P. DUHEM

Recherches sur l'élasticité (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 375-414
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__375_0>

RECHERCHES SUR L'ÉLASTICITÉ.

PAR M. P. DUHEM.

DEUXIÈME PARTIE.

LES MILIEUX VITREUX PEU DÉFORMÉS.

CHAPITRE I.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN MILIEU VITREUX FAIBLEMENT ÉCARTÉ DE L'ÉTAT INITIAL.

I. — Équilibre d'un milieu vitreux faiblement écarté de l'état initial.

Les considérations développées dans la première Partie de ces *Recherches* nous montrent de quelle manière on peut logiquement mettre en équations les problèmes relatifs à l'équilibre et au mouvement d'un milieu vitreux. Mais cette mise en équations, fort compliquée d'ailleurs, est plutôt figurée qu'effective. A chaque instant, nous avons fait figurer dans nos équations des quantités telles que σ_1, σ_2, σ_3 ou que les $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$; or, pour obtenir effectivement les expressions de ces quantités en fonctions de ξ, η, ζ et de leurs dérivées par rapport à a, b, c, il faudrait au préalable résoudre l'équation (10) de la première Partie, qui est une équation complète du troisième degré par rapport à la variable S.

C'est donc seulement dans certains cas particuliers où l'on aura, par des hypothèses convenables, grandement simplifié le problème, que l'on pourra parvenir à une mise en équations effective de ce problème.

Nous allons aborder, en cette seconde Partie, un cas particulièrement simple que nous définirons de la manière suivante :

1° Les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont newtoniennes;

2° Les quantités ξ, η, ζ et leurs dérivées partielles de tous les ordres par rapport à t, a, b, c sont assez petites, en tout point, pour que l'on puisse, dans les calculs, les traiter comme des infiniment petits du premier ordre.

Dans ces conditions, les égalités (8) de la première Partie deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial\xi}{\partial a}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial\eta}{\partial b}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial c}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial b}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial\xi}{\partial c}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\eta}{\partial a}, \end{cases}$$

tandis que l'égalité (4 *bis*) de la première Partie devient

$$(2)\quad \omega - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c} = 0.$$

Les égalités (27) et (28) de la première Partie ou bien encore les égalités (30) de la même Partie donnent

$$(3)\quad \begin{cases} \delta\varepsilon_1 = D_1 = \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}, \qquad \delta\varepsilon_2 = D_2 = \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}, \qquad \delta\varepsilon_3 = D_3 = \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}, \\ \delta\gamma_1 = 2\,G_1 = \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}, \\ \delta\gamma_2 = 2\,G_2 = \dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a} + \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}, \\ \delta\gamma_3 = 2\,G_3 = \dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}. \end{cases}$$

Dans le développement de la fonction Φ suivant les puissances croissantes de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, arrêtons-nous aux termes du second degré par rapport à ces variables. La fonction Φ, devant dépendre exclusivement de T et de J_1, J_2, J_3, devra être indépendante de J_3, du premier degré en J_2 et du second degré en J_1, sans contenir le produit $J_1 J_2$; nous aurons donc

$$\Phi = \varphi_0(T) + \varphi_1(T)\,J_1 + \varphi_2(T)\,J_1^2 + \varphi_2'(T)\,J_2$$

ou, selon les égalités (19) de la première Partie,

$$(4)\qquad \begin{aligned}\Phi = \varphi_0(\mathrm{T}) + \varphi_1(\mathrm{T})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \varphi_2(\mathrm{T})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ + 4\varphi_2'(\mathrm{T})(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2) - \varphi_2'(\mathrm{T})(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2).\end{aligned}$$

Posant

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\rho_0[\varphi_2(\mathrm{T}) + 2\varphi_2'(\mathrm{T})] = \Lambda(\mathrm{T}),\\ &2\rho_0\varphi_2'(\mathrm{T}) = -\mathrm{M}(\mathrm{T}),\end{aligned}\right.$$

nous pourrons écrire

$$(6)\qquad \begin{aligned}\rho_0\Phi = \rho_0\varphi_0(\mathrm{T}) + \rho_0\varphi_1(\mathrm{T})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \tfrac{1}{2}\Lambda(\mathrm{T})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 \\ + \tfrac{1}{2}\mathrm{M}(\mathrm{T})(2\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+2\varepsilon_3^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2).\end{aligned}$$

Les égalités (45) de la première Partie deviennent alors

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho_0 e_1 = -\rho_0\varphi_1(\mathrm{T}) - \Lambda(\mathrm{T})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - 2\mathrm{M}(\mathrm{T})\varepsilon_1,\\ &\rho_0 e_2 = -\rho_0\varphi_1(\mathrm{T}) - \Lambda(\mathrm{T})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - 2\mathrm{M}(\mathrm{T})\varepsilon_2,\\ &\rho_0 e_3 = -\rho_0\varphi_1(\mathrm{T}) - \Lambda(\mathrm{T})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - 2\mathrm{M}(\mathrm{T})\varepsilon_3,\\ &\rho_0 g_1 = -\mathrm{M}(\mathrm{T})\gamma_1,\\ &\rho_0 g_2 = -\mathrm{M}(\mathrm{T})\gamma_2,\\ &\rho_0 g_3 = -\mathrm{M}(\mathrm{T})\gamma_3.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (61) et (62) de la première Partie donnent sans peine

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{N}_x = \rho_0 e_1, \qquad \mathrm{N}_y = \rho_0 e_2, \qquad \mathrm{N}_z = \rho_0 e_3,\\ &\mathrm{T}_x = \rho_0 g_1, \qquad \mathrm{T}_y = \rho_0 g_2, \qquad \mathrm{T}_z = \rho_0 g_3\end{aligned}\right.$$

ou bien, en vertu des égalités (7) et (1),

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{N}_x = -\rho_0\varphi_1(\mathrm{T}) - \Lambda(\mathrm{T})\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) - 2\mathrm{M}(\mathrm{T})\frac{\partial\xi}{\partial a},\\ &\mathrm{N}_y = -\rho_0\varphi_1(\mathrm{T}) - \Lambda(\mathrm{T})\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) - 2\mathrm{M}(\mathrm{T})\frac{\partial\eta}{\partial b},\\ &\mathrm{N}_z = -\rho_0\varphi_1(\mathrm{T}) - \Lambda(\mathrm{T})\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) - 2\mathrm{M}(\mathrm{T})\frac{\partial\zeta}{\partial c},\\ &\mathrm{T}_x = -\mathrm{M}(\mathrm{T})\left(\frac{\partial\eta}{\partial c}+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\right),\\ &\mathrm{T}_y = -\mathrm{M}(\mathrm{T})\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\right),\\ &\mathrm{T}_z = -\mathrm{M}(\mathrm{T})\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right).\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, l'égalité générale

$$\frac{\partial N_x}{\partial a} = \frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial N_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial N_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial N_x}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right) + \frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial N_z}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial a}$$

donne la première des égalités

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial N_x}{\partial x} = \dfrac{\partial N_x}{\partial a}, & \dfrac{\partial T_z}{\partial y} = \dfrac{\partial T_z}{\partial b}, & \dfrac{\partial T_y}{\partial z} = \dfrac{\partial T_y}{\partial c}, \\ \dfrac{\partial T_z}{\partial x} = \dfrac{\partial T_z}{\partial a}, & \dfrac{\partial N_y}{\partial y} = \dfrac{\partial N_y}{\partial b}, & \dfrac{\partial T_x}{\partial z} = \dfrac{\partial T_x}{\partial c}, \\ \dfrac{\partial T_y}{\partial x} = \dfrac{\partial T_y}{\partial a}, & \dfrac{\partial T_x}{\partial y} = \dfrac{\partial T_x}{\partial b}, & \dfrac{\partial N_z}{\partial z} = \dfrac{\partial N_z}{\partial c}. \end{array}\right.$$

Dès lors, les équations (70) de la première Partie, vérifiées en tout point d'un milieu en équilibre, peuvent s'écrire

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial N_x}{\partial a} + \dfrac{\partial T_z}{\partial b} + \dfrac{\partial T_y}{\partial c} = \rho_0(X_i + X_e), \\ \dfrac{\partial T_z}{\partial a} + \dfrac{\partial N_y}{\partial b} + \dfrac{\partial T_z}{\partial c} = \rho_0(Y_i + Y_e), \\ \dfrac{\partial T_y}{\partial a} + \dfrac{\partial T_x}{\partial b} + \dfrac{\partial T_z}{\partial c} = \rho_0(Z_i + Z_e). \end{array}\right.$$

Quant aux équations (71) de la première Partie, il est permis de les écrire en donnant aux quantités N_i, T_i les valeurs qu'elles prennent non pas en un point de la surface déformée, mais en un point de la surface primitive; on peut également regarder α, β, γ comme les cosinus directeurs de la normale à la même surface.

Les égalités (8) et (10), jointes aux équations (71) de la première Partie nous donnent alors les équations d'équilibre d'un milieu vitreux très peu écarté de l'état initial, *ce dernier n'étant pas forcément un état d'équilibre sous l'action de forces nulles*. Ces équations sont les équations de Green et de Lamé, complétées comme l'a indiqué M. Poincaré [1].

Nous n'insisterons pas sur ces équations bien connues.

---

[1] H. Poincaré, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 54; Paris, 1892. *Leçons sur la théorie mathématique de la Lumière*, p. 31; Paris, 1889.

II. — Équations des petits mouvements d'un solide vitreux [1].

Le travail virtuel des actions d'inertie ne change pas de forme lorsque l'on suppose que ξ, η, ζ sont des quantités très petites; il continue à être donné par l'égalité (72) de la première Partie; au contraire l'expression du travail virtuel de la viscosité subit de grandes simplifications.

L'expression de la fonction dissipative $\mathfrak{F}$, qui détermine l'expression de ce travail virtuel, dépend :

1° De l'état de déformation du système au point (x, y, z) et à l'instant t;

2° Des vitesses de déformation D'_1, D'_2, D'_3, G'_1, G'_2, G'_3 qui déterminent la variation que subit la déformation au point (x, y, z) entre les instants t et $(t + dt)$.

La fonction dissipative est, d'après les égalités (73) et (74) de la première Partie, une forme quadratique de ces six dernières variables, les coefficients de cette forme dépendant de la déformation au point (x, y, z) et à l'instant t.

