Annales scientifiques de l'É.N.S.

G. Floquet

Sur la représentation des fonctions elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 87-98
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__87_0>

SUR LA REPRÉSENTATION

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES,

Par M. G. FLOQUET.

Le tome XXVII du *Bulletin de la Société mathématique de France* renferme (1) une Note sommaire de M. Painlevé sur la représentation d'une fonction elliptique par le quotient de deux fonctions linéaires de $p(u-h)$ et de ses dérivées des premiers ordres, h désignant une constante convenable. L'auteur signale l'intérêt didactique qu'il y aurait à mettre explicitement en évidence, dans la théorie classique des fonctions elliptiques, ce quatrième mode de représentation. On sait, d'ailleurs, combien il est utile dans les applications et, en particulier, dans l'étude des courbes du genre *un*. Je me propose ici de l'expliquer en détail et de préciser les différentes circonstances qui peuvent se présenter.

I.

1. Considérons l'expression

$$\varphi(u) = A + A_0 p(u-h) + A_1 p'(u-h) + \ldots + A_{m-2} p^{(m-2)}(u-h)$$

où h et les A désignent des constantes et où l'entier m est supposé supérieur à l'unité. Quelles que soient les constantes, si A_{m-2} n'est

(1) Année 1899, p. 301 et 302.

pas nul, la fonction elliptique $\varphi(u)$ admet m pôles dans un parallélogramme des périodes 2ω et $2\omega'$ de pu, confondus avec le point congruent au point $u = h$. Elle y admet donc aussi m zéros. Réciproquement, si, pour un ensemble de valeur des constantes, la fonction $\varphi(u)$ admet m zéros dans un parallélogramme, elle y admet aussi m pôles et A_{m-2} n'est pas nul.

Je vais chercher à déterminer h et les A de manière que $\varphi(u)$ admette m zéros assignés $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ dans un même parallélogramme, chacun d'eux autant de fois qu'il figure ici.

2. La détermination de h est immédiate. On doit avoir, en effet,

$$mh - \Sigma a = 0, \tag{1}$$

qui donne

$$h = \frac{\Sigma a}{m} + \frac{2\mu\omega + 2\mu'\omega'}{m}. \tag{2}$$

De là m^2 valeurs à retenir pour h. Il peut arriver que toutes ne soient pas acceptables, car il peut s'en trouver un nombre α qui soient congruentes à des quantités a et qui, par suite, doivent évidemment être exclues. Si, par exemple, les m points a coïncident, la formule (2) montre qu'il existe toujours une valeur de h congruente au point a et que α est égal à l'unité. Mais on va voir que α est en tout cas moindre que m^2, de sorte qu'il existe toujours des valeurs acceptables pour h, en nombre $m^2 - \alpha$.

Non seulement α est inférieur à m^2, mais il ne peut surpasser m et même on aperçoit tout de suite que, dans le cas $m = 2$, α ne peut atteindre m. Effectivement, d'abord α est au plus égal au nombre α_1 des points a distincts, puisque deux valeurs de h, n'étant pas congruentes entre elles, ne peuvent être congruentes à un même point a; donc α est *a fortiori* au plus égal à m. Ensuite, si les points a se composent d'un point simple a_1 et d'un point a_i multiple d'ordre $m-1$, aucune valeur de h ne peut être congruente au point a_i, car on aurait

$$ma_i \equiv (m-1)a_i + a_1 \qquad \text{ou} \qquad a_i \equiv a_1.$$

Donc, notamment, dans le cas $m = 2$, $\alpha_1 = 2$, h ne peut être congruent à aucun point a, de sorte que, quand m est égal à 2, le nombre α est 0 ou 1, selon que α_1 est 2 ou 1.

3. Adoptons pour h une des $m^2 - \alpha$ valeurs acceptables et passons à la détermination correspondante des constantes A.

