

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. DIDON

Sur certains systèmes de polynômes associés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 6 (1869), p. 111-125

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__111_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINS SYSTÈMES
DE
POLYNÔMES ASSOCIÉS,

PAR M. F. DIDON,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

I.

Soit une série indéfinie de polynômes

$$U_{0,\lambda}, U_{1,\lambda}, U_{2,\lambda}, \dots, U_{\mu,\lambda}, \dots$$

des degrés respectifs $0, 1, 2, \dots, \mu, \dots$; je dirai que les polynômes de la série indéfinie

$$V_{0,\lambda}, V_{1,\lambda}, V_{2,\lambda}, \dots, V_{\nu,\lambda}, \dots$$

sont associés aux premiers, si l'on a, quels que soient les nombres entiers μ et ν , pourvu qu'ils soient inégaux,

$$\int_0^1 U_{\mu,\lambda} V_{\nu,\lambda} dx = 0.$$

J'assujettis, en premier lieu, les degrés des fonctions entières de la seconde série à procéder suivant la suite naturelle des nombres $0, 1, 2, 3, \dots$; et, pour exprimer cette condition, je fais égal à 1 l'indice λ ; je dis qu'alors les polynômes $U_{0,1}, U_{1,1}, U_{2,1}, \dots$ de la première série sont égaux, à des facteurs constants près, aux polynômes correspon-

dants de la seconde série $V_{0,1}, V_{1,1}, V_{2,1}, \dots$. En effet, l'égalité supposée

$$\int_0^1 U_{\mu,1} V_{\nu,1} dx = 0$$

conduit à la suivante

$$\int_0^1 U_{\mu,1} \varphi(x) dx = 0,$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme qui ne surpasse pas le degré $\mu - 1$. Il en résulte que, dans la relation évidente

$$U_{\mu,1} = A_0 V_{0,1} + A_1 V_{1,1} + A_2 V_{2,1} + \dots + A_\mu V_{\mu,1},$$

le coefficient A_k de $V_{k,1}$ est déterminé par l'équation

$$A_k \int_0^1 V_{k,1} U_{\mu,1} dx = \int_0^1 U_{\mu,1} U_{k,1} dx,$$

et par conséquent est nul, si k est inférieur à μ . Donc

$$U_{\mu,1} = A_\mu V_{\mu,1}.$$

On voit de suite que

$$U_{m,1} = V_{m,1} = k \frac{d^m x^m (x-1)^m}{dx^m},$$

où k est une constante, et que ces deux fonctions se changent en la fonction X_m de Legendre, si l'on remplace x par $\frac{1+x}{2}$.

Mais on peut trouver des séries différentes de polynômes associés, les termes de la seconde série n'étant plus des degrés respectifs 0, 1, 2, 3, Je suppose d'abord $\lambda = 2$, et je détermine, à un facteur constant près, chaque fonction $U_{\mu,2}$ de la première série $U_{0,2}, U_{1,2}, \dots$ par les conditions suivantes,

$$\begin{aligned} \int_0^1 U_{\mu,2} dx &= 0, & \int_0^1 U_{\mu,2} x^2 dx &= 0, \\ \int_0^1 U_{\mu,2} x^4 dx &= 0, \dots, & \int_0^1 U_{\mu,2} x^{2\mu-2} dx &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$U_{\mu,2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_\mu x^\mu,$$

on aura le système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{1} + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \dots + \frac{A_\mu}{\mu+1} &= 0, \\ \frac{A_0}{3} + \frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{5} + \dots + \frac{A_\mu}{\mu+3} &= 0, \\ \frac{A_0}{5} + \frac{A_1}{6} + \frac{A_2}{7} + \dots + \frac{A_\mu}{\mu+5} &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{A_0}{2\mu-1} + \frac{A_1}{2\mu} + \frac{A_2}{2\mu+1} + \dots + \frac{A_\mu}{3\mu-1} &= 0. \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, je remarque que l'expression

$$\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \dots + \frac{A_\mu}{x+\mu}$$

s'annule pour $x = 1, 3, 5, \dots, 2\mu - 1$. Donc on a, à un facteur constant près,

$$\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \dots + \frac{A_\mu}{x+\mu} = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)\dots(x-2\mu+1)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+\mu)}.$$

