ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES VORONOÏ

Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 459-533

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__459_0>

SUR UNE FONCTION TRANSCENDANTE

ET SES APPLICATIONS

A LA SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES.

Par M. Georges VORONOÏ.

SECONDE PARTIE.

SOMMATION DES SÉRIES DÉPENDANT DU NOMBRE DES DIVISEURS DE NOMBRES ENTIERS POSITIFS.

SECTION III.

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE SOMMATOIRE D'EULER-MACLAURIN.

Formule générale pour la sommation des séries.

24. Dans le Mémoire de Stieltjes : *Recherches sur les fractions continues* (¹), il se trouve une généralisation très importante des intégrales définies.

Considérons les sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

en supposant que, comme à l'ordinaire, $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ soient des valeurs quelconques de la variable x contenues dans les intervalles

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. VIII, 1894, p. 71.

correspondants

$$(x_0, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, x_n) \qquad \text{où} \qquad x_0 = a \qquad \text{et} \qquad x_n = b.$$

On appellera, d'après Stieltjes, *intégrale définie* le symbole $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$ et l'on posera

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) = \lim S_n,$$

à condition que les sommes S_n tendent vers une limite fixe à mesure que toutes les différences $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$ décroissent infiniment, en valeur numérique, en conservant toujours le signe de la différence $b - a$.

On déduira sans peine, à l'aide des méthodes connues, les propriétés suivantes du symbole $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$:

1. *Le symbole $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$ a toujours un sens à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans le domaine (a, b) et si l'on peut partager ce domaine en intervalles dont le nombre soit fini de manière que la fonction $\varphi(x)$ varie dans le même sens entre les limites de chaque intervalle.*

2. $$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) + \int_a^b f(x)\, d\psi(x) = \int_a^b f(x)\, d[\varphi(x) + \psi(x)].$$

3. $$\int_a^b \psi(x)\, d\varphi(x) = \varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a) - \int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x).$$

En supposant que la fonction $\varphi(x)$ ait la dérivée $\varphi'(x)$, par rapport à la variable x, bien déterminée dans le domaine (a, b), on peut poser

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\, dx,$$

et le symbole de Stieltjes $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$ dans ce cas n'est autre chose que l'intégrale définie ordinaire

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

25. Considérons la somme

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n)$$

en supposant que la fonction $f(x)$ soit continue dans le domaine (a, b) et la fonction $\tau(n)$ soit bien déterminée pour toutes les valeurs entières de la variable n qui surpassent une limite fixe c.

Désignons

$$\varphi(x) = \sum_{n>c}^{n\leqq x} \tau(n) \tag{1}$$

et considérons l'intégrale définie de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$$

où $a \geqq c$ et $b > a$. En vertu de la définition du symbole $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$, établie précédemment, on aura le théorème suivant :

Théorème. — *La somme* $\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n)$ *peut être représentée par l'intégrale définie*

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \quad \text{où} \quad a \geqq c \quad \text{et} \quad b > a \tag{2}$$

à condition que la fonction $f(x)$ *soit continue dans le domaine* $a < x < b$.

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ ait les dérivées $f'(x), \ldots, f^{(m)}(x)$, par rapport à la variable x, bien déterminées dans le domaine (a, b).

Prenons une fonction quelconque $\Im(x)$ bien déterminée dans le domaine $x > c$ et continue dans chaque intervalle fini (c, x). Soit

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_m, \quad \ldots$$

une série infinie des nombres quelconques, pris arbitrairement.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *La somme* $\sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)$ *aura pour expression*

$$(\star) \quad \sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n) = \int_a^b f(x)\Im(x)\,dx + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k[r_k(b)f^{(k)}(b) - r_k(a)f^{(k)}(a)] + (-1)^m\int_a^b r_{m-1}(x)f^{(m)}(x)\,dx$$

à condition que les fonctions $r_0(x)$, $r_1(x)$, ... *soient définies par la formule*

$$(3) \quad r_k(x) = \sum_{n>c}^{n\leqq x}\tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!} - \left[\int_c^x \frac{(x-u)^k}{k!}\Im(u)\,du + \sum_{\lambda=0}^{k} A_\lambda \frac{(x-c)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Considérons, en premier lieu, la fonction $r_0(x)$; on aura, d'après l'hypothèse,

$$r_0(x) = \sum_{n>c}^{n\leqq x}\tau(n) - \int_c^x \Im(u)\,du - A_0$$

ou, autrement, à cause de (1),

$$r_0(x) = \varphi(x) - \int_c^x \Im(u)\,du - A_0.$$

En vertu de cette égalité, on conclut que la fonction $\varphi(x) - r_0(x)$ a la dérivée $\Im(x)$, par rapport à la variable x, et l'on peut poser

$$\int_a^b f(x)\,d[\varphi(x) - r_0(x)] = \int_a^b f(x)\Im(x)\,dx.$$

En observant que les intégrales de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,dr_0(x)$$

ont un sens dans le cas considéré, on obtient, d'après la propriété (2) de ces symboles,

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) - \int_a^b f(x)\,dr_0(x) = \int_a^b f(x)\,\mathfrak{z}(x)\,dx,$$

d'où il résulte, à cause de (2),

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)\,\mathfrak{z}(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dr_0(x).$$

L'intégration par parties donne

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)\mathfrak{z}(x)\,dx + r_0(b)f(b) - r_0(a)f(a) - \int_a^b r_0(x) f'(x)\,dx. \text{ [1]}$$

Le théorème énoncé est donc démontré dans le cas $m = 1$.

Supposons maintenant que la formule ($\star$) subsiste pour une valeur quelconque de m; on aura, par hypothèse,

$$(4) \quad \sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u)\mathfrak{z}(u)\,du + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)] + (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(u) f^{(m)}(u)\,du.$$

L'application de cette formule au cas

$$a = c, \qquad b = x \qquad \text{et} \qquad f(u) = \frac{(x-u)^m}{m!}$$

---

(1) *Voyez* le Mémoire de M. Franel, *Sur la théorie des séries* (*Mathematische Annalen*, t. LII, p. 529).

fournit, à cause de (3), le résultat suivant :

$$\sum_{n>c}^{n\leq x}\tau(n)\frac{(x-n)^m}{m!}=\int_c^x\frac{(x-u)^m}{m!}\mathfrak{I}(u)\,du+\sum_{\lambda=0}^{m-1}\mathrm{A}_\lambda\frac{(x-c)^{m-\lambda}}{(m-\lambda)!}+\int_c^x r_{m-1}(u)\,du.$$

En vertu de (3), on peut mettre la formule obtenue sous la forme

$$r_m(x)=\int_c^x r_{m-1}(u)\,du-\mathrm{A}_m.$$

A l'aide de cette formule, on peut transformer l'intégrale définie

$$(-1)^m\int_a^b r_{m-1}(u)f^{(m)}(u)\,du$$

qui figure dans la seconde partie de la formule (4). En intégrant par parties, on trouve

$$(-1)^m\int_a^b r_{m-1}(u)f^{(m)}(u)\,du=(-1)^m[r_m(b)f^{(m)}(b)-r_m(a)f^{(m)}(a)]$$
$$+(-1)^{m+1}\int_a^b r_m(u)f^{(m+1)}(u)\,du$$

et, à cause de (4), il vient

$$\sum_{n>a}^{n\leq b}\tau(n)f(n)=\int_a^b f(u)\mathfrak{I}(u)\,du+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k[r_k(b)f^{(k)}(b)-r_k(a)f^{(k)}(a)]$$
$$+(-1)^{m+1}\int_a^b r_m(u)f^{(m+1)}(u)\,du;$$

donc le théorème est démontré.

26. La formule fondamentale $(\star)$ est susceptible d'applications nombreuses et importantes.

Considérons d'abord le cas le plus simple : $\tau(n)=1$. En faisant

$$\mathfrak{I}(x)=1 \qquad \text{et} \qquad c=0,$$

on aura, en vertu de (3),

$$r_k(x) = \sum_{n>0}^{n \leqq x} \frac{(x-n)^k}{k!} - \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{\lambda=0}^{k} A_\lambda \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right].$$

En posant

$$A_\lambda = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \zeta(-\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

on obtient la fonction périodique

$$r_k(x) = \sum_{n>0}^{n \leqq x} \frac{(x-n)^k}{k!} - \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{\lambda=0}^{k} \zeta(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right]$$

ayant la période 1.

En vertu de la périodicité de la fonction $r_k(x)$, on aura

$$r_k(x) = -\left[\frac{(x - \mathrm{E}x)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{\lambda=0}^{k} \zeta(-\lambda) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{(x - \mathrm{E}x)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right];$$

il en résulte que la fonction $r_k(x)$ coïncide, dans le domaine $0 < x < 1$, avec la fonction de Bernoulli du degré $k+1$.

La formule sommatoire $(\star)$, dans le cas considéré, aura la forme

$$(5) \qquad \sum_{n>a}^{n \leqq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)]$$
$$+ (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(x) f^{(m)}(x)\,dx.$$

En supposant que a et b soient des nombres entiers positifs, on aura, à cause de la périodicité des fonctions $r_0(x)$, $r_1(x)$, ...,

$$r_k(a) = r_k(b) = r_k(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \zeta(-k),$$

et la formule précédente devient

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\zeta(-k)}{k!}[f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)]$$
$$+ (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(x) f^{(m)}(x)\,dx.$$

C'est la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin avec le terme complémentaire représenté par une intégrale définie. La formule (5) présente une généralisation de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin due à M. Sonine (¹).

27. Considérons maintenant le cas où $\tau(n)$ désigne le nombre des diviseurs du nombre entier positif n.

En faisant $c = 0$ dans la formule (3), on aura

$$(6) \qquad r_0(x) = \sum_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n) - \int_0^x \Im(u)\,du - A_0.$$

La fonction $\Im(x)$ et la constante A_0 restent arbitraires.

Lejeune-Dirichlet a démontré (²) que la fonction $\sum_{n=1}^{n\leqq x} E\frac{x}{n}$ ou, ce qui revient au même, la somme $\sum_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n)$ a la valeur asymptotique remarquable

$$x(\log x + 2C - 1),$$

où C désigne la constante d'Euler; de plus, en faisant

$$(7) \qquad \sum_{n>}^{n\leqq x} \tau(n) = x(\log x + 2C - 1) + R(x),$$

(¹) M. SONINE, *Sur une intégrale définie contenant la fonction numérique* $[x]$ (*Bulletin de l'Université de Varsovie*, 1885, n° 3) (en russe).

(²) LEJEUNE-DIRICHLET, *Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie* (*Lejeune-Dirichlet's Werke*, Berlin, 1897, t. II, p. 49).

on peut déterminer une constante A de manière que le reste $R(x)$ vérifie l'inégalité

$$|R(x)| < A\sqrt{x}, \tag{8}$$

quelle que soit la valeur positive de x.

Puisque

$$x(\log x + 2C - 1) = \int_0^x (\log x + 2C)\, dx,$$

on en conclut qu'en posant

$$\vartheta(x) = \log x + 2C,$$

on aura, à cause de (6) et (7),

$$r_0(x) = R(x) - A_0,$$

où la constante A_0 reste arbitraire. Il en résulte, en vertu de (8), que l'ordre de la fonction $r_0(x)$ ne surpasse pas celui de la fonction $\sqrt{x}$.

La méthode de Lejeune-Dirichlet exposée dans le Mémoire cité peut être appliquée aussi au calcul des valeurs approchées des sommes

$$\sum_{n>0}^{n \leqq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

De cette manière on pourrait déterminer, par la voie purement arithmétique, toutes les constantes A_0, A_1, ..., dans la formule (3) et obtenir pour la fonction $r_k(x)$ une expression dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{k+1}{2}}$.

La méthode de Lejeune-Dirichlet ne permet pas de déterminer la fonction $r_k(x)$ avec plus de précision et, en général, la solution de cette question importante offre des difficultés énormes.

Les propriétés remarquables de la fonction $g(x)$ exposées dans la Section II de ce Mémoire ouvrent une voie nouvelle pour les recherches concernant les fonctions $r_0(x)$, $r_1(x)$, ...

Représentation de la somme $\sum\limits_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n)$ par les intégrales définies.

28. Soient A et B les points de l'axe des coordonnées OX qui correspondent aux valeurs de la variable complexe z,

$$z = a \quad \text{et} \quad z = b, \quad \text{où} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad a < b.$$

Supposons que tous les nombres entiers qui satisfont aux conditions $a < n < b$ forment la série

$$a < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < b.$$

Soient $N_1, N_2, \ldots, N_{k-1}$ les points de l'axe OX qui correspondent aux valeurs de z

$$z = n_1, \qquad z = n_2, \qquad \ldots, \qquad z = n_{k-1}.$$

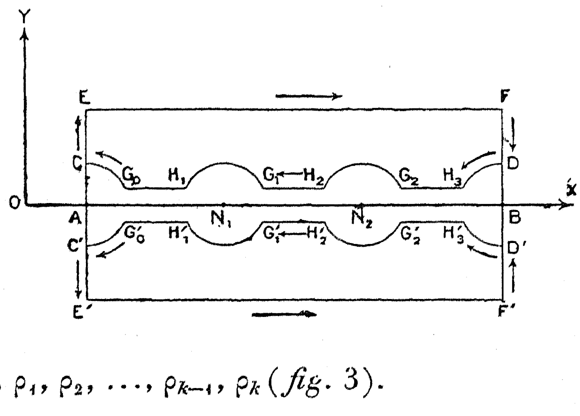
Décrivons des points $A, N_1, N_2, \ldots, N_{k-1}, B$ les arcs de cercle

$$CG_0, \quad H_1G_1, \quad H_2G_2, \quad \ldots, \quad H_{k-1}G_{k-1}, \quad H_kD$$

et les arcs de cercle

$$C'G'_0, \quad H'_1G'_1, \quad H'_2G'_2, \quad \ldots, \quad H'_{k-1}G'_{k-1}, \quad H'_kD'$$

Fig. 3.



des rayons $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_k$ (*fig.* 3).

Supposons que les droites G_0H_1, G_1H_2, ..., $G_{k-1}H_k$ et $G'_0H'_1$, $G'_1H'_2$, ..., G'_{k-1}, H'_k soient menées parallèlement à l'axe des coordonnées OX à une distance δ de cet axe. Menons, par les points A et B, parallèlement à l'axe OY, les droites EE' et FF'; menons parallèlement à l'axe OX les droites EF et E'F'.

