ERNEST VESSIOT

Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 9-85
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LA
THÉORIE DE GALOIS
ET
SES DIVERSES GÉNÉRALISATIONS,

PAR M. E. VESSIOT.

INTRODUCTION.

1. L'objet principal de cette étude est l'extension de la célèbre théorie de Galois, pour les équations algébriques, aux équations linéaires aux dérivées partielles, de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} p_i(t, t_1, \ldots, t_n)\frac{\partial x}{\partial t_i}=0, \tag{1}$$

et aux systèmes complets de telles équations.

Cette extension a été indiquée par M. Drach dans sa Thèse [1]; mais, à cause de certaines lacunes dans les énoncés et les démonstrations, il nous a paru utile de reprendre la question, afin d'arriver à des résultats bien précis.

Nous avons abandonné la méthode de démonstration de Galois, que M. Picard [2] a réussi, comme l'on sait, à étendre au cas des équa-

(1) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XV.
(2) *Voir*, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, Ch. XVII.

tions différentielles ordinaires, linéaires et homogènes. Dans le cas actuel, en effet, l'emploi de cette méthode se heurte à la difficulté suivante : le passage d'une solution à une autre ne se fait pas, en général, par des formules rationnelles.

La méthode que nous avons employée est tout analytique. Nous l'avons exposée d'abord sur la théorie de Galois elle-même, dans un premier Chapitre. En voici le principe :

Étant donnée une équation algébrique, que l'on considère comme remplacée par le système (S) des relations entre les racines $x_1, \ldots, x_n$ et les coefficients, on étudie d'abord le problème fondamental suivant : *Quel parti peut-on tirer de la connaissance de certaines relations* (A) *entre $x_1, \ldots, x_n$, en n'employant que des opérations rationnelles?* Nous montrons que l'on peut déduire du système [S, A] un système analogue, dont le système [S, A] admet toutes les solutions, et qui est, comme nous disons, *automorphe :* ce qui veut dire que ses diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les substitutions d'un groupe G, qui est dit *le groupe associé au système*, ou simplement *le groupe du système*. On remarquera que (S) est déjà un système automorphe, ayant le groupe général pour groupe associé.

Dès lors, si l'on se place au point de vue de Galois, c'est-à-dire si l'on cherche à classer toutes les relations rationnelles en $x_1, \ldots, x_n$ existant pour une équation algébrique donnée, on voit que l'on peut se limiter à ne considérer que des systèmes [S, A] rationnels et automorphes. Et l'on arrive, presque immédiatement, au résultat suivant, qui n'est qu'une forme du théorème de Galois :

Il existe un système [S, A] *automorphe et rationnel, tel que tout système* [S, A] *rationnel (automorphe ou non) en admet toutes les solutions, dès qu'il en admet une : le groupe de ce système est le groupe de rationalité (groupe de Galois) de l'équation.*

Il est du reste facile de déduire, de cet énoncé, l'énoncé classique de Galois.

Cette méthode montre le lien qui unit, dans cette théorie, le point de vue de l'invariance numérique des fonctions des racines, auquel s'est attaché Galois, et, après lui, M. Jordan, au point de vue de l'invariance formelle, qui semble avoir été celui de Kronecker. L'équivalence de ces deux manières de traiter la théorie est très importante au point de vue de ses applications.

On voit, enfin, par la marche que nous venons d'esquisser, le lien qui existe entre le point de vue de Galois, consistant à examiner les simplications que peut présenter la résolution d'une équation donnée, et le point de vue qui consiste à chercher comment on peut tirer parti, pour la résolution d'une équation quelconque, de certaines circonstances particulières données : point de vue qui fut celui d'Abel, et, dans un autre ordre de questions, celui de Sophus Lie.

2. Dans un second Chapitre, nous appliquons la même méthode aux équations différentielles ordinaires, linéaires et homogènes. Nous complétons ainsi, de manière à la rendre entièrement rigoureuse, la démonstration que nous avions donnée autrefois, dans notre Thèse, de la double propriété du groupe de rationalité de l'équation. Nous montrons l'équivalence de l'énoncé que nous avions donné, convenablement interprété, et de l'énoncé de M. Picard.

