Cela ne suffit pas encore pour affirmer que Y est une intégrale de *première* espèce de la variété (6), car on peut douter que Y devienne infinie sur quelques-unes des surfaces (7), correspondant à des valeurs particulières de $\bar{t}$. Or nous montrerons qu'on peut toujours choisir la fonction P de façon à exclure ces surfaces singulières. Rappelons, à cet effet, que la fonction $P(x, y, z, t)$ doit satisfaire à deux conditions; elle doit être rationnelle et rendre l'expression (12) une différentielle exacte. Or ces mêmes conditions sont remplies, si l'on ajoute à P une fonction rationnelle arbitraire $R(t)$, dépendant seulement de t. En d'autres termes, si $P_1(x, y, z, t)$ est une fonction particulière qui satisfait aux conditions nommées, la fonction

$$P(x, y, z, t) = P_1(x, y, z, t) + R(t)$$

y satisfaira de même.

Cela posé, il suffit d'examiner si l'on peut choisir la fonction rationnelle $R(t)$ de façon que l'intégrale

$$\int M\,dx + N\,dy + (P_1 + R)\,dt$$

soit de première espèce.

Considérons l'intégrale

$$Y_1 = \int M\,dx + N\,dy + P_1\,dt.$$

Si Y_1 n'est pas de première espèce, elle aura des surfaces singulières, polaires ou logarithmiques; et, d'après une remarque précédente (en tenant compte que les axes sont arbitraires), on peut admettre que ces surfaces soient des sections irréductibles des espaces $t = \text{const.}$ Supposons, par exemple, que les surfaces logarithmiques de Y_1 soient découpées par les espaces $t = a, b, \ldots$, et que les périodes correspondantes soient $2\pi i\alpha$, $2\pi i\beta$, ..., où α, β, ... sont des constantes dont la somme est nulle. Alors la fonction

$$\begin{aligned}&Y_1 - \alpha \log(t-a) - \beta \log(t-b) - \ldots \\ &\quad = \int M\,dx + N\,dy + \left(P_1 - \frac{\alpha}{t-a} - \frac{\beta}{t-b} - \ldots\right) dt\end{aligned}$$

n'aura aucune singularité logarithmique, et sera, par conséquent, une intégrale de seconde espèce ([1]).

Supposons, en second lieu, que la surface coupée sur f par l'espace $t = c$ soit une surface polaire du premier ordre pour Y_1. La fonction Y_1 devient infinie en tout point de la surface, en dehors de la courbe à l'infini C, qui appartient aussi à la surface générale (7) sur laquelle Y_1 est partout régulière. Formons maintenant une fonction rationnelle de la variété (6), qui possède la même surface polaire, tout en restant finie sur la courbe C; telle est, par exemple, la fonction $\frac{1}{t-c}$. On reconnaît alors que la différence

$$Y_1 - \frac{\gamma}{t-c} = \int M\,dx + N\,dy + \left[P_1 + \frac{\gamma}{(t-c)^2}\right] dt,$$

où γ désigne une constante choisie convenablement, est régulière sur la surface nommée, tout en ayant ailleurs les mêmes singularités que Y_1; il suffit, pour s'en assurer, de faire usage du même raisonnement que M. Severi a employé en une question parfaitement analogue ([2]).

([1]) *Cf.* PICARD et SIMART, *Ouvrage cité*, t. II, p. 239.

([2]) *Cf.* le Mémoire *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard*..., p. 37 (*Mathem. Annalen*, t. LXI, 1905).

Il s'ensuit de ces considérations que si l'on prend dans (13)

$$P = P_1 - \frac{\alpha}{t-a} - \frac{\beta}{t-b} - \ldots + \frac{\gamma}{(t-c)^2} + \ldots,$$

où la somme contient un *nombre fini* de fractions analogues, l'intégrale Y résultera régulière en tout point de la variété (6) et sera, par conséquent, de première espèce.