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ de la variable complexe z soit holomorphe à l'intérieur du rectangle EFF'E' et considérons l'intégrale définie

$$\int f(z)\,g(-z)\,dz,$$

prise, d'une part, le long du contour fermé $\mathrm{CEFDH}_k\mathrm{G}_{k-1}\ldots\mathrm{G}_0\mathrm{C}$ et prise, d'autre part, le long du contour fermé $\mathrm{C'E'F'D'H'}_k\mathrm{G}'_{k-1}\ldots\mathrm{G}'_0\mathrm{C}'$. Puisque la fonction $f(z)\,g(-z)$ est holomorphe à l'intérieur de ces contours, on aura, d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{(\mathrm{CE}\ldots\mathrm{G}_0\mathrm{C})} f(z)\,g(-z)\,dz = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{(\mathrm{C'E'}\ldots\mathrm{G}'_0\mathrm{C}')} f(z)\,g(-z)\,dz = 0.$$

En partageant le chemin d'intégration $\mathrm{CE}\ldots\mathrm{G}_0\mathrm{C}$ en parties CEFD, DH_k, $\mathrm{H}_k\mathrm{G}_{k-1}$, ..., $\mathrm{H}_1\mathrm{G}_0$ et $\mathrm{G}_0\mathrm{C}$, on obtient

$$(1)\quad \int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,g(-z)\,dz = \int_{(\mathrm{CG}_0)} f(z)\,g(-z)\,dz + \sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_{(\mathrm{G}_\lambda\mathrm{H}_{\lambda+1})} f(z)\,g(-z)\,dz$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{k-1}\int_{(\mathrm{H}_\lambda\mathrm{G}_\lambda)} f(z)\,g(-z)\,dz + \int_{(\mathrm{H}_k\mathrm{D})} f(z)\,g(-z)\,dz;$$

de la même manière, on trouve

$$(2)\quad \int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)\,g(-z)\,dz = \int_{(\mathrm{C'G}'_0)} f(z)\,g(-z)\,dz + \sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_{(\mathrm{G}'_\lambda\mathrm{H}'_{\lambda+1})} f(z)\,g(-z)\,dz$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{k-1}\int_{(\mathrm{H}'_\lambda\mathrm{G}'_\lambda)} f(z)\,g(-z)\,dz + \int_{(\mathrm{H}'_k\mathrm{D}')} f(z)\,g(-z)\,dz.$$

Désignons $a = n_0$ et $b = n_k$ et considérons deux intégrales définies

$$(3) \qquad \int_{(G_\lambda H_{\lambda+1})} f(z)\, g(-z)\, dz \quad \text{et} \quad \int_{(G'_\lambda H'_{\lambda+1})} f(z)\, g(-z)\, dz$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

En observant que les droites $G_\lambda H_{\lambda+1}$ et $G'_\lambda H'_{\lambda+1}$ sont déterminées, d'après la supposition faite, par les équations

$$(G_\lambda H_{\lambda+1}) \quad z = u + \delta i, \qquad (G'_\lambda H'_{\lambda+1}) \quad z = u - \delta i,$$

et par les conditions

$$n_\lambda + \sqrt{\rho_\lambda^2 - \delta^2} < u < n_{\lambda+1} - \sqrt{\rho_{\lambda+1}^2 - \delta^2},$$

on peut présenter les intégrales (3) sous la forme suivante :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{(G_\lambda H_{\lambda+1})} f(z)\, g(-z)\, dz &= \int_{n_\lambda + \sqrt{\rho_\lambda^2 - \delta^2}}^{n_{\lambda+1} - \sqrt{\rho_{\lambda+1}^2 - \delta^2}} f(u + \delta i)\, g(-u - \delta i)\, du, \\ \int_{(G'_\lambda H'_{\lambda+1})} f(z)\, g(-z)\, dz &= \int_{n_\lambda + \sqrt{\rho_\lambda^2 - \delta^2}}^{n_{\lambda+1} - \sqrt{\rho_{\lambda+1}^2 - \delta^2}} f(u - \delta i)\, g(-u + \delta i)\, du. \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant deux intégrales définies

$$\int_{(H_\lambda G_\lambda)} f(z)\, g(-z)\, dz \quad \text{et} \quad \int_{(H'_\lambda G'_\lambda)} f(z)\, g(-z)\, dz \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k-1).$$

En posant

$$z = n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i},$$

on obtiendra

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{(H_\lambda G_\lambda)} f(z)\, g(-z)\, dz &= -\int_{\varphi_\lambda}^{\pi - \varphi_\lambda} f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i})\, g(-n_\lambda - \rho_\lambda e^{\omega i})\, i \rho_\lambda e^{\omega i}\, d\omega, \\ \int_{(H'_\lambda G'_\lambda)} f(z)\, g(-z)\, dz &= \int_{-\pi + \varphi_\lambda}^{-\varphi_\lambda} f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i})\, g(-n_\lambda - \rho_\lambda e^{\omega i})\, i \rho_\lambda e^{\omega i}\, d\omega, \end{aligned} \right.$$

où l'on a mis

$$(6)\qquad \varphi_\lambda = \arc \sin \frac{\delta}{\rho_\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Enfin, aux intégrales définies

$$\int_{(CG_0)} f(z)\,g(-z)\,dz, \quad \int_{(H_k D)} f(z)\,g(-z)\,dz$$

et

$$\int_{(C'G'_0)} f(z)\,g(-z)\,dz, \quad \int_{(H'_k D')} f(z)\,g(-z)\,dz,$$

on peut prêter la forme suivante :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned}
&\int_{(CG_0)} f(z)\,g(-z)\,dz = -\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} f(a+\rho_0 e^{\omega i})\,g(-a-\rho_0 e^{\omega i})\,i\rho_0\, e^{\omega i}\,d\omega,\\
&\int_{(H_k D)} f(z)\,g(-z)\,dz = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\varphi_k} f(b+\rho_k e^{\omega i})\,g(-b-\rho_k e^{\omega i})\,i\rho_k\, e^{\omega i}\,d\omega,\\
&\int_{(C'G'_0)} f(z)\,g(-z)\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varphi_0} f(a+\rho_0 e^{\omega i})\,g(-a-\rho_0 e^{\omega i})\,i\rho_0\, e^{\omega i}\,d\omega,\\
&\int_{(H'_k D')} f(z)\,g(-z)\,dz = \int_{-\pi+\varphi_k}^{-\frac{\pi}{2}} f(b+\rho_k e^{\omega i})\,g(-b-\rho_k e^{\omega i})\,i\rho_k\, e^{\omega i}\,d\omega,
\end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\varphi_0 = \arc \sin \frac{\delta}{\rho_0} \qquad \text{et} \qquad \varphi_k = \arc \sin \frac{\delta}{\rho_k}.$$

Supposons maintenant que les nombres positifs $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$ soient aussi petits que l'on voudra et que le nombre positif δ tende vers la limite 0.

Cherchons la limite vers laquelle tendent les intégrales définies (5) à mesure que δ décroît infiniment. En supposant que ρ_λ soit suffisamment petit, on peut poser

$$(8)\qquad f(n_\lambda + \rho_\lambda e^{\omega i}) = f(n_\lambda) + A\rho_\lambda,$$

où le module de A ne surpasse pas une limite fixe.

Nous avons obtenu au n° 23 la formule suivante :

$$(9)\quad g(-x) = -g(x) - \frac{1}{2}\log x - C \pm \frac{\pi i}{4} \mp \frac{i}{4\pi x} \pm \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right),$$

où le signe $\pm$ est celui de la partie imaginaire de x.

En vertu de cette formule, on aura

$$(10)\quad g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i}) = -g(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i}) - \frac{1}{2}\log(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i}) - C + \frac{\pi i}{4}$$
$$- \frac{i}{4\pi(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i})} + \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left(\frac{1}{n_\lambda-n+\rho_\lambda e^{\omega i}}+\frac{1}{n_\lambda+n+\rho_\lambda e^{\omega i}}\right),$$

à condition que $0<\omega<\pi$. On en conclut qu'en posant

$$(11)\qquad g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i}) = \frac{\tau(n_\lambda)}{2\pi}\,\frac{i}{\rho_\lambda e^{\omega i}} + B, \qquad \text{où} \qquad 0<\omega<\pi,$$

le module de B ne surpassera pas une limite fixe.

A cause de (8) et (11), il vient

$$(12)\quad f(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i})\,g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i})\,i\rho_\lambda e^{\omega i} = -\frac{\tau(n_\lambda)}{2\pi}f(n_\lambda) + P_\lambda\rho_\lambda, \quad 0<\omega<\pi,$$

où le module de P_λ ne surpasse pas une limite fixe.

En supposant que $-\pi<\omega<0$, on aura, en vertu de la formule (9),

$$g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i}) = -\frac{\tau(n_\lambda)}{2\pi}\,\frac{i}{\rho_\lambda e^{\omega i}} + B', \qquad -\pi<\omega<0,$$

et, à cause de (8), il vient

$$(13)\quad f(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i})\,g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i})\,i\rho_\lambda e^{\omega i} = \frac{\tau(n_\lambda)}{2\pi}f(n_\lambda) + P'_\lambda\rho_\lambda, \quad -\pi<\omega<0,$$

où le module de P'_λ ne surpasse pas une limite fixe.

En vertu des égalités (12) et (13), les intégrales (5) prennent la forme

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{\varphi_\lambda}^{\pi-\varphi_\lambda} f(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i})\, g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i})\, i\rho_\lambda e^{\omega i}\, d\omega\\
&\quad = -\tau(n_\lambda) f(n_\lambda)\,\frac{\pi-2\varphi_\lambda}{2\pi}+\rho_\lambda\int_{\varphi_\lambda}^{\pi-\varphi_\lambda} \mathrm{P}_\lambda\, d\omega,\\
&\int_{-\pi+\varphi_\lambda}^{-\varphi_\lambda} f(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i})\, g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i})\, i\rho_\lambda e^{\omega i}\, d\omega\\
&\quad = \tau(n_\lambda) f(n_\lambda)\,\frac{\pi-2\varphi_\lambda}{2\pi}+\rho_\lambda\int_{-\pi+\varphi_\lambda}^{-\varphi_\lambda} \mathrm{P}'_\lambda\, d\omega.
\end{aligned}\right.$$

En vertu de l'égalité (6), on obtient

$$\lim_{\delta=0}\varphi_\lambda = 0,$$

et, à cause de (14), on aura

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lim_{\delta=0}\int_{\varphi_\lambda}^{\pi-\varphi_\lambda} f(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i})\, g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i})\, i\rho_\lambda e^{\omega i}\, d\omega = -\tfrac{1}{2}\tau(n_\lambda) f(n_\lambda)+\mathrm{A}_\lambda\rho_\lambda,\\
&\lim_{\delta=0}\int_{-\pi+\varphi_\lambda}^{-\varphi_\lambda} f(n_\lambda+\rho_\lambda e^{\omega i})\, g(-n_\lambda-\rho_\lambda e^{\omega i})\, i\rho_\lambda e^{\omega i}\, d\omega = \tfrac{1}{2}\tau(n_\lambda) f(n_\lambda)+\mathrm{A}'_\lambda\rho_\lambda,
\end{aligned}\right.$$

où les modules des variables A_λ et A'_λ ne surpassent pas des limites fixes.

De la même manière, on obtient les limites vers lesquelles tendent les intégrales définies (7) à mesure que δ décroît infiniment; on aura

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lim_{\delta=0}\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} f(a+\rho_0 e^{\omega i})\, g(-a-\rho_0 e^{\omega i})\, i\rho_0 e^{\omega i}\, d\omega = -\tfrac{1}{4}\tau(a) f(a)+\mathrm{A}_0\rho_0,\\
&\lim_{\delta=0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\varphi_k} f(b+\rho_k e^{\omega i})\, g(-b-\rho_k e^{\omega i})\, i\rho_k e^{\omega i}\, d\omega = -\tfrac{1}{4}\tau(b) f(b)+\mathrm{A}_k\rho_k,\\
&\lim_{\delta=0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varphi_0} f(a+\rho_0 e^{\omega i})\, g(-a-\rho_0 e^{\omega i})\, i\rho_0 e^{\omega i}\, d\omega = \tfrac{1}{4}\tau(a) f(a)+\mathrm{A}'_0\rho_0,\\
&\lim_{\delta=0}\int_{-\pi+\varphi_k}^{-\frac{\pi}{2}} f(b+\rho_k e^{\omega i})\, g(-b-\rho_k e^{\omega i})\, i\rho_k e^{\omega i}\, d\omega = \tfrac{1}{4}\tau(b) f(b)+\mathrm{A}'_k\rho_k,
\end{aligned}\right.$$

dans ces formules le symbole $\tau(a)$ a la valeur o quand a n'est pas un nombre entier positif, et le symbole $\tau(b)$ est défini de la même manière.

Cherchons, enfin, les limites vers lesquelles tendent les intégrales définies (4) quand δ décroît infiniment.

En vertu de la formule (9), on obtient

$$\lim_{\delta=0} g(-u-\delta i) = -g(u) - \tfrac{1}{2}\log u - C + \frac{\pi i}{4} - \frac{i}{4\pi u} + \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left(\frac{1}{u-n}+\frac{1}{u+n}\right),$$

$$\lim_{\delta=0} g(-u+\delta i) = -g(u) - \tfrac{1}{2}\log u - C - \frac{\pi i}{4} + \frac{i}{4\pi u} - \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left(\frac{1}{u-n}+\frac{1}{u+n}\right).$$

En désignant, pour abréger,

$$h(u) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4\pi u} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\left(\frac{1}{u-n}+\frac{1}{u+n}\right),$$

on aura

$$\lim_{\delta=0} g(-u-\delta i) = -g(u) - \tfrac{1}{2}\log u - C + ih(u);$$
$$\lim_{\delta=0} g(-u+\delta i) = -g(u) - \tfrac{1}{2}\log u - C - ih(u).$$

A l'aide de ces égalités, on trouve

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{\delta=0}\int_{n_\lambda+\sqrt{\rho_\lambda^2-\delta^2}}^{n_{\lambda+1}-\sqrt{\rho_{\lambda+1}^2-\delta^2}} f(u+\delta i)\,g(-u-\delta i)\,du \\ \displaystyle\qquad = \int_{n_\lambda+\rho_\lambda}^{n_{\lambda+1}-\rho_{\lambda+1}} f(u)[-g(u)-\tfrac{1}{2}\log u - C + ih(u)]\,du, \\ \displaystyle\lim_{\delta=0}\int_{n_\lambda+\sqrt{\rho_\lambda^2-\delta^2}}^{n_{\lambda+1}-\sqrt{\rho_{\lambda+1}^2-\delta^2}} f(u-\delta i)\,g(-u+\delta i)\,du \\ \displaystyle\qquad = \int_{n_\lambda+\rho_\lambda}^{n_{\lambda+1}-\rho_{\lambda+1}} f(u)[-g(u)-\tfrac{1}{2}\log u - C - ih(u)]\,du. \end{cases}$$

En faisant $\delta = 0$ dans les égalités (1) et (2), on aura, en vertu, d'une part, de (4), (5), (7) et, en vertu, d'autre part, de (15), (16), (17), les égalités suivantes :

$$\int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,g(-z)\,dz = \tfrac{1}{4}\tau(a)f(a) + \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\tau(n_\lambda)f(n_\lambda) + \tfrac{1}{4}\tau(b)f(b)$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_{n_\lambda+\rho_\lambda}^{n_{\lambda+1}-\rho_{\lambda+1}} f(u)[-g(u) - \tfrac{1}{2}\log u - \mathrm{C} + ih(u)]\,du - \sum_{\lambda=0}^{k}\mathrm{A}_\lambda\rho_\lambda,$$

$$\int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)\,g(-z)\,dz = \tfrac{1}{4}\tau(a)f(a) + \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{k-1}\tau(n_\lambda)f(n_\lambda) + \tfrac{1}{4}\tau(b)f(b)$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_{n_\lambda+\rho_\lambda}^{n_{\lambda+1}-\rho_{\lambda+1}} f(u)[-g(u) - \tfrac{1}{2}\log u - \mathrm{C} - ih(u)]\,du + \sum_{\lambda=0}^{k}\mathrm{A}'_\lambda\rho_\lambda.$$

En faisant la somme de ces égalités, on obtient

$$\int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,g(-z)\,dz + \int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)\,g(-z)\,dz$$
$$= \tfrac{1}{2}\tau(a)f(a) + \sum_{\lambda=1}^{k-1}\tau(n_\lambda)f(n_\lambda) + \tfrac{1}{2}\tau(b)f(b)$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_{n_\lambda+\rho_\lambda}^{n_{\lambda+1}-\rho_{\lambda+1}} f(u)[-2g(u) - \log u - 2\mathrm{C}]\,du + \sum_{\lambda=0}^{k}(-\mathrm{A}_\lambda + \mathrm{A}'_\lambda)\rho_\lambda.$$

En vertu de l'égalité obtenue, on peut poser

$$\int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,g(-z)\,dz + \int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)\,g(-z)\,dz$$
$$= \tfrac{1}{2}\tau(a)f(a) + \sum_{n>a}^{n<b}\tau(n)f(n) + \tfrac{1}{2}\tau(b)f(b)$$
$$+\int_a^b f(u)[-2g(u) - \log u - 2\mathrm{C}]\,du + \varepsilon(\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k),$$

où la fonction $\varepsilon(\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k)$ tend vers la limite o quand les variables $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$ décroissent infiniment.

