J.-A. SERRET

Sur un problème de calcul intégral

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 6 (1869), p. 177-183
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__177_0>

SUR UN

PROBLÈME DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR M. J.-A. SERRET,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

I.

Un savant anglais, M. Crofton, a communiqué, il y a quelque temps, à l'Académie un théorème de calcul intégral qui n'a pas manqué de fixer l'attention des géomètres, tant à cause de l'élégance du résultat obtenu que de la méthode singulière et ingénieuse dont l'auteur a fait usage pour l'établir. Voici en quels termes M. Crofton a énoncé son théorème :

« *Soit un contour convexe de forme quelconque, dont la longueur totale est* L, *et qui renferme un espace* Ω; *si l'on appelle* θ *l'angle des deux tangentes menées d'un point extérieur* (x, y) *à ce contour, on aura l'intégrale*

$$\int\int(\theta - \sin\theta)\,dx\,dy = \frac{1}{2}L^2 - \pi\Omega$$

pour toute la surface du plan, extérieure au contour (*). » x et y désignent, bien entendu, des coordonnées rectangulaires.

Il est très-remarquable que ce théorème subsiste lorsque le contour convexe L, au lieu d'être une courbe continue, est formé de parties droites ou courbes faisant entre elles des angles quelconques. L'angle θ

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 994.

est toujours celui sous lequel le contour L est vu du point dont les coordonnées rectangulaires sont x et y; mais les droites *circonscrivantes* qui en sont les côtés ne sont plus nécessairement des tangentes, et elles peuvent pivoter autour des divers sommets du contour.

Il est évident que, pour établir la formule de M. Crofton dans toute sa généralité, il suffit de se borner au cas où le contour L est un polygone rectiligne convexe d'un nombre quelconque n de côtés; la démonstration peut être alors présentée d'une manière très-simple, comme il suit.

L'origine des coordonnées étant placée à l'intérieur du polygone, soit ω l'angle formé par le rayon vecteur du contour L avec la direction des abscisses positives. Nous supposerons que cet angle croisse lorsque le rayon vecteur se meut en s'élevant de l'axe des x vers l'axe des y, et nous représenterons par A_0, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ les sommets du polygone dans l'ordre où ils sont rencontrés, chaque indice pouvant être, si l'on veut, augmenté de n; nous désignerons par ω_{i-1} la valeur de ω, lorsque le rayon vecteur est perpendiculaire au côté $A_{i-1}A_i$.

Posons

$$V = \iint (\theta - \sin\theta)\,dx\,dy, \tag{1}$$

et désignons par $V_{i,j}$ la partie de l'intégrale V qui répond au cas où les droites circonscrivantes ne font que pivoter autour des sommets respectifs A_i, A_j. Soient α, β les valeurs que prend ω quand le rayon vecteur du contour est perpendiculaire à ces droites; les variables α, β seront liées aux coordonnées x, y par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &(x_i - x)\cos\alpha + (y_i - y)\sin\alpha = 0,\\ &(x_j - x)\cos\beta + (y_j - y)\sin\beta = 0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et si l'on fait

$$\left\{\begin{aligned} &A_{i,j} = (x_i - x_j)\cos\alpha + (y_i - y_j)\sin\alpha,\\ &B_{j,i} = (x_j - x_i)\cos\beta + (y_j - y_i)\sin\beta, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

on aura, par les formules (2),

$$\frac{dx}{d\beta}\frac{dy}{d\alpha} - \frac{dx}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta} = \frac{A_{i,j}B_{j,i}}{\sin^2(\beta-\alpha)};$$

d'où il suit que, dans le système des variables α, β, l'élément superficiel est représenté par

$$\pm \frac{A_{i,j} B_{j,i}}{\sin^3(\beta-\alpha)} d\alpha\, d\beta.$$

$A_{i,j}$ et $B_{j,i}$ sont des quantités positives, et si l'on pose

$$(4) \qquad \beta - \alpha = \pi - \theta,$$

on aura

$$(5) \qquad V_{i,j} = \iint \frac{\theta - \sin\theta}{\sin^3\theta} A_{i,j} B_{j,i}\, d\alpha\, d\beta;$$

l'intégration doit s'étendre aux valeurs de α, β respectivement comprises entre ω_{i-1} et ω_i, ω_{j-1} et ω_j. Nous supposons $j > i$; l'angle θ, défini par la formule (4), est toujours compris entre les limites $-\pi$ et $+\pi$.