La même marche s'appliquerait plus généralement à des systèmes automorphes d'équations différentielles, ordinaires ou aux dérivées partielles, pourvu que le groupe associé au système considéré (c'est-à-dire qui, effectué sur les fonctions inconnues, échange les solutions entre elles) soit un groupe de transformations fini, dont la transformation générale soit définie par des équations rationnelles.

L'extension de la théorie de Galois à de tels systèmes a été indiquée par l'auteur, pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires, et par M. Cotton pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles ([1]).

3. Dans le troisième Chapitre, nous commençons à nous occuper des équations (1). Nous traitons le problème préliminaire fondamental, c'est-à-dire que nous substituons à l'équation (1) le système (S) des relations différentielles liant à $t, t_1, \ldots, t_n$, les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ qui constituent n intégrales indépendantes de (1), c'est-à-dire une *solution* quelconque de (1); et nous cherchons à tirer parti, par des

([1]) E. VESSIOT, *Annales de la Faculté de Toulouse*, t. VIII, H (§ V). — COTTON, *Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 29.

opérations rationnelles, de la connaissance d'équations différentielles (A), satisfaites par certaines de ces solutions.

On arrive à définir un ensemble, en général infini, de systèmes automorphes [1] dont les groupes associés sont du même type, et entre lesquels se répartissent les solutions du système [S, A]. Mais aucun de ces systèmes automorphes n'est rationnel, en général.

On est donc en présence d'une difficulté toute nouvelle. Nous l'avons tournée en montrant que l'on peut former rationnellement un système automorphe, dont le groupe soit encore du même type, qui n'admette que des solutions de (S), et qui admette une solution de (S), se réduisant, pour $t = t_0$, à des fonctions rationnelles de $t_1, \ldots, t_n$, supposées données.

Le dernier Chapitre est consacré à la discussion de la théorie esquissée par M. Drach. D'après ce qui précède, on voit que les simplifications qui peuvent se produire dans l'intégration d'une équation (1) donnée ne sont pas de la même nature pour les diverses solutions de l'équation. On obtient, dans tous les cas, les simplifications les plus grandes, en se bornant aux solutions principales, c'est-à-dire dans lesquelles $x_1, \ldots, x_n$ se réduisent, pour une valeur particulière $t = t_0$ de t, à $t_1, \ldots, t_n$ respectivement. Nous arrivons, pour elles, à l'énoncé suivant, qui est l'analogue du théorème de Galois :

Parmi tous les systèmes rationnels [S, A], *admettant une même solution principale, il en existe un, qui est automorphe, et dont chacun des autres admet toutes les solutions. Son groupe est le groupe de rationalité de l'équation. Les groupes de rationalité correspondant à diverses solutions principales sont semblables.*

Nous indiquons diverses autres formes de cet énoncé; nous montrons aussi comment il faut le modifier pour l'appliquer à une solution quelconque.

---

[1] Nous appelons, généralement, *système différentiel automorphe* un système différentiel dont toutes les solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les transformations d'un groupe, effectuées sur les fonctions inconnues dans les équations qui définissent cette solution. Le système (S) est automorphe; son groupe étant le groupe ponctuel général. Les systèmes automorphes ont été considérés souvent par Sophus Lie.

On peut, enfin, se placer à un point de vue tout différent, pour caractériser une équation (1) qui est spéciale, c'est-à-dire dont le groupe de rationalité n'est pas le groupe général. On cherche des transformations Ω qui, effectuées sur t, t_1, ..., t_n, et laissant t invariable, n'altèrent pas l'équation (1). L'ensemble de ces transformations Ω forme un groupe, isomorphe au groupe ponctuel à n variables, et dont les équations de définition sont rationnelles. Pour une équation (1) donnée, on peut se demander quels sont les sous-groupes de ce groupe, dont les équations de définition sont aussi rationnelles. La réponse est que ce sont tous ceux qui contiennent un certain groupe (K), qui est isomorphe au groupe de rationalité de l'équation. On retombe donc sur des résultats tout à fait équivalents aux précédents.