En observant que les chemins d'intégration CEFD et C'E'F'D' ne dépendent que des variables ρ_0 et ρ_k, on peut écrire

$$\lim_{\rho_0=0,\,\rho_k=0}\left[\int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,g(-z)\,dz+\int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)\,g(-z)\,dz\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\tau(a)f(a)+\sum_{n>a}^{n<b}\tau(n)f(n)+\tfrac{1}{2}\tau(b)f(b)+\int_a^b f(u)[-2g(u)-\log u-2\mathrm{C}]\,du.$$

Cette formule peut être présentée sous la forme suivante :

$$\text{(I)}\quad \sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)=\int_a^b f(u)[\log u+2\mathrm{C}+2g(u)]\,du+\tfrac{1}{2}\tau(b)f(b)-\tfrac{1}{2}\tau(a)f(a)$$
$$+\lim_{\rho_0=0,\,\rho_k=0}\left[\int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)g(-z)\,dz+\int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)g(-z)\,dz\right].$$

29. On peut prêter à la formule obtenue une forme remarquable, à l'aide du développement de la fonction $g(x)$ par la série infinie

$$(18)\qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,\xi(4\pi^2 nx)$$

qui a été étudié au n° 16. En remplaçant dans cette égalité x par $-z$, on aura

$$g(-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,\xi(-4\pi^2 nz).$$

La série infinie considérée est uniformément convergente à l'intérieur des domaines $\mathrm{CEFDH}_k\ldots\mathrm{G}_0\mathrm{C}$ et $\mathrm{C'E'F'D'H}'_k\ldots\mathrm{G}'_0\mathrm{C}'$; il en résulte

$$(19)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,g(-z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,\xi(-4\pi^2 nz)\,dz,\\[2ex] \displaystyle\int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)\,g(-z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)\,\xi(-4\pi^2 nz)\,dz.\end{cases}$$

En supposant que $\rho_0=\rho_k=\rho$, on aura deux rectangles CEFD et

C′E′F′D′. Puisque

$$\int_{(CEFD)} f(z)\xi(-4\pi^2 nz)\,dz = \int_{(CD)} f(z)\,\xi(-4\pi^2 nz)\,dz,$$

$$\int_{(C'E'F'D')} f(z)\xi(-4\pi^2 nz)\,dz = \int_{(C'D')} f(z)\,\xi(-4\pi^2 nz)\,dz$$

et

$$\int_{(CD)} f(z)\xi(-4\pi^2 nz)\,dz = \int_a^b f(u+\rho i)\,\xi 4\pi^2 n(-u-\rho i)\,du,$$

$$\int_{(C'D')} f(z)\xi(-4\pi^2 nz)\,dz = \int_a^b f(u-\rho i)\,\xi 4\pi^2 n(-u+\rho i)\,du,$$

on aura, en vertu de (19),

$$\int_{(CEFD)} f(z)\,g(-z)\,dz + \int_{(C'E'F'D')} f(z)\,g(-z)\,dz$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\int_a^b [f(u+\rho i)\xi 4\pi^2 n(-u-\rho i) + f(u-\rho i)\xi 4\pi^2 n(-u+\rho i)]\,du.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (I), on trouve

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n)f(n) = \int_a^b f(u)[\log u + 2C + 2g(u)]\,du + \tfrac{1}{2}\tau(b)f(b) - \tfrac{1}{2}\tau(a)f(a)$$
$$+ \lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\int_a^b [f(u+\rho i)\xi 4\pi^2 n(-u-\rho i) + f(u-\rho i)\xi 4\pi^2 n(-u+\rho i)]\,du.$$

La recherche de la limite de la somme infinie obtenue offre des difficultés énormes. Tout le problème se réduit à ceci : est-il permis d'intervertir le signe de limite avec le signe de sommation? En admettant que cette interversion soit légitime, on obtient

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\int_a^b [f(u+\rho i)\xi 4\pi^2 n(-u-\rho i) + f(u-\rho i)\xi 4\pi^2 n(-u+\rho i)]\,du$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\int_a^b 2f(u)\,\eta(4\pi^2 nu)\,du,$$

puisque, en vertu de la formule (1) du n° 8, on a

$$\lim_{\rho=0} \frac{\xi(-x+\rho i)+\xi(-x-\rho i)}{2} = \eta(x),$$

à condition que $x > 0$ et $\rho > 0$. En observant, d'autre part, qu'à cause de (18),

$$\int_a^b f(u)\,g(u)\,du = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b f(u)\,\xi(4\pi^2 nu)\,du,$$

on obtient la formule fondamentale

$$(\star) \quad \sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u)(\log u + 2C)\,du + \tfrac{1}{2}\tau(b)f(b) - \tfrac{1}{2}\tau(a)f(a)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \int_a^b f(u)\,[\xi(4\pi^2 nu) + \eta(4\pi^2 nu)]\,du.$$

On ne parvient à la démonstration rigoureuse de cette formule remarquable qu'en envisageant le problème posé sous un nouveau point de vue.

30. Supposons que la fonction $f(z)$ satisfasse à la condition suivante : le module du produit $f(z)\,g(-z)$ tend vers la limite o quand le module de la variable z croît infiniment tandis que la partie réelle de z reste comprise entre les limites a et b.

Considérons deux intégrales

$$\int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,g(-z)\,dz \quad \text{et} \quad \int_{(\mathrm{C'E'F'D'})} f(z)\,g(-z)\,dz$$

obtenues précédemment. En partageant le chemin d'intégration CEFD en trois parties, CE, EF et FD, on aura

$$(20) \quad \int_{(\mathrm{CEFD})} f(z)\,g(-z)\,dz$$
$$= \int_{(\mathrm{CE})} f(z)\,g(-z)\,dz + \int_{(\mathrm{EF})} f(z)\,g(-z)\,dz + \int_{(\mathrm{FD})} f(z)\,g(-z)\,dz.$$

De la même manière, on trouve

$$(21)\quad \int_{(C'E'F'D')} f(z)\,g(-z)\,dz$$
$$=\int_{(C'E')} f(z)\,g(-z)\,dz+\int_{(E'F')} f(z)\,g(-z)\,dz+\int_{(F'D')} f(z)\,g(-z)\,dz.$$

A mesure que les droites EF et E'F' s'éloignent à l'infini, les deux intégrales

$$\int_{(EF)} f(z)\,g(-z)\,dz \quad \text{et} \quad \int_{(E'F')} f(z)\,g(-z)\,dz,$$

en vertu de l'hypothèse faite, tendent vers la limite o.

En observant que les chemins d'intégration CE, DF et C'E', D'F' sont définis par les conditions

$$\begin{array}{llll} (CE) & z=a+ti, \quad t>\rho_0, & (DF) & z=b+ti, \quad t>\rho_k, \\ (C'E') & z=a-ti, \quad t>\rho_0, & (D'F') & z=b-ti, \quad t>\rho_k, \end{array}$$

on obtient, à cause de (20) et (21),

$$\int_{(CEFD)} f(z)\,g(-z)\,dz=\int_{\rho_0}^{\infty} f(a+ti)\,g(-a-ti)\,i\,dt-\int_{\rho_k}^{\infty} f(b+ti)\,g(-b-ti)\,i\,dt,$$
$$\int_{(C'E'F'D')} f(z)\,g(-z)\,dz=-\int_{\rho_0}^{\infty} f(a-ti)\,g(-a+ti)\,i\,dt+\int_{\rho_k}^{\infty} f(b-ti)\,g(-b+ti)\,i\,dt;$$

il en résulte

$$\lim_{\rho_0=0,\ \rho_k=0}\left[\int_{(CEFD)} f(z)\,g(-z)\,dz+\int_{(C'E'F'D')} f(z)\,g(-z)\,dz\right]$$
$$=\int_0^{\infty}[f(b-ti)\,g(-b+ti)-f(b+ti)\,g(-b-ti)]\,i\,dt$$
$$-\int_0^{\infty}[f(a-ti)\,g(-a+ti)-f(a+ti)\,g(-a-ti)]\,i\,dt.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (I), on trouve

$$(\mathrm{II})\quad \sum_{n>a}^{n\leq b}\tau(n)f(n)=\int_a^b f(u)[\log u+2C+2g(u)]\,du+\tfrac{1}{2}\tau(b)f(b)-\tfrac{1}{2}\tau(b)f(b)$$
$$+\int_0^{\infty}[f(b-ti)\,g(-b+ti)-f(b+ti)\,g(-b-ti)]\,i\,dt$$
$$-\int_0^{\infty}[f(a-ti)\,g(-a+ti)-f(a+ti)\,g(-a-ti)]\,i\,dt.$$

La formule obtenue fournit une ressource précieuse pour le calcul des sommes considérées.

SECTION IV.

SUR LES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR LES SOMMES $\sum\limits_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}$.

Représentation de la fonction $\zeta^2(s)$ par les intégrales définies.

31. Soit s une variable réelle positive. Comme on sait, la somme infinie

$$\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$$

représente la fonction $\zeta^2(s)$ à condition que $s>1$.

Considérons la somme

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b}\frac{\tau(n)}{n^s}$$

en supposant que $0<a<1$ et $s>1$.

Le module du produit $\frac{1}{z^s}g(-z)$, en vertu du théorème I du n° 22, décroît infiniment quand le module de la variable z devient infiniment grand et la partie réelle de z reste comprise entre les limites a et b; on en conclut que la formule (II) du n° 30 est applicable au cas considéré, et il viendra

$$(1)\quad \begin{aligned}\sum_{n>a}^{n\leqq b}\frac{\tau(n)}{n^s}=&\int_a^b\frac{1}{u^s}[\log u+2C+2g(u)]\,du+\frac{1}{2}\frac{\tau(b)}{b^s}-\frac{1}{2}\frac{\tau(a)}{a^s}\\ &+\int_0^{\infty}\left[\frac{g(-b+ti)}{(b-ti)^s}-\frac{g(-b-ti)}{(b+ti)^s}\right]i\,dt\\ &-\int_0^{\infty}\left[\frac{g(-a+ti)}{(a-ti)^s}-\frac{g(-a-ti)}{(a+ti)^s}\right]i\,dt.\end{aligned}$$

Puisque le nombre a présente une fraction positive, on aura

$$\tau(a) = 0. \tag{2}$$

Supposons maintenant que le nombre b croisse infiniment en satisfaisant toujours aux conditions

$$\alpha < b - \mathrm{E}\,b < \beta, \tag{3}$$

α et β étant deux fractions données, prises arbitrairement, on aura

$$\tau(b) = 0. \tag{4}$$

En vertu du théorème IV du n° 23, le module de la fonction $g(-b+ti)$ ne surpasse pas la limite

$$|g(-b+ti)| < \mathrm{A}\,|+b-ti|^{\rho},$$

si petit que soit le nombre positif ρ. Puisque, d'après l'hypothèse faite, $s > 1$, on peut toujours choisir la valeur de ρ de manière que la différence $s-\rho$ soit aussi plus grande que 1, et l'on aura l'inégalité

$$\left|\int_0^{\infty}\left[\frac{g(-b+ti)}{(b-ti)^s} - \frac{g(-b-ti)}{(b+ti)^s}\right] i\,dt\right| < 2\mathrm{A}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(\sqrt{b^2+t^2})^{s-\rho}},$$

ou autrement

$$\left|\int_0^{\infty}\left[\frac{g(-b+ti)}{(b-ti)^s} - \frac{g(-b-ti)}{(b+ti)^s}\right] i\,dt\right| < \frac{2\mathrm{A}}{b^{s-\rho-1}}\int_0^{\infty}\frac{du}{(\sqrt{u^2+1})^{s-\rho}}.$$

En vertu de l'inégalité obtenue, on conclut que l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{g(-b+ti)}{(b-ti)^s} - \frac{g(-b-ti)}{(b-ti)^s}\right] i\,dt$$

tend vers la limite 0 à mesure que le nombre b croît infiniment en satisfaisant toujours aux conditions (3).

En faisant $b = \infty$ dans l'égalité (1), on obtient, à cause de (2) et (4),

$$\zeta^2(s) = \int_a^\infty \frac{1}{t^s}[\log t + 2C + 2g(t)]\,dt - \int_0^\infty \left[\frac{g(-a+ti)}{(a-ti)^s} - \frac{g(-a-ti)}{(a+ti)^s}\right] i\,dt \tag{5}$$

où $0 < a < 1$ et $s > 1$.

32. Le développement connu [1] de la fonction $\zeta(s)$ en série infinie

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \ldots$$

donne

$$\zeta^2(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} + C^2 + 2C_1 + \ldots.$$

On en conclut que la fonction

$$\zeta^2(s) - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2C}{s-1}$$

est holomorphe dans toute région bornée du plan.

En observant que la fonction $\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1}$ peut être représentée par l'intégrale définie

$$\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} = \int_1^\infty (\log t + 2C)\frac{dt}{t^s}$$

à condition que $s > 1$, et en retranchant cette égalité de la formule (5), on obtient

$$\zeta^2(s) - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2C}{s-1} = \int_a^1 (\log t + 2C)\frac{dt}{t^s} + 2\int_a^\infty \frac{g(t)}{t^s}\,dt - \int_0^\infty \left[\frac{g(-a+ti)}{(a-ti)^s} - \frac{g(-a-ti)}{(a+ti)^s}\right] i\,dt. \tag{6}$$

---

(1) *Voyez*, par exemple, la Note de M. Jensen : *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*, t. CIV, 1887, p. 1156).

Les deux parties de la formule obtenue ont un sens, quelle que soit la valeur réelle de la variable s. Puisque la fonction

$$\zeta^2(s) - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2C}{s-1}$$

est holomorphe, on en conclut que cette formule subsiste, quelle que soit la valeur réelle de s.

Cela posé, considérons le cas $s < 1$. On peut représenter dans ce cas le fonction $\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1}$ par l'intégrale définie suivante :

$$\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} = -\int_0^1 (\log t + 2C)\frac{dt}{t^s}$$

où $s < 1$.

En ajoutant cette égalité à la formule (6), on obtient

$$\begin{aligned}(7)\qquad \zeta^2(s) = &-\int_0^a (\log t + 2C)\frac{dt}{t^s} + 2\int_a^\infty \frac{g(t)}{t^s}\,dt \\ &-\int_0^\infty \left[\frac{g(-a+ti)}{(a-ti)^s} - \frac{g(-a-ti)}{(a+ti)^s}\right] i\,dt;\end{aligned}$$

cette formule subsiste à condition que $0 < a < 1$ et $s < 1$.

Étude de la somme $\sum\limits_{n>0}^{n \leq x} \tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}$ $\qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$.

33. Prenons un nombre quelconque a satisfaisant aux conditions

$$0 < a < 1$$

et considérons la somme

$$\sum_{n>a}^{n \leq x} \tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!},$$

x étant la variable positive et $k = 0, 1, 2, \ldots$.