Nous parvenons donc à construire une intégrale Y, simple, de première espèce de la variété (6), qui se réduit à une intégrale J *donnée a priori* sur la surface (7), section de (6) par l'espace $t = \bar{t}$. Et, puisque nous savons que, réciproquement, les intégrales distinctes, de première espèce, de la (6) fournissent des intégrales distinctes, de première espèce, de la surface (7), nous pouvons conclure enfin :

Une variété algébrique à trois dimensions possède autant d'intégrales simples, distinctes, de première espèce, que la surface découpée sur la variété par un hyperplan général. A chaque intégrale de la variété correspond une intégrale de la surface qui a les mêmes périodes sur des cycles linéaires convenablement fixés.

Un théorème analogue subsiste aussi pour les variétés à plusieurs dimensions et peut être démontré par les mêmes considérations. Pour l'énoncer d'une manière simple, appelons *irrégularité* d'une variété algébrique le nombre des intégrales simples, distinctes, de première espèce qui appartiennent à la variété [1]. Alors on a le théorème :

L'irrégularité d'une variété algébrique à $d \geqq 3$ dimensions, contenue dans l'espace à $d+1$ dimensions, est égale à l'irrégularité des variétés à $d-1, \ldots, 2$ dimensions qui sont les sections de celle-là par un espace général à $d, \ldots, 3$ dimensions.

Le théorème ne subsiste plus, comme on sait, pour les courbes sections planes de la variété primitive; l'irrégularité, c'est-à-dire le genre de ces courbes, surpasse, en général, l'irrégularité de la variété.

---

[1] Le développement de la théorie des variétés algébriques portera à envisager plusieurs sortes d'*irrégularités*. La distinction n'était pas nécessaire ici, car ce mot est toujours employé dans le sens défini ci-dessus.

4. Nous avons considéré jusqu'ici les sections d'une variété par des espaces linéaires. Mais, puisqu'il s'agit de propriétés invariables par rapport aux transformations birationnelles, notre théorème s'applique aussi aux sections obtenues par des variétés algébriques à trois ou à plusieurs dimensions.

Si l'on fait attention au point essentiel de la démonstration, on voit même que le théorème subsiste sous des hypothèses plus étendues. Supposons, par exemple, de connaître dans une variété à trois dimensions f un système linéaire ∞^1 de surfaces irrégulières F, passant par une même courbe C, qui soit simple pour la F générale; on n'exclut pas d'ailleurs que ce système ait d'autres courbes bases, simples ou multiples. Supposons encore qu'aucune intégrale simple de première espèce de F ne reste constante le long de la courbe C. Alors les intégrales simples de première espèce appartenant à chacune des F fournissent un même système d'intégrales réductibles de C. On en déduit, par le raisonnement déjà employé, que chaque intégrale d'une surface F provient d'une intégrale de la variété f, et *vice versa*.

On énoncera plus facilement le résultat si l'on suppose que les surfaces F forment, dans f, un système linéaire ∞^2 au moins, car alors deux surfaces F se rencontrent, en dehors de courbes bases, en une courbe C simple, qui est commune à ∞^1 surfaces F. Si la C est irréductible, elle ne peut pas être ligne de niveau pour aucune intégrale d'une des surfaces F passant par C; autrement les ∞^1 courbes découpées sur cette surface par les autres surfaces du système ∞^2 seraient aussi lignes de niveau pour la même intégrale, ce qui est absurde, vu que ces lignes dépendent rationnellement d'un paramètre. On a donc le théorème :

Si une variété algébrique à trois dimensions renferme un système linéaire ∞^2 (au moins) de surfaces irrégulières se coupant deux à deux en des courbes variables irréductibles (en dehors de courbes bases), la variété elle-même sera irrégulière et aura la même irrégularité que les surfaces du système.

On peut dire aussi :

L'irrégularité d'une surface contenue dans une variété algébrique à trois dimensions ne dépend pas de la surface qu'on envisage, pourvu que *celle-ci puisse varier en un système linéaire ∞^2 de surfaces, satisfaisant à la condition énoncée.*

5. Il convient de rappeler ici que l'irrégularité d'une surface peut être exprimée à l'aide des invariants géométriques de celle-ci; c'est exactement la différence $p_g - p_a$ entre les genres géométrique et arithmétique de la surface ([1]). L'irrégularité d'une variété à trois dimensions est donc égale à la différence constante $p_g - p_a$ relative aux surfaces contenues dans la variété et appartenant à des systèmes linéaires ∞^2.