Si, sans changer les valeurs de D'_1, D'_2, D'_3, G'_1, G'_2, G'_3, on supposait la déformation au point (x, y, z), à l'instant t, infiniment peu différente de ce qu'elle est en réalité, il est clair que l'on altérerait $\mathfrak{F}$ d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même.

Or, dans le cas qui nous occupe en ce moment, le milieu à l'instant t est infiniment peu déformé; nous pourrons donc, pour déterminer $\mathfrak{F}$, raisonner comme si l'état du milieu à l'instant t était identique à l'état initial.

Or, dans l'état initial non déformé, on peut regarder trois droites rectangulaires quelconques comme étant les trois axes de dilatation. Il nous est donc loisible, dans la formule (74) de la première Partie, de regarder Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 comme les vitesses de déformation *rapportées à trois axes rectangulaires quelconques*; la valeur de $\mathfrak{F}$ devra être indépendante du choix de ces axes.

---

[1] *Sur le mouvement des milieux vitreux, affectés de viscosité, et très peu déformés* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, p. 592, 9 mars 1903).

Or, la déformation infiniment petite dont

$$(11)\qquad D'_1\,dt,\quad D'_2\,dt,\quad D'_3\,dt,\quad G'_1\,dt,\quad G'_2\,dt,\quad G'_3\,dt$$

sont les composantes peut se ramener à trois dilatations $\mathfrak{D}'_1\,dt$, $\mathfrak{D}'_2\,dt$, $\mathfrak{D}'_3\,dt$ suivant trois certains axes rectangulaires; rien ne nous empêche de supposer que ces axes sont ceux auxquels il faut rapporter la déformation (11) pour obtenir la déformation

$$\Delta'_1\,dt,\quad \Delta'_2\,dt,\quad \Delta'_3\,dt,\quad \Gamma'_1\,dt,\quad \Gamma'_2\,dt,\quad \Gamma'_3\,dt,$$

cas auquel nous aurons

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \Delta'_1=\mathfrak{D}'_1, & \Delta'_2=\mathfrak{D}'_2, & \Delta'_3=\mathfrak{D}'_3,\\ \Gamma'_1=0, & \Gamma'_2=0, & \Gamma'_3=0.\end{array}\right.$$

Si nous posons alors

$$a(0,0,0)=A(T),$$
$$b(0,0,0)-a(0,0,0)=B(T),$$

l'égalité (74) de la première Partie deviendra

$$(13)\qquad \mathfrak{F}=A(T)\,(\mathfrak{D}'_1+\mathfrak{D}'_2+\mathfrak{D}'_3)^2+2B(T)\,(\mathfrak{D}'_2\mathfrak{D}'_3+\mathfrak{D}'_3\mathfrak{D}'_1+\mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}'_2).$$

D'autre part, on sait que $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}'_2$, $\mathfrak{D}'_3$ sont les trois racines de l'équation [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, première Partie, égalité (29)]

$$\begin{vmatrix} D'_1-\mathfrak{D}' & G'_3 & G'_2\\ G'_3 & D'_2-\mathfrak{D}' & G'_1\\ G'_2 & G'_1 & D'_3-\mathfrak{D}'\end{vmatrix}=0$$

ou bien

$$(14)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{D}'^3-(D'_1+D'_2+D'_3)\,\mathfrak{D}'^2+(D'_2D'_3+D'_3D'_1+D'_1D'_2-G'^2_1-G'^2_2-G'^2_4)\,\mathfrak{D}'&\\ -(D'_1D'_2D'_3+2G'_1G'_2G'_3-D'_1G'^2_1-D'_2G'^2_2-D'_3G'^2_3)&=0.\end{aligned}$$

L'égalité (13) devient alors

$$(15)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{F}=\ &A(T)(D'_1+D'_2+D'_3)^2\\ &+B(T)(D'_2D'_3+D'_3D'_1+D'_1D'_2-G'^2_1-G'^2_2-G'^2_3)\end{aligned}$$

ou, en posant

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} 2A(T)+B(T) &= \lambda(T),\\ -B(T) &= 2\mu(T),\end{aligned}\right.$$

$$(17)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda(T)}{2}(D'_1+D'_2+D'_3)^2 + \mu(T)(D'^2_1+D'^2_2+D'^2_3+2G'^2_1+2G'^2_2+2G'^2_3).$$

Dès lors, on trouve sans peine qu'on l'on a

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu_x &= -\lambda(T)(D'_1+D'_2+D'_3)-2\mu(T)D'_1,\\ \nu_y &= -\lambda(T)(D'_1+D'_2+D'_3)-2\mu(T)D'_2,\\ \nu_z &= -\lambda(T)(D'_1+D'_2+D'_3)-2\mu(T)D'_3,\\ \tau_x &= -2\mu(T)G'_1,\\ \tau_y &= -2\mu(T)G'_2,\\ \tau_z &= -2\mu(T)G'_3,\end{aligned}\right.$$

avec

$$D'_1 = \frac{\partial^2\xi}{\partial a\,\partial t},\qquad D'_2 = \frac{\partial^2\eta}{\partial b\,\partial t},\qquad D'_3 = \frac{\partial^2\zeta}{\partial c\,\partial t},$$

$$2G'_1 = \frac{\partial^2\eta}{\partial c\,\partial t}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial b\,\partial t},\qquad 2G'_2 = \frac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial t}+\frac{\partial^2\xi}{\partial c\,\partial t},\qquad 2G'_3 = \frac{\partial^2\xi}{\partial b\,\partial t}+\frac{\partial^2\eta}{\partial a\,\partial t},$$

en sorte que les égalités (18) deviennent

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu_x &= -\lambda(T)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)-2\mu(T)\frac{\partial^2\xi}{\partial t\,\partial a},\\ \nu_y &= -\lambda(T)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)-2\mu(T)\frac{\partial^2\eta}{\partial t\,\partial b},\\ \nu_z &= -\lambda(T)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)-2\mu(T)\frac{\partial^2\zeta}{\partial t\,\partial c},\\ \tau_x &= -\mu(T)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\eta}{\partial c}+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\right),\\ \tau_y &= -\mu(T)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\right),\\ \tau_z &= -\mu(T)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right).\end{aligned}\right.$$

Enfin, les équations (82) de la première Partie, vraies pour tout point du milieu, deviendront

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(N_x+\nu_x)}{\partial a}+\dfrac{\partial(T_z+\tau_z)}{\partial b}+\dfrac{\partial(T_y+\tau_y)}{\partial c}=\rho_0\left(X_i+X_e-\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right), \\ \dfrac{\partial(T_z+\tau_z)}{\partial a}+\dfrac{\partial(N_y+\nu_y)}{\partial b}+\dfrac{\partial(T_x+\tau_x)}{\partial c}=\rho_0\left(Y_i+Y_e-\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right), \\ \dfrac{\partial(T_y+\tau_y)}{\partial a}+\dfrac{\partial(T_x+\tau_x)}{\partial b}+\dfrac{\partial(N_z+\nu_z)}{\partial c}=\rho_0\left(Z_i+Z_e-\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right), \end{cases}$$

tandis que, selon les équations (81) de la première Partie, on devra avoir, en chaque point de la surface primitive,

$$(21)\quad \begin{cases} (N_x+\nu_x)\alpha+(T_z+\tau_z)\beta+(T_y+\tau_y)\gamma=P_x, \\ (T_z+\tau_z)\alpha+(N_y+\nu_y)\beta+(T_x+\tau_x)\gamma=P_y, \\ (T_y+\tau_y)\alpha+(T_x+\tau_x)\beta+(N_z+\nu_z)\gamma=P_z. \end{cases}$$

A ces égalités, il faudra joindre l'équation de continuité qui sera, selon les égalités (22) de la première Partie et (2) de la seconde Partie,

$$\rho_0-\rho=\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)$$

ou, en négligeant un infiniment petit du second ordre,

$$(22)\quad \rho-\rho_0=-\rho_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right).$$

III. — Quantité de chaleur dégagée dans une petite déformation d'un solide vitreux peu écarté de l'état initial.

Les égalités (86) de la première Partie et (3) de la seconde Partie permettent d'écrire cette quantité de chaleur sous la forme

$$(23)\quad \begin{aligned} dQ=-\Bigg[&\rho_0 c\,\delta T+\left(\rho_0 e_1+\frac{\nu_x}{E}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}+\left(\rho_0 e_2+\frac{\nu_y}{E}\right)\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}+\left(\rho_0 e_3+\frac{\nu_z}{E}\right)\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c} \\ &+\left(\rho_0 g_1+\frac{\tau_x}{E}\right)\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}+\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}\right) \\ &+\left(\rho_0 g_2+\frac{\tau_y}{E}\right)\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a}+\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}\right)+\left(\rho_0 g_3+\frac{\tau_z}{E}\right)\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}+\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}\right)\Bigg]d\varpi, \end{aligned}$$

tandis que les égalités (85) de la première Partie et (1), (4) et (5) de la seconde Partie donnent

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
\rho_0 \mathrm{e}_3 &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} + \frac{d\Lambda(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + 2\,\frac{d\mathrm{M}(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\,\frac{\partial\xi}{\partial a}\right],\\
\rho_0 \mathrm{e}_2 &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} + \frac{d\Lambda(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + 2\,\frac{d\mathrm{M}(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\,\frac{\partial\eta}{\partial b}\right],\\
\rho_0 \mathrm{e}_3 &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\left[\rho_0 \frac{d\varphi_3(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} + \frac{d\Lambda(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\right) + 2\,\frac{d\mathrm{M}(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\,\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right],\\
\rho_0 \mathrm{g}_1 &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\,\frac{d\mathrm{M}(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\right),\\
\rho_0 \mathrm{g}_2 &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\,\frac{d\mathrm{M}(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\right),\\
\rho_0 \mathrm{g}_3 &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\,\frac{d\mathrm{M}(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on veut exprimer la quantité de chaleur dégagée dans une modification réelle ou virtuelle, on voit que l'infiniment petit principal de cette quantité se réduit à

$$
(25)\qquad dQ = -\rho_0\left[c\,\delta\mathrm{T} - \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\,\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}\right)\right] d\varpi.
$$