J'observe avant tout que, si l'on détermine les A de façon que la fonction $\varphi(u)$ admette $m-1$ seulement des zéros donnés a, elle admettra aussi le zéro restant. En effet, supposons les A déterminés de manière que cette fonction soit nulle aux points $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$, par exemple. Le coefficient A_{m-2} sera nécessairement différent de zéro, c'est-à-dire que la fonction admettra m fois le pôle h, car, si elle ne l'admettait que $m-1$ fois, on aurait

$$(m-1)h - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1}) \equiv 0$$

qui, avec (1), établirait une congruence entre h et a_m. Il en résulte que $\varphi(u)$ possède un $m^{\text{ième}}$ zéro x dans le parallélogramme des périodes, et, comme il satisfait à

$$mh - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + x) \equiv 0,$$

il coïncide bien, d'après la formule (1), avec le point a_m.

Pour obtenir les fonctions $\varphi(u)$, répondant à la valeur adoptée de h, qui admettent les m zéros assignés, il suffit donc de déterminer les ensembles de valeurs, non toutes nulles, des constantes A, pour lesquels $\varphi(u)$ admet $m-1$ seulement de ces zéros, choisis à volonté, et l'on est assuré que, dans un tel ensemble, la valeur du coefficient A_{m-2} ne sera pas nulle.

Effectuons maintenant cette détermination. Les équations à écrire différeront de forme selon que, parmi les $m-1$ points a choisis, il y en aura plus ou moins qui seront confondus. Si les m points donnés sont distincts, les $m-1$ points choisis le seront nécessairement. Mais ils peuvent l'être encore lorsque deux seulement des points donnés coïncident; dans ce cas, on peut employer aussi le point double et $m-3$ points simples. Si les points donnés sont tous confondus, les $m-1$ points employés coïncideront. Pour embrasser tous les cas dans notre calcul, je supposerai que les $m-1$ points employés soient composés ainsi :

n points confondus au point a_i,
r points confondus au point a_j,
.............................,
s points confondus au point a_k,

de sorte qu'on a

$$n + r + \ldots + s = m - 1.$$

Les $m - 1$ équations auxquelles satisfont les m constantes A, pour a valeur adoptée de h, sont alors

$$(3)\left\{\begin{array}{l}
A_0\mathfrak{p}(a_i - h) + A_1\mathfrak{p}'(a_i - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(m-2)}(a_i - h) + A = 0,\\
A_0\mathfrak{p}'(a_i - h) + A_1\mathfrak{p}''(a_i - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(m-1)}(a_i - h) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_0\mathfrak{p}^{(n-1)}(a_i - h) + A_1\mathfrak{p}^{(n)}(a_i - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(n+m-3)}(a_i - h) = 0,\\
A^0\mathfrak{p}(a_j - h) + A_1\mathfrak{p}'(a_j - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(m-2)}(a_j - h) + A = 0,\\
A_0\mathfrak{p}'(a_j - h) + A_1\mathfrak{p}''(a_j - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(m-1)}(a_j - h) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_0\mathfrak{p}^{(r-1)}(a_j - h) + A_1\mathfrak{p}^{(r)}(a_j - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(r+m-3)}(a_j - h) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_0\mathfrak{p}(a_k - h) + A_1\mathfrak{p}'(a_k - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(m-2)}(a_k - h) + A = 0,\\
A_0\mathfrak{p}'(a_k - h) + A_1\mathfrak{p}''(a_k - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(m-1)}(a_k - h) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_0\mathfrak{p}^{(s-1)}(a_k - h) + A_1\mathfrak{p}^{(s)}(a_k - h) + \ldots + A_{m-2}\mathfrak{p}^{(s+m-3)}(a_k - h) = 0,
\end{array}\right.$$

linéaires et homogènes par rapport aux inconnues et ayant leurs coefficients finis, puisque h n'est congruent à aucune des quantités a.