Il est naturel maintenant d'examiner comment l'irrégularité de la variété elle-même puisse s'exprimer à l'aide des invariants géométriques de celle-ci. Rappelons, à cet effet, que M. Nöther a défini plusieurs caractères invariants d'une variété à trois dimensions; ce sont des caractères des *surfaces canoniques* découpées sur la variété, d'ordre n, par les variétés *adjointes*, d'ordre $n-5$, qui passent respectivement $i-1$, $i-2$ ou $i-3$ fois par une surface, une courbe ou un point ayant la multiplicité i ([2]). Ainsi, le nombre des variétés adjointes linéairement distinctes fournit le *genre géométrique* P_g de la variété; le genre géométrique $P_g^{(1)}$ et le genre arithmétique $P_a^{(1)}$ d'une surface canonique sont aussi des invariants, dont le premier a été considéré par Nöther et appelé *Flächengeschlecht;* nous les dirons *genres superficiels géométrique et arithmétique* de la variété.

Appliquons maintenant le résultat du n° 4 au système linéaire formé par les surfaces canoniques; nous avons de suite :

Le nombre des intégrales simples, distinctes, de première espèce, d'une variété à trois dimensions (que nous avons appelé son irrégularité) *est égal à la différence $P_g^{(1)} - P_a^{(1)}$ entre les deux genres superficiels, géométrique et arithmétique, de la variété; on suppose cependant qu'il y a au moins ∞^2 surfaces canoniques ($P_g > 2$), se coupant deux à deux en des courbes variables irréductibles.*

([1]) *Voir* les Notes de MM. Castelnuovo, et Severi dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 23 janvier et 3 avril 1905; *voir* aussi un Mémoire de M. Castelnuovo dans les *Rendiconti della R. Accad. d. Lincei,* mai-juin 1905, et un Mémoire de M. Severi dans les *Annali di Matematica,* 3e série, t. XII.

([2]) *Mathematische Annalen,* vol. VIII, p. 529.

Ces conditions semblent effectivement nécessaires pour la validité du théorème.

L'analogie avec la théorie des surfaces aurait porté à exprimer l'irrégularité de la variété par la différence $P_g - P_a$, où P_a est un caractère de la variété qu'on définit d'une manière analogue à celle qui a conduit Cayley et M. Nöther à introduire le genre arithmétique p_a d'une surface. Mais on peut facilement construire des variétés ayant $P_g - P_a \neq 0$, qui ne possèdent aucune intégrale simple de première espèce.

Le dernier théorème peut être étendu facilement aux variétés algébriques ayant plus que trois dimensions.

6. Une conséquence intéressante de la proposition du n° 4 regarde l'espace à trois dimensions, qui est évidemment une variété régulière. Il résulte, en effet, que (¹) :

Un système linéaire ∞^2, au moins, de surfaces dans l'espace ordinaire se compose certainement de surfaces régulières, si la courbe intersection variable de deux surfaces est irréductible.

D'une manière plus précise :

Si un système linéaire $\infty^r (r \geqq 2)$ de surfaces dans l'espace est formé par des surfaces irrégulières, celles-ci se coupent (en dehors des courbes bases) en des courbes réductibles, dont les composantes forment, sur une surface donnée du système, un faisceau irrationnel; en variant la surface, ces courbes composantes forment dans l'espace un système ∞^2 (congruence) *tel que par un point général de l'espace passe une seule courbe qui lui appartient.*

L'exemple le plus simple est fourni par un système linéaire de cônes (ou cylindres) ayant le même sommet (²). On démontre que tous les autres systèmes doués de la propriété énoncée peuvent se

(¹) M. Severi, auquel nous avons communiqué ce théorème, vient d'en donner une nouvelle démonstration dans sa Note *Osservazioni varie di Geometria... Atti del R. Istituto Veneto*, t. LXV, 22 avril 1906.