La formule (II) du n° 30 est applicable à la somme considérée, et l'on aura

$$\sum_{n>a}^{n\leqq x}\tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}=\int_a^x\frac{(x-t)^k}{k!}[\log t+2C+2g(t)]\,dt+\frac{1}{2}\,\text{o}^k\tau(x)$$
$$+\frac{1}{k!}\int_0^\infty[(ti)^k g(-x+ti)-(-ti)^k g(-x-ti)]\,i\,dt$$
$$-\frac{1}{k!}\int_0^\infty[(x-a+ti)^k g(-a+ti)-(x-a-ti)^k g(-a-ti)]\,i\,dt.$$

On peut prêter à cette égalité la forme suivante :

$$\sum_{n>a}^{n\leqq x}\tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}=\int_0^x\frac{(x-t)^k}{k!}[\log t+2C]\,dt+\frac{1}{2}\,\text{o}^k\tau(x)-2\int_x^\infty\frac{(x-t)^k}{k!}g(t)\,dt$$
$$-\int_0^a\frac{(x-t)^k}{k!}(\log t+2C)\,dt+2\int_a^\infty\frac{(x-t)^k}{k!}g(t)\,dt$$
$$+\frac{1}{k!}\int_0^\infty[(ti)^k g(-x+ti)-(-ti)^k g(-x-ti)]\,i\,dt$$
$$-\frac{1}{k!}\int_0^\infty[(x-a+ti)^k g(-a+ti)-(x-a-ti)^k g(-a-ti)]\,i\,dt.$$

A l'aide des égalités

$$\frac{(x-t)^k}{k!}=\sum_{\lambda=0}^{k}t^\lambda\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\qquad\text{et}\qquad\frac{(x-a+ti)^k}{k!}=\sum_{\lambda=0}^{k}(a-ti)^\lambda\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!},$$

on déduit de l'égalité précédente la formule suivante :

$$(1)\quad\sum_{n>a}^{n\leqq x}\tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}$$
$$=\int_0^x\frac{(x-t)^k}{k!}(\log t+2C)\,dt+\frac{1}{2}\,\text{o}^k\tau(x)-2\int_x^\infty\frac{(x-t)^k}{k!}g(t)\,dt$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\left\{-\int_0^a t^\lambda(\log t+2C)\,dt+2\int_a^\infty t^\lambda g(t)\,dt\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty[(a-ti)^\lambda g(-a+ti)-(a+ti)^\lambda g(-a-ti)]\,i\,dt\right\}$$
$$+\frac{1}{k!}\int_0^\infty[(ti)^k g(-x+ti)-(-ti)^k g(-x-ti)]\,i\,dt.$$

En observant que

$$\sum_{n>a}^{n\leqq x} \tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!} = \sum_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}$$

et, en vertu de la formule (7) du n° 32,

$$\begin{aligned}\zeta^2(-\lambda) = &-\int_0^a t^\lambda(\log t + 2C)\,dt + 2\int_a^\infty t^\lambda g(t)\,dt\\ &-\int_0^\infty [(a-ti)^\lambda g(-a+ti) - (a+ti)^\lambda g(-a-ti)]\,i\,dt,\end{aligned}$$

on obtient, à cause de (1),

$$\begin{aligned}\sum_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!} = &\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}(\log t + 2C)\,dt\\ &+\sum_{\lambda=0}^{k} \zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + \frac{1}{2}\,0^k\tau(x) - 2\int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!}\,g(t)\,dt\\ &+\frac{1}{k!}\int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)]\,i\,dt.\end{aligned}$$

En désignant

$$\begin{aligned}(2)\quad r_k(x) = &\frac{1}{2}\,0^k\tau(x) - 2\int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!}\,g(t)\,dt\\ &+\frac{1}{k!}\int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)]\,i\,dt \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}(3)\quad \sum_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!} = &\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k}(\log t + 2C)\,dt\\ &+\sum_{\lambda=0}^{k} \zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + r_k(x) \quad (k=0, 1, 2, \ldots).\end{aligned}$$

34. En vertu de l'égalité obtenue, la fonction $r_k(x)$ aura pour

expression

$$(4)\quad r_k(x)=\sum_{n>0}^{n\leqq x}\tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}
-\left\{\int_0^x\frac{(x-t)^k}{k!}(\log t+2C)\,dt+\sum_{\lambda=0}^{k}\zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\right\}.$$

En comparant cette formule avec la formule (3) du n° 25 :

$$r_k(x)=\sum_{n>c}^{n\leqq x}\tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}-\left\{\int_c^x\frac{(x-t)^k}{k!}\Im(t)\,dt+\sum_{\lambda=0}^{k}A_\lambda\frac{(x-c)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\right\},$$

on voit que ces deux formules coïncident, si l'on pose

$$c=0,\qquad \Im(t)=\log t+2C\qquad \text{et}\qquad A_\lambda=\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\zeta^2(-\lambda)\qquad(\lambda=0,1,2,\ldots).$$

La formule sommatoire générale ($\star$) du n° 25 prend dans ce cas la forme

$$(\star)\quad \sum_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)=\int_a^b f(t)(\log t+2C)\,dt
+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k[r_k(b)f^{(k)}(b)-r_k(a)f^{(k)}(a)]+(-1)^m\int_a^b r_{m-1}(t)f^{(m)}(t)\,dt.$$

Cette formule peut servir au calcul des valeurs approchées de la somme $\sum\limits_{n>a}^{n\leqq b}\tau(n)f(n)$ à condition que l'on connaisse les valeurs approchées des fonctions $r_0(x)$, $r_1(x)$, ...

Quant à la fonction $r_0(x)$, on sait, d'après ce qui a été dit au n° 27, que l'ordre de la fonction $r_0(x)$ ne surpasse pas celui de la fonction $\sqrt{x}$; donc, on peut déterminer une constante A de manière que l'inégalité

$$|r_0(x)|<A\sqrt{x}$$

ait lieu à condition que $x > a$, le nombre positif a étant pris arbitrairement.

Dans le cas $0 < x < 1$, on aura

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \tau(n) = 0,$$

et de la formule (4) il suit

$$r_0(x) = -\int_0^x (\log t + 2C)\, dt - \zeta^2(0)$$

ou, autrement,

$$r_0(x) = -x(\log x + 2C - 1) - \frac{1}{4} \qquad (0 < x < 1), \tag{5}$$

puisque $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

La formule (2) fournit un moyen pour la recherche des valeurs approchées plus précises de la fonction $r_0(x)$ et des fonctions $r_1(x)$, $r_2(x)$, ...

Développement de la fonction $r_k(x)$ en une série infinie ($k = 1, 2, \ldots$).

35. Nous avons défini la fonction $r_k(x)$ au n° 33 par la formule suivante :

$$\begin{aligned} (1)\quad r_k(x) = \frac{1}{2} 0^k \tau(x) - 2\int_x^\infty \frac{(x-t)^k}{k!} g(t)\, dt \\ + \frac{1}{k!}\int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)]\, i\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Considérons l'intégrale définie

$$\int_\rho^N [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)]\, i\, dt$$

en supposant que $\rho > 0$ et $N > \rho$. A l'aide du développement de la fonction $g(-x \pm ti)$ en série infinie

$$g(-x \pm ti) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, \xi 4\pi^2 n(-x \pm ti)$$

on obtient

$$(2)\quad \int_\rho^N [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)]\, idt$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_\rho^N [(ti)^k \xi 4\pi^2 n(-x+ti) - (-ti)^k \xi 4\pi^2 n(-x-ti)]\, idt.$$

En vertu de la formule (8) du n° 13, on a

$$\xi 4\pi^2 n(-x \pm ti) = \mathfrak{S}\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x\pm ti)}}}{|4\pi^2 n(-x \pm ti|^{\frac{1}{4}}}$$

où $|\mathfrak{S}| < 1$, et il en résulte

$$|\xi 4\pi^2 n(-x \pm ti)| < \sqrt{\pi}\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+t^2}-x)}}}{(4\pi^2 n\sqrt{x^2+t^2})^{\frac{1}{4}}}.$$

A l'aide de cette inégalité, on obtient

$$\left|\int_N^\infty [(ti)^k \xi 4\pi^2 n(-x+ti)^k - (-ti)^k \xi 4\pi^2 n(-x-ti)]\, idt\right|$$
$$< 2\sqrt{\pi}\int_N^\infty t^k\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+t^2}-x)}}}{(4\pi^2 n\sqrt{x^2+t^2})^{\frac{1}{4}}}\,dt,$$

d'où l'on conclut que la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_N^\infty [(ti)^k \xi 4\pi^2 n(-x+ti) - (-ti)^k \xi 4\pi^2 n(-x-ti)]\, idt$$

tend vers la limite o quand N croît infiniment. En faisant $N = \infty$ dans l'égalité (2), on obtient

$$\int_\rho^\infty [(ti)^k g(-x+ti) - (-ti)^k g(-x-ti)]\, idt$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_\rho^\infty [(ti)^k \xi 4\pi^2 n(-x+ti) - (-ti)^k \xi 4\pi^2 n(-x-ti)]\, idt.$$

En supposant que la variable positive ρ décroisse infiniment, on

trouve

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti)-(-ti)^k g(-x-ti)]\,idt$$
$$=\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{k!}\int_\rho^\infty [(ti)^k\xi 4\pi^2 n(-x+ti)-(-ti)^k\xi 4\pi^2 n(-x-ti)]\,idt$$

où $k=0, 1, 2, \ldots$.

En introduisant dans les recherches les fonctions $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, ... définies au n° 9, on peut calculer les intégrales définies qui figurent dans la seconde partie de la formule obtenue.

L'intégration par parties donne

$$\frac{1}{k!}\int_\rho^\infty [(ti)^k\xi 4\pi^2 n(-x+ti)-(-ti)^k\xi 4\pi^2 n(-x-ti)]\,idt$$
$$=\sum_{m=1}^{k+1}\frac{(\rho i)^{k+1-m}\xi_m 4\pi^2 n(-x+\rho i)+(-\rho i)^{k+1-m}\xi_m 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(k+1-m)!\,(4\pi^2 n)^m},$$

et de l'égalité précédente il suit

$$(3)\quad \frac{1}{k!}\int_0^\infty [(ti)^k g(-x+ti)-(-ti)^k g(-x-ti)]\,idt$$
$$=\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k+1}\tau(n)\frac{(\rho i)^{k+1-m}\xi_m 4\pi^2 n(-x+\rho i)+(-\rho i)^{k+1-m}\xi_m 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(k+1-m)!\,(4\pi^2 n)^m}.$$

36. Considérons la somme infinie

$$(4)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_m 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)}{(4\pi^2 n)^m}.$$

En vertu de la formule (I) du n° 13, on peut prêter à la fonction $\xi_m 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)$ la forme suivante :

$$(5)\quad \xi_m 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)$$
$$=\sqrt{\pi}\left[2\pi\sqrt{n(-x\pm\rho i)}\right]^{m-\frac{1}{2}} e^{-4\pi\sqrt{n(-x\pm\rho i)}}$$
$$\times\left\{\sum_{\lambda=0}^{m-1}\frac{(2m+2\lambda-1)(2m+2\lambda-3)\ldots(2m+1-2\lambda)}{\lambda!\,[32\pi\sqrt{n(-x\pm\rho i)}]^\lambda}+\mathfrak{I}\frac{(4m-1)(4m-3)\ldots 1}{m!\,[32\pi\sqrt{n(-x\pm\rho i)}]^m}\right\},$$

où $|\mathfrak{I}|<1$.

En supposant que la valeur de x surpasse un nombre donné positif a, on peut déterminer, en vertu de cette égalité, une constante A de manière que l'inégalité

$$(6) \qquad |\xi_m 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)| < \mathrm{A}\,|2\pi\sqrt{n(-x \pm \rho i)}|^{m-\frac{1}{2}} e^{-4\pi\sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+\rho^2}-x)}}$$

ait lieu, quelle que soit la valeur entière positive de n et si petite que soit la valeur positive de ρ.

A l'aide de cette inégalité, on obtient

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\frac{\xi_m 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{(4\pi^2 n)^m}\right| < \mathrm{A}\,|\sqrt{-x \pm \rho i}|^{m-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}} e^{-4\pi\sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+\rho^2}-x)}}.$$

En supposant que $m \geqq 2$, on aura l'inégalité

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\frac{\xi_m 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{(4\pi^2 n)^m}\right| < \mathrm{A}\,|\sqrt{-x \pm \rho i}|^{m-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}},$$

d'où il résulte que le module de la somme infinie (4) ne surpasse pas, à condition que $m \geqq 2$, une limite fixe, si petite que soit la valeur de ρ.

Considérons maintenant le cas $m = 1$. La somme infinie correspondante

$$(7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n}$$

a un sens, quelque petite que soit la valeur de ρ, mais la fonction des variables ρ et x représentée par cette somme infinie n'est pas limitée; par la suite il sera démontré que le module de la somme (7) croît infiniment quand la variable ρ devient infiniment petite, la valeur de x étant un nombre entier positif, mais la somme (7) tend vers une limite fixe quand ρ décroît infiniment tant que la valeur de x n'est pas un nombre entier positif. De cette propriété remarquable de la somme (7) proviennent toutes les difficultés des recherches que nous allons exposer.

A l'aide de la formule sommatoire $(\star)$ du n° 34, on peut obtenir la limite supérieure du module de la somme (7) en fonction de la variable ρ.

En faisant $m = 1$ dans la formule (5), on aura

$$\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i) = \sqrt{\pi}\left(2\pi\sqrt{n(-x\pm\rho i)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-4\pi\sqrt{n(-x\pm\rho i)}}\left[1 + \vartheta\frac{3}{32\pi\sqrt{n(-x\pm\rho i)}}\right]$$

où $|\vartheta| < 1$; il en résulte

$$(8)\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)}{4\pi^2 n}\right| < \sqrt{\pi}\,\left|\sqrt{-x\pm\rho i}\right|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+\rho^2}-x)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$
$$+\sqrt{\pi}\,\frac{3}{16\left|\sqrt{-x\pm\rho i}\right|^{\frac{1}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}.$$

En vertu de l'inégalité obtenue, tout le problème se réduit à la recherche de la limite supérieure du module de la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{\frac{n}{2}(\sqrt{x^2+\rho^2}-x)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}.$$

A cet effet, considérons la somme

$$\sum_{n>\rho}^{n\leq N}\tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}}$$

en supposant que le nombre a soit positif et $0 < \rho < 1$.