Les trois quantités σ_1, σ_2, σ_3 sont sensiblement égales entre elles et égales à 1; on a donc

$$
k(\mathrm{T}, \sigma_1, \sigma_2,) = k(\mathrm{T}, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1) = k(\mathrm{T}, \sigma_3, \sigma_1, \sigma_2) = k(\mathrm{T}).
$$

Si l'on observe en outre que l'on a

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}_2^2 + \mathfrak{X}_3^2 = 1,\\
\mathfrak{Y}_1^2 + \mathfrak{Y}_2^2 + \mathfrak{Y}_3^2 = 1,\\
\mathfrak{Z}_1^2 + \mathfrak{Z}_2^2 + \mathfrak{Z}_3^2 = 1,\\
\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Y}_3\mathfrak{Z}_3 = 0,\\
\mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Z}_2\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{Z}_3\mathfrak{X}_3 = 0,\\
\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3 = 0,
\end{gathered}
$$

on voit que les égalités (90) de la première Partie deviennent

$$\begin{gathered} K_x = K_y = K_z = k(T), \\ C_x = C_y = C_z = 0. \end{gathered}$$

On a, d'ailleurs, en supposant que $\frac{\partial T}{\partial a}, \frac{\partial T}{\partial b}, \frac{\partial T}{\partial c}$ soient infiniment petits comme ξ, η, ζ, et en se bornant aux infiniment petits principaux,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial a}, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial b}, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial c},$$

et l'égalité (93) de la première Partie prend la forme

$$(26) \qquad dQ = -k(T)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right) d\varpi\, dt.$$

La comparaison des égalités (25) et (26) donne la relation supplémentaire

$$(27) \quad \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_0 \frac{T}{E} \frac{d\varphi_1(T)}{dT} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) - k(T)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial a^2} + \frac{\partial T}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial c^2}\right) = 0.$$

IV. — Problème de M. O.-E. Meyer.

Nous allons simplifier encore le problème qui nous occupe au moyen des hypothèses suivantes :

1° Les actions auxquelles le milieu est soumis sont purement superficielles, en sorte que l'on a, en tout point,

$$(28) \qquad X_i + X_e = 0, \qquad Y_i + Y_e = 0, \qquad Z_i + Z_e = 0;$$

2° La température est uniforme et constante pendant toute la durée du mouvement, en sorte qu'il est inutile de la faire figurer dans les équations et que l'on a, en outre,

$$(29) \qquad \varphi_1(T) = \text{const.}$$

Dans ces conditions, les équations des petits mouvements d'un solide vitreux deviennent, en vertu des égalités (8), (19) et (20),

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\Lambda + \mathrm{M})\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + \mathrm{M}\,\Delta\xi\\
&+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\xi - \rho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0,\\
&(\Lambda + \mathrm{M})\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + \mathrm{M}\,\Delta\eta\\
&+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\eta - \rho_0\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0,\\
&(\Lambda + \mathrm{M})\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + \mathrm{M}\,\Delta\zeta\\
&+ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial c\,\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\zeta - \rho_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on faisait, dans ces égalités,

$$(31)\qquad \Lambda = \mathrm{M}, \qquad \lambda = \mu,$$

on retrouverait les équations que M. O.-E. Meyer (¹) a obtenues au moyen de considérations moléculaires.

Ces équations sont du type auquel s'applique le théorème de Clebsch généralisé (²); la formation de leur intégrale générale se ramène à la formation de l'intégrale générale de l'*équation aux dilatations* et de l'intégrale générale de l'*équation aux rotations*.

L'*équation aux dilatations* est

$$(32)\qquad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\theta + (\Lambda + 2\mathrm{M})\Delta\theta - \rho_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0.$$

L'*équation aux rotations* est

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta\omega + \mathrm{M}\,\Delta\omega - \rho_0\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = 0.$$

(¹) O.-E. Meyer, *Zur Theorie der inneren Reibung* (*Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXVIII, 1874, p. 130).

(²) *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. VI, 1900, p. 213).

La stabilité de l'état d'équilibre pris pour état initial équivaut, comme l'on sait (*Voir* plus loin, Chapitre II), aux conditions

$$(34)\qquad \begin{cases} 3\Lambda + 2\mathrm{M} > 0, \\ \qquad \mathrm{M} > 0, \\ \text{partant} \\ \Lambda + 2\mathrm{M} > 0, \end{cases}$$

tandis que les conditions de signe imposées à la fonction dissipative équivalent aux inégalités [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, Ire Partie, inégalités (37), (38) et (39)]

$$(35)\qquad \begin{cases} 3\lambda + 2\mu > 0, \\ \qquad \mu > 0, \\ \text{partant} \\ \lambda + 2\mu > 0. \end{cases}$$

Les deux équations (32) et (33) sont donc toutes deux du type

$$(36)\qquad \mathrm{A}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathrm{V} + \mathrm{B}\,\Delta\mathrm{V} - \mathrm{C}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial t^2} = 0,$$

où l'on a

$$\Delta\mathrm{V} = \frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial b^2} + \frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial c^2}$$

et où A, B, C sont trois quantités positives.

Nous avons à plusieurs reprises attiré l'attention sur cette équation [1], qui joue un rôle essentiel dans diverses questions de Physique mathématique.

Soit Σ une surface tracée dans l'espace des a, b, c; peut-elle être, pour la fonction V, une onde du troisième ordre ?

La surface Σ partage l'espace en deux régions, que nous désignerons par 1 et 2. Si nous menons à la surface Σ une demi-normale

---

[1] *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, série II, t. V, 1901, p. 227). — *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 2e Partie, équation (106).

dirigée du côté 2 au côté 1, nous désignerons par α, β, γ ses cosinus directeurs.

Du côté 1, la fonction V a une détermination analytique V_1 que l'on pourrait également prolonger du côté 2; mais, de ce côté, V a une autre détermination analytique V_2; $U = V_2 - V_1$ est une fonction analytique, définie en tout point du côté 2, et y vérifiant l'équation

$$A\frac{\partial}{\partial t}\Delta U + B\Delta U - C\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \tag{36 bis}$$

Comme l'on a, en tout point de la surface Σ, $\Delta U = 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$, l'équation (36 *bis*) montre que l'on y a aussi

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta U = 0. \tag{37}$$

Soit $\mathfrak{N}$ la vitesse de propagation de l'onde Σ, dirigée du côté 2 au côté 1; selon les lemmes de M. Hadamard [*voir* nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 2e Partie, égalités (115)] il existe, en tout point de la surface Σ, une grandeur $\mathfrak{v}$ telle que l'on ait

$$\frac{\partial^3 U}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^s} = (-\mathfrak{N})^s \alpha^p \beta^q \gamma^r \mathfrak{v} \qquad (p + q + r + s = 3). \tag{38}$$

Cette égalité, jointe à l'identité

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

transforme l'égalité (37) en

$$\mathfrak{N}\mathfrak{v} = 0. \tag{39}$$

Si l'on n'a pas $\mathfrak{N} = 0$, cette égalité donne $\mathfrak{v} = 0$; ce résultat, reporté dans l'égalité (38), montre que toutes les dérivées partielles du troisième ordre de U sont nulles sur la surface Σ. La surface Σ est alors, pour la fonction U, une onde d'ordre supérieur à 3.

Si l'on a $\mathfrak{N} = 0$, l'égalité (38) est identiquement vérifiée; la relation (37) nous enseigne que toutes les dérivées partielles de la fonction U s'annulent sur la surface Σ, sauf les dérivées

$$\frac{\partial^3 U}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r} \qquad (p+q+r=3).$$

Ainsi, *les seules ondes du troisième ordre que puisse admettre une intégrale* V *de l'équation* (36) *sont des ondes immobiles au travers desquelles toutes les dérivées du troisième ordre de* V *varient d'une manière continue, sauf celles qui ne résultent d'aucune différentiation par rapport à t.*

Toute intégrale de l'équation (36) vérifie aussi les équations que l'on en déduit par des différentiations successives. Dès lors, on peut étendre le théorème précédent en lui donnant la forme que voici :

Les seules ondes d'ordre n ($n \geqq 3$) *que puisse admettre une intégrale* V *de l'équation* (36) *sont des ondes immobiles au travers desquelles les seules dérivées d'ordre n de la fonction* V *qui soient discontinues sont celles qui s'obtiennent sans aucune dérivation par rapport à t.*

Selon le théorème de Clebsch généralisé, toute intégrale des équations (30) peut se mettre sous la forme

$$(40) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \Theta}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial c} - \frac{\partial R}{\partial b}, \\ \eta &= \frac{\partial \Theta}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\partial P}{\partial b}, \\ \zeta &= \frac{\partial \Theta}{\partial c} + \frac{\partial P}{\partial b} - \frac{\partial Q}{\partial a}, \end{aligned} \right.$$

Θ étant une intégrale de l'équation (32) et P, Q, R trois intégrales de l'équation (33), liées entre elles par la relation

$$(41) \qquad \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial c} = 0.$$

Il est clair que pour qu'une surface Σ soit onde d'ordre n pour les fonctions ξ, η, ζ, il faut qu'elle soit onde d'ordre $(n+1)$ pour l'une au moins des fonctions Θ, P, Q, R et d'ordre égal ou supérieur à $(n+1)$ pour les autres. D'où la conclusion suivante :

Une surface Σ *ne peut être onde d'ordre n* ($n \geqq 2$) *par rapport aux fonctions* ξ, η, ζ, *que si elle est immobile dans l'espace des a, b, c.*

D'ailleurs, d'après ce que nous avons vu, une onde d'ordre $n\,(n \geqq 3)$ par rapport à l'une des fonctions Θ, P, Q, R est aussi d'ordre au moins égal à n par rapport à sa dérivée par rapport à t: $\frac{\partial\Theta}{\partial t}$, $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial t}$.

D'autre part, les égalités (40) nous donnent

$$
(42)\qquad \left\{
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial a\,\partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial c\,\partial t} - \frac{\partial^2 R}{\partial b\,\partial t},\\
v &= \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial b\,\partial t} + \frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial c\,\partial t},\\
w &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial c\,\partial t} + \frac{\partial^2 P}{\partial b\,dt} - \frac{\partial^2 Q}{\partial a\,\partial t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous voyons alors que *toute onde d'ordre n* $(n \geqq 2)$ *pour les fonctions* ξ, η, ζ *est, en général, onde d'ordre n pour les composantes* u, v, w *de la vitesse.*

En revanche, *elle est, en général, onde d'ordre* $(n-1)$ *pour les dérivées partielles de* ζ, η, ζ, *par rapport à* a, b, c, *partant, selon les égalités* (8), *pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z.