Considérons le déterminant Δ des coefficients de $A_0, A_1, \ldots, A_{m-3}, A_{m-2}$ et le déterminant δ des coefficients de $A_0, A_1, \ldots, A_{m-3}$, A. Ce dernier n'est pas nul. En effet, lorsqu'on fait $A_{m-2} = 0$ dans les équations (3), le nombre des inconnues y devient égal au nombre des équations. Si, par conséquent, δ était nul, elles donneraient des valeurs non toutes nulles pour $A_0, A_1, \ldots, A_{m-3}$, A. Par suite, les équations (3) seraient vérifiées par un ensemble de valeurs non toutes nulles des m constantes $A_0, A_1, \ldots, A_{m-3}, A_{m-2}$, A, parmi lesquelles A_{m-2} aurait la valeur zéro, ce que j'ai démontré (n° 1) être impossible. Pour la valeur adoptée de h, le déterminant δ est donc différent de zéro.

Cela posé, si Δ n'est pas nul, les équations (3) donnent

$$(4)\qquad A_0 = \lambda_0 A,\qquad A_1 = \lambda_1 A,\ldots,\qquad A_{m-2} = \lambda_{m-2} A,$$

où l'on a

$$\lambda_{m-2} = -\frac{\delta}{\Delta}.$$

Si maintenant Δ est nul, soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{m-1}$ les mineurs du premier ordre obtenus en y supprimant la dernière colonne et successivement la première ligne, la deuxième, ..., la $(m-1)^{\text{ième}}$. La somme

$$(5)\qquad \Delta_1 + (-1)^n \Delta_{n+1} + (-1)^{n+r} \Delta_{n+r+1} + \ldots + (-1)^{m-s-1} \Delta_{m-s}$$

est différente de zéro, car elle n'est autre, au signe près, que le déterminant δ. Par suite, l'équation obtenue en multipliant les équations (3) respectivement par Δ_1, $-\Delta_2$, ..., $(-1)^n \Delta_{n+1}$, $(-1)^{n+1} \Delta_{n+2}$, ..., $(-1)^{m-s-1} \Delta_{m-s}$ et ajoutant se réduit à $A = 0$. Les $m-1$ équations (3) sont alors homogènes en $A_0, A_1, \ldots, A_{m-2}$ et, comme Δ_1, Δ_{n+1}, Δ_{n+r+1}, ..., Δ_{m-s} ne sont pas tous nuls, sans quoi la somme (5) le serait, elles donnent

$$(6)\qquad A_0 = l_0 A_{m-2},\qquad A_1 = l_1 A_{m-2},\qquad \ldots,\qquad A_{m-3} = l_{m-3} A_{m-2}.$$

Dans tous les cas, les coefficients A sont donc déterminés à un même facteur constant près arbitraire, qui est A dans le premier cas, A_{m-2} dans le second.

4. Nous arrivons par conséquent à cette conclusion :

Il est toujours possible de déterminer h et les A de manière que la fonction $\varphi(u)$ admette les m zéros donnés.

Nous voyons en même temps comment s'effectue cette détermination. On a, d'après (4),

$$\varphi(u) = [1 + \lambda_0 p(u-h) + \lambda_1 p'(u-h) + \ldots + \lambda_{m-2} p^{(m-2)}(u-h)] A,$$

si Δ n'est pas nul, et, d'après (6),

$$\varphi(u) = [l_0 p(u-h) + l_1 p'(u-h) + \ldots + l_{m-3} p^{(m-3)}(u-h) + p^{(m-2)}(u-h)] A_{m-2},$$

si Δ est nul. D'après un théorème bien connu, la fonction devait être ainsi déterminée à un facteur constant près, une fois choisie la valeur de h, puisqu'il s'agit d'une fonction elliptique dont les périodes, les pôles et les zéros sont donnés.