A l'aide de la formule sommatoire $(\star)$ du n° 34, on obtient

$$\sum_{n>\rho}^{n\leq N}\tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_\rho^N \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}(\log t + 2C)\,dt + r_0(N)\frac{e^{-a\sqrt{N}}}{N^{\frac{3}{4}}}$$
$$- r_0(\rho)\frac{e^{-a\sqrt{\rho}}}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_\rho^N r_0(t)\,d\frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

En observant que l'ordre de la fonction $r_0(x)$ ne surpasse pas celui de la fonction $\sqrt{x}$, on trouve

$$\lim_{N=\infty} r_0(N)\frac{e^{-a\sqrt{N}}}{N^{\frac{3}{4}}} = 0,$$

et, en faisant $N=\infty$ dans l'égalité précédente, on aura

$$(9)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_{\rho}^{\infty}\frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}(\log t + 2C)\,dt - r_0(\rho)\frac{e^{-a\sqrt{\rho}}}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} r_0(t)\,d\frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

De la même manière, on obtient

$$\lim_{N=\infty}\left[\sum_{n=1}^{n\leq N}\frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} - \int_0^N(\log t + 2C)\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}}\right]$$
$$= -\int_0^{\rho}(\log t + 2C)\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} - \frac{r_0(\rho)}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} r_0(t)\,d\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

La première partie de cette égalité ne dépend pas de la variable ρ; donc, c'est une constante. A l'aide des raisonnements analogues à ceux qui ont été exposés au n° 32, on démontrera que cette constante est $\zeta^2\left(\frac{3}{4}\right)$; on aura donc l'égalité

$$\zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) + \int_0^{\rho}(\log t + 2C)\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} = -\frac{r_0(\rho)}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} r_0(t)\,d\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

En vertu de cette égalité, on peut prêter à la formule (9) la forme suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_{\rho}^{\infty}\frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}(\log t + 2C)\,dt + \int_0^{\rho}(\log t + 2C)\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}}$$
$$+ \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) - r_0(\rho)\frac{e^{-a\sqrt{\rho}} - 1}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty} r_0(t)\,d\frac{e^{-a\sqrt{t}} - 1}{t^{\frac{3}{4}}}$$

et, encore, une autre forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_{\rho}^{\infty}\frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}(\log t + 2C)\,dt + \int_0^{\rho}(\log t + 2C)\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}}$$
$$+ \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) - \left[r_0(\rho) + \frac{1}{4}\right]\frac{e^{-a\sqrt{\rho}} - 1}{\rho^{\frac{3}{4}}} - \int_{\rho}^{\infty}\left[r_0(t) + \frac{1}{4}\right]d\frac{e^{-a\sqrt{t}} - 1}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

Cela posé, supposons que la variable positive ρ décroisse infiniment. En observant que, d'après la formule (5) du n° 34, on a

$$r_0(\rho) + \tfrac{1}{4} = -\rho(\log\rho + 2\,C - 1)$$

à condition que $0 < \rho < 1$, on trouve, en faisant $\rho = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}(\log t + 2\,C)\,dt + \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) - \int_0^{\infty}\left[r_0(t) + \frac{1}{4}\right] d\,\frac{e^{-a\sqrt{t}} - 1}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

Puisque, en vertu des formules connues, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}(\log t + 2\,C)\,dt = 4\,\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}) + C\Gamma(\frac{1}{2}) - \Gamma(\frac{1}{2})\log a}{\sqrt{a}},$$

il vient

$$(10)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = 4\,\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}) + C\Gamma(\frac{1}{2}) - \Gamma(\frac{1}{2})\log a}{\sqrt{a}} + \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) - \int_0^{\infty}\left[r_0(t) + \frac{1}{4}\right] d\,\frac{e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

D'après ce qui a été dit au n° 34, on peut déterminer une constante A de manière que l'inégalité

$$|\,r_0(t) + \tfrac{1}{4}\,| < A\sqrt{t}$$

ait lieu, quelle que soit la valeur positive de la variable t. En vertu de cette inégalité, on aura

$$\left|\int_0^{\infty}\left[r_0(t) + \frac{1}{4}\right] d\,\frac{e^{-a\sqrt{t}} - 1}{t^{\frac{3}{4}}}\right| < A\left(\frac{a}{2}\int_0^{\infty} e^{-a\sqrt{t}}\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} + \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{1 - e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}\,dt\right),$$

et puisque

$$\frac{a}{2}\int_0^{\infty} e^{-a\sqrt{t}}\frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}} + \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{1 - e^{-a\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}\,dt = 4\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{a},$$

on peut poser

$$-\int_0^\infty \left[r_0(t)+\frac{1}{4}\right] d\,\frac{e^{-a\sqrt{t}}-1}{t^{\frac{3}{4}}} = \vartheta\, 4\mathrm{A}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{a} \qquad \text{où} \qquad -1<\vartheta<1.$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (10), on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} = 4\,\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})+\mathrm{C}\Gamma(\frac{1}{2})-\Gamma(\frac{1}{2})\log a}{\sqrt{a}} + \zeta^2\left(\frac{3}{4}\right) + \vartheta\, 4\mathrm{A}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{a}$$

où $-1<\vartheta<1$.

Cette formule subsiste, quelle que soit la valeur positive de a.

En supposant que le paramètre a satisfasse aux conditions $0<a<1$, on peut déterminer une constante P de manière que l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n^{\frac{3}{4}}} < \mathrm{P}\,\frac{\log\frac{1}{a}}{\sqrt{a}}$$

ait lieu, quelque petite que soit la valeur de a.

En revenant à l'inégalité (8), on obtient

$$(11)\qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)}{4\pi^2 n}\right|$$
$$< \sqrt{\pi}\,|\sqrt{-x\pm\rho i}|^{\frac{1}{2}}\,\frac{\mathrm{P}}{(4\pi^2)^{\frac{3}{4}}}\,\frac{\log\frac{1}{a}}{\sqrt{a}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{16\,|\sqrt{-x\pm\rho i}|^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\zeta^2(\frac{5}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}}$$

où l'on a posé

$$a = 4\pi\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{x^2+\rho^2}-x)}.$$

En vertu de cette égalité, on aura

$$a = \rho\,\frac{4\pi}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+\rho^2}+x)}};$$

donc, en supposant que la variable ρ soit suffisamment petite, on peut déterminer, à cause de (11), une constante A de manière que l'inégalité

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)}{4\pi^2 n}\right| < A\frac{\log\frac{1}{\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

ait lieu quelque petite que soit la valeur de ρ.

A l'aide des résultats obtenus, on peut simplifier la formule (3). Puisque la fonction de la variable ρ représentée par la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{(\rho i)^{k+1-m}\xi_m 4\pi^2 n(-x+\rho i)+(-\rho i)^{k+1-m}\xi_m 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(k+1-m)!\,(4\pi^2 n)^m},$$

d'après ce qui a été dit précédemment, tend vers la limite 0 quand ρ décroît infiniment, tant que

$$k+1-m \geqq 1 \quad \text{et} \quad m \geqq 1,$$

la formule (3) prend la forme

$$(12)\qquad \frac{1}{k!}\int_0^{\infty}[(ti)^k g(-x+ti)-(-ti)^k g(-x-ti)]\,i\,dt$$
$$=\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}.$$

Dans cette formule on peut poser $k=0, 1, 2, \ldots$.

37. Examinons, en premier lieu, le cas $k \geqq 1$. Prenons un nombre positif N, aussi grand que l'on voudra, et partageons la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

en deux parties

$$(13)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{n\leqq N}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$
$$+\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}.$$

En vertu de l'inégalité (6), on aura

$$\left|\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}\right| < 2\mathrm{A}\left|\sqrt{x^2+\rho^2}\right|^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\sum_{n>N}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}},$$

et l'on peut poser

$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} = \Im\, 2\mathrm{A}\left|\sqrt{x^2+\rho^2}\right|^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\sum_{n>N}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}$$

où $-1<\Im<1$. En faisant dans cette égalité $\rho=0$, il vient

$$(14)\qquad \lim_{\rho=0}\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} = \Im\, 2\mathrm{A}x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\sum_{n>N}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}$$

où $-1<\Im<1$.

En observant que

$$\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{n\leqq N}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{n\leqq N}\tau(n)\frac{2\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}},$$

en vertu de la formule (1) du n° 11, on trouve, à cause de (13) et (14),

$$\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{n\leqq N}\tau(n)\frac{2\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}} + \Im\, 2\mathrm{A}x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\sum_{n>N}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}$$

où $-1<\Im<1$.

En faisant dans cette égalité $\mathrm{N}=\infty$, on obtient

$$\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_{k+1}4\pi^2 n(-x-\rho i)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}2\tau(n)\frac{\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

et, à cause de (12), il vient

$$\frac{1}{k!}\int_0^{\infty}[(ti)^k g(-x+ti)-(-ti)^k g(-x-ti)]\,i\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}2\tau(n)\frac{\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

où $k=1, 2, \ldots$.

En substituant le résultat obtenu dans la formule (1), on trouve

$$(15)\quad r_k(x)=-2\int_x^{\infty}\frac{(x-t)^k}{k!}g(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}2\tau(n)\frac{\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}\quad (k=1, 2, \ldots).$$

A l'aide du développement de la fonction $g(t)$ en série infinie

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,\xi(4\pi^2 nt),$$

on obtient

$$\int_x^{\infty}\frac{(x-t)^k}{k!}g(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\int_x^{\infty}\frac{(x-t)^k}{k!}\xi(4\pi^2 nt)\,dt,$$

et l'intégration par parties donne

$$\int_x^{\infty}\frac{(x-t)^k}{k!}g(t)\,dt=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}},$$

en vertu de la formule (1) du n° 9; donc la formule (15) peut être mise sous la forme suivante :

$$r_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2\tau(n)\frac{(-1)^{k+1}\xi_{k+1}(4\pi^2 nx)+\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

où $k=1, 2, \ldots$.

A l'aide de la formule (I) du n° 13 et de la formule (II) du n° 14, on peut développer la fonction $r_k(x)$ en une autre série

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I})\quad r_k(x) = {} & 2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{r-1} x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-k-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} \\
& + (-1)^{k+1} 2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{s-1} x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} \\
& + \vartheta\, 2\sqrt{\pi}\, x^{\frac{k-r}{2}+\frac{1}{4}} \frac{(2k+2r+1)(2k+2r-1)\ldots(2k+3-2r)}{2^{4r}r!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+r}{2}+\frac{3}{4}}} \\
& + (-1)^{k+1}\varepsilon\, 2\sqrt{\pi}\, x^{\frac{k-s}{2}+\frac{1}{4}} \frac{(2k+2s+1)(2k+2s-1)\ldots(2k+3-2s)}{2^{4s}s!} \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+s}{2}+\frac{3}{4}}}
\end{aligned}
$$

où

$$-1<\vartheta<1, \qquad 0<\varepsilon<1 \qquad \text{et} \qquad r \geqq k+1, \qquad s \geqq k+1 \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Sur les valeurs approchées des fonctions $r_1(x)$, $r_2(x)$, ...

38. La formule (I) du nº 37 peut servir au calcul des valeurs approchées des fonctions $r_1(x)$, $r_2(x)$, ... à condition que la valeur de la variable positive x soit suffisamment grande.

Théorème I. — *Étant donné un nombre positif a, pris arbitrairement, on peut toujours déterminer une constante* A *de manière que l'inégalité*

$$|r_k(x)| < \mathrm{A}x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} \qquad \text{où} \qquad k \geqq 1$$

ait lieu, quelle que soit la valeur de la variable x satisfaisant à la condition $x > a$.

Les sommes infinies qui figurent dans la formule (I) du n° 37 ne surpassent pas les limites suivantes :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-k-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}\right| < \frac{\zeta^2\left(\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}\right)}{(4\pi^2)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} < \frac{\zeta^2\left(\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}\right)}{(4\pi^2)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}.$$

En faisant, dans la formule (I) du n° 37, $r = s = k+1$, on obtiendra

$$|r_k(x)| < 2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{k+1} x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!}\,\frac{2\zeta^2\left(\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}\right)}{(4\pi^2)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}.$$

En vertu de cette inégalité, le théorème énoncé devient évident.

THÉORÈME II. — *En posant*

$$r_k(x) = 2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{m-1} x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!}$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-k-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} + R_k(x),$$

on obtient la fonction $R_k(x)$ *dont la valeur numérique ne surpasse pas la limite*

$$|R_k(x)| < A x^{\frac{k-m}{2}+\frac{1}{4}} \qquad où \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad et \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

quelle que soit la valeur de x *satisfaisant à la condition* $x > a$, A *étant une constante fixe.*

On démontre ce théorème à l'aide de la formule (I) du n° 37 ayant égard à ce que les sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} \qquad \text{où} \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

décroissent, à mesure que la variable x croît infiniment, plus vite qu'aucune puissance de x.

39. En rappelant la formule (3) du n° 33 :

$$\sum_{n>0}^{n\leqq x}\tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}(\log t + 2\,\mathrm{C})\,dt$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{k}\zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + r_k(x),$$

on en conclut que la fonction numérique

$$\varphi_k(x) = \sum_{n>0}^{n\leqq x}\tau(n)\frac{(x-n)^k}{k!}$$

peut être représentée par la fonction analytique

$$\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}(\log t + 2\,\mathrm{C})\,dt + \sum_{\lambda=0}^{k}\zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!},$$

en vertu du théorème I, avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}$.

La fonction

$$\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}(\log t + 2\,\mathrm{C})\,dt$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{k}\zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + 2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{m-1} x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!}$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-k-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}$$

représente la fonction numérique $\varphi_k(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{k-m}{2}+\frac{1}{4}}$ où $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Il en résulte qu'en faisant $m = k + 1$, on obtient la fonction

$$\psi_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}(\log t + 2C)\,dt$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{k}\left\{\zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} + 2\sqrt{\pi}\,x^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!}\right.$$
$$\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}(\lambda-k-\frac{1}{2})\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}\right\}$$

qui jouit de la propriété suivante :

La valeur numérique de la différence $\varphi_k(x) - \psi_k(x)$ *tend vers la limite* 0 *à mesure que* x *croît infiniment.*

Développement de la fonction $r_0(x)$ en une série infinie.

40. Nous avons défini au n° 33 la fonction $r_0(x)$ par la formule suivante :

$$(1)\quad r_0(x) = \tfrac{1}{2}\tau(x) - 2\int_x^\infty g(t)\,dt + \int_0^\infty [g(-x+ti) - g(-x-ti)]\,i\,dt.$$

La seconde intégrale qui figure dans cette formule présente, comme nous l'avons vu au n° 35, la limite de la somme infinie

$$(2)\quad \int_0^\infty [g(-x+ti) - g(-x-ti)]\,i\,dt$$
$$= \lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}.$$

Considérons la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n}.$$

D'après la formule (I) du n° 13, on aura

$$\begin{aligned}\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) \\ = \sqrt{\pi}\left[2\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}} + \mathfrak{S}\,\frac{3\sqrt{\pi}}{16}\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{\left[2\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}\right]^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

où $|\mathfrak{S}|<1$. En vertu de cette égalité, on obtient

$$(3)\quad \begin{aligned}\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n} \\ = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{-x+\rho i}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} + \mathfrak{S}_0\,\frac{3\sqrt{\pi}}{16}\,\frac{1}{\left|\sqrt{-x+\rho i}\right|^{\frac{1}{2}}}\sum_{n>N}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}\end{aligned}$$

où $|\mathfrak{S}_0|<1$, N étant un nombre positif, aussi grand que l'on voudra.