(²) Un autre exemple est fourni par le système ∞^2 des surfaces du sixième ordre qui ont huit points triples aux points bases d'un réseau de quadriques.

déduire d'un système de cylindres par une transformation simplement rationnelle $(1, n)$ de l'espace. On peut donc représenter tout système linéaire (∞^2 au moins) de surfaces irrégulières par une équation du type

$$\sum \lambda_i f_i(\varphi, \psi) = 0,$$

où les f_i désignent des polynomes en φ et ψ (de genre > 0), tandis que φ et ψ sont des fonctions rationnelles de x, y, z.

Cette propriété, d'après laquelle une surface irrégulière ne peut appartenir à aucun système linéaire, sauf dans le cas très particulier considéré ci-dessus, est remarquable parce que rien d'analogue ne subsiste en Géométrie plane, où l'on peut former des systèmes de courbes *irrégulières* ayant le genre aussi élevé que l'on veut.

7. Revenons au théorème fondamental du n° 3, d'après lequel chaque intégrale simple de première espèce appartenant à une variété à trois dimensions

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{6}$$

est liée à une intégrale du même type, ayant les mêmes périodes, relative à la surface section

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad t = \bar{t}, \tag{7}$$

et *vice versa*. Rappelons, d'autre part, que, si q désigne le nombre des intégrales distinctes de la surface (7), le nombre de leurs périodes est $2q$, et $2q$ est aussi le nombre des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans la surface (ou, d'une manière plus exacte, dans le *continuum* à quatre dimensions attaché à la surface) (¹). La variété (6) à son tour (regardée comme un *continuum* de Riemann à six dimensions) aura $2q$ cycles linéaires distincts, car les $2q$ périodes de chaque intégrale simple de la variété se rapportent nécessairement à des cycles distincts.

Le nombre des cycles distincts de la variété ne peut pas d'ailleurs

(¹) *Voir* les publications citées dans la première note du n° 5.

dépasser $2q$, car, en imitant un procédé connu [1], on parvient à ramener, par une déformation continue, tout cycle de la (6) à être situé dans la surface (7). On peut donc énoncer les deux théorèmes suivants, où l'on désigne par *connexion linéaire* l'expression

$$p_1 = 2q + 1,$$

étant q le nombre des cycles linéaires distincts :

La connexion linéaire d'une variété algébrique à trois dimensions est égale à la connexion linéaire d'une surface section de celle-ci.

Le nombre des cycles linéaires distincts appartenant à une variété algébrique à trois dimensions est double du nombre des intégrales simples, distinctes, de première espèce, de la variété.

Le premier théorème appartient à l'*Analysis situs*. Tâchons donc de le retrouver directement par des considérations intuitives appartenant à cette branche de Géométrie. Considérons, à cet effet, la surface (7), que nous désignerons par F. Si nous laissons varier le paramètre $\bar{t}$, de façon que le point image sur le plan de la variable complexe t décrive une courbe fermée, la surface F variera et prendra les positions F_1, F_2, ..., F, dont la dernière se superpose à la position initiale. Toutes ces surfaces passent par une même courbe C, que nous regardons comme un *continuum* de Riemann à deux dimensions. Soit γ un cycle linéaire de F, dans la position initiale; nous savons qu'on peut ramener ce cycle, par une déformation continue à l'intérieur de F, à un cycle γ' situé en C. Suivons maintenant les variations de γ et des chemins qui en joignent les points aux points correspondants de γ', pendant la variation de $\bar{t}$. Nous obtiendrons des cycles γ_1, γ_2, ..., γ_0, dont le dernier est renfermé en F, cycles qui peuvent toujours être ramenés à γ' par des déformations continues ayant lieu à l'intérieur des surfaces F_1, F_2, ..., F contenant ces cycles. On peut donc passer d'une manière continue du cycle γ au cycle γ_0, *sans sortir de* F. Il s'ensuit que deux cycles de la surface de F sont équivalents (transformables l'un en l'autre) ou bien distincts par rapport à F,

---

(1) PICARD et SIMART, *Ouvrage cité*, t. I, p. 86.

selon qu'ils sont équivalents ou distincts par rapport à la variété f. C'est précisément ce qui affirme notre théorème [1].