En résumé, *si l'on considère les petits mouvements d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, très peu écarté de l'état initial et soumis aux conditions imaginées par M. O.-E. Meyer, ces petits mouvements peuvent présenter des ondes. Ces ondes, d'ordre n* $(n \geqq 2)$ *pour les composantes* u, v, w *de la vitesse, sont en général d'ordre* $(n-1)$ *pour les quantités* N_i, T_i. *Pendant toute la durée du mouvement, elles séparent les mêmes masses matérielles.*

CHAPITRE II.

DE LA PROPAGATION DES ONDES DANS LES MILIEUX VITREUX TRÈS PEU DÉFORMÉS (1).

I. — Des ondes du second ordre en u, v, w, dans un milieu vitreux très peu écarté de l'état initial, animé de mouvements très petits et conducteur de la chaleur.

Le théorème précédent est soumis à certaines restrictions, celles-là mêmes qui définissent le problème de M. O.-E. Meyer. Nous allons le généraliser en nous servant, pour le démontrer, non plus des formules que renferme le paragraphe 4 du Chapitre I, mais des formules qui ont été données aux trois premiers paragraphes du même Chapitre.

Considérons, dans l'espace des a, b, c, une surface fixe ou variable Σ qui soit onde d'ordre ν pour ξ, η, ζ. Cette surface sépare l'espace en deux régions 1 et 2; la normale, menée de la région 1 à la région 2, fait avec les axes de coordonnées des angles l, m, n.

Du côté 1 de la surface Σ, les fonctions ξ, η, ζ admettent les déterminations analytiques ξ_1, η_1, ζ_1; du côté 2, elles admettent les déterminations analytiques ξ_2, η_2, ζ_2. Posons

$$\xi_2-\xi_1=\mathrm{F}, \qquad \eta_2-\eta_1=\mathrm{G}, \qquad \zeta_2-\zeta_1=\mathrm{H}. \tag{43}$$

Toutes les dérivées partielles de F, G, H, par rapport à a, b, c, t, jusqu'à l'ordre $(\nu-1)$ inclusivement, s'annulent sur la surface Σ. Il n'en est pas de même des dérivées d'ordre ν. Selon les lemmes de M. Hadamard (*Voir* nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 2e Partie, Chapitre II, § 5), il existe un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, défini en

---

(1) *Sur les ondes au sein d'un milieu vitreux affecté de viscosité et très peu déformé* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 23 mars 1903, p. 733).

chaque point de la surface Σ, tel que l'on ait

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^\nu F}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{F},\\ \frac{\partial^\nu G}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{G}, \qquad (p+q+r+s=\nu),\\ \frac{\partial^\nu H}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{H}, \end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{N}$ étant la vitesse de propagation de l'onde dans l'espace des a, b, c.

Supposons, tout d'abord,

$$(45)\qquad \mathfrak{N} = 0.$$

Dans ce cas, l'onde est immobile dans l'espace des a, b, c; dans l'espace des x, y, z, elle sépare sans cesse les deux mêmes portions du milieu.

Les égalités (44) nous montrent que les seules dérivées d'ordre ν de F, G, H qui ne s'annulent pas sur la surface Σ sont celles qui n'impliquent aucune dérivation par rapport à t. Observons que

$$(46)\qquad u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

et nous parviendrons à la proposition suivante :

Si une onde Σ sépare constamment les deux mêmes portions du milieu et si elle est d'ordre ν par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement, elle est au moins d'ordre ν par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

Si, au contraire, l'onde Σ se propage au sein du milieu de telle sorte qu'elle n'en sépare pas toujours les deux mêmes parties, et si cette onde est d'ordre ν par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement, elle est d'ordre $(\nu - 1)$ par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

L'équation de continuité [1re Partie, égalité (22)]

$$\rho\,\mathfrak{D} = \rho_0,$$

jointe à l'expression de $\mathfrak{D}$ [1re Partie, égalité (4 *bis*)], nous montre que toute surface Σ qui est onde d'ordre ν pour ξ, η, ζ est onde d'ordre $(\nu - 1)$ pour ω et pour ρ. D'où la proposition suivante :

Si une onde se propage dans le milieu de telle sorte qu'elle n'en sépare pas sans cesse les deux mêmes parties, cette onde est du même ordre pour la densité ρ et pour les composantes u, v, w de la vitesse ; si, au contraire, elle sépare sans cesse les deux mêmes parties du milieu, son ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse surpasse au moins d'une unité son ordre pour la densité ρ.

Ces énoncés, entièrement généraux, ne supposent nullement qu'il s'agisse d'un milieu vitreux très peu écarté de son état initial. Il n'en est plus de même de ce qui va suivre.

Selon l'égalité (27), qui peut s'écrire

$$(27\ bis) \qquad \begin{aligned} \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_0 \frac{T}{E} \frac{d\varphi_1(T)}{\partial T} \left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial c} \right) & \\ - k(T) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial c^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

l'ordre de l'onde Σ sera, par rapport à T, supérieur au moins d'une unité à l'ordre de cette onde par rapport à u, v, w, *pourvu que l'on suppose différent de* 0 *le coefficient de conductibilité* $k(T)$.

Commençons par examiner *quelles sont les ondes du second ordre par rapport à u, v, w qui peuvent persister dans un milieu vitreux très peu écarté de l'état initial.*

Posons

$$(47) \qquad u_2 - u_1 = U, \qquad v_2 - v_1 = V, \qquad w_2 - w_1 = W.$$

Il existera, en chaque point de la surface Σ, un vecteur $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$ tel que

$$(48) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial a^p \, \partial b^q \, \partial c^r \, \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{V}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a^p \, \partial b^q \, \partial c^r \, \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{P}, \qquad (p+q+r+s=2). \\ \frac{\partial^2 W}{\partial a^p \, \partial b^q \, \partial c^r \, \partial t^s} &= (-\mathfrak{N})^s l^p m^q n^r \mathfrak{W}, \end{aligned} \right.$$

Moyennant ces égalités (48), et en observant que la surface Σ est au moins onde du troisième ordre pour la température T, les égalités (19) nous donnent

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(\nu_{x2}-\nu_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial c}\\
&\qquad =-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})l-\mu\mathfrak{U},\\
&\frac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(\nu_{y2}-\nu_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial c}\\
&\qquad =-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})m-\mu\mathfrak{V},\\
&\frac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial a}=\frac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(\nu_{z2}-\nu_{z1})}{\partial c}\\
&\qquad =-(\lambda+\mu)(l\mathfrak{U}+m\mathfrak{V}+n\mathfrak{W})n-\mu\mathfrak{W}.
\end{aligned}\right.$$

Les quantités

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\partial v}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\frac{\partial w}{\partial t}$$

varient d'une manière continue en traversant la surface Σ.

Si $\mathcal{M}$ est différent de o, l'onde considérée est du troisième ordre en ξ, η, ζ; si $\mathcal{M}$ est égal à o, elle peut être seulement du second ordre en ξ, η, ζ; dans un cas comme dans l'autre, les quantités

$$X_i+X_e,\quad Y_i+Y_e,\quad Z_i+Z_e$$

varient d'une manière continue au travers de la surface Σ.

Supposons d'abord $\mathcal{M}$ différent de o.

La surface Σ est alors onde du troisième ordre par rapport à ξ, η, ζ; les formules (8) nous montrent qu'elle est onde du second ordre par rapport aux quantités

$$N_x,\quad N_y,\quad N_z,\quad T_x,\quad T_y,\quad T_z.$$

Dès lors, les égalités (20) nous enseignent que l'on a, en tout point de la surface Σ,

$$(20\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\nu_{x2}-\nu_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial c}=0,\\ &\frac{\partial(\tau_{z2}-\tau_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(\nu_{y2}-\nu_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial c}=0,\\ &\frac{\partial(\tau_{y2}-\tau_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(\tau_{x2}-\tau_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(\nu_{z2}-\nu_{z1})}{\partial c}=0\end{aligned}\right.$$

ou bien, en vertu des égalités (49),

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda+\mu)(l\mho+m\Psi+n\mathfrak{W})l+\mu\mho=0,\\ &(\lambda+\mu)(l\mho+m\Psi+n\mathfrak{W})m+\mu\Psi=0,\\ &(\lambda+\mu)(l\mho+m\Psi+n\mathfrak{W})n+\mu\mathfrak{W}=0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement ces égalités par l, m, n et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(\lambda+2\mu)(l\mho+m\Psi+n\mathfrak{W})=0$$

ou bien, en vertu de la dernière inégalité (35),

$$l\mho+m\Psi+n\mathfrak{W}=0.$$

Ce résultat, reporté dans les égalités (50), donne

$$\mu\mho=0,\qquad \mu\Psi=0,\qquad \mu\mathfrak{W}=0$$

ou bien, en vertu de la seconde inégalité (35),

$$\mho=0,\qquad \Psi=0,\qquad \mathfrak{W}=0.$$

Ainsi, *un milieu vitreux très peu écarté de l'état initial et affecté de viscosité ne peut présenter aucune onde, du second ordre par rapport aux vitesses, qui ne séparerait pas constamment les deux mêmes masses matérielles.*

On remarquera que la démonstration de cette proposition suppose l'emploi des inégalités (35); *cette proposition pourrait donc être en défaut si le milieu était dénué de viscosité.*

Supposons maintenant

$$\mathfrak{T} = 0. \tag{45}$$

La surface Σ pourra alors être onde du second ordre par rapport à ξ, η, ζ.