A l'aide de la formule sommatoire $(\star)$ du n° 34, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}} \\ = \int_N^{\infty}\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}}(\log t+2C)\,dt - r_0(N)\frac{e^{-4\pi\sqrt{N(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} \\ + r_1(N)\,D_N\frac{e^{-4\pi\sqrt{N(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}} + \int_N^{\infty} r_1(t)\,D_t^2\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}}\,dt,\end{aligned}$$

puisque l'ordre de la fonction $r_0(t)$ ne surpasse pas celui de la fonction $t^{\frac{1}{2}}$ et que l'ordre de la fonction $r_1(t)$, en vertu du théorème I du n° 38, ne surpasse pas celui de la fonction $t^{\frac{3}{4}}$ et, par conséquent, on a

$$\lim_{t=\infty} r_0(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} = 0, \qquad \lim_{t=\infty} r_1(t)\,D_t\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}} = 0.$$

En effectuant les différentiations dans l'égalité précédente, on

trouve

$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$
$$=\int_N^\infty \frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}}(\log t+2C)\,dt - r_0(N)\frac{e^{-4\pi\sqrt{N(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}}$$
$$-r_1(N)\frac{e^{-4\pi\sqrt{N(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}}\left[\frac{2\pi\sqrt{(-x+\rho i)}}{\sqrt{N}}+\frac{3}{4N}\right]$$
$$+\sqrt{2\pi}(-x+\rho i)\int_N^\infty r_1(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{7}{4}}}\,dt$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}(-x+\rho i)}\int_N^\infty r_1(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{9}{4}}}\,dt+\frac{21}{16(4\pi^2)^{\frac{3}{4}}}\int_N^\infty r_1(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{11}{4}}}\,dt.$$

En vertu de cette égalité, on peut poser

$$(4)\quad \sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{2\pi}(-x+\rho i)\int_N^\infty r_1(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{7}{4}}}\,dt+\delta_0(N,\rho),$$

et la fonction $\delta_0(N,\rho)$ satisfera aux conditions suivantes : quelque petit que soit le nombre positif ε, pris arbitrairement, il est possible de déterminer un nombre positif N_0, de manière que l'inégalité

$$(5)\qquad |\delta_0(N,\rho)|<\varepsilon$$

ait lieu tant que

$$(6)\qquad N>N_0,\quad a<x<b\quad \text{et}\quad 0<|\rho|<\rho_0.$$

En vertu du théorème II du n° 38, on peut prêter à la fonction $r_1(t)$ la forme suivante :

$$r_1(t)=2\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}+\vartheta A t^{\frac{1}{4}}$$

où $t>t_0$, $|\vartheta|<1$ et A désigne une constante fixe. L'égalité (4), après la substitution de cette expression de la fonction $r_1(t)$, peut s'écrire

$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$
$$=2^{\frac{3}{2}}\pi(-x+\rho i)\int_N^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}\frac{dt}{t}+\delta_1(N,\rho)$$

où la fonction $\delta_1(N,\rho)$ satisfait aussi aux conditions (5) et (6).

Dans la formule obtenue il est permis d'intervertir le signe de sommation avec le signe d'intégration; il viendra

$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$
$$=2^{\frac{3}{2}}\pi(-x+\rho i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^{\infty}e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}+\delta_1(N,\rho).$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (3), on trouve

$$(7)\quad \sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$=(2\pi)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{-x+\rho i}\right)^{\frac{5}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^{\infty}e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}+\delta_2(N,\rho)$$

où la fonction $\delta_2(N,\rho)$ satisfait aux conditions (5) et (6).

Considérons l'intégrale définie

$$\int_N^{\infty}e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}.$$

Cette intégrale peut s'écrire

$$\int_N^{\infty}e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$
$$=\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2}\int_N^{\infty}e^{-4\pi\sqrt{t}\left(\sqrt{-x+\rho i}+i\sqrt{n}\right)}\frac{dt}{t}+\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{2}\int_N^{\infty}e^{-4\pi\sqrt{t}\left(\sqrt{-x+\rho i}-i\sqrt{n}\right)}\frac{dt}{t};$$

trouve

$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$

$$=\int_N^{\infty}\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}}(\log t+2C)\,dt-r_0(N)\frac{e^{-4\pi\sqrt{N(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}}$$

$$-r_1(N)\frac{e^{-4\pi\sqrt{N(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}}\left[\frac{2\pi\sqrt{(-x+\rho i)}}{\sqrt{N}}+\frac{3}{4N}\right]$$

$$+\sqrt{2\pi}(-x+\rho i)\int_N^{\infty}r_1(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{7}{4}}}dt$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}(-x+\rho i)}\int_N^{\infty}r_1(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{9}{4}}}dt+\frac{21}{16(4\pi^2)^{\frac{3}{4}}}\int_N^{\infty}r_1(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{11}{4}}}dt.$$

En vertu de cette égalité, on peut poser

$$(4)\quad \sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{n(-x+\rho i)}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{2\pi}(-x+\rho i)\int_N^{\infty}r_1(t)\frac{e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}}{t^{\frac{7}{4}}}dt+\delta_0(N,\rho),$$

et la fonction $\delta_0(N,\rho)$ satisfera aux conditions suivantes : quelque petit que soit le nombre positif ε, pris arbitrairement, il est possible de déterminer un nombre positif N_0, de manière que l'inégalité

$$(5)\qquad |\delta_0(N,\rho)|<\varepsilon$$

ait lieu tant que

$$(6)\qquad N>N_0,\quad a<x<b \quad\text{et}\quad 0<|\rho|<\rho_0.$$

En vertu du théorème II du n° 38, on peut prêter à la fonction $r_1(t)$ la forme suivante :

$$r_1(t)=2\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}+\vartheta A t^{\frac{1}{4}}$$

où $t>t_0$, $|\vartheta|<1$ et A désigne une constante fixe. L'égalité (4), après

En vertu de l'égalité (8), on peut poser

$$(9)\qquad \int_{\mathrm{N}}^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-\alpha+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}=\frac{\vartheta}{\sqrt{\mathrm{N}}}\,\frac{\mathrm{A}}{\pi},$$

où $|\vartheta|<1$ et $|n-x|\geqq\alpha$.

En partageant en trois parties la somme infinie qui figure dans la seconde partie de l'égalité (7), on obtient

$$(10)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n>0}^{n\leqq x-\alpha} f(n)+\sum_{n>x-\alpha}^{n\leqq x+\alpha} f(n)+\sum_{n>x+\alpha}^{\infty} f(n),$$

où l'on a mis, pour abréger,

$$f(n)=\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_{\mathrm{N}}^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-\alpha+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}.$$

En vertu de l'égalité (9), il vient

$$\left|\sum_{n>0}^{n\leqq x-\alpha} f(n)\right|<\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\,\frac{\mathrm{A}}{\pi}\sum_{n>0}^{n\leqq x-\alpha}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}},\qquad \left|\sum_{n>x+\alpha}^{\infty} f(n)\right|<\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\,\frac{\mathrm{A}}{\pi}\sum_{n>x+\alpha}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}$$

et il en résulte

$$\left|\sum_{n>0}^{n\leqq x-\alpha} f(n)+\sum_{n>x+\alpha}^{\infty} f(n)\right|<\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\,\frac{\mathrm{A}}{\pi}\,\frac{\zeta^2\left(\frac{5}{4}\right)}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}};$$

donc, l'égalité (10) peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_{\mathrm{N}}^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-\alpha+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}\\ &\quad=\sum_{n>x-\alpha}^{n\leqq x+\alpha}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_{\mathrm{N}}^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-\alpha+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}+\vartheta\,\frac{\mathrm{A}}{\pi\sqrt{\mathrm{N}}}\,\frac{\zeta^2\left(\frac{5}{4}\right)}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}},\end{aligned}$$

où $|\vartheta|<1$.

En substituant le résultat obtenu dans l'égalité (7), on peut poser

$$(11)\quad \sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$=(2\pi)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{-x+\rho i})^{\frac{5}{2}}\sum_{n>x-\alpha}^{n\leqq x+\alpha}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^{\infty}e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}+\delta(N,\rho),$$

et la fonction $\delta(N,\rho)$ satisfera aux conditions

$$(12)\qquad |\delta(N,\rho)|<\varepsilon\quad \text{tant que}\quad N>N_0,\quad a<x<b\quad \text{et}\quad 0<|\rho|<\rho_0.$$

41. Supposons, en premier lieu, que l'on ait attribué à la variable x une valeur positive quelconque qui n'est pas un nombre entier; on peut déterminer, dans ce cas, la constante α de manière qu'aucun nombre entier n ne satisfasse aux conditions

$$x-\alpha<n\leqq x+\alpha.$$

La formule (11) prend, dans ce cas, la forme

$$(13)\qquad \sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n}=\delta(N,\rho);$$

il en résulte, à cause de (12), que les sommes infinies

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n}\quad \text{et}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n},$$

dans le cas considéré, tendent vers des limites fixes quand la variable positive ρ décroît infiniment.

En partageant la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}$$

en deux parties

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$=\sum_{n=1}^{n\leqq N}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$+\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n},$$

on obtient

$$\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$=\sum_{n=1}^{n\leqq N}\tau(n)\lim_{\rho=0}\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}+\delta(N);$$

la fonction $\delta(N)$, à cause de (12), vérifie l'inégalité

(14) $$|\delta(N)|<2\varepsilon \quad \text{à condition que} \quad N>N_0.$$

En observant que

$$\lim_{\rho=0}\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}=2\,\frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

on trouve

$$\lim_{\rho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$=\sum_{n=1}^{n\leqq N}2\tau(n)\frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}+\delta(N);$$

et puisque, à cause de (14),

$$\lim_{N=\infty}\delta(N)=0,$$

on trouve, en faisant $N = \infty$,

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n}.$$

42. Considérons maintenant le cas qui offre le plus de difficultés : la variable x est un nombre entier positif.

Dans ce cas, la formule (11) devient

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$= (2\pi)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{-x+\rho i})^{\frac{5}{2}} \frac{\tau(x)}{(4\pi^2 x)^{\frac{5}{4}}} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x+\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \partial(N,\rho).$$

En supposant que la variable ρ soit positive, on peut écrire

$$(15)\quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$= \frac{\tau(x)}{2\pi} \left(\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}}\right)^{\frac{5}{2}} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x\pm\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t} + \partial(N,\rho).$$

Considérons l'intégrale définie

$$\int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x\pm\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t};$$

cette intégrale peut s'écrire

$$\int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t(-x\pm\rho i)}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{3\pi}{4}\right) \frac{dt}{t}$$
$$= \frac{e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}}{2} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x\pm\rho i} \pm i\sqrt{x})} \frac{dt}{t} + \frac{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}}{2} \int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x\pm\rho i} \mp i\sqrt{x})} \frac{dt}{t}.$$

En observant que

$$\int_N^{\infty} e^{-4\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x\pm\rho i} \mp i\sqrt{x})} \frac{dt}{t}$$
$$= -2C - \log N - 2\log 4\pi(\sqrt{-x\pm\rho i} \mp i\sqrt{x}) + \int_0^N \left(1 - e^{-4\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x\pm\rho i} \mp i\sqrt{x})}\right) \frac{dt}{t}$$

et

$$\int_0^N \left(1 - e^{-4\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x\pm\rho i}\mp i\sqrt{x})}\right)\frac{dt}{t} = \vartheta_0\sqrt{N}\,8\pi(\sqrt{-x\pm\rho i}\mp i\sqrt{x}),$$

où $|\vartheta_0| < 1$, on trouve

$$\int_N^\infty e^{-4\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x\pm\rho i}\mp i\sqrt{x})}\frac{dt}{t}$$
$$= -2C - \log N - 2\log 4\pi(\sqrt{-x\pm\rho i}\mp i\sqrt{x}) + \vartheta_0\sqrt{N}\,8\pi(\sqrt{-x\pm\rho i}\mp i\sqrt{x}).$$

D'autre part, on a

$$\frac{e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}}{2}\int_N^\infty e^{-4\pi\sqrt{t}(\sqrt{-x\pm\rho i}\pm i\sqrt{x})}\frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\vartheta_1}{2\pi(\sqrt{-x\pm\rho i}\pm i\sqrt{x})},$$

où $|\vartheta_1| < 1$; donc, il vient

$$(16)\quad \int_N^\infty e^{-4\pi\sqrt{t(-x\pm\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}}{2}\left[-2C - \log N - 2\log 4\pi(\sqrt{-x\pm\rho i}\mp i\sqrt{x}) + \vartheta_0\sqrt{N}\,8\pi(\sqrt{-x\mp\rho i}\mp i\sqrt{x})\right]$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\vartheta_1}{2\pi(\sqrt{-x\pm\rho i}\pm i\sqrt{x})}.$$

Puisque

$$\log 4\pi(\sqrt{-x\pm\rho i}\mp i\sqrt{x}) = \log\frac{\pm 4\pi\rho i}{\sqrt{-x\pm\rho i}\pm i\sqrt{x}} = \log\rho + \log\frac{4\pi}{\sqrt{x\mp\rho i}+\sqrt{x}}$$

et

$$\sqrt{-x\pm\rho i}\mp i\sqrt{x} = \frac{\rho}{\sqrt{x\mp\rho i}+\sqrt{x}},$$

on peut mettre l'égalité (16) sous la forme suivante :

$$\int_N^\infty e^{-4\pi\sqrt{t(-x\pm\rho i)}}\cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}}{2}\left(-2C - \log N - 2\log\frac{2\pi}{\sqrt{x}} - 2\log\rho\right) + \frac{\vartheta}{4\pi\sqrt{Nx}} + \delta_0(\rho),$$

où $|\vartheta| < 1$ et la fonction $\delta_0(\rho)$ satisfait à la condition

$$\lim_{\rho=0} \delta_0(\rho) = 0.$$

En substituant le résultat obtenu dans l'égalité (15), on trouve

$$(17)\quad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$= \frac{\tau(x)}{2\pi}\left(\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}}\right)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}}{2}\left(-2C - \log N - 2\log\frac{2\pi}{\sqrt{x}} - 2\log\rho\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\vartheta}{4\pi\sqrt{Nx}} + \delta_0(\rho)\right] + \delta(N, \rho).$$

Puisque

$$\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}} = \pm i\sqrt{1 \mp \frac{\rho i}{x}} = e^{\pm\frac{\pi}{2}i}\sqrt{1 \mp \frac{\rho i}{x}},$$

il vient

$$\left(\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}}\right)^{\frac{5}{2}} = e^{\pm\frac{5\pi}{4}i}\left(1 \mp \frac{\rho i}{x}\right)^{\frac{5}{4}},$$

et l'on peut poser

$$\left(\sqrt{-1 \pm \frac{\rho i}{x}}\right)^{\frac{5}{2}} = e^{\pm\frac{5\pi}{4}i} + A\rho,$$

où le module de A ne surpasse pas une constante fixe; donc l'égalité (17) peut s'écrire

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x \pm \rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$= \frac{\tau(x)}{2\pi}\left(e^{\pm\frac{5\pi i}{4}} + A\rho\right) \left[\frac{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}}{2}\left(-2C - \log N - 2\log\frac{2\pi}{\sqrt{x}} - 2\log\rho\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\vartheta}{4\pi\sqrt{Nx}} + \delta_0(\rho)\right] + \delta(N, \rho).$$

En vertu de cette égalité, on peut poser

$$(18)\qquad \sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)}{4\pi^2 n}$$
$$= \mp i\frac{\tau(x)}{2\pi}\left(C+\log 2\pi\sqrt{\frac{N}{x}}+\log\rho\right)+\partial(\rho)+\partial(N,\rho),$$

où la fonction $\partial(N,\rho)$ satisfait aux conditions (12) et

$$\lim_{\rho=0}\partial(\rho)=0.$$

A mesure que la variable ρ décroît infiniment, le module de la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)}{4\pi^2 n}$$

croît infiniment, en vertu de l'égalité (18). En prenant la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x\pm\rho i)}{4\pi^2 n}\pm i\frac{\tau(x)}{2\pi}\log\rho,$$

on obtient la fonction de la variable ρ qui tend vers une limite fixe quand ρ décroît infiniment.

Désignons, en vertu de l'égalité (18),

$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)}{4\pi^2 n}=-i\frac{\tau(x)}{2\pi}\left(C+\log 2\pi\sqrt{\frac{N}{x}}+\log\rho\right)+\partial_0(\rho)+\partial_0(N,\rho),$$
$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}=\quad i\frac{\tau(x)}{2\pi}\left(C+\log 2\pi\sqrt{\frac{N}{x}}+\log\rho\right)+\partial_1(\rho)+\partial_1(N,\rho).$$

En faisant la somme de ces égalités, on obtient

$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i)+\xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n}=\partial_0(\rho)+\partial_1(\rho)+\partial_0(N,\rho)+\partial_1(N,\rho),$$

et il en résulte

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n} = \delta(N),$$

où la fonction $\delta(N)$ satisfait, à cause de (12), aux conditions

$$|\delta(N)| < 2\varepsilon \quad \text{tant que} \quad N > N.$$

Il en résulte

$$\lim_{N=\infty} \delta(N) = 0,$$

et en faisant $N = \infty$, on obtient l'égalité

$$\lim_{\rho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1 4\pi^2 n(-x+\rho i) + \xi_1 4\pi^2 n(-x-\rho i)}{4\pi^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

qui subsiste donc, quelle que soit la valeur positive de la variable x.