On pourrait se proposer de retrouver le théorème du n° 3, en prenant comme point de départ la propriété d'*Analysis situs*, dont nous venons de parler. On verrait d'abord, en suivant le procédé de M. Picard, que le nombre des intégrales simples distinctes de *seconde* espèce est le même ($2q$) pour une variété à trois dimensions et pour une surface section. Mais peut-être qu'on rencontrerait quelques difficultés à établir par cette voie le théorème analogue pour les intégrales de première espèce.

8. Parmi les propriétés qui caractérisent, au point de vue géométrique, une surface irrégulière, la plus remarquable est celle qui se rapporte aux systèmes algébriques, non linéaires, de courbes appartenant à la surface. Sur une surface ayant l'irrégularité q (ayant donc $q = p_g - p_a > 0$ intégrales simples, distinctes, de première espèce) il existe des systèmes ∞^q de courbes qui ne renferment pas ∞^1 courbes appartenant à un même système linéaire; mais il n'existe aucun système ∞^{q+1} jouissant de la même propriété [2].

Or un théorème parfaitement analogue subsiste pour les variétés algébriques à plusieurs dimensions. C'est-à-dire que :

Une variété algébrique à trois dimensions possédant $q > 0$ intégrales

---

(1) On sait bien que la propriété analogue ne subsiste pas lorsqu'on compare les connexions linéaires d'une surface et d'une section plane de celle-ci. On en voit maintenant la raison. C'est que les courbes sections d'une surface n'ont pas deux à deux un *continuum* C commun, où l'on puisse ramener les cycles appartenant à ces courbes; elles ont seulement un nombre *fini* de points communs.

(2) Ces systèmes de courbes d'une surface qui ne sont pas renfermées en des séries linéaires, ont été envisagés d'abord par M. Humbert (*Journal de Math.*, 4e série, t. X) qui a remarqué que les surfaces possédant de tels systèmes admettent des intégrales simples de première espèce; et M. Enriques (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XIII) a ajouté que ces surfaces ont le genre géométrique supérieur au genre arithmétique : $p_g > p_a$.

Plus récemment, M. Enriques a établi les théorèmes réciproques rappelés dans le texte, en examinant dans un premier Mémoire (*Ann. de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. III) une surface qui possède q intégrales de première espèce à $2q$ périodes, et dans un second Mémoire (*Atti dell' Academia di Bologna*, 1904; *voir* aussi *Comptes rendus*, janvier 1905) une surface pour laquelle $p_g > p_a$.

simples, distinctes, de première espèce (ou, si l'on veut, une variété, dont les genres superficiels ont la différence $P_g^{(1)} - P_a^{(1)} = q$, sous les restrictions du n° 5), *contient des systèmes* ∞^q *de surfaces, tels que* ∞^1 *surfaces n'appartiennent jamais à un système linéaire; il n'existe, d'ailleurs, dans la variété aucun système* ∞^{q+1} *jouissant de la même propriété.*

On parvient à établir le théorème énoncé, soit en s'appuyant sur le résultat déjà établi pour les surfaces sections de la variété (qui ont la même irrégularité q, n° 3), soit en étendant aux variétés à plusieurs dimensions les raisonnements développés dans le cas des surfaces.

Quant à la première voie, il suffira de remarquer que, si l'on envisage un faisceau de sections hyperplanes F de la variété, on peut déterminer sur chaque F *une* courbe k (ou un nombre fini de courbes k) d'un système ∞^q, jouissant de la propriété énoncée ci-dessus, par la condition que deux k appartenant à deux différentes surfaces F découpent sur la courbe plane commune aux deux F des groupes de points renfermés en une même série linéaire.

Nous allons développer la démonstration du théorème, qui s'obtient par la seconde voie citée, en suivant le procédé par lequel M. Severi [1] a établi d'une façon plus simple le théorème de M. Enriques, exposé dans les *Annales de la Faculté de Toulouse.*

Soit

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{6}$$

la variété, dont nous désignerons les q intégrales simples, distinctes, de première espèce par $J_1, J_2, \ldots, J_q$. Considérons une série ∞^2 de courbes sur la variété, telle que par un point général passe une seule courbe de la série; telle est, par exemple, la série des sections planes

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad z = \bar{z}, \qquad t = \bar{t}, \tag{14}$$

où $\bar{z}$ et $\bar{t}$ sont des paramètres.