Remarquons qu'il résulte du même théorème que l'expression de $\varphi(u)$, qui a été calculée en choisissant arbitrairement $m-1$ points parmi les m points a donnés, est indépendante de ce choix. Elle ne dépend que de la valeur adoptée pour h, de sorte qu'il existe autant d'expressions distinctes de $\varphi(u)$ qu'il y a de valeurs acceptables pour h, c'est-à-dire $m^2-\alpha$.

5. Le raisonnement même a montré que le déterminant δ des coefficients de $A_0, A_1, \ldots, A_{m-3}$, A, dans les équations (3), était différent de zéro. Mais on peut établir ce fait directement. Il suffit pour cela d'exprimer δ par un produit à l'aide de la fonction σ (1).

Supposons, par exemple, que les $m-1$ points a employés pour écrire les équations (3) se composent de $i-1$ points distincts a_1, $a_2, \ldots, a_{i-1}$ et de $m-i$ points confondus avec a_i, et que a_k désigne le point a restant. Le déterminant δ correspondant s'exprimera ainsi :

$$\delta = 1!\,2!\,3!\ldots(m-i-1)!\,1!\,2!\,3!\ldots(m-2)!\,.$$
$$\times\frac{\sigma(2\nu\omega+2\nu'\omega'+h-a_k)\,\Pi}{[\sigma(a_1-h).\sigma(a_2-h)\ldots\sigma(a_{i-1}-h).\sigma^{m-i}(a_i-h)]^{m-1}},$$

Π désignant le produit

$$\begin{aligned}\Pi = \sigma(a_2-a_1)\,\sigma(a_3-a_1)\ldots\sigma(a_{i-1}-a_1)\quad&\sigma^{m-i}(a_i-a_1)\\ \sigma(a_3-a_2)\ldots\sigma(a_{i-1}-a_2)\quad&\sigma^{m-i}(a_i-a_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ \sigma(a_{i-1}-a_{i-2})\,&\sigma^{m-i}(a_i-a_{i-2})\\ &\sigma^{m-i}(a_i-a_{i-1}).\end{aligned}$$

Cette expression montre immédiatement que δ n'est pas nul, puisque h n'est congruent à aucun des points a et qu'il n'existe aucune con-

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Ire partie, p. 218 à 222.

gruence entre les points distincts $a_1, a_2, \ldots, a_i$ appartenant à un même parallélogramme.

Si, en particulier, i est égal à 1, le produit Π doit être remplacé par l'unité et l'on a

$$\delta = [1!\,2!\,3!\ldots(m-2)!]^2 \frac{\sigma[(m-1)(a_1-h)]}{[\sigma(a_1-h)]^{(m-1)^2}}.$$

II.

6. Considérons l'expression

$$f(u) = \frac{A + A_0 p(u-h) + A_1 p'(u-h) + \ldots + A_{m-2} p^{(m-2)}(u-h)}{B + B_0 p(u-h) + B_1 p'(u-h) + \ldots + B_{m-2} p^{(m-2)}(u-h)} = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)},$$

où h, les A, les B désignent des constantes et où l'entier m est supposé supérieur à l'unité. Je supposerai aussi que A_{m-2} et B_{m-2} ne sont pas nuls simultanément.

La fonction elliptique $f(u)$ admet, en général, m zéros et m pôles dans un parallélogramme des périodes 2ω, $2\omega'$ de pu et, en tout cas, lorsqu'un même nombre annule son numérateur $\varphi(u)$ et son dénominateur $\psi(u)$, elle n'en admet pas plus de m. Quand ni A_{m-2}, ni B_{m-2} n'est nul, le point $u = h$ n'est ni un zéro, ni un pôle de $f(u)$, et les zéros de la fonction se trouvent parmi les zéros de $\varphi(u)$, tandis que ses pôles sont des zéros de $\psi(u)$. Lorsque, au contraire, A_{m-2} est nul, le point h est un zéro de $f(u)$, et il en est un pôle si c'est B_{m-2} qui est nul. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$B_{m-2} \neq 0, \qquad A_{m-n-2} \neq 0, \qquad A_{m-n-1} = A_{m-n} = A_{m-n+1} = \ldots = A_{m-2} = 0;$$

le point h sera un zéro d'ordre n de $f(u)$, et, si l'on a

$$A_{m-2} \neq 0, \qquad B_{m-n-2} \neq 0, \qquad B_{m-n-1} = B_{m-n} = B_{m-n+1} = \ldots = B_{m-2} = 0,$$

il sera un pôle d'ordre n.