43. En substituant le résultat obtenu dans la formule (2), on trouve

$$\int_0^{\infty} [g(-x+ti) - g(-x-ti)]\, i\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}.$$

En vertu de (1), on obtient

$$r_0(x) = \tfrac{1}{2}\tau(x) - 2\int_x^{\infty} g(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

et puisque

$$\int_x^{\infty} g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

il vient

$$r_0(x) = \tfrac{1}{2}\tau(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}. \tag{19}$$

A l'aide de la formule (I) du n° 13 et de la formule (II) du n° 14, on peut développer la fonction $r_0(x)$ en une autre série infinie

$$(I)\quad r_0(x)=\tfrac{1}{2}\tau(x)+2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{r-1} x^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}}\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\ldots(3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}$$
$$-2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{s-1} x^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}}\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\ldots(3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}$$
$$+\ \vartheta 2\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{4}-\frac{r}{2}}\frac{(2r+1)(2r-1)\ldots(3-2r)}{2^{4r}r!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}}$$
$$-\ \varepsilon 2\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}\frac{(2s+1)(2s-1)\ldots(3-2s)}{2^{4s}s!}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{e^{-4\pi\sqrt{nx}}}{(4\pi^2 n)^{\frac{s}{2}+\frac{3}{4}}},$$

où $-1<\vartheta<1$, $0<\varepsilon<1$ et $r\geqq 1$, $s\geqq 1$.

Sur les valeurs approchées de la fonction $r_0(x)$.

44. Théorème. — *En posant*

$$r_0(x)=\tfrac{1}{2}\tau(x)+2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{m-1} x^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}}\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\ldots(3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}}}+R_0(x),$$

où $m\geqq 1$, *on aura la fonction* $R_0(x)$ *dont la valeur numérique ne surpasse pas, à condition que* $x>a$, *la limite*

$$|R_0(x)|<Ax^{\frac{1}{4}-\frac{m}{2}},$$

A *étant une constante fixe*.

On démontrera aisément le théorème énoncé à l'aide de la formule (I) du n° 43.

En rappelant la formule (3) du n° 33 :

$$\sum_{n>0}^{n\leqq x}\tau(n)=\int_0^x(\log t+2C)\,dt+\zeta^2(0)+r_0(x),$$

ou, autrement,

$$\sum_{n>0}^{n\leqq x}\tau(n)=x(\log x+2C-1)+\tfrac{1}{4}+r_0(x),$$

on en conclut que la fonction numérique

$$\varphi_0(x)=\sum_{n>0}^{n\leqq x}\tau(n)$$

peut être représentée par la fonction

$$x(\log x+2C-1)+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\tau(x)$$
$$+2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{m-1}x^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}}\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)\ldots(3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\lambda!}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2n)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}}},$$

où $m=1, 2, \ldots$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $x^{\frac{1}{4}-\frac{m}{2}}$.

Il en résulte qu'en faisant $m=1$, on obtient la fonction

$$\psi_0(x)=x(\log x+2C-1)+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\tau(x)+2\sqrt{\pi}\,x^{\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2n)^{\frac{3}{4}}}$$

qui jouit de la propriété suivante :

La valeur numérique de la différence $\varphi_0(x)-\psi_0(x)$ *tend vers la limite* o *à mesure que la variable* x *croît infiniment.*

SECTION V.

FORMULE SOMMATOIRE GÉNÉRALISÉE SOUS UNE FORME NOUVELLE.

Étude de la convergence de la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$.

45. Théorème I. — *La série infinie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

est uniformément convergente dans chaque intervalle $m+\alpha < x < m+\beta$, *m étant un nombre entier positif quelconque ou zéro, et* α *et* β *deux fractions positives, prises arbitrairement.*

Considérons la somme infinie

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n},$$

N étant un nombre positif aussi grand que l'on voudra.

En vertu de la formule (II) du n° 14, on aura

$$\eta_1(4\pi^2 nx) = \sqrt{\pi}\left(2\pi\sqrt{nx}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + \vartheta_0 \frac{3}{32\pi\sqrt{nx}}\right],$$
$$-1 < \vartheta_0 < 1;$$

il en résulte

$$(1) \qquad \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} = \sqrt{\pi}\, x^{\frac{1}{4}} \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$
$$+ \vartheta \frac{3\sqrt{\pi}}{16 x^{\frac{1}{4}}} \sum_{n>N}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \qquad (-1 < \vartheta < 1).$$

A l'aide de la formule sommatoire (★) du n° 34, on obtient

$$\sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$

$$=\int_{N}^{\infty}\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{tx}-\frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}}(\log t+2C)\,dt-r_0(N)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{Nx}-\frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}}$$

$$+r_1(N)D_N\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{Nx}-\frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 N)^{\frac{3}{4}}}+\int_{N}^{\infty}r_1(t)D_t^2\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{tx}-\frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 t)^{\frac{3}{4}}}\,dt.$$

En effectuant les différentiations et en substituant dans la seconde intégrale qui figure dans cette égalité l'expression de la fonction $r_1(t)$ obtenue au n° 38 :

$$r_1(t)=2\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}+\varsigma A t^{\frac{1}{4}},$$

on peut poser

$$(2)\qquad \sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$

$$=-2^{\frac{3}{2}}\pi x\int_{N}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\cos\left(4\pi\sqrt{xt}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}+\delta_0(N,x),$$

et la fonction $\delta_0(N, x)$ vérifiera l'inégalité

$$(3)\qquad |\delta_0(N,x)|<\varepsilon \quad \text{à condition que} \quad N>N_0 \quad \text{et} \quad a<x<b,$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra.

En introduisant un nombre positif T, aussi grand que l'on voudra, on aura

$$(4)\qquad \int_{N}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\cos\left(4\pi\sqrt{xt}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$

$$=\lim_{T=\infty}\int_{N}^{T}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\cos\left(4\pi\sqrt{xt}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$

et puisque

$$\int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t},$$

il viendra, à cause de (2) et (4),

$$\sum_{n>\mathrm{N}}^{\infty} \tau(n) \frac{\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)}{(4\pi^2 n)^{\frac{3}{4}}}$$
$$= -2^{\frac{3}{2}}\pi x \lim_{\mathrm{T}=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t} + \partial_0(\mathrm{N}, x).$$

En vertu de (1), on peut poser

$$(5)\quad \sum_{n>\mathrm{N}}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n}$$
$$= -(2\pi)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{5}{4}} \lim_{\mathrm{T}=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t} + \partial_1(\mathrm{N}, x),$$

et la fonction $\partial_1(\mathrm{N}, x)$ satisfera aux conditions (3).

En observant que

$$\int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \cos 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} + \sqrt{n})\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} - \sqrt{n})\frac{dt}{t},$$

on trouve

$$(6)\quad \lim_{\mathrm{T}=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \cos\left(4\pi\sqrt{xt} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\pi\sqrt{nt} - \frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{\mathrm{T}=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \cos 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} + \sqrt{n})\frac{dt}{t}$$
$$- \frac{1}{2}\lim_{\mathrm{T}=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}} \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x} - \sqrt{n})\frac{dt}{t}.$$

A l'aide de la formule

$$(7)\qquad -\frac{1}{2}\int_{N}^{T}\cos 4\pi\sqrt{t}\,(\sqrt{x}+\sqrt{n})\,\frac{dt}{t}=\frac{\Im_0}{2\pi(\sqrt{x}+\sqrt{n})}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

où $-1<\Im_0<1$, on obtient

$$\left|-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_{N}^{T}\cos 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}+\sqrt{n})\frac{dt}{t}\right|$$
$$<\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\,\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{n}},$$

et, à plus forte raison,

$$\left|-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_{N}^{T}\cos 4\pi\sqrt{t}\,(\sqrt{x}+\sqrt{n})\,\frac{dt}{t}\right|<\frac{\zeta^2(\frac{7}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{7}{4}}}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{T}}\right).$$

En vertu de l'égalité obtenue, on peut poser

$$(8)\qquad -\frac{1}{2}\lim_{T=\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_{N}^{T}\cos 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}+\sqrt{n})\frac{dt}{t}=\frac{\Im}{\sqrt{N}}\,\frac{\zeta^2(\frac{7}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{7}{4}}},$$

où $-1<\Im<1$.

Prenons maintenant une fraction positive quelconque ρ et considérons l'intégrale définie

$$-\frac{1}{2}\int_{N}^{T}\sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}$$

en supposant que $|x-n|\geqq\rho$.

En observant que

$$-\frac{1}{2}\int_{N}^{T}\sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}=\frac{\Im_0}{2\pi(\sqrt{x}-\sqrt{n})}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{T}}\right),$$

et

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{n}}\right|\leqq\frac{x+\sqrt{x+\rho}}{\rho},$$

on obtient

$$\left| -\frac{1}{2}\int_N^T \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}\right| < \frac{x+\sqrt{x+\rho}}{2\pi\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{T}}\right);$$

donc, on peut poser

$$(9)\qquad -\frac{1}{2}\int_N^T \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t} = \vartheta\,\frac{x+\sqrt{x+\rho}}{2\pi\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{T}}\right),$$

où $-1 < \vartheta < 1$ et $|x-n| \geqq \rho$.

En partageant la somme infinie

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^T \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}$$

en trois parties, d'après les conditions

$$0 < n \leqq x-\rho,$$
$$x-\rho < n \leqq x+\rho,$$
$$x+\rho < n \leqq \infty,$$

on aura, à cause de (9),

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^T \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}$$
$$= \vartheta_0\,\frac{x+\sqrt{x+\rho}}{2\pi\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\frac{\zeta^2(\frac{5}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}} - \frac{1}{2}\sum_{n>x-\rho}^{n\leqq x+\rho}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^T \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t},$$

où $-1 < \vartheta_0 < 1$; il en résulte

$$(10)\quad -\frac{1}{2}\lim_{T=\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^T \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{\vartheta}{\sqrt{N}}\,\frac{x+\sqrt{x+\rho}}{2\pi\rho}\,\frac{\zeta^2(\frac{5}{4})}{(4\pi^2)^{\frac{5}{4}}} - \frac{1}{2}\sum_{n>x-\rho}^{n\leqq x+\rho}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^{\infty} \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}.$$

En vertu de (8) et (10) on peut prêter à l'égalité (6) la forme suivante :

$$\lim_{T=\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^T \cos\left(4\pi\sqrt{xt}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{3\pi}{4}\right)\frac{dt}{t}$$
$$=\frac{A}{\sqrt{N}}-\frac{1}{2}\sum_{n>x-\rho}^{n\leqq x+\rho}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^{\infty}\sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t},$$

où la variable A ne surpasse pas, en valeur numérique, une limite fixe à condition que $a<x<b$ et $\rho_0<\rho<1$.

En substituant le résultat obtenu dans la formule (5), on peut écrire

$$(11)\qquad \sum_{n>N}^{\infty}\tau(n)\frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{4}}\sum_{n>x-\rho}^{n\leqq x+\rho}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^{\infty}\sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}+\delta(N,x),$$

et la fonction $\delta(N,x)$ vérifiera l'inégalité

$$(12)\qquad |\delta(N,x)|<\varepsilon \quad \text{à condition que} \quad N>N_0,\ a<x<b \quad \text{et} \quad \rho_0<\rho<1,$$

ε étant un nombre positif, pris arbitrairement.

Ces préliminaires posés, supposons que la valeur de x satisfasse aux conditions

$$(13)\qquad m+\alpha<x<m+\beta,$$

m étant un nombre positif ou zéro et α et β deux fractions positives données. On peut, dans ce cas, déterminer une fraction positive ρ de manière qu'aucun nombre entier n ne vérifie les inégalités

$$m+\alpha-\rho<n<m+\beta+\rho;$$

on aura alors, identiquement,

$$\sum_{n>x-\rho}^{n\leqq x+\rho}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{5}{4}}}\int_N^{\infty}\sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}=0,$$

tant que la variable x satisfera aux conditions (13), et, en vertu de (11), il vient

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} = \delta(N, x).$$

A cause de (12), on aura l'inégalité

$$\left| \sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} \right| < \varepsilon, \tag{14}$$

qui subsiste à condition que

$$N > N_0 \qquad \text{et} \qquad m + \alpha < x < n + \beta,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

46. Théorème II. — *La convergence de la série infinie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} \tag{15}$$

est à variation limitée dans chaque intervalle fini $a < x < b$ où $a > 0$.

La somme infinie (15) représente, comme nous l'avons vu au n° 43, une fonction numérique qui passe brusquement d'une valeur à une autre dans le voisinage des valeurs entières positives de la variable x; pour cette cause, la convergence de la série considérée ne peut être uniforme dans chaque intervalle fini. Cette série jouit d'une propriété importante, à savoir :

La valeur numérique de la somme

$$\sum_{n>N}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}$$

ne surpasse pas une limite fixe, quelle que soit la valeur attribuée à N quand la valeur de x est comprise entre les limites données $a < x < b$.

En vertu de cette propriété de la série infinie (15), on peut dire que la convergence de cette série est à variation limitée.

Le théorème énoncé est une conséquence immédiate de la formule (11), puisque la valeur numérique de l'intégrale définie

$$\int_{\mathrm{N}}^{\infty} \sin 4\pi\sqrt{t}(\sqrt{x}-\sqrt{n})\frac{dt}{t}$$

ne surpasse pas une limite fixe, quelle que soit la valeur de N; c'est ce qu'on vérifie sans peine.

Nouvelle forme de la formule sommatoire généralisée.

47. Nous avons vu au n° 25 que la somme

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n)$$

peut être représentée par l'intégrale définie

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)\, d\,\varphi(x), \tag{1}$$

prise dans le sens de Stieltjes, où l'on a mis

$$\varphi(x) = \sum_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n). \tag{2}$$

La formule (1) subsiste à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a < x < b$.

De la même manière, on démontrera que l'intégrale définie

$$\int_a^b \varphi(x) d f(x)$$

a aussi un sens et que deux intégrales

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \varphi(x)\,d f(x)$$

sont liées par la relation

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \varphi(b)f(b) - \varphi(a)f(a) - \int_a^b \varphi(x)\,d f(x).$$

En vertu de (1), on aura

$$\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n)f(n) = \varphi(b)f(b) - \varphi(a)f(a) - \int_a^b \varphi(x)\,d f(x). \tag{3}$$

Nous avons défini au n° 33 la fonction $r_0(x)$ par la formule

$$\sum_{n>0}^{n\leqq x} \tau(n) = \int_0^x (\log t + 2C)\,dt + \zeta^2(0) + r_0(x);$$

donc, à cause de (2), on aura

$$\varphi(x) = x(\log x + 2C - 1) + \tfrac{1}{4} + r_0(x). \tag{4}$$

En substituant cette expression de la fonction $\varphi(x)$ dans l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,d f(x)$, on obtient

$$\int_a^b \varphi(x)\,d f(x) = \int_a^b [x(\log x + 2C - 1) + \tfrac{1}{4}]\,d f(x) + \int_a^b r_0(x)\,d f(x),$$

et l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\,d f(x) = {} & [b(\log b + 2C - 1) + \tfrac{1}{4}]f(b) - [a(\log a + 2C - 1) + \tfrac{1}{4}]f(a) \\ & - \int_a^b f(x)(\log x + 2C)\,dx + \int_a^b r_0(x)\,d f(x).\end{aligned}$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (3), on obtient, à cause de (4),

$$(5)\quad \sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n)f(n) = \int_a^b f(x)(\log x + 2C)\,dx + r_0(b)f(b) - r_0(a)f(a) - \int_a^b r_0(x)\,df(x).$$

Cette formule subsiste à la seule condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle $a < x < b$.