Sur chaque courbe (14) les intégrales J fournissent q intégrales

---

[1] *Atti della R. Acad. d. Scienze di Torino*, février 1904.

distinctes $I_1, I_2, \ldots, I_q$ réductibles à $2q$ périodes. Déterminons maintenant q points $x_1, x_2, \ldots, x_q$ de la courbe par les conditions

$$(15) \qquad I_i(x_1) + I_i(x_2) + \ldots + I_i(x_q) \equiv k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

où les k_i sont des constantes assignées.

D'après un théorème de M. Picard (¹) il existe un nombre *fini* m de groupes de q points x satisfaisant aux conditions (15). Les mq points qu'on obtient ainsi sur la courbe (14) décrivent, en variant les paramètres $\bar{z}$, $\bar{t}$, une surface Φ. Si l'on attribue aux constantes k_i les ∞^q valeurs qu'elles peuvent recevoir, on trouvera ∞^q surfaces telles que Φ, formant un système algébrique Σ, dont ∞^1 surfaces n'appartiennent jamais à un même système linéaire.

Le raisonnement qui précède n'exclut pas l'existence d'un système plus ample Σ', par exemple ∞^{q+1}, de surfaces, jouissant de la propriété énoncée tout à l'heure. Supposons que ce système existe et envisageons les intersections d'une surface Φ' de Σ' avec une des courbes (14), par exemple avec la courbe

$$(14') \qquad f(x, y, 0, 0) = 0.$$

Calculons la somme h_i des valeurs qu'acquiert l'intégrale I_i en ces points. Les quantités $h_1, h_2, \ldots, h_q$ varient, en général, lorsque Φ' décrit le système ∞^{q+1} Σ'; mais à un système assigné de valeurs de $h_1, h_2, \ldots, h_q$ correspondront nécessairement (au moins) ∞^1 surfaces Φ', formant un certain système S. On peut répéter la même remarque pour les courbes Γ', intersections des Φ' avec une surface passant par la courbe (14'), par exemple avec la surface

$$(16) \qquad f(x, y, z, t) = 0, \qquad t = \lambda z.$$

On aura donc ∞^1 courbes Γ' de la (16) découpant sur la (14') des groupes de points tels que les sommes nommées aient les valeurs h_1, $h_2, \ldots, h_q$. Or, ces courbes Γ', d'après un théorème de M. Severi (²),

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XI.

(²) *Consulter* le Mémoire : *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche*, teorema VII (*Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. XII).

appartiennent totalement à un même système linéaire. Donc, les ∞^1 surfaces Φ' de S découpent, sur chaque surface du faisceau (16), ∞^1 courbes appartenant à un système linéaire. Mais alors un raisonnement que M. Severi développe pour les courbes ([1]), mais qui s'étend de suite aux surfaces d'une variété, nous amène à conclure que les ∞^1 surfaces Φ' de S elles-mêmes appartiennent totalement à un système linéaire; ce qui est en contradiction avec la propriété que nous avions attribuée à Σ'. L'hypothèse du système $\infty^{q+1}\Sigma'$ se trouve ainsi rejetée.

9. Revenons une dernière fois au théorème du n° **3**. Nous pouvons en déduire une application remarquable au sujet des relations qui passent entre les périodes des intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique irrégulière. Rappelons d'abord, pour plus de clarté, la question analogue relative aux courbes.