Gardons les notations (43). En chaque point de la surface Σ, il existera un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ tel que

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial a^p\, \partial b^q\, \partial c^r} &= l^p m^q n^r \mathcal{F} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial a^p\, \partial b^q\, \partial c^r} &= l^p m^q n^r \mathcal{G} \qquad (p+q+r=2). \\ \frac{\partial^2 H}{\partial a^p\, \partial b^q\, \partial c^r} &= l^p m^q n^r \mathcal{H} \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Moyennant ces égalités, les égalités (8) donnent, en tout point de la surface Σ,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(N_{x2}-N_{x1})}{\partial a} + \frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial b} + \frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial c} \\ &\qquad = -(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,l - M\mathcal{F}, \\ &\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial a} + \frac{\partial(N_{y2}-N_{y1})}{\partial b} + \frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial c} \\ &\qquad = -(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,m - M\mathcal{G}, \\ &\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial a} + \frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial b} + \frac{\partial(N_{z2}-N_{z1})}{\partial c} \\ &\qquad = -(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,n - M\mathcal{H}. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

D'autre part, les égalités (20) nous enseignent que l'on a, en tout point de la surface Σ,

$$\frac{\partial(N_{x2}+\nu_{x2}-N_{x1}-\nu_{x1})}{\partial a} + \frac{\partial(T_{z2}+\tau_{z2}-T_{z1}-\tau_{z1})}{\partial b} + \frac{\partial(T_{y2}+\tau_{y2}-T_{y1}-\tau_{y1})}{\partial c} = 0,$$

$$\frac{\partial(T_{z2}+\tau_{z2}-T_{z1}-\tau_{z1})}{\partial a} + \frac{\partial(N_{y2}+\nu_{y2}-N_{y1}-\nu_{y1})}{\partial b} + \frac{\partial(T_{x2}+\tau_{x2}-T_{x1}-\tau_{x1})}{\partial c} = 0,$$

$$\frac{\partial(T_{y2}+\tau_{y2}-T_{y1}-\tau_{y1})}{\partial a} + \frac{\partial(T_{x2}+\tau_{x2}-T_{x1}-\tau_{x1})}{\partial b} + \frac{\partial(N_{m2}+\nu_{z2}-N_{z1}-\nu_{z1})}{\partial c} = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (49) et (52),

$$(53)\quad \begin{cases} (\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,l\ +\mathrm{M}\mathcal{F}\ +(\lambda+\mu)(l\mho+m\Psi+n\Phi)\,l\ +\mu\mho=0,\\ (\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,m+\mathrm{M}\mathcal{G}\ +(\lambda+\mu)(l\mho+m\Psi+n\Phi)\,m+\mu\Psi=0,\\ (\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,n\ +\mathrm{M}\mathcal{H}+(\lambda+\mu)(l\mho+m\Psi+n\Phi)\,n\ +\mu\Phi=0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ lorsque l'on se donne $\mho$, Ψ, Φ ou inversement.

On les résout élégamment de la manière suivante :

Multiplions-les respectivement par l, m, n et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$(54)\qquad (\Lambda+2\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})+(\lambda+2\mu)(l\mho+m\Psi+n\Phi)=0$$

qui, reportée dans les égalités (146), donne

$$(55)\quad \begin{cases} \mathcal{F}=\left(\dfrac{\Lambda+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\,\dfrac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2\mathrm{M}}-\dfrac{\lambda+\mu}{\mathrm{M}}\,l\ \right)(l\mho+m\Psi+n\Phi)-\dfrac{\mu}{\mathrm{M}}\mho,\\ \mathcal{G}=\left(\dfrac{\Lambda+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\,\dfrac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2\mathrm{M}}-\dfrac{\lambda+\mu}{\mathrm{M}}\,m\right)(l\mho+m\Psi+n\Phi)-\dfrac{\mu}{\mathrm{M}}\Psi,\\ \mathcal{H}=\left(\dfrac{\Lambda+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\,\dfrac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2\mathrm{M}}-\dfrac{\lambda+\mu}{\mathrm{M}}\,n\ \right)(l\mho+m\Psi+n\Phi)-\dfrac{\mu}{\mathrm{M}}\Phi. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons vu au commencement de ce paragraphe, la surface Σ, onde du second ordre pour ξ, η, ζ, sera onde du premier ordre pour la densité ρ. Si nous posons

$$(56)\qquad \rho_2-\rho_1=\mathrm{R},$$

nous aurons, en tout point de l'onde Σ,

$$(57)\qquad \frac{\partial\mathrm{R}}{\partial a}=l\mathfrak{R},\qquad \frac{\partial\mathrm{R}}{\partial b}=m\mathfrak{R},\qquad \frac{\partial\mathrm{R}}{\partial c}=n\mathfrak{R}.$$

L'égalité (22), jointe aux égalités (43), (51), (56) et (57), donne

$$(58)\qquad \mathfrak{R}=-\rho_0(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})$$

ou bien, en vertu de l'égalité (54),

$$(59)\qquad \mathfrak{R}=\rho_0\,\frac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2\mathrm{M}}(l\mho+m\Psi+n\Phi).$$

La surface Σ est onde du troisième ordre par rapport à T; si l'on différentie successivement l'égalité (27 *bis*) par rapport à a, b, c, on en tire, en tout point de la surface Σ, les égalités

$$(60)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho_0 \dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}} \dfrac{d\varphi(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} \dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial a} + \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial b} + \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial c}\right) \\ \quad - k(\mathrm{T}) \dfrac{\partial}{\partial a}\left[\dfrac{\partial^2(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{\partial a^2} + \dfrac{\partial^2(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{\partial b^2} + \dfrac{\partial^2(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{\partial c^2}\right] = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il existera d'ailleurs, en chaque point de la surface Σ, une grandeur ϖ telle que

$$(61)\qquad \frac{\partial^3(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)}{\partial a^p\, \partial b^q\, \partial c^r} = l^p m^q n^r \varpi \qquad (p + q + r = 3).$$

Moyennant ces égalités et les égalités (48), les égalités (60) donneront sans peine

$$(62)\qquad \varpi = -\frac{\rho_0}{k(\mathrm{T})} \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}} \frac{d\varphi_1(\mathrm{T}(}{d\mathrm{T}} (l\Upsilon + m\Phi + n\Psi).$$

Ainsi, *au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, bon conducteur et peu écarté de l'état initial, il peut se produire des ondes du second ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse. Ces ondes séparent constamment les mêmes parties du milieu. Elles sont du premier ordre pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z *et pour la densité* ρ; *elles sont, au contraire, du troisième ordre pour la température* T.

Par des méthodes semblables à celles qui ont été employées en la deuxième Partie de nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*, ce théorème peut se généraliser et devenir le suivant :

Au sein d'un tel milieu, on peut observer des ondes d'ordre ν $(\nu \geqq 2)$ *par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse. Ces ondes séparent constamment les mêmes parties du milieu. Elles sont d'ordre* $(\nu - 1)$ *pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z *et pour la densité* ρ; *elles sont, au contraire, d'ordre* $(\nu + 1)$ *pour la température* T.

II. — Des ondes du premier ordre en u, v, w, dans un milieu vitreux, très peu écarté de l'état initial, animé de mouvements très petits et bon conducteur de la chaleur.

La méthode que nous venons d'employer ne s'applique pas aux ondes qui seraient du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Dans ce cas, en effet, la condition qui permet, en la première Partie de ces *Recherches*, de passer de l'égalité (78) à l'égalité (79), n'est plus vérifiée aux divers points de l'onde; on ne peut donc plus écrire, en général, les équations (82) de la première Partie, ni, partant, les équations (20) de la seconde Partie.

Soient S la surface d'onde à l'instant t, dans l'espace de x, y, z, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale menée de la région 1 vers la région 2. Par un raisonnement semblable à celui que nous avons développé en nos *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, 2e Partie, Chapitre III, § I, nous montrerons que *l'on doit avoir, en tout point de la surface* S *et à tout instant*,

$$
(63)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(N_{x2}-N_{x1})\alpha+(T_{z2}-T_{z1})\beta+(T_{y2}-T_{y1})\gamma\\
&+(\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma=0,\\
&(T_{z2}-T_{z1})\alpha+(N_{y2}-N_{y1})\beta+(T_{x2}-T_{x1})\gamma\\
&+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\gamma=0,\\
&(T_{y2}-T_{y1})\alpha+(T_{x2}-T_{x1})\beta+(N_{z2}-N_{z1})\gamma\\
&+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette condition est générale. Au sein d'un milieu très peu écarté de l'état initial, elle peut être remplacée par la suivante :

On a, en tout point de la surface Σ *et à tout instant*,

$$
(64)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(N_{x2}-N_{x1})l+(T_{z2}-T_{z1})m+(T_{y2}-T_{y1})n\\
&+(\nu_{x2}-\nu_{x1})l+(\tau_{z2}-\tau_{z1})m+(\tau_{y2}-\tau_{y1})n=0,\\
&(T_{z2}-V_{z1})l+(N_{y2}-N_{y1})m+(T_{x2}-T_{x1})n\\
&+(\tau_{z2}-\tau_{z1})l+(\nu_{y2}-\nu_{y1})m+(\tau_{x2}-\tau_{x1})n=0,\\
&(T_{y2}-T_{y1})l+(T_{x2}-T_{x1})m+(N_{z2}-N_{z1})n\\
&+(\tau_{y2}-\tau_{y1})l+(\tau_{x2}-\tau_{x1})m+(\nu_{z2}-\nu_{z1})n=0.
\end{aligned}
\right.
$$

L'onde est du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; dès lors, si l'on conserve les notations (47), il existera, en chaque point de la surface Σ, un vecteur $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ tel que

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a} &= l\,\mathfrak{U}, & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial b} &= m\,\mathfrak{U}, & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial c} &= n\,\mathfrak{U},\\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a} &= l\,\mathfrak{V}, & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b} &= m\,\mathfrak{V}, & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial c} &= n\,\mathfrak{W},\\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial a} &= l\,\mathfrak{W}, & \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial b} &= m\,\mathfrak{W}, & \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial c} &= n\,\mathfrak{W}. \end{aligned}\right.$$

L'onde est, d'ailleurs, du second ordre par rapport à la température T; les égalités (19) et (65) donnent donc

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\nu_{x2}-\nu_{x1})\,l+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\,m+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\,n\\ &\qquad =-(\lambda+\mu)(l\,\mathfrak{U}+m\,\mathfrak{V}+n\,\mathfrak{W})\,l-\mu\,\mathfrak{U},\\ &(\tau_{z2}-\tau_{z1})\,l+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\,m+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\,n\\ &\qquad =-(\lambda+\mu)(l\,\mathfrak{U}+m\,\mathfrak{V}+n\,\mathfrak{W})\,m-\mu\,\mathfrak{V},\\ &(\tau_{y2}-\tau_{y1})\,l+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\,m+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\,n\\ &\qquad =-(\lambda+\mu)(l\,\mathfrak{U}+m\,\mathfrak{V}+n\,\mathfrak{W})\,n-\mu\,\mathfrak{W}. \end{aligned}\right.$$