Tous ces résultats s'étendraient sans peine à des systèmes complets d'équations (1). Nous avons, pour abréger, laissé de côté cette généralisation.

Il serait naturel de chercher à étendre la théorie en remplaçant le système (S) par un système automorphe tout à fait quelconque. Mais on se trouve en présence de nouvelles difficultés, sur lesquelles nous reviendrons dans une autre occasion.

CHAPITRE I.

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

I. — Problème fondamental.

1. Comme nous l'avons expliqué, nous nous proposons de reprendre d'abord la théorie de Galois par une voie nouvelle, entièrement analytique, que nous n'aurons ensuite qu'à suivre de nouveau dans les Chapitres suivants, consacrés aux diverses généralisations de cette théorie.

Devant analyser les conséquences à tirer, pour une équation algébrique donnée quelconque, de l'existence possible de relations rationnelles entre ces racines, nous commencerons par traiter le problème suivant, qui sera fondamental, dans notre méthode.

Étant donnée une équation

$$(1) \qquad P(x) = x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n = 0,$$

on suppose connues une ou plusieurs relations entre ses racines $x_1, \ldots, x_n$

$$(A) \qquad G_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

rationnelles et entières par rapport à ces racines. Quel parti en peut-on tirer pour la résolution de $P(x) = 0$?

Nous remplaçons, à cet effet, l'équation (1) par le système équivalent

$$(S) \qquad \sum x_i = p_1, \qquad \sum x_i x_k = p_2, \qquad \ldots, \qquad x_1 x_2 \ldots x_n = p_n,$$

dont les $n!$ solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les substitutions T du groupe général de n lettres. Nous désignerons par σ une solution particulière quelconque de (S)

$$(\sigma) \qquad x_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et par $T\sigma$ la solution nouvelle donnée par les formules

$$(T\sigma) \qquad Tx_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où Tx_i désigne, suivant l'usage, celle des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$ par laquelle la substitution T remplace x_i. Nous supposerons les racines de $P(x) = 0$ inégales, de sorte qu'étant données la solution σ et une autre solution σ' de (S), il existe une substitution T et une seule pour laquelle $T\sigma$ est identique à σ' : nous dirons alors que T transforme σ en σ'.

L'hypothèse est que le système [S, A], formé de l'ensemble des équations (S) et des équations (A), a au moins une solution. Nous supposerons donc que σ est une telle solution. Il existe alors une famille de substitutions T, dont nous désignerons l'une quelconque par $\overline{T}$, et telles que les diverses solutions de [S, A] soient représentées par le symbole général $\overline{T}\sigma$.

Il pourra arriver que la famille des $\overline{T}$ se réduise à la substitution identique, c'est-à-dire que le système [S, A] n'ait qu'une solution : elle se déterminera alors rationnellement, et l'équation $P(x) = 0$ sera résolue. Écartons ce cas.

L'idée bien simple qui va nous servir, c'est qu'on peut déduire de (A) d'autres systèmes ayant avec (S) le même nombre de solutions communes. En effet, si l'on effectue dans [S, A] une substitution T quelconque, cela n'en change pas le nombre de solutions ; et comme (S) ne change pas, on obtient le système [S, TA], où (TA) désigne le système

$$\text{(TA)} \qquad G_k(Tx_1, \ldots, Tx_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

qui est l'un quelconque des systèmes annoncés. Les solutions de [S, TA] ont pour symbole général $\overline{T}T\sigma$, c'est-à-dire $\overline{T}(T\sigma)$.

La considération du système (TA) pourra être utile s'il a des solutions communes avec [S, A], c'est-à-dire s'il existe une des substitutions $\overline{T}$, soit $\overline{T}_1$, telle que $\overline{T}_1 T\sigma$ soit de nouveau de la forme $\overline{T}\sigma$; ce qui revient à dire que $\overline{T}_1 T$, c'est-à-dire la substitution équivalente à T, suivie de $\overline{T}_1$, est une des transformations $\overline{T}$, que nous appellerons $\overline{T}_2$; ou enfin que l'on a