Pour obtenir A_i , je multiplie l'identité précédente par $x + i$, et j'y fais ensuite $x = -i$, il vient alors

$$A_i = (-1)^{\mu-i} \frac{(i+1)(i+3)(i+5)\dots(i+2\mu-1)}{1.2.3\dots i.1.2.3\dots(\mu-i)},$$

et par suite, en multipliant chaque terme par $(-1)^{\mu+2i}$,

$$U_{\mu,2} = \sum_{i=0}^{\mu} (-1)^i \frac{(i+1)(i+3)(i+5)\dots(i+2\mu-1)}{1.2.3\dots i.1.2.3\dots(\mu-i)} x^i.$$

La première série de polynômes étant ainsi déterminée, il est facile

de voir qu'on formera une série de polynômes associés en posant

$$V_{\mu,2} = \frac{d^\mu x^\mu (x^2 - 1)^\mu}{dx^\mu}.$$

Pour le démontrer, je remarque d'abord que le polynôme $V_{\mu,2}$ est du degré 2μ et n'a que des termes de degré pair. Or, la manière dont nous avons déterminé $U_{\mu,2}$ montre que $\int_0^1 U_{\mu,2} \varphi(x^2) dx = 0$, si $\varphi(x)$ est un polynôme ne surpassant pas le degré $\mu - 1$; par conséquent

$$\int_0^1 U_{\mu,2} V_{\nu,2} dx = 0,$$

si ν est inférieur à μ . Mais, si ν est supérieur à μ , comme

$$\int_0^1 F(x) \frac{d^\nu x^\nu (x^2 - 1)^\nu}{dx^\nu} dx = (-1)^\nu \int_0^1 x^\nu (x^2 - 1)^\nu \frac{d^\nu F(x)}{dx^\nu} dx,$$

on voit que l'intégrale précédente est encore nulle, car la dérivée d'ordre ν de la fonction $U_{\mu,2}$ sera égale à 0.

Supposons maintenant $\lambda = 3$, et déterminons chaque fonction $U_{\mu,3}$ de la série $U_{0,3}, U_{1,3}, \dots$ par les conditions

$$\int_0^1 U_{\mu,3} dx = 0, \quad \int_0^1 U_{\mu,3} x^3 dx = 0, \quad \int_0^1 U_{\mu,3} x^6 dx = 0, \dots,$$

$$\int_0^1 U_{\mu,3} x^{3\mu-3} dx = 0.$$

On trouvera en suivant la marche précédente

$$U_{\mu,3} = \sum (-1)^i \frac{(i+1)(i+4)(i+7)\dots(i+3\mu-2)}{1.2.3 \dots i.1.2.3 \dots (\mu-i)} x^i,$$

et l'on voit que l'on formera une série de polynômes associés en prenant

$$V_{\mu,3} = \frac{d^\mu x^\mu (x^3 - 1)^\mu}{dx^\mu}.$$

Et de même pour $\lambda = 4, 5, 6, \dots$

II.

Il est facile de voir que les équations obtenues en égalant à 0 les divers polynômes de degré μ , $U_{\mu,2} U_{\mu,3} \dots$ ont toutes les racines réelles et comprises entre 0 et 1. Pour le démontrer, je me servirai de la belle méthode employée par Legendre dans ses *Exercices de calcul intégral*, à l'égard des fonctions X_n .

Je rappelle l'égalité $\int_0^1 U_{\mu,2} \varphi(x^2) dx = 0$, où $\varphi(x)$ est au plus du degré $\mu - 1$. Comme $\int_0^1 U_{\mu,2} dx = 0$, il faut que $U_{\mu,2}$ change au moins une fois de signe dans l'intervalle de 0 à 1; de là résulte l'existence d'une racine a comprise entre 0 et 1, et l'on a par conséquent

$$U_{\mu,2} = (x - a)P.$$

Mais

$$\int_0^1 U_{\mu,2} (x^2 - a^2) dx = 0, \quad \text{ou bien} \quad \int_0^1 P (x - a)^2 (x + a) dx = 0.$$

Donc, puisque $(x - a)^2$ et $(x + a)$ ne changent pas de signe entre 0 et 1, il faut que P en change au moins une fois, et l'on a $P = (x - b)Q$, b étant compris entre 0 et 1. Mais

$$\int_0^1 U_{\mu,2} (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) dx = 0,$$

ou bien

$$\int_0^1 Q (x - a)^2 (x - b)^2 (x + a)(x + b) dx = 0.$$

Donc Q s'annule au moins une fois entre 0 et 1, etc., et la proposition est démontrée pour la fonction $U_{\mu,2}$. Relativement à la fonction $U_{\mu,3}$, je rap-

pelle que $\int_0^1 U_{\mu,3} \varphi(x^3) dx = 0$, si $\varphi(x)$ ne dépasse pas le degré $\mu - 1$.