Supposons, tout d'abord, que $\mathfrak{M}$ soit différent de o; l'onde du premier ordre par rapport à u, v, w sera du second ordre par rapport à ξ, η, ζ; selon les égalités (8), elle sera du premier ordre par rapport à N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z; les égalités (64) deviendront

$$(64\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\nu_{x2}-\nu_{x1})\,l+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\,m+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\,n=0,\\ &(\tau_{z2}-\tau_{z1})\,l+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\,m+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\,n=0,\\ &(\tau_{y2}-\tau_{y1})\,l+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\,m+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\,n=0 \end{aligned}\right.$$

ou, selon les égalités (66),

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\lambda+\mu)(l\,\mathfrak{U}+m\,\mathfrak{V}+n\,\mathfrak{W})\,l+\mu\,\mathfrak{U}=0,\\ &(\lambda+\mu)(l\,\mathfrak{U}+m\,\mathfrak{V}+n\,\mathfrak{W})\,m+\mu\,\mathfrak{V}=0,\\ &(\lambda+\mu)(l\,\mathfrak{U}+m\,\mathfrak{V}+n\,\mathfrak{W})\,n+\mu\,\mathfrak{W}=0. \end{aligned}\right.$$

Nous avons vu que ces équations n'admettaient d'autre solution que

$$\mathfrak{U}=0,\qquad \mathfrak{V}=0,\qquad \mathfrak{W}=0.$$

Donc, *au sein d'un milieu vitreux, doué de viscosité, très peu écarté de l'état initial, on ne peut observer aucune onde du premier ordre par rapport à la vitesse, qui se propage de manière à ne pas séparer constamment les mêmes portions du milieu.*

Supposons maintenant

$$\mathfrak{N} = 0.$$

L'onde du premier ordre par rapport à u, v, w serait aussi du premier ordre par rapport à ξ, η, ζ; dès lors, en gardant les notations (43), il existerait, en tout point de la surface Σ, un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ tel que

$$(67)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial F}{\partial a} = l\mathcal{F}, & \dfrac{\partial F}{\partial b} = m\mathcal{F}, & \dfrac{\partial F}{\partial c} = n\mathcal{F}, \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial a} = l\mathcal{G}, & \dfrac{\partial G}{\partial b} = m\mathcal{G}, & \dfrac{\partial G}{\partial c} = n\mathcal{G}, \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial a} = l\mathcal{H}, & \dfrac{\partial H}{\partial b} = m\mathcal{H}, & \dfrac{\partial H}{\partial c} = n\mathcal{H}. \end{array}\right.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (8), donnent

$$(68)\quad \left\{\begin{array}{l} (N_{x2} - N_{x1})\,l + (T_{z2} - T_{z1})\,m + (T_{y2} - T_{y1})\,n \\ \quad = -(\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\,l - M\mathcal{F}, \\[1ex] (T_{z2} - T_{z1})\,l + (N_{y2} - N_{y1})\,m + (T_{x2} - T_{x1})\,n \\ \quad = -(\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\,m - M\mathcal{G}, \\[1ex] (T_{y2} - T_{y1})\,l + (T_{x2} - T_{x1})\,m + (N_{z2} - N_{z1})\,n \\ \quad = -(\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\,n - M\mathcal{H}. \end{array}\right.$$

En vertu des égalités (66) et (68), les égalités (64) deviennent

$$(53)\quad \left\{\begin{array}{l} (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathfrak{N})\,l + M\mathcal{F} \\ \quad + (\lambda + \mu)(l\mathfrak{V} + m\mathfrak{P} + n\mathfrak{W})\,l + \mu\,\mathfrak{V} = 0, \\[1ex] (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathfrak{N})\,m + M\mathcal{G} \\ \quad + (\lambda + \mu)(l\mathfrak{V} + m\mathfrak{P} + n\mathfrak{W})\,m + \mu\,\mathfrak{P} = 0, \\[1ex] (\Lambda + M)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})\,n + M\mathfrak{N} \\ \quad + (\lambda + \mu)(l\mathfrak{V} + m\mathfrak{P} + n\mathfrak{W})\,n + \mu\,\mathfrak{W} = 0. \end{array}\right.$$

Comme nous l'avons vu, ces égalités entraînent les égalités (54) et (55).

L'égalité (22) nous donne, en chaque point de la surface Σ,

$$\rho_2 - \rho_1 = -\rho_0\left(\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial G}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial c}\right)$$

ou bien, en vertu des égalités (67),

$$\rho_2 - \rho_1 = -\rho_0(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})$$

ou enfin, en vertu de l'égalité (54),

$$\rho_1 - \rho_1 = \rho_0 \frac{\lambda + 2\mu}{\Lambda + 2M}(l\mathcal{U} + m\mathcal{V} + n\mathcal{W}). \tag{69}$$

La surface Σ est onde du second ordre pour la température T; il existe donc une grandeur ϖ telle que, sur la surface Σ,

$$\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial a^p \partial b^q \partial c^r} = l^p b^q n^r \varpi \qquad (p + q + r = 2). \tag{70}$$

Moyennant les égalités (65) et (70), l'égalité (27 *bis*) donne

$$\varpi = -\frac{\rho_0}{k(T)} \frac{T}{E} \frac{d\varphi_1(T)}{dT}(l\mathcal{U} + m\mathcal{V} + n\mathcal{W}). \tag{62}$$

Donc, *au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, bon conducteur de la chaleur et écarté de l'état initial, on peut observer une onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Une telle onde sépare toujours les mêmes portions du milieu. Elle est surface de discontinuité pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z *et pour la densité* ρ; *au contraire, elle est onde du second ordre pour la température* T.

III. — Des ondes dans un milieu vitreux, dénué de viscosité, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits.

Tout ce qui précède suppose essentiellement, comme nous l'avons indiqué, que le milieu est doué de viscosité; notre analyse devient illégitime si les coefficients λ et μ sont égaux à o.

La propagation des ondes dans un milieu vitreux, peu écarté de l'état initial et doué de viscosité obéit à des lois bien connues depuis Poisson et Cauchy; les méthodes suivies pour établir ces lois supposent, en général, que la température est uniforme et que les actions exercées sur les divers éléments du milieu sont nulles; il importe de se débarrasser de ces restrictions; c'est ce que nous allons faire par l'analyse suivante :

Supposons que la surface Σ soit une onde du second ordre pour les fonctions ξ, η, ζ, partant, selon les égalités (8), du premier ordre pour les grandeurs N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z. Les quantités v_x, v_y, v_z, τ_x, τ_y, τ_z étant nulles, les égalités (20) donneront, en tout point de l'onde,

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(N_{x2}-N_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial c}+\rho_0\frac{\partial^2(\xi_2-\xi_1)}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(N_{y2}-N_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial c}+\rho_0\frac{\partial^2(\eta_2-\eta_1)}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(N_{z2}-N_{z1})}{\partial c}+\rho_0\frac{\partial^2(\zeta_2-\zeta_1)}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}\right.$$

Conservons les notations (43). Il existera, en chaque point de la surface Σ, un vecteur $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ tel que

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial a^p\,\partial b^q\,\partial c^r\,\partial t^s}=(-\mathfrak{T})^s\, l^p m^q n^r \mathcal{F},\\
&\frac{\partial^2 G}{\partial a^p\,\partial b^q\,\partial c^r\,\partial t^s}=(-\mathfrak{T})^s\, l^p m^q n^r \mathcal{G} \qquad (p+q+r+s=2),\\
&\frac{\partial^2 H}{\partial a^p\,\partial b^q\,\partial c^r\,\partial t^s}=(-\mathfrak{T})^s\, l^p m^q n^r \mathcal{H}.
\end{aligned}\right.$$

Selon l'égalité (27), l'onde est au moins du second ordre par rapport à la température T; dès lors, les égalités (8) et (72) nous donnent les égalités (52); en vertu des égalités (52) et (72), les égalités (71) deviennent

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned}
&(A+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,l+(M-\rho_0\mathfrak{T}^2)\mathcal{F}=0,\\
&(A+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,m+(M-\rho_0\mathfrak{T}^2)\mathcal{G}=0,\\
&(A+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,n+(M-\rho_0\mathfrak{T}^2)\mathcal{H}=0.
\end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement ces égalités par l, m, n et ajoutons-les membre à membre. Nous trouvons

$$(74) \qquad (\Lambda + 2\mathrm{M} - \rho_0 \mathcal{V}^2)(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}) = 0.$$

Si nous n'avons pas

$$(75) \qquad l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{V} = 0,$$

nous devons avoir

$$(76) \qquad \mathcal{V} = \sqrt{\frac{\Lambda + 2\mathrm{M}}{\rho_0}}$$

et les égalités (73) donnent alors les relations

$$(77) \qquad \frac{\mathcal{F}}{l} = \frac{\mathcal{G}}{m} = \frac{\mathcal{H}}{n}$$

qui expriment que l'onde propage une perturbation longitudinale.

Les égalités (56) et (57) peuvent être conservées ici; elles donnent encore l'égalité

$$\mathcal{R} = -\rho_0(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}).$$

D'ailleurs, l'onde étant au moins du second ordre par rapport à la température, on peut écrire l'égalité (70) qui, jointe aux égalités (72), (76) et (27), donne

$$(78) \qquad \mathcal{T} = \frac{\rho_0}{k(\mathrm{T})} \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}} \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}} \sqrt{\frac{\Lambda + 2\mathrm{M}}{\rho_0}} (l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}).$$

Si nous avons

$$(75) \qquad l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H} = 0,$$

l'onde propage une perturbation transversale.

Les égalités (58) et (27), qui peuvent être conservées ici, donnent

$$(79) \qquad \mathcal{R} = 0, \qquad \mathcal{T} = 0,$$

et nous enseignent que l'onde est d'ordre supérieur au premier pour la densité ρ et au second pour la température T.