Les intégrations relatives à α et à β s'exécutent très-simplement, par le moyen des relations

$$(6) \qquad \begin{cases} B_{j,i} = A_{i,j}\cos\theta - \dfrac{dA_{i,j}}{d\alpha}\sin\theta, \\ A_{i,j} = B_{j,i}\cos\theta + \dfrac{dB_{j,i}}{d\beta}\sin\theta, \end{cases}$$

et

$$(7) \qquad D_{i,j}^2 \sin^2\theta = A_{i,j}^2 - 2A_{i,j}B_{j,i}\cos\theta + B_{j,i}^2$$

qui résultent des formules (3); $D_{i,j}$ désigne la distance des sommets A_i, A_j du polygone L. Posons, pour abréger l'écriture,

$$(8) \qquad \Theta = \frac{1}{2}\left[\log(1+\cos\theta) - \frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta}\right],$$

et

$$(9) \quad f_{i,j}(\alpha,\beta) = (A_{i,j}^2 + B_{j,i}^2)\Theta + \frac{1}{2}A_{i,j}B_{j,i}\frac{\theta}{\sin\theta} + \left(-A_{i,j}B_{j,i} + \frac{1}{2}D_{i,j}^2\cos\theta\right);$$

on trouve aisément que l'on a

$$\frac{\theta - \sin\theta}{\sin^3\theta} A_{i,j} B_{j,i} = \frac{d^2 f_{i,j}(\alpha,\beta)}{d\alpha\, d\beta},$$

et, par conséquent, la formule (5) donnera

$$(10)\qquad V_{i,j}=f_{i,j}(\omega_i,\omega_j)-f_{i,j}(\omega_i,\omega_{j-1})-f_{i,j}(\omega_{i-1},\omega_j)+f_{i,j}(\omega_{i-1},\omega_{j-1}).$$

Si l'on attribue à j les valeurs $i+1$, $i+2,\ldots$, $i+n-1$, puis à i les valeurs $0, 1, 2,\ldots, (n-1)$, et que l'on ajoute ensemble toutes les valeurs de $V_{i,j}$ ainsi obtenues, il est évident que l'on formera le double $2V$ de l'intégrale à évaluer, car chaque point du plan aura été rencontré deux fois. Soit $U_{\mu,\nu}$ la partie de cette somme $2V$ qui dépend des angles ω_μ, ω_ν, la valeur de $U_{\mu,\nu}$ se déduira de celle de $V_{i,j}$ en donnant à i, j les valeurs μ, ν dans le premier terme du second membre de la formule (8); $\mu, \nu+1$, dans le deuxième terme; $\mu+1, \nu$ dans le troisième, et $\mu+1$, $\nu+1$ dans le quatrième. On a donc

$$(11)\qquad U_{\mu,\nu}=f_{\mu,\nu}(\omega_\mu,\omega_\nu)-f_{\mu,\nu+1}(\omega_\mu,\omega_\nu)-f_{\mu+1,\nu}(\omega_\mu,\omega_\nu)+f_{\mu+1,\nu+1}(\omega_\mu,\omega_\nu),$$

ce qui, à cause de la formule (9), se réduit à

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} U_{\mu,\nu}=&[(x_\nu-x_{\nu+1})(y_\mu-y_{\mu+1})-(x_\mu-x_{\mu+1})(y_\nu-y_{\nu+1})]\,\frac{\pi+\omega_\mu-\omega_\nu}{2}\\ &+D_{\mu,\mu+1}\,D_{\nu,\nu+1}.\end{aligned}\right.$$

D'après cela, on obtiendra l'intégrale $2V$ en faisant la somme de toutes les valeurs que prend $U_{\mu,\nu}$ quand on donne à chacun des indices μ,ν toutes les valeurs $0, 1, 2,\ldots, (n-1)$, avec la précaution d'ajouter 2π à ω_ν lorsque ν est inférieur à μ. On a ainsi, après la suppression des termes qui se détruisent,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} V=&-\frac{\pi}{2}\sum[(x_\nu-x_{\nu+1})(y_\mu-y_{\mu+1})-(x_\mu-x_{\mu+1})(y_\nu-y_{\nu+1})]\\ &+\frac{1}{2}\sum D_{\mu,\mu+1}\,D_{\nu,\nu+1}.\end{aligned}\right.$$

Dans la première partie de cette expression, l'indice ν doit être inférieur à μ, mais dans la seconde partie chaque indice doit recevoir les valeurs $0, 1, 2,\ldots, (n-1)$. On voit que cette seconde partie est égale à $\frac{1}{2}L^2$, et la première partie, qui se réduit à

$$-\frac{\pi}{2}\sum(x_\mu y_{\mu+1}-x_{\mu+1}y_\mu),$$

est égale au produit de $-\pi$ par l'aire Ω du polygone. On a donc

$$(14) \qquad V = \frac{1}{2} L^2 - \pi\Omega.$$

II.