De l'égalité $\int_0^1 U_{\mu,3} dx = 0$, on conclut que $U_{\mu,3}$ doit s'annuler au

moins une fois entre 0 et 1, et que par suite l'on a

$$U_{\mu,3} = (x - a)P.$$

Mais

$$\int_0^1 U_{\mu,3}(x^3 - a^3) dx = 0, \quad \text{ou bien} \quad \int_0^1 P(x - a)^2(x^2 + ax + a^2) dx = 0.$$

Donc, puisque les facteurs $(x - a)^2$ et $x^2 + ax + a^2$ sont toujours positifs entre 0 et 1, il faut que P change de signe dans cet intervalle, et l'on a $P = (x - b)Q$, b étant un nombre compris entre 0 et 1. On a encore

$$\int_0^1 U_{\mu,3}(x^3 - a^3)(x^3 - b^3) dx = 0,$$

ou bien

$$\int_0^1 Q(x - a)^2(x - b)^2(x^2 + ax + a^2)(x^2 + bx + b^2) dx = 0.$$

Par conséquent, φ doit encore changer de signe entre 0 et 1, etc.

Quant aux fonctions $V_{\mu,2}, V_{\mu,3}, \dots$, on voit immédiatement, par l'application du théorème de Rolle, qu'elles s'annulent μ fois entre 0 et 1.

III.

Les polynômes $U_{\mu,2}, U_{\mu,3}, U_{\mu,4}, \dots$ peuvent être définis autrement que nous l'avons fait. A l'égard des polynômes $U_{\mu,2}$, on peut remarquer que le système d'équations du premier degré qui nous a servi à en déterminer les coefficients exprime que, dans le développement du produit $U_{\mu,2} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, manquent les termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^5}, \dots, \frac{1}{x^{2\mu-1}}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(1) \quad U_{\mu,2} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = R + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^4} + \frac{C}{x^6} + \dots + \frac{G}{x^{2\mu}} + \frac{H}{x^{2\mu+1}} + \dots,$$

R étant un polynôme entier. Cette relation définit complètement le polynôme $U_{\mu,2}$, à un facteur constant près. Si l'on change x en $-x$, on

obtient, en représentant $U_{\mu,2}$ par $\varphi(x)$,

$$(2) \quad \varphi(-x) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = R' + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^4} + \frac{C}{x^6} + \dots + \frac{G}{x^{2\mu}} - \frac{H}{x^{2\mu+1}} + \dots,$$

R' étant aussi un polynôme; d'où, en retranchant,

$$(3) \quad \varphi(x) \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \varphi(-x) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = P + \frac{2H}{x^{2\mu+1}} + \frac{2I}{x^{2\mu+3}} + \dots,$$

P étant encore un polynôme entier.

L'égalité (1) permet de trouver certaines relations entre les fonctions consécutives $U_{\mu,2}, U_{\mu-1,2}, \dots$. Si on la multiplie par x^2 , il vient,

$$x^2 U_{\mu,2} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \text{polynôme} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^4} + \dots + \frac{G}{x^{2\mu-2}} + \frac{H}{x^{2\mu-1}} + \dots$$

On en conclut

$$x^2 U_{\mu,2} = L U_{\mu+2,2} + M U_{\mu+1,2} + N U_{\mu,2} + S U_{\mu-1,2}.$$

Il ne peut pas y avoir d'autres termes dans le second membre, car ils introduiraient dans la multiplication par $\log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ des puissances $2\mu - 3, 2\mu - 5$ de $\frac{1}{x}$.

De même on trouverait

$$(x^3 - x) \frac{dU_{\mu,2}}{dx} = L' U_{\mu+2,2} + M' U_{\mu+1,2} + N' U_{\mu,2} + S' U_{\mu-1,2},$$

L', M', N', S' étant des constantes bien faciles à déterminer.