Enfin, les égalités (73) nous font connaître la valeur de la vitesse de propagation

$$(80)\qquad \mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\rho_0}}.$$

En résumé, *un milieu vitreux, bon conducteur, peu écarté de l'état initial et dénué de viscosité peut propager deux sortes d'ondes qui soient du second ordre par rapport aux composantes* ξ, η, ζ *du déplacement et du premier ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse.*

Les premières, qui sont du premier ordre par rapport à la densité et du second ordre par rapport à la température, propagent une perturbation longitudinale avec la vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\Lambda + 2\mathrm{M}}{\rho_0}}.$$

Les secondes, qui sont d'ordre supérieur au premier pour la densité et au second pour la température, propagent une perturbation transversale avec la vitesse

$$\mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\rho_0}}.$$

Nous avons supposé que l'onde considérée était du second ordre en ξ, η, ζ; elle est alors au moins du premier ordre en u, v, w; mais il pourrait se faire qu'elle fût du premier ordre en u, v, w tout en étant aussi du premier ordre en ξ, η, ζ; pour cela, il suffirait que l'on eût

$$(45)\qquad \mathfrak{N} = 0.$$

L'onde serait alors surface de discontinuité pour ρ et pour les six quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z. Une raison semblable à celle qui a fourni les égalités (64) exigerait que l'on eût, en tout point de l'onde,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{N}_{x2} - \mathrm{N}_{x1})\,l + (\mathrm{T}_{z2} - \mathrm{T}_{z1})\,m + (\mathrm{T}_{y2} - \mathrm{T}_{y1})\,n &= 0,\\
(\mathrm{T}_{z2} - \mathrm{T}_{z1})\,l + (\mathrm{N}_{y2} - \mathrm{N}_{y1})\,m + (\mathrm{T}_{x2} - \mathrm{T}_{x1})\,n &= 0,\\
(\mathrm{T}_{y2} - \mathrm{T}_{y1})\,l + (\mathrm{T}_{x2} - \mathrm{T}_{x1})\,m + (\mathrm{N}_{z2} - \mathrm{N}_{z1})\,n &= 0.
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (68), dont on peut reprendre ici les notations, ces égalités peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})l\ +\mathrm{M}\mathcal{F} &= 0,\\
(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})m+\mathrm{M}\mathcal{G} &= 0,\\
(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})n\ +\mathrm{M}\mathcal{H} &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplions respectivement ces égalités par l, m, n et ajoutons-les membre à membre, en tenant compte de la dernière inégalité (34); nous trouvons

$$l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H}=0.$$

Si l'on reporte ce résultat dans les égalités précédentes, en tenant compte de la seconde inégalité (34), on trouve

$$\mathcal{F}=0, \qquad \mathcal{G}=0, \qquad \mathcal{H}=0.$$

L'onde considérée ne saurait donc exister.

IV. — Des ondes dans un milieu vitreux, très peu écarté de l'état initial, animé de mouvements très petits et mauvais conducteur de la chaleur.

Tout ce qui précède suppose l'emploi de l'équation (27 *bis*) où l'on admet que $k(\mathrm{T})$ a une valeur positive. Si l'on suppose

(81) $$k(\mathrm{T})=0,$$

cas auquel *le milieu est mauvais conducteur de la chaleur*, l'équation (27 *bis*) se réduit à

(82) $$c\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}-\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)=0,$$

et l'analyse précédente tombe en défaut. Nous allons examiner les modifications qu'il convient d'y apporter en vertu de l'égalité (81).

Considérons d'abord le cas d'une surface Σ, onde du *premier ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; les égalités (47) et (65), que l'on peut conserver dans ce cas, montrent que l'on a, en tout point de la surface Σ,

(83) $$\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial a}+\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial b}+\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial c}=l\mathfrak{V}+m\mathfrak{P}+n\mathfrak{W}.$$

La surface Σ peut-elle être, pour la température T, onde du premier ordre ou d'ordre supérieur au premier? Dans ce cas, il doit exister, en tout point de la surface Σ, une grandeur ϖ, finie si l'onde est du premier ordre, nulle si elle est d'ordre supérieur au premier, telle que l'on ait

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(T_2-T_1)}{\partial a}=l\varpi,\qquad \frac{\partial(T_2-T_1)}{\partial b}=m\varpi,\qquad \frac{\partial(T_2-T_1)}{\partial c}=n\varpi,\\ &\qquad\qquad \frac{\partial(T_2-T_1)}{\partial t}=-\mathfrak{N}\varpi.\end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (47), (83) et (84), l'égalité (82) donne, en tout point de la surface Σ,

$$(85)\qquad \mathfrak{N}\varpi=-\frac{T}{Ec}\frac{d\varphi_1(T)}{dT}(l\mho+m\Phi+n\Psi).$$

Cette égalité donne pour ϖ une valeur acceptable si $\mathfrak{N}$ est différent de o; elle est encore vérifiée si $\mathfrak{N}$ et $(l\mho+m\Phi+n\Psi)$ s'annulent en même temps; mais elle devient absurde si l'on a $\mathfrak{N}=0$ sans que $(l\mho+m\Phi+n\Psi)$ s'annule en même temps.

Donc, *on peut admettre, en général, qu'une onde du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse est aussi onde au moins du premier ordre par rapport à la température* T; *mais, dans le cas particulier où l'on aurait*

$$(45)\qquad \mathfrak{N}=0$$

sans avoir en même temps

$$(86)\qquad l\mho+m\Phi+n\Psi=0,$$

la surface considérée serait surface de discontinuité pour la température.

Supposons maintenant que la surface Σ soit onde du *second ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, et demandons-nous si elle peut être onde du premier ordre par rapport à la température T.

L'onde étant du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}$$

varie d'une manière continue lorsqu'on la traverse. Dès lors, les égalités (82) et (84) donnent, en tout point de l'onde Σ,

$$\mathfrak{M}\varpi = 0.$$

Si $\mathfrak{M}$ est différent de 0, ϖ est nul et l'onde est, par rapport à la température, d'ordre supérieur au premier.

Donc, *une onde du second ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse est, en général, au moins du second ordre par rapport à la température* T; *toutefois, si l'on a*

$$\mathfrak{M} = 0, \tag{45}$$

l'onde peut n'être que du premier ordre par rapport à la température.

Ces lemmes démontrés, proposons-nous de répondre à la question suivante :

Un milieu vitreux, doué de viscosité, très peu écarté de l'état initial, animé de mouvements très petits et mauvais conducteur de la chaleur peut-il présenter une onde persistante pour laquelle $\mathfrak{M}$ *diffère de* 0?

Examinons d'abord le cas où l'onde serait du *premier ordre* par rapport à u, v, w; elle serait au moins du premier ordre par rapport à T; dès lors, les quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z varieraient d'une manière continue au passage de cette onde, ce qui permettrait de conserver les équations (64 *bis*); les égalités (63) demeureraient exactes et transformeraient les relations (64 *bis*) aux relations (50) qui entraînent la non-existence de l'onde considérée.

Examinons maintenant le cas où l'onde serait du *second ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Elle serait au moins du second ordre par rapport à la température T. Elle resterait donc onde du second ordre par rapport à

$$N_x, \quad N_y, \quad N_z, \quad T_x, \quad T_y, \quad T_z,$$

ce qui permettrait d'écrire encore, en tout point de la surface Σ, les relations (20 *bis*); les égalités (49) y resteraient également vraies, en sorte qu'on retrouverait les relations (50) entraînant l'impossibilité de l'onde étudiée.

Le résultat, démontré pour les ondes du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, s'étendrait sans peine aux ondes d'ordre plus élevé, ce qui nous permettrait d'énoncer la proposition suivante :

Il est impossible qu'une onde d'ordre $\nu\,(\nu \geqq 1)$ *par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse persiste au sein d'un milieu vitreux, doué de viscosité, mauvais conducteur de la chaleur, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits, si cette onde ne sépare pas constamment les deux mêmes parties du milieu.*

Examinons maintenant s'il peut, en un semblable milieu, se produire des ondes, du *premier ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, pour lesquelles on ait

$$\mathfrak{N} = 0. \tag{45}$$

En tout point d'une telle onde, on continuera d'écrire les équations (64).

L'onde peut être surface de discontinuité pour la température T, en sorte que $(T_2 - T_1)$ ne s'annule pas sur la surface Σ; mais on suppose que le milieu est, à chaque instant, très peu écarté de l'état initial; T_1, T_2 diffèrent donc très peu de la température initiale et $(T_2 - T_1)$ est une quantité très petite du même ordre que les écarts ξ, η, ζ.

Les égalités (67) et (8) ne donnent plus alors les égalités (68); mais, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, on est simplement conduit à ajouter aux seconds membres des égalités (68) les termes

$$-\rho_0 \frac{d\varphi_1(T)}{dT}(T_2 - T_1)l, \quad -\rho_0 \frac{d\varphi_1(T)}{dT}(T_2 - T_1)m, \quad -\rho_0 \frac{d\varphi_1(T)}{dT}(T_2 - T_1)n,$$

T ayant une valeur comprise entre T_1 et T_2.

Si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, les égalités (66) demeurent inaltérées. On a donc, en tout point de la surface Σ, au lieu des égalités (53), les égalités

$$
(87)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\Lambda + \mathrm{M})(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})n + \mathrm{M}\mathcal{F} + \rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_2)l \\
&+ (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\,l + \mu\mathfrak{U} &&= 0,\\
&(\Lambda + \mathrm{M})(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})m + \mathrm{M}\mathcal{G} + \rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)m \\
&+ (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})m + \mu\mathfrak{V} &&= 0,\\
&(\Lambda + \mathrm{M})(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H})n + \mathrm{M}\mathcal{H} + \rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)n \\
&+ (\lambda + \mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})n + \mu\mathfrak{W} &&= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

auxquelles les égalités (22) et (67) joignent l'égalité

$$
(88)\qquad \rho_2 - \rho_1 = -\rho_0(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}).
$$

Multiplions les égalités (87) par l, m, n et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$
\begin{aligned}
(89)\qquad &(\Lambda + 2\mathrm{M})(l\mathcal{F} + m\mathcal{G} + n\mathcal{H}) \\
&\quad + (\lambda + 2\mu)(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}) + \rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) = 0.
\end{aligned}
$$

Cette relation (89) transforme l'égalité (88) en

$$
(90)\qquad \rho_2 - \rho_1 = \rho_0 \frac{\lambda + 2\mu}{\Lambda + 2\mathrm{M}}(l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W}) + \frac{\rho_0^2}{\Lambda + 2\mathrm{M}} \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1).
$$

En même temps, elle permet de résoudre les égalités (87) par rapport à $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sous la forme

$$
(91)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \left[\frac{(\Lambda + \mathrm{M})(\lambda + 2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{\lambda + \mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})\,l - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{U} \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda + \mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)\,l,\\
\mathcal{G} &= \left[\frac{(\Lambda + \mathrm{M})(\lambda + 2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{\lambda + \mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})m - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{V} \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda + \mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)\,m,\\
\mathcal{H} &= \left[\frac{(\Lambda + \mathrm{M})(\lambda + 2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{\lambda + \mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{U} + m\mathfrak{V} + n\mathfrak{W})n - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{W} \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda + \mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda + 2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0 \frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)\,n.
\end{aligned}
\right.
$$

Les égalités (90) et (91) font connaître, en chaque point de l'onde, les valeurs de

$$\mathcal{F}, \quad \mathcal{G}, \quad \mathcal{H}, \quad \rho_2 - \rho_1$$

lorsqu'on connaît les valeurs de

$$\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{W}, \quad T_2 - T_1.$$

Ainsi, *au sein d'un milieu vitreux, mauvais conducteur de la chaleur, doué de viscosité, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits, il peut se produire une onde persistante, du premier ordre par rapport aux vitesses. Une telle onde sépare constamment les deux mêmes portions du milieu. Elle est surface de discontinuité pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, *pour la densité* ρ *et pour la température* T.