Soit C une courbe de genre $p > 0$, et soient $I_1, I_2, \ldots, I_p$ p intégrales abéliennes, distinctes, de première espèce de la courbe. Sur la surface de Riemann attachée à la courbe traçons les $2p$ coupures canoniques, qu'on désigne d'habitude par $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$; appelons ensuite a_{hk}, b_{hk} les périodes de l'intégrale I_h relatives aux coupures a_k, b_k $(h, k = 1, 2, \ldots, p)$. On sait qu'on peut toujours choisir les p intégrales I_h, de façon que les périodes a_{hk} prennent les valeurs assignées

$$a_{hh} = \pi i, \qquad a_{hk} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, p;\ h \neq k). \tag{17}$$

Alors, la courbe C étant donnée, les périodes b_{hk} sont parfaitement déterminées; elles satisfont aux relations

$$b_{hk} = b_{kh} \tag{18}$$

et à certaines inégalités qu'on peut résumer ainsi : en désignant par r_{hk} la partie réelle de b_{hk}, on doit avoir

$$\sum_{hk} r_{hk}\xi_h\xi_k < 0, \tag{19}$$

([1]) *Loc. cit.*, teorema VI.

quelles que soient les valeurs réelles (non toutes nulles) attribuées aux variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$.

Inversement, supposons de connaître $2p^2$ quantités a_{hk}, b_{hk} satisfaisant aux égalités (17), (18) et à l'inégalité (19); est-ce qu'il existera une courbe C de genre p, dont p intégrales abéliennes de première espèce aient les périodes a_{hk}, b_{hk}? Riemann a montré qu'une telle courbe n'existe pas, en général, si $p > 3$. En effet, les $\frac{1}{2}p(p+1)$ quantités $b_{hk} (h \leqq k)$, dont dépend le tableau des périodes relatives à une courbe de genre p, ne sont pas toutes arbitraires; il passe entre elles des relations, inconnues jusqu'ici, en tel nombre, que seulement $3p-3$ de ces quantités peuvent être choisies arbitrairement. Ce sont les $3p-3$ *modules* de la courbe considérée.

Examinons maintenant comment ces résultats peuvent être transportés aux surfaces. Une surface F_1, dont nous désignerons maintenant par p l'irrégularité, possède p intégrales simples distinctes, de première espèce $J_1, J_2, \ldots, J_p$, dont chacune a $2p$ périodes, relatives à $2p$ cycles linéaires distincts de la surface (*continuum* de Riemann à quatre dimensions). Si nous désignons par a_{hk}, $b_{hk} (h, k = 1, 2, \ldots, p)$ les $2p^2$ périodes, on peut obtenir, par un choix convenable des intégrales et des cycles, que les p^2 périodes a_{hk} aient les valeurs (17), et les p^2 périodes b_{hk} satisfassent à $\frac{1}{2}p(p-1)$ relations linéaires qui sont du type (18) et expriment que le rapport $b_{hk} : b_{kh}$ est rationnel (non nécessairement égal à l'unité) (¹). Or, dans le cas des surfaces, ce résultat peut être inverti de la manière suivante :

Étant données $2p^2$ quantités a_{hk}, $b_{hk} (h, k = 1, 2, \ldots, p)$ qui satisfont aux égalités (17), (18) *et à l'inégalité* (19), *on peut toujours construire, d'une infinité de manières, une surface ayant l'irrégularité p, telle que p intégrales simples, distinctes, de première espèce, de la surface aient les périodes a_{hk}, b_{hk} par rapport à $2p$ cycles convenablement choisis.*

La démonstration s'appuie sur le théorème fondamental du n° 3, moyennant quelques propositions connues de la théorie des séries

(¹) *Voir* la Note de M. SEVERI, *Intorno al teorema di Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard*, n° 5 (*Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, t. XXI).

p^{uples} Θ, et des fonctions $2p$ fois périodiques de p variables qui sont formées à l'aide desdites séries ([1]).

On sait que, étant données $2p^2$ quantités a_{hk}, b_{hk} satisfaisant aux égalités (17), (18) et à l'inégalité (19), on peut construire une fonction uniforme de p variables

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$

dont la valeur ne change pas lorsqu'on augmente la variable $u_h (h = 1, 2, \ldots, p)$ de l'une des *périodes* $a_{h1}, \ldots, a_{hp}, b_{h1}, \ldots, b_{hp}$. On peut obtenir, en outre, que la fonction φ n'aie, au fini, aucune singularité essentielle, et ne puisse être regardée comme fonction de moins que p combinaisons linéaires des variables u. On peut même construire p fonctions indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ qui possèdent les mêmes propriétés de φ et les mêmes périodes; mais alors, d'après un théorème de Weierstrass, toute autre fonction φ_0 du même type est liée aux précédentes par une relation algébrique irréductible. Si donc nous posons

$$x_k = \varphi_k(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p), \tag{20}$$

on aura

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_p) = 0, \tag{21}$$

où f est un polynome.