Enfin de l'égalité (1), on peut déduire aussi une équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait la fonction $U_{\mu,2}$. Cette équation, qu'on peut du reste trouver au moyen de l'expression que nous avons donnée de $U_{\mu,2}$, est la suivante

$$(4) \quad (x^3 - x) \frac{d^3 y}{dx^3} + (5x^2 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - (\mu - 1)(3\mu + 4)x \frac{dy}{dx} + \mu(\mu - 1)(2\mu + 1)y = 0.$$

Elle ne caractérise pas la fonction $U_{\mu,2}$; car, si l'on ne tient compte que des fonctions entières, elle a pour solution un polynôme du degré μ .

avec deux constantes arbitraires, ou, si l'on aime mieux, deux polynômes, l'un du degré μ , l'autre du degré $\mu - 1$.

On verra de même que la fonction $U_{\mu,3} = \psi(x)$ satisfait à l'égalité

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(x) \log \left(1 - \frac{1}{x} \right) &= R + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^5} + \frac{D}{x^6} + \frac{E}{x^8} + \dots \\ &+ \frac{I}{x^{3\mu-1}} + \frac{J}{x^{3\mu}} + \frac{K}{x^{3\mu+1}} + \dots, \end{aligned} \right.$$

R étant un polynôme, et A, B, C, D, E, ..., I, J, K des constantes. Cette égalité, qui caractérise, à un facteur constant près, le polynôme $\psi(x)$ de degré μ , conduit à la suivante, où α et α^2 sont les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, et P un polynôme :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(x) \log \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \alpha \psi(\alpha x) \log \left(1 - \frac{1}{\alpha x} \right) - (\alpha + 1) \psi(\alpha^2 x) \log \left(1 - \frac{1}{\alpha^2 x} \right) \\ = P + \frac{K}{x^{3\mu+1}} + \dots, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire que le développement du premier membre, suivant les puissances décroissantes de x , manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots, \frac{1}{x^{3\mu}}$. On trouve facilement, pour la fonction $\psi(x) = y$, l'équation différentielle du quatrième ordre

$$\begin{aligned} (x^4 - x) \frac{d^4 y}{dx^4} + (10x^3 - 1) \frac{d^3 y}{dx^3} - 6(\mu - 2)(\mu + 2)x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \\ + 2(\mu - 1)(\mu - 2)(4\mu + 3)x \frac{dy}{dx} - \mu(\mu - 1)(\mu - 2)(3\mu + 1)y = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est satisfaite par trois polynômes des degrés respectifs $\mu, \mu - 1, \mu - 2$.

La forme de dérivées d'ordre μ , que nous avons donnée aux fonctions $V_{\mu,2}, V_{\mu,3}, \dots$, permet de former immédiatement des équations différentielles auxquelles ces fonctions satisfont. On trouve : pour $V_{\mu,2}$,

$$(x^3 - x) \frac{d^3 y}{dx^3} + 2(3x^2 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3(\mu - 1)(\mu + 2)x \frac{dy}{dx} - 2\mu(\mu + 1)(\mu + 2)y = 0;$$

pour $V_{\mu,3}$,

$$(x^4 - x) \frac{d^4 y}{dx^4} + 3(4x^3 - 1) \frac{d^3 y}{dx^3} - 6(\mu - 2)(\mu + 3)x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \\ - 4(\mu + 2)(\mu + 3)(2\mu - 1)x \frac{dy}{dx} - 3\mu(\mu + 1)(\mu + 2)(\mu + 3)y = 0.$$

IV.

Je vais donner ici les fonctions génératrices des divers systèmes de polynômes U et V pour les indices $\lambda = 2, 3, 4, \dots$. En premier lieu, je vais calculer $\sum_{p=0}^{\mu=\infty} a^p U_{p,2}, \dots$. On voit que le coefficient de x^i , dans cette somme, sera égal à

$$\frac{(-1)^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \sum_{\mu=i}^{\mu=\infty} \frac{(i+1)(i+3)(i+5) \dots (i+2\mu-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-i)} a^\mu \\ = (-1)^i \frac{(i+1)(i+3) \dots (3i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} a^i \\ \times \left[1 + \frac{3i+1}{1} a + \frac{(3i+1)(3i+3)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{(3i+1)(3i+3)(3i+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots \right].$$