Peut-il exister une onde, du *second ordre* par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, et pour laquelle on ait

$$\mathfrak{M} = 0\,?$$

En chaque point d'une telle onde, on devra avoir

$$(92)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial(N_{x2}+\nu_{x2}-N_{x1}-\nu_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{z2}+\tau_{z2}-T_{z1}-\tau_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{y2}+\tau_{y2}-T_{y1}-\tau_{y1})}{\partial c}=0,\\ &\frac{\partial(T_{z2}+\tau_{z2}-T_{z1}-\tau_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(N_{y2}+\nu_{y2}-N_{y1}-\nu_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{x2}+\tau_{x2}-T_{x1}-\tau_{x1})}{\partial c}=0,\\ &\frac{\partial(T_{y2}+\tau_{y2}-T_{y1}-\tau_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{x2}+\tau_{x2}-T_{x1}-\tau_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(N_{z2}+\nu_{z2}-N_{z1}-\nu_{z1})}{\partial c}=0. \end{aligned} \right.$$

L'onde considérée peut être du premier ordre par rapport à ϖ, en sorte que, dans les égalités (84), ϖ peut être différent de o; mais c'est une quantité très petite comme ξ, η, ζ; les égalités (52) ne sont donc plus exactes; mais, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, elles doivent être remplacées par les égalités

$$(93)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial(N_{x2}-N_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{z2}+T_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial c}\\ &\quad=-(\Lambda+M)(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,l-M\mathcal{F}-\rho_0\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\varpi\, l, \end{aligned} \right.$$

$$(93)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathrm{T}_{z2}-\mathrm{T}_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(\mathrm{N}_{y2}-\mathrm{N}_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(\mathrm{T}_{x2}-\mathrm{T}_{x1})}{\partial c}\\
&\qquad =-(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,m-\mathrm{M}\mathcal{G}-\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\varpi m,\\
&\frac{\partial(\mathrm{T}_{y2}-\mathrm{T}_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(\mathrm{T}_{x2}-\mathrm{T}_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(\mathrm{N}_{z2}-\mathrm{N}_{z1})}{\partial c}\\
&\qquad =-(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,n-\mathrm{M}\mathcal{H}-\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\varpi n.
\end{aligned}\right.$$

Quant aux égalités (49), elles demeurent valables.

Dès lors, les égalités (49), (92) et (93) donnent les relations

$$(94)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,l+\mathrm{M}\mathcal{F}+\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\varpi l\\
&\quad+(\lambda+\mu)(l\mathfrak{V}+m\mathfrak{Q}+n\mathfrak{W})\,l+\mu\mathfrak{V}=0,\\
&(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,m+\mathrm{M}\mathcal{G}+\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\varpi m\\
&\quad+(\lambda+\mathrm{M})(l\mathfrak{Q}+m\mathfrak{Q}+n\mathfrak{W})\,m+\mu\mathfrak{Q}=0,\\
&(\Lambda+\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\,n+\mathrm{M}\mathcal{H}+\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\varpi n\\
&\quad+(\lambda+\mu)(l\mathfrak{V}+m\mathfrak{Q}+n\mathfrak{W})\,n+\mu\mathfrak{W}=0.
\end{aligned}\right.$$

A ces relations, il faut joindre la relation

$$(58)\qquad \mathfrak{R}=-\rho_0(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H}).$$

Si nous multiplions respectivement les égalités (94) par l, m, n et si nous ajoutons membre à membre les résultats obtenus, nous trouvons l'égalité

$$(95)\qquad \begin{aligned}&(\Lambda+2\mathrm{M})(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})\\
&\quad+\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\varpi+(\lambda+2\mu)(l\mathfrak{V}+m\mathfrak{Q}+n\mathfrak{W})=0.\end{aligned}$$

En vertu de l'égalité (95), la relation (58) devient

$$(96)\qquad \mathfrak{R}=\rho_0\frac{\lambda+2\mu}{\Lambda+2\mathrm{M}}(l\mathfrak{V}+m\mathfrak{Q}+n\mathfrak{W})+\frac{\rho_0^2}{\Lambda+2\mathrm{M}}\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\varpi.$$

En outre, les égalités (94) deviennent

$$
(97)\left\{\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \left[\frac{(\Lambda+\mathrm{M})(\lambda+2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda+2\mathrm{M})} - \frac{\lambda+\mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{V}+m\mathfrak{P}+n\mathfrak{W})\,l - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{V} \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda+\mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda+2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}\,l, \\
\mathcal{G} &= \left[\frac{(\Lambda+\mathrm{M})(\lambda+2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda+2\mathrm{M})} - \frac{\lambda+\mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{V}+m\mathfrak{P}+n\mathfrak{W})\,m - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{P} \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda+\mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda+2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}\,m, \\
\mathcal{H} &= \left[\frac{(\Lambda+\mathrm{M})(\lambda+2\mu)}{\mathrm{M}(\Lambda+2\mathrm{M})} - \frac{\lambda+\mu}{\mathrm{M}}\right](l\mathfrak{V}+m\mathfrak{P}+n\mathfrak{W})\,n - \frac{\mu}{\mathrm{M}}\mathfrak{W} \\
&\quad + \left[\frac{\Lambda+\mathrm{M}}{\mathrm{M}(\Lambda+2\mathrm{M})} - \frac{1}{\mathrm{M}}\right]\rho_0\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}\mathfrak{T}\,n.
\end{aligned}\right.
$$

Les égalités (96) et (97) déterminent, en chaque point de l'onde, les valeurs de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ lorsqu'on connaît les valeurs de $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{T}$.

Ce que nous venons de dire touchant une onde du deuxième ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse s'étend sans peine aux ondes d'ordre plus élevé. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Au sein d'un milieu vitreux, affecté de viscosité, mauvais conducteur de la chaleur, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits, on peut observer des ondes persistantes d'ordre ν ($\nu \geqq 2$) *par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse. Une telle onde sépare sans cesse les deux mêmes portions du milieu. Elle est d'ordre* ($\nu - 1$) *pour les quantités* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, *la densité* ρ *et la température* T.

Il nous reste à étudier la propagation des ondes au sein du milieu supposé mauvais conducteur et dénué de viscosité,

Considérons une onde du second ordre en ξ, η, ζ et, partant, du premier ordre en u, v, w.

Selon l'égalité (85), où nous supposons $\mathfrak{R}$ différent de 0, l'onde sera du premier ordre par rapport à la température; d'ailleurs, en vertu des égalités (72), l'égalité (85) devient

$$
(98)\qquad \mathfrak{T} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}c}\,\frac{d\varphi_1(\mathrm{T})}{d\mathrm{T}}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H}).
$$

Les égalités (93) demeurent exactes, mais elles deviennent, en vertu de l'égalité (98),

$$
(99)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial(N_{x2}-N_{x1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial c}\\
&\quad=-\left\{A+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})l-M\mathcal{F},\\
&\frac{\partial(T_{z2}-T_{z1})}{\partial a}+\frac{\partial(N_{y2}-N_{y1})}{\partial b}+\frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial c}\\
&\quad=-\left\{A+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})m-M\mathcal{G},\\
&\frac{\partial(T_{y2}-T_{y1})}{\partial a}+\frac{\partial(T_{x2}-T_{x1})}{\partial b}+\frac{\partial(N_{z2}-N_{z1})}{\partial c}\\
&\quad=-\left\{A+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})n-M\mathcal{H}.
\end{aligned}\right.
$$

En vertu de ces égalités et des égalités (72), les égalités (71) deviennent

$$
(100)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left\{A+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})l+(M-\rho_0\mathfrak{N}^2)\mathcal{F}=0,\\
&\left\{A+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})m+(M-\rho_0\mathfrak{N}^2)\mathcal{G}=0,\\
&\left\{A+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2+M\right\}(l\mathcal{F}+m\mathcal{G}+n\mathcal{H})n+(M-\rho_0\mathfrak{N}^2)\mathcal{H}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Ces égalités (100) ne diffèrent des égalités (73) que par la substitution de $A+\frac{\rho_0 T}{Ec}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2$ à A; donc les conclusions que nous en tirerons différeront seulement par cette substitution de celles que nous avons développées à la fin du paragraphe précédent.

Un milieu vitreux, dénué de viscosité, mauvais conducteur, très peu écarté de l'état initial et animé de mouvements très petits peut propager deux sortes d'ondes qui sont du second ordre par rapport aux composantes ξ, η, ζ du déplacement et du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

Les premières, qui sont du premier ordre pour la densité et la tempéra-

ture, propagent une perturbation longitudinale avec une vitesse

$$(101) \qquad \mathfrak{N} = \sqrt{\frac{\Lambda + \frac{\rho_0 T}{E c}\left[\frac{d\varphi_1(T)}{dT}\right]^2 + 2M}{\rho_0}}.$$

Les secondes, qui sont d'ordre supérieur au premier pour la densité et la température, propagent une perturbation transversale avec la vitesse

$$(80) \qquad \mathfrak{N} = \sqrt{\frac{M}{\rho_0}}.$$