Soient, dans un même parallélogramme des périodes, m points donnés $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et m autres points donnés $b_1, b_2, \ldots, b_m$, ces derniers différant tous des premiers, mais ayant avec eux la relation

$$\Sigma b - \Sigma a \equiv 0, \tag{7}$$

les points a, comme les points b, étant d'ailleurs distincts ou confondus.

Je vais chercher à déterminer h, les A et les B de manière que $f(u)$ admette les m points a comme zéros et les m points b comme pôles, chacun autant de fois qu'il figure dans la suite correspondante.

7. Cherchons d'abord les déterminations de ce genre pour lesquelles A_{m-2} et B_{m-2} sont tous les deux différents de zéro. Pour celles-là, h n'est ni un zéro, ni un pôle de $f(u)$, de sorte que $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ admettent respectivement comme zéros les m points a et les m points b. Il est clair, d'ailleurs, que réciproquement tout ensemble de valeurs des constantes pour lequel $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ admettent ces zéros constitue une des déterminations actuellement cherchées. On les obtiendra, par conséquent, en résolvant deux fois le problème qui a été traité dans la première Partie : une fois pour $\varphi(u)$, une fois pour $\psi(u)$, et l'unique condition de possibilité sera que, dans les deux cas, le problème puisse être résolu avec une même valeur de h. Cette condition est toujours remplie d'elle-même. En effet, nous avons vu (n° 2) que les valeurs de h qui conviennent au cas de $\varphi(u)$ se trouvent parmi les nombres (2); de même, celles qui conviennent à $\psi(u)$ sont parmi les nombres

$$h = \frac{\Sigma b}{m} + \frac{2\mu_1\omega + 2\mu'_1\omega'}{m}. \tag{2'}$$

Or, d'après (7), les nombres (2) et (2′) sont les mêmes. Il résulte alors de ce qui a été dit (n° 2) que les valeurs de h propres à résoudre simultanément les deux cas s'obtiendront en prenant, parmi les précédentes, m^2 valeurs non congruentes entre elles, et excluant ensuite celles qui seraient congruentes à des points a ou b. Supposons qu'il y en ait α congruentes à des points a et β congruentes à des points b. Comme aucune ne peut être congruente à la fois à un point a et à un point b, le nombre des exclusions sera exactement la somme $\alpha + \beta$. Cette somme est inférieure à m^2, car il résulte de ce qu'on a vu (n° 2) qu'elle ne peut surpasser $2m$ et que, dans le cas $m = 2$, elle est au plus égale à 2. Il existe donc toujours des valeurs de h, en nombre égal à $m^2 - \alpha - \beta$, susceptibles chacune de résoudre le problème à la fois pour $\varphi(u)$ et pour $\psi(u)$. Adoptant maintenant pour h une de ces valeurs, on effectuera le calcul ultérieur des A et des B comme il a été expliqué et l'on aura par là une des déterminations cherchées, telle que A_{m-2} et B_{m-2} diffèrent tous les deux de zéro et renfermant, d'ailleurs, un facteur arbitraire. On peut en obtenir ainsi autant qu'il y a de valeurs convenables de h, c'est-à-dire $m^2 - \alpha - \beta$ et on les a toutes par ce moyen. Chacune des expressions correspondantes de $f(u)$ est déterminée à un facteur constant près, ainsi que cela devait être.