L'expression qui se trouve entre parenthèses peut s'écrire

$$1 + \frac{3i+1}{2} (2a) + \frac{(3i+1)(3i+3)}{2 \cdot 4} (2a)^2 + \frac{(3i+1)(3i+3)(3i+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6} (2a)^3 + \dots,$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle est égale à

$$(1 - 2a)^{-\frac{3i+1}{2}}.$$

Le coefficient de x^i est donc

$$(-a)^i \frac{(i+1)(i+3) \dots (3i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} (1 - 2a)^{-\frac{3i+1}{2}},$$

ou bien

$$\frac{(-a)^i}{1.2.3\dots i} \cdot \frac{d^i (1-2a)^{-\frac{i+1}{2}}}{da^i},$$

et la fonction génératrice que nous cherchons est égale à

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-ax)^i}{1.2.3\dots i} \frac{d^i \left(\frac{1}{\sqrt{1-2a}} \right)^{i+1}}{da^i}.$$

Pour faire cette somme, il n'y a plus qu'à employer la formule de Lagrange. On trouve ainsi, pour la fonction génératrice cherchée, l'expression $\frac{1}{a} \frac{dz}{dx}$, z étant la racine de l'équation

$$z = a - \frac{ax}{\sqrt{1-2z}},$$

qui, pour $x = 0$, se réduit à a .

Pour les autres systèmes des fonctions U, on est conduit aux équations

$$z = a - \frac{ax}{\sqrt[3]{1-3z}}, \quad z = a - \frac{ax}{\sqrt[4]{1-4z}}, \dots,$$

qui donnent, pour $-\frac{1}{a} \frac{dz}{dx}$, les fonctions génératrices cherchées.

On sait que, pour le système $U_{0,1}$, $U_{1,1}$, $U_{2,1}, \dots$, on est conduit à l'équation $z = a - \frac{ax}{1-2z}$, qui rentre complètement dans le type des précédentes.

La forme analytique des divers systèmes de polynômes V permet d'en trouver immédiatement les fonctions génératrices. Ces fonctions sont, pour $i = 1, 2, 3, \dots$, les dérivées par rapport à x des racines des équations

$$z = x + az(z-1), \quad z = x + az(z^2-1), \quad z = x + az(z^3-1), \dots,$$

qui deviennent égales à x pour $a = 0$.

V.

On a dû remarquer, dans le paragraphe III, les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions $U_{\mu,2}$, $U_{\mu,3}$, La première, du troisième ordre, est satisfaite par deux polynômes; la seconde, du quatrième ordre, par trois polynômes. Ces équations ne sont que des cas particuliers d'équations beaucoup plus générales, qui ont été données par M. Hermite, dans son Cours à l'École Polytechnique (2^e année, page 19), et qui jouissent de cette propriété remarquable, que l'équation d'ordre n est satisfaite par $n - 1$ polynômes. Je me bornerai au cas du troisième ordre. L'équation correspondante est

$$\left\{ \begin{aligned} &(x-a)(x-b)(x-c) \frac{d^3 y}{dx^3} \\ &- [(\mu+\alpha-2)(x-b)(x-c) + (\mu+\beta-2)(x-a)(x-c) + (\mu+\gamma-2)(x-a)(x-b)] \frac{d^2 y}{dx^2} \\ &+ (\mu-1)[(\mu+\beta+\gamma-2)(x-a) + (\mu+\alpha+\gamma-2)(x-b) + (\mu+\alpha+\beta-2)(x-c)] \frac{dy}{dx} \\ &- (\mu-1)\mu(\mu+\alpha+\beta+\gamma-2)y = 0. \end{aligned} \right.$$

Elle admet pour solutions, lorsque μ est entier et positif, deux polynômes qui sont donnés par les intégrales

$$\int_a^b (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} (z-x)^\mu dz$$

et

$$\int_a^c (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} (z-x)^\mu dz,$$

quand α, β, γ , sont positifs. On voit par là que cette équation (1) est une généralisation de l'équation différentielle du second ordre, à laquelle satisfont la série hypergéométrique de Gauss et, comme cas particulier, la fonction X_n de Legendre. De l'équation (1), on déduit l'équation (4) du paragraphe III, en faisant

$$\alpha = 0, \quad b = 1, \quad c = -1, \quad \alpha = -(\mu-1), \quad \beta = -\mu, \quad \gamma = -\mu.$$

Je vais tirer de cette équation la relation (3) du même paragraphe,

en employant une méthode tout à fait semblable à celle dont on se sert pour déduire, de l'équation différentielle de la fonction X_n , la relation

$$X_n \log \frac{x-1}{x+1} = \text{polynôme} + \frac{\alpha}{x^{2n+1}} + \dots$$

Pour cela, je considère l'équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$(2) \quad \varphi(x) \frac{d^3 \gamma}{dx^3} + \varphi'(x) \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + L \frac{d\gamma}{dx} + M\gamma = 0.$$

On peut, par la multiplication, avec un facteur convenable, mettre toute équation linéaire du troisième ordre sans second membre sous cette forme.