La (21) représente une variété algébrique à p dimensions de l'espace à $p+1$ dimensions; de cette variété les (20) nous fournissent une représentation paramétrique. La variété f possède p intégrales distinctes, de première espèce, de la forme

$$u_h = \int P_{h1}\,dx_1 + P_{h2}\,dx_2 + \ldots + P_{hp}\,dx_p \qquad (h = 1, 2, \ldots, p), \tag{22}$$

où les P sont des fonctions rationnelles de $x_0, x_1, \ldots, x_p$; pour cal-

---

([1]) On trouvera exposées les propositions que nous employons dans l'ouvrage cité de M. Krazer, p. 112-117.

culer les expressions différentielles du_h on a seulement à former les différentielles totales des (20) et à résoudre par rapport aux du_h les équations linéaires ainsi obtenues. L'intégrale (22) a précisément les périodes $a_{h1}, \ldots, a_{hp}, b_{h1}, \ldots, b_{hp}$, qui étaient assignées.

Que l'on découpe maintenant la variété f par un espace linéaire à p, $p-1$, ..., 3 dimensions. On obtiendra une variété algébrique à $p-1$, $p-2$, ..., 2 dimensions douée de p intégrales simples distinctes, de première espèce, ayant les périodes données. Telle est, en particulier, la surface

$$f(x_0, x_1, x_2, 0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

dont les intégrales

$$u_h = \int P_{h1}\, dx_1 + P_{h2}\, dx_2$$

ont précisément les périodes a_{hk}, b_{hk} par rapport à des cycles linéaires convenables. Et cette surface n'aura aucune intégrale distincte des u_p, d'après le théorème du n° 3.

On remarquera ici que la section de ladite surface par le plan $x_2 = 0$ fournirait une courbe, qui aurait bien p intégrales abéliennes de première espèce avec les périodes assignées. Mais la courbe aurait un genre $p' > p$ et posséderait, par conséquent, encore $p' - p$ intégrales abéliennes de première espèce distinctes entre elles et des précédentes (¹). Voilà pourquoi le procédé qui nous a fourni le dernier théorème relatif aux surfaces (et aux variétés à plusieurs dimensions) ne s'applique pas aux courbes.

Il est juste d'ailleurs de remarquer que le problème de construire une surface ayant l'irrégularité p, dès qu'on connaît $\frac{1}{2}p(p+1)$ périodes b_{hk} relatives aux intégrales de première espèce, a un intérêt bien moindre que le problème de construire une courbe de genre p dès qu'on connaît ses $3p-3$ modules. En effet, tandis que la courbe

(¹) La considération relative à la variété (21) et à une *courbe* contenue en elle paraît déjà dans une Note de MM. Poincaré et Picard (*Comptes rendus*, t. XCVII), qui se propose de justifier les relations énoncées par Riemann entre les périodes d'une fonction $2p$ fois périodique de p variables. Nous supposons ici, au contraire, que ces relations (17), (18), (19) sont vérifiées *a priori*.

est déterminée en conséquence, à une transformation birationnelle près, il existe, au contraire, une infinité de surfaces birationnellement distinctes, ayant la même irrégularité et les mêmes périodes. On peut dire seulement que ces surfaces possèdent la même *variété de Picard* (21) (¹). L'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante. Si l'on construit sur chacune de ces surfaces un système algébrique ∞^p de courbes, tel que deux courbes n'appartiennent jamais à un même système linéaire, on peut, entre deux de ces systèmes, établir (en ∞^p manières) une correspondance birationnelle, de sorte qu'à toute courbe du premier système (regardée comme élément) corresponde une seule courbe du second système.

(¹) On trouvera exposée la relation entre la *variété de Picard* et la surface à laquelle celle-ci est liée, dans le Mémoire de M. Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, mai, juin 1905).