8. Cherchons maintenant les déterminations pour lesquelles A_{m-2} est nul. Pour chacune d'elles, la valeur de h sera nécessairement un zéro de $f(u)$, de sorte que le point h sera congruent à un des points a. Supposons, par exemple, que h soit congruent au point a_i, multiple d'ordre n, auquel cas (n° 2) n ne peut être égal à $m - 1$. Alors les n derniers coefficients de $\varphi(u)$ sont nuls

$$(8) \qquad A_{m-n-1} = A_{m-n} = A_{m-n+1} = \ldots = A_{m-2} = 0,$$

et, en outre,

$$(9) \qquad A + A_0\,p(u-a_i) + A_1\,p'(u-a_i) + \ldots + A_{m-n-2}\,p^{(m-n-2)}(u-a_i)$$

admet les $m - n$ zéros a qui diffèrent de a_i, tandis que

$$(10) \qquad B + B_0\,p(u-a_i) + B_1\,p'(u-a_i) + \ldots + B_{m-2}\,p^{(m-2)}(u-a_i)$$

admet les m zéros b. Le théorème de Liouville donne donc, d'une part,

$$(m-n)\,a_i = \Sigma a - n a_i + 2\nu\omega + 2\nu'\omega',$$

et, d'autre part,

$$m a_i = \Sigma b + 2\nu_1\omega + 2\nu'_1\omega',$$

égalités qui sont les mêmes à cause de (7) et qui montrent que, parmi les m^2 valeurs de h (2) ou (2'), considérées plus haut, il s'en trouve nécessairement une qui est congruente à a_i, de sorte qu'il faut que α ne soit pas nul. Réciproquement, si α n'est pas nul, chacune des α valeurs de h exclues précédemment, comme congruentes à des points a, donnera une détermination des constantes pour laquelle

A_{m-2} sera nul. En effet, si a_i désigne le point auquel h est congruent, comme a_i ne coïncide avec aucun des $m-n$ autres points a, ni avec aucun point b, les A et les B pourront être choisis (nº 3) de façon que les égalités (8) aient lieu et que les fonctions (10) et (9) admettent respectivement les m zéros b et les $m-n$ zéros a autres que a_i. Il existe donc α déterminations du genre en question, et on les a toutes par ce moyen.

Pareillement, si β n'est pas nul, il existe β déterminations pour lesquelles B_{m-2} est nul, A_{m-2} ne l'étant pas. Elles répondent aux β valeurs de h qui ont été exclues dans le premier cas comme congruentes à des points b.

9. Nous arrivons, par conséquent, aux conclusions suivantes :

Considérons l'équation

$$mh = \Sigma a = \Sigma b,$$

qui donne m^2 valeurs de h non congruentes entre elles. Le nombre des fonctions $f(u)$ distinctes est toujours égal à m^2; elles sont déterminées à un facteur constant près et correspondent aux m^2 valeurs de h. Supposons que, parmi ces dernières, il s'en trouve α qui soient congruentes chacune à un point a et β congruentes chacune à un point b, auquel cas $\alpha+\beta$ est moindre que m^2. Les m^2 fonctions $f(u)$ se répartissent ainsi :

$m^2-\alpha-\beta$ ont leurs coefficients A_{m-2} et B_{m-2} différents de zéro,

α ont leur coefficient A_{m-2} nul,

β ont leur coefficient B_{m-2} nul.

Si h est congruent au point a_i ou au point b_i, supposé multiple d'ordre n, auquel cas n diffère de $m-1$, la fonction $f(u)$ correspondante a ses coefficients $A_{m-n-1}, A_{m-n}, A_{m-n+1}, \ldots, A_{m-2}$ ou ses coefficients B_{m-n-1}, $B_{m-n}, B_{m-n+1}, \ldots, B_{m-2}$ tous égaux à zéro. En général, α et β sont nuls, de sorte qu'il existe m^2 fonctions $f(u)$ distinctes à coefficients A_{m-2} et B_{m-2} non nuls.

III.