Soient P et Q deux intégrales particulières de cette équation (2). En appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires, on trouve pour troisième solution

$$(3) \quad y = P \int \frac{Q dx}{\varphi(x) \left(Q \frac{dP}{dx} - P \frac{dQ}{dx} \right)^2} - Q \int \frac{P dx}{\varphi(x) \left(Q \frac{dP}{dx} - P \frac{dQ}{dx} \right)^2}.$$

Il intervient sous les signes \int le carré de la quantité $Q \frac{dP}{dx} - P \frac{dQ}{dx} = F(x)$.

Je vais faire ici une remarque curieuse, bien qu'elle n'ait pas de rapport direct avec la question qui nous occupe. Par un calcul très-facile, on trouve que la fonction $F(x) = \gamma$ satisfait à l'équation linéaire du troisième ordre

$$(4) \quad \varphi(x) \frac{d^3 \gamma}{dx^3} + 2\varphi'(x) \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + [\varphi''(x) + L] \frac{d\gamma}{dx} + \left(\frac{dL}{dx} - M \right) \gamma = 0.$$

Si l'on appelle Q' et P' deux de ses solutions, et qu'on cherche à former une équation différentielle à laquelle satisfasse $z = Q' \frac{dP'}{dx} - P' \frac{dQ'}{dx}$, on trouve pour cette équation

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi^2(x) \frac{d^3 z}{dx^3} + 4\varphi(x)\varphi'(x) \frac{d^2 z}{dx^2} \\ + [3\varphi(x)\varphi''(x) + 2\varphi'^2(x) + \varphi(x)L] \frac{dz}{dx} \\ + [\varphi(x)\varphi'''(x) + \varphi(x)M + \varphi'(x)\varphi''(x) + \varphi'(x)L] z = 0. \end{cases}$$

Or on déduit cette équation (5) de l'équation (2), en posant $y = \varphi(x)z$.

Mais revenons à notre question. Dans le cas de l'équation (1), on a

$$\varphi(x) = (x-a)^{-\mu-\alpha+2}(x-b)^{-\mu-\beta+2}(x-c)^{-\mu-\gamma+2}.$$

Comme on suppose μ entier et positif, on pourra considérer P et Q comme deux polynômes solutions de l'équation (1). Admettons que α , β , γ , soient entiers, de telle sorte que les expressions $\frac{Q}{\varphi(x)F^2(x)}$,

$\frac{P}{\varphi(x)F^2(x)}$ soient des fractions rationnelles; nous allons les décomposer en fractions simples. Considérons d'abord la première. Soit α une racine quelconque de l'équation $F(x) = 0$; on aura d'abord une série de fractions de la forme $\frac{A}{(x-\alpha)^2}$, $\frac{A'}{x-\alpha}$, se rapportant aux diverses racines α de l'équation $F(x) = 0$. A et A' seront les coefficients respectifs des termes en $\frac{1}{z^2}$ et $\frac{1}{z}$ dans le développement, suivant les puissances croissantes de z , de l'expression $\frac{Q(\alpha+z)}{\varphi(\alpha+z)F^2(\alpha+z)}$. On trouve de cette façon

$$A = \frac{Q(\alpha)}{\varphi(\alpha)F'^2(\alpha)}, \quad A' = \frac{Q'(\alpha)\varphi(\alpha)F'(\alpha) - Q(\alpha)\varphi'(\alpha)F'(\alpha) - Q(\alpha)\varphi(\alpha)F''(\alpha)}{\varphi^2(\alpha)F'^3(\alpha)}.$$

Mais, si l'on remplace successivement dans l'équation (2) y par P et Q, puis qu'on multiplie les équations résultantes respectivement par Q et P, et enfin qu'on retranche les résultats, il vient

$$LF(x) + \varphi'(x)F'(x) + \varphi(x) \left[F''(x) - \frac{dQ}{dx} \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{dP}{dx} \frac{d^2Q}{dx^2} \right] = 0,$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(\alpha)F'(\alpha) + \varphi(\alpha)F''(\alpha) = \varphi(\alpha)[Q'(\alpha)P''(\alpha) - P'(\alpha)Q''(\alpha)].$$