48. Supposons, de plus, que la fonction $f(x)$ ait dans l'intervalle $a < x < b$ un nombre limité de maxima et de minima.

En développant la fonction $r_0(x)$ en série obtenue au n° 43, on peut poser

$$r_0(x) = \frac{1}{2}\tau(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n)\frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} + R(x, N)$$

où

$$(6)\qquad R(x, N) = \sum_{n>N}^{\infty} 2\tau(n)\frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}.$$

En vertu de la propriété (2) (n° 24) des intégrales définies de Stieltjes, on déduit de l'égalité précédente la formule suivante :

$$\begin{aligned}\int_a^b & r_0(x)\,df(x)\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \tau(x)\,df(x) + \sum_{n=1}^{n\leqq N} 2\tau(n)\int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}\,df(x) + \int_a^b R(x, N)\,df(x).\end{aligned}$$

Comme la fonction $\tau(x)$ a la valeur *zéro* chaque fois que la valeur de x n'est pas un nombre entier positif, on aura

$$\int_a^b \tau(x)\,df(x) = 0,$$

et l'égalité précédente devient

$$(7)\quad \int_a^b r_0(x)\,df(x) = \sum_{n=1}^{n\leqq N} 2\tau(n)\int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}\,df(x) + \int_a^b R(x, N)\,df(x).$$

Le reste de cette série

$$\int_a^b R(x, N)\, d f(x)$$

tend vers la limite *zéro* à mesure que N croît indéfiniment.

Pour le démontrer, désignons par $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ tous les nombres entiers satisfaisant aux conditions

$$a < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < b,$$

puis prenons un nombre positif ρ, aussi petit que l'on voudra, et partageons l'intervalle (a, b) en des intervalles suivants :

$$(a, a+\rho), \quad (a+\rho, n_1-\rho), \quad (n_1-\rho, n_1), \quad (n_1, n_1+\rho), \quad \ldots,$$
$$(n_{k-1}+\rho, b-\rho), \quad (b-\rho, b).$$

En supposant que la fonction $f(x)$ ne possède dans l'intervalle (a, b) qu'un nombre limité de maxima et de minima, on peut déterminer un nombre positif ρ de manière que la fonction $f(x)$ varie dans le même sens entre les limites de chaque intervalle

$$(a, a+\rho), \quad (n_1-\rho, n_1), \quad (n_1, n_1+\rho), \quad \ldots, \quad (n_{k-1}, n_{k-1}+\rho), \quad (b-\rho, b).$$

En désignant $a = n_0$ et $b = n_k$, on peut présenter le reste de la formule (7) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (8)\quad & \int_a^b R(x, N)\, d f(x) \\ & = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \left\{ \int_{n_\lambda}^{n_\lambda+\rho} R(x, N)\, d f(x) + \int_{n_\lambda+\rho}^{n_{\lambda+1}-\rho} R(x, N)\, d f(x) + \int_{n_{\lambda+1}-\rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N)\, d f(x) \right\}. \end{aligned}$$

Considérons l'intégrale définie

$$(9) \qquad \int_{n_\lambda+\rho}^{n_{\lambda+1}-\rho} R(x, N)\, d f(x) \qquad \text{où} \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

Quelque petit que soit le nombre positif ε, pris arbitrairement, on peut toujours déterminer un nombre N_λ de manière que l'inégalité

$$(10) \qquad |R(x, N)| < \varepsilon$$

ait lieu à condition que

$$(11) \qquad N > N_\lambda \quad \text{et} \quad n_\lambda + \rho < x < n_{\lambda+1} - \rho \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

En effet, nous avons démontré au n° 45 que la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n}$$

est uniformément convergente dans le domaine $n_\lambda + \rho < x < n_{\lambda+1} - \rho$, où $0 < \rho < 1$; d'autre part, la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\xi_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n},$$

en vertu des propriétés de la fonction $\xi_1(x)$ démontrées au n° 13, est uniformément convergente dans chaque intervalle $a < x < b$ où $a > 0$, il en résulte que la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 n x) - \xi_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n},$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $n_\lambda + \rho < x < n_{\lambda+1} - \rho$; donc, à cause de (6), la fonction $R(x, N)$ satisfait aux conditions (10) et (11).

En observant que la fonction $f(x)$ ne possède qu'un nombre limité de maxima et de minima dans l'intervalle $(n_\lambda, n_{\lambda+1})$, on peut déterminer une constante positive A_λ qui ne dépend pas de ρ de manière que l'inégalité

$$\left| \int_{n_\lambda + \rho}^{n_{\lambda+1} - \rho} R(x, N)\, d f(x) \right| < M A_\lambda$$

ait lieu, M étant la limite supérieure des valeurs numériques de la fonction $R(x, N)$ dans l'intervalle $(n_\lambda + \rho, n_{\lambda+1} - \rho)$; on en conclut que la valeur numérique de l'intégrale définie (9) vérifie, à cause de (10) et (11), l'inégalité

$$(12) \qquad \left| \int_{n_\lambda - \rho}^{n_{\lambda+1} - \rho} R(x, N)\, d f(x) \right| < \varepsilon A_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Considérons maintenant deux intégrales définies

$$\int_{n_\lambda}^{n_\lambda + \rho} R(x, N)\, d f(x) \quad \text{et} \quad \int_{n_{\lambda+1} - \rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N)\, d f(x) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

En vertu du théorème II du n° 46, la fonction $R(x, N)$ vérifie l'inégalité

$$(13) \qquad |R(x, N)| < B \qquad \text{à condition que} \qquad a < x < b,$$

B étant une constante fixe.

Puisque la fonction $f(x)$ varie dans le même sens dans l'intervalle $(n_\lambda, n_\lambda + \rho)$ et aussi dans l'intervalle $(n_{\lambda+1} - \rho, n_{\lambda+1})$, on aura les inégalités

$$\left| \int_{n_\lambda}^{n_\lambda + \rho} R(x, N)\, d f(x) \right| < B\, | f(n_\lambda + \rho) - f(n_\lambda) |$$

et

$$\left| \int_{n_{\lambda+1} - \rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N)\, d f(x) \right| < B\, | f(n_{\lambda+1}) - f(n_{\lambda+1} - \rho) |.$$

En observant que la fonction $f(x)$ est continue dans les intervalles $(n_\lambda, n_\lambda + \rho)$ et $(n_{\lambda+1} - \rho, n_{\lambda+1})$, on peut supposer que le nombre positif ρ soit choisi de manière que les inégalités

$$| f(n_\lambda + \rho) - f(n_\lambda) | < \eta \qquad \text{et} \qquad | f(n_{\lambda+1}) - f(n_{\lambda+1} - \rho) | < \eta$$

aient lieu, η étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra.

En vertu des inégalités précédentes, il vient

$$(14) \qquad \left| \int_{n_\lambda}^{n_\lambda + \rho} R(x, N)\, d f(x) \right| < \eta B \quad \text{et} \quad \left| \int_{n_{\lambda+1} - \rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N)\, d f(x) \right| < \eta B$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Ayant égard aux inégalités (12) et (14), on obtient, à cause de (8),

$$\left|\int_a^b R(x, N)\, df(x)\right| < \sum_{\lambda=0}^{k=1} (\varepsilon A_\lambda + 2\eta B).$$

Cette inégalité subsiste à condition que

$$N > N_\lambda \qquad \text{où} \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

Il en résulte qu'en faisant $N = \infty$, on aura

$$(15) \qquad \lim_{N=\infty} \int_a^b R(x, N)\, df(x) = 0.$$

49. Théorème I. — *La somme* $\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n)$ *peut être développée en série infinie*

$$(\star) \quad \sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)(\log x + 2C)\, dx + \frac{1}{2}\tau(b) f(b) - \frac{1}{2}\tau(a) f(a)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \int_a^b f(x)\,[\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)]\, dx,$$

à condition que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (a, b) et qu'elle ne possède dans cet intervalle qu'un nombre limité de maxima et de minima.

Considérons l'intégrale définie

$$\int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}\, df(x).$$

En intégrant par parties à l'aide de la formule (2) du n° 9 et de la formule (4) du n° 11

$$D_x \frac{\xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} = -\xi(4\pi^2 nx) \qquad \text{et} \qquad D_x \frac{\eta_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n} = \eta(4\pi^2 nx),$$

on obtient

$$\int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 nx) - \xi_1(4\pi^2 nx)}{4\pi^2 n}\, df(x)$$
$$= \frac{\eta_1(4\pi^2 nb) - \xi_1(4\pi^2 nb)}{4\pi^2 n} f(b) - \frac{\eta_1(4\pi^2 na) - \xi_1(4\pi^2 na)}{4\pi^2 n} f(a)$$
$$- \int_a^b f(x)\,[\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)]\, dx;$$

et, en vertu de la formule (7), il vient

$$\int_a^b r_0(x)\, df(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{n \leqq \mathrm{N}} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nb) - \xi_1(4\pi^2 nb)}{4\pi^2 n} f(b) - \sum_{n=1}^{n \leqq \mathrm{N}} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 na) - \xi_1(4\pi^2 na)}{4\pi^2 n} f(a)$$
$$- \sum_{n=1}^{n \leqq \mathrm{N}} 2\tau(n) \int_a^b f(x)\,[\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)]\, dx + \int_a^b \mathrm{R}(x, \mathrm{N})\, df(x).$$

En substituant le résultat obtenu dans la formule (5) on aura

$$\sum_{n>a}^{n \leqq b} \tau(n) f(n)$$
$$= \int_a^b f(x)(\log x + 2\mathrm{C})\, dx + \left[r_0(b) - \sum_{n=1}^{n \leqq \mathrm{N}} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nb) - \xi_1(4\pi^2 nb)}{4\pi^2 n} \right] f(b)$$
$$- \left[r_0(a) - \sum_{n=1}^{n \leqq \mathrm{N}} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 na) - \xi_1(4\pi^2 na)}{4\pi^2 n} \right] f(a)$$
$$+ \sum_{n=1}^{n \leqq \mathrm{N}} 2\tau(n) \int_a^b f(x)\,[\xi(4\pi^2 nx) + \eta(4\pi^2 nx)]\, dx - \int_a^b \mathrm{R}(x, \mathrm{N})\, df(x).$$

En observant qu'en vertu de la formule (19) du n° 43 on aura

$$r_0(a) - \lim_{\mathrm{N}=\infty} \sum_{n=1}^{n \leqq \mathrm{N}} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 na) - \xi_1(4\pi^2 na)}{4\pi^2 n} = \frac{1}{2}\tau(a),$$
$$r_0(b) - \lim_{\mathrm{N}=\infty} \sum^{n \leqq \mathrm{N}} 2\tau(n) \frac{\eta_1(4\pi^2 nb) - \xi_1(4\pi^2 nb)}{4\pi^2 n} = \frac{1}{2}\tau(b),$$

et en faisant, dans l'égalité précédente, $N = \infty$, on obtient, à cause de (15),

$$\sum_{n>a}^{n \leqq N} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)(\log x + 2C)\,dx + \frac{1}{2}\tau(b) f(b) - \frac{1}{2}\tau(a) f(a)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n)\,[\xi(4\pi^2 n x) + \eta(4\pi^2 n x)]\,dx;$$

donc le théorème énoncé est démontré.

50. Théorème II. — *La somme* $\sum_{n>a}^{n \leqq b} \tau(n) f(n)$ *peut être developpée en série infinie*

$$(\star\star)\quad \sum_{n>a}^{n \leqq b} \tau(n) f(n)$$
$$= \int_a^b f(x)(\log x + 2C)\,dx + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k [r_k(b) f^{(k)}(b) - r_k(a) f^{(k)}(a)]$$
$$+ (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \int_a^b \frac{(-1)^m \xi_m(4\pi^2 n x) + \eta_m(4\pi^2 n x)}{(4\pi^2 n)^m} f^{(m)}(x)\,dx,$$

à condition que la fonction $f(x)$ *ait* m *dérivées* $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(m)}(x)$ *bien déterminées et limitées dans l'intervalle* (a, b), $(m = 1, 2, \ldots)$.

Revenons à la formule (7). Le reste de cette formule peut être présenté, dans le cas considéré, sous la forme suivante :

$$(16)\quad \int_a^b R(x, N) f'(x)\,dx$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{k-1} \left\{ \int_{n_\lambda}^{n_\lambda+\rho} R(x, N) f'(x)\,dx \right.$$
$$\left. + \int_{n_\lambda+\rho}^{n_{\lambda+1}-\rho} R(x, N) f'(x)\,dx + \int_{n_{\lambda+1}-\rho}^{n_{\lambda+1}} R(x, N) f'(x)\,dx \right\}.$$

Comme la fonction $f'(x)$ est, par hypothèse, limitée dans l'intervalle (a, b), on aura

$$|f'(x)| < \mathrm{A},$$

où $a < x < b$, A étant une constante fixe.

Il en résulte, en vertu de (10),

$$\left|\int_{n_\lambda+\rho}^{n_{\lambda+1}-\rho} \mathrm{R}(x, \mathrm{N}) f'(x)\,dx\right| < \varepsilon \mathrm{A}(n_{\lambda+1} - n_\lambda - 2\rho) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

et, en vertu de (13),

$$\left|\int_{n_\lambda}^{n_\lambda+\rho} \mathrm{R}(x, \mathrm{N}) f'(x)\,dx\right| < \rho \mathrm{AB}$$

et

$$\left|\int_{n_{\lambda+1}-\rho}^{n_{\lambda+1}} \mathrm{R}(x, \mathrm{N}) f'(x)\,dx\right| < \rho \mathrm{AB} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

A cause de (16) on obtient

$$\left|\int_a^b \mathrm{R}(x, \mathrm{N}) f'(x)\,dx\right| < \sum_{\lambda=0}^{k-1} [\varepsilon \mathrm{A}(n_{\lambda+1} - n_\lambda - 2\rho) + 2\rho \mathrm{AB}],$$

où $\mathrm{N} > \mathrm{N}_\lambda$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$.

On en conclut qu'en faisant $\mathrm{N} = \infty$, on aura

$$\lim_{\mathrm{N}=\infty} \int_a^b \mathrm{R}(x, \mathrm{N}) f'(x)\,dx = 0.$$

En faisant $\mathrm{N} = \infty$ dans la formule (7), on obtient, à cause de (6),

$$\begin{aligned}\sum_{n>a}^{n\leqq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)(\log x + 2\mathrm{C})\,dx + r_0(b) f(b) - r_0(a) f(a)\\ - \sum_{n=1}^{\infty} 2\tau(n) \int_a^b \frac{\eta_1(4\pi^2 n x) - \xi_1(4\pi^2 n x)}{4\pi^2 n} f'(x)\,dx;\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème énoncé dans le cas $m = 1$. En intégrant par parties les intégrales définies qui se trouvent dans l'égalité obtenue, on déduira aisément la formule générale.

La formule (⋆⋆), qui ne diffère de la formule sommatoire (⋆) du n° 34 que par la forme du reste, présente une généralisation de la célèbre formule sommatoire de Poisson ([1]).

([1]) Poisson, *Mémoire sur le calcul des intégrales définies* (*Mémoires de l'Institut de France*, année 1823, t. VI, p. 571).