M. Crofton a été conduit à la formule que nous venons d'établir, par des considérations tirées du *Calcul des Probabilités*. Le Mémoire de l'habile Géomètre publié dans les *Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres* renferme plusieurs autres résultats intéressants pour le Calcul intégral, et l'Auteur en a ultérieurement obtenu de nouveaux. Dans une Lettre récente communiquée à l'Académie (*), M. Crofton fait connaître en effet le théorème suivant, remarquable par sa généralité.

Soit un contour convexe de forme quelconque qui renferme un espace Ω *; si l'on appelle* C *la corde qui joint deux points de contour,* p *la distance de cette corde à un point fixe* O, *et* θ *l'angle formé par la direction de la droite* p *avec une direction fixe* Ox, *on aura*

$$\int\int C^3\, dp\, d\theta = 3\,\Omega^2,$$

l'intégration s'étendant à toutes les valeurs de p *et de* θ *qui donnent une corde réelle* C.

On peut démontrer ce nouveau théorème par une analyse analogue à celle dont nous venons de faire usage. Il suffit encore ici de considérer le cas où le contour donné est un polygone rectiligne convexe d'un nombre quelconque n de côtés; nous désignerons, comme plus haut, par $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ les n sommets dans l'ordre où ils sont rencontrés par un point mobile qui décrirait le contour en se mouvant toujours dans le même sens, chaque indice pouvant être, si l'on veut, augmenté de n.

Posons

$$(1) \qquad V = \int\int C^3\, dp\, d\theta,$$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, p. 1469.

et désignons par $V_{i,j}$ la partie de cette intégrale qui répond au cas où les extrémités I, J de la corde C ne se meuvent que sur les côtés respectifs $A_i A_{i+1}$, $A_j A_{j+1}$ du polygone donné. Soient r et s les rapports $\frac{IA_i}{A_{i+1}A_i}$, $\frac{JA_j}{A_{j+1}A_j}$ qui varient entre les limites o et 1; nous prendrons ces rapports pour variables au lieu de p et θ. Alors, en représentant par x_μ, y_μ les coordonnées du sommet A_μ, relativement à deux axes rectangulaires menés par le point fixe O et dont l'un, celui des x, coïncide avec la direction donnée Ox, on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} p = [x_i + (x_{i+1} - x_i)r]\cos\theta + [y_i + (y_{i+1} - y_i)r]\sin\theta, \\ p = [x_j + (x_{j+1} - x_j)s]\cos\theta + [y_j + (y_{j+1} - y_j)s]\sin\theta, \end{cases}$$

et

$$(3)\qquad \begin{cases} C\sin\theta = +[x_i + (x_{i+1} - x_i)r] - [x_j + (x_{j+1} - x_j)s], \\ C\cos\theta = -[y_i + (y_{i+1} - y_i)r] + [y_j + (y_{j+1} - y_j)s]. \end{cases}$$

De ces formules, on tire

$$\frac{dp}{dr}\frac{d\theta}{ds} - \frac{dp}{ds}\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{C^3}(G + Kr)(H - Ks),$$

en faisant, pour abréger l'écriture,

$$(4)\qquad \begin{cases} G = (x_j - x_i)(y_{j+1} - y_j) - (y_j - y_i)(x_{j+1} - x_j), \\ H = (x_i - x_j)(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_j)(x_{i+1} - x_i), \\ K = (x_{j+1} - x_j)(y_{i+1} - y_i) - (y_{j+1} - y_j)(x_{i+1} - x_i); \end{cases}$$

on a donc

$$(5)\qquad V_{i,j} = \int_0^1 \int_0^1 (G + Kr)(H - Ks)\,dr\,ds = \frac{1}{4}(2G + K)(2H - K).$$

Il est évident que si l'on donne à chacun des indices i, j, les valeurs o, 1, 2,..., $(n-1)$ et qu'on ajoute toutes les valeurs de $V_{i,j}$, on obtiendra le double 2V de l'intégrale à évaluer; on a donc

$$(6)\qquad V = \frac{1}{8}\sum(2G + K)(2H - K).$$

Mais

$$(7)\quad \begin{cases} 2G + K = 2(x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) \\ \qquad\qquad + (y_{i+1} + y_i)(x_{j+1} - x_j) - (x_{i+1} + x_i)(y_{j+1} - y_j), \\ 2H - K = 2(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ \qquad\qquad + (y_{j+1} + y_j)(x_{i+1} - x_i) - (x_{j+1} + x_j)(y_{i+1} - y_i), \end{cases}$$

et il suffit de multiplier chacun des trois termes de la première expression par le terme correspondant de la seconde; effectivement les valeurs que prend le produit de deux termes non correspondants des formules (7), quand on donne à i et à j toutes leurs valeurs, ont pour somme zéro. Chacune des expressions

$$\sum (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}), \quad \sum (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

étant égale au double de l'aire Ω du polygone donné, on a

$$(8)\qquad V = 3\Omega^2.$$