Donc

$$A' = \frac{Q'(\alpha)F'(\alpha) - Q(\alpha)Q'(\alpha)P''(\alpha) + Q(\alpha)P'(\alpha)Q''(\alpha)}{\varphi(\alpha)F'^3(\alpha)}.$$

Si l'on remplace, dans A', $F'(\alpha)$ par sa valeur $Q(\alpha)P''(\alpha) - P(\alpha)Q''(\alpha)$,

il vient finalement

$$A' = \frac{Q''(\alpha)[Q(\alpha)P'(\alpha) - P(\alpha)Q'(\alpha)]}{\varphi(\alpha)F'^3(\alpha)} = \frac{Q''(\alpha)F(\alpha)}{\varphi(\alpha)F'^3(\alpha)} = 0.$$

Par conséquent, si l'on fait abstraction des facteurs simples correspondants à $\varphi(x)$, la troisième solution y est une fonction algébrique et même entière, car la partie

$$\frac{Q(\alpha)P}{\varphi(\alpha)F'^2(\alpha)(x-\alpha)} - \frac{P(\alpha)Q}{\varphi(\alpha)F'^2(\alpha)(x-\alpha)}$$

de l'intégrale qui se rapporte à la racine α , se réduit à un polynôme, attendu que $Q(\alpha)P - P(\alpha)Q$ est divisible par $x - \alpha$.

Il reste à considérer les fractions simples qui correspondent à $\varphi(x)$. Je prends le cas de $\alpha = -(\mu - 1)$, $\beta = \gamma = -\mu$, $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$; alors $\varphi(x) = x(x-1)^2(x+1)^2$. Les fractions simples ayant pour dénominateur $(x-1)^2$ ou $(x+1)^2$ donnent dans l'intégrale y des parties entières en x . Soient $\frac{A}{x} \frac{B}{x-1} \frac{C}{x+1}$ les autres fractions simples qui se rapportent à la première fraction rationnelle, $\frac{A'}{x}$, $\frac{B'}{x-1}$, $\frac{C'}{x+1}$ celles qui se rapportent à la seconde fraction rationnelle. On a évidemment

$$A + B + C = 0, \quad A' + B' + C' = 0,$$

de sorte que finalement on conclut l'égalité

$$y = \text{polynôme} + (BP - B'Q) \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) + (CP - C'Q) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Mais on voit immédiatement que le développement de y , suivant les puissances décroissantes de x , ne commence qu'au terme en $\frac{1}{x^{2\mu+1}}$, et qu'il ne contient que des termes de degré impair, si l'on suppose que P et Q soient les deux polynômes de degrés μ et $\mu - 1$, l'un pair et l'autre impair, qui satisfont à l'équation différentielle. Le second membre devant changer de signe sans changer de valeur absolue, si l'on y remplace x par $-x$, on en conclut qu'en posant $BP - B'Q = \varpi(x)$, on a $C'P - C'Q = -\varpi(-x)$ et on retrouve ainsi l'équation (4) du paragraphe III.

De cette dernière équation, on pourrait déduire toutes les propriétés que nous avons données de la fonction $\varpi(x)$; je n'insiste pas là-dessus.

Ce n'est pas seulement dans le cas que nous venons d'examiner, qu'on trouve une équation analogue à cette équation (4). Si l'on suppose α , β , γ déterminés de telle sorte que l'on ait

$$\varphi(x) = (x - a)(x - b)(x - c),$$

on trouve, en posant

$$U = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)F^2(a)} \log\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)F^2(b)} \log\left(1 - \frac{b}{x}\right) \\ + \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)F^2(c)} \log\left(1 - \frac{c}{x}\right)$$

et

$$V = \frac{Q(a)}{(a-b)(a-c)F(a)} \log\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \dots,$$

$$PV - QU + R = \frac{\alpha}{x^{\mu-1}} + \dots,$$

R étant un polynôme entier

L'équation différentielle (1) du paragraphe V jouit de certaines propriétés curieuses; ainsi, dans le cas où μ est un nombre entier négatif égal à $-n$, elle est satisfaite par

$$\frac{d^{n-1}(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}(x-c)^{n-1}}{dx^{n-1}};$$

mais ceci n'a pas de rapport à la question qui fait l'objet de cet article.