10. Considérons une fonction elliptique quelconque $F(u)$, aux périodes 2ω, $2\omega'$, et soit m le nombre des zéros ou des pôles qu'elle admet dans un parallélogramme des périodes. Désignons par pu la

fonction p construite sur les périodes 2ω et $2\omega'$ et cherchons une fraction

$$\frac{A + A_0 p(u-h) + A_1 p'(u-h) + \ldots + A_\mu p^{(\mu)}(u-h)}{B + B_0 p(u-h) + B_1 p'(u-h) + \ldots + B_\nu p^{(\nu)}(u-h)}, \tag{11}$$

qui soit égale à $F(u)$, quel que soit u.

Aucun des deux indices μ et ν ne pourra surpasser $m-2$, car le nombre des zéros ou des pôles serait alors supérieur à m. D'autre part, l'un au moins de ces indices sera égal à $m-2$; car, sans cela, ne pouvant surpasser ce nombre, ils seraient tous deux moindres, et, par suite, le nombre des pôles serait inférieur à m. Il résulte de là que toute fraction (11), égale à $F(u)$, sera nécessairement de la forme $f(u)$ du Chapitre précédent, A_{m-2} et B_{m-2} n'étant pas nuls simultanément. Pour obtenir toutes ces fractions, il suffit alors, en suivant la marche indiquée, de déterminer les fonctions distinctes $f(u)$ qui admettent les m zéros et les m pôles de $F(u)$; d'après le théorème déjà rappelé, chacune d'elles ne différera de $F(u)$ que par un facteur constant, et l'on aura ainsi représenté $F(u)$ sous la forme (11) de toutes les manières possibles.

Par conséquent, *la fonction elliptique* $F(u)$ *peut toujours se représenter sous la forme* (11) *et cela de* m^2 *manières différentes. On les obtient comme il a été dit, et les derniers coefficients des deux termes de la fraction sont nuls dans les circonstances qui ont été fixées par les conclusions du Chapitre précédent.*

11. Appliquons à une fonction elliptique $F(u)$ du second ordre. Soient a_1, a_2 et b_1, b_2 les zéros et les pôles appartenant à un parallélogramme élémentaire. Les nombres désignés par α et β étant ici 0 ou 1, et m étant égal à 2, les trois formes suivantes peuvent se présenter :

$$F(u) = \frac{A + A_0 p(u-h)}{B + B_0 p(u-h)}, \tag{12}$$

$$F(u) = M + M_0 p(u-h), \tag{13}$$

$$F(u) = \frac{1}{N + N_0 p(u-h)}. \tag{14}$$

Si a_1 et a_2 sont distincts, ainsi que b_1 et b_2, α et β sont nuls et les quatre expressions de $F(u)$ sont de la forme (12). Si a_1 et a_2 sont distincts, mais b_1 et b_2 confondus en b, α est seul nul, β étant égal à 1 ; on a trois expressions de la forme (12) et une de la forme (13); cette dernière n'est autre que

$$M_0[p(u-b)-p(a_1-b)]$$

ou, ce qui est la même chose,

$$M_0[p(u-b)-p(a_2-b)].$$

Si, au contraire, b_1 et b_2 sont distincts, tandis que a_1 et a_2 coïncident en a, β est nul et α est 1 ; on a encore trois expressions (12) et une de la forme (14); cette dernière est

$$\frac{1}{N_0[p(u-a)-p(b_1-a)]}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{1}{N_0[p(u-a)-p(b_2-a)]}.$$

Enfin, quand a_1 et a_2 coïncident, ainsi que b_1 et b_2, on a pour $F(u)$ deux expressions (12), une expression (13), et une expression (14); ces deux dernières sont les suivantes :

$$M_0[p(u-b)-p(a-b)], \qquad \frac{1}{N_0[p(u-a)-p(b-a)]},$$

$p(a-b)$ étant l'une des racines e_1, e_2, e_3 de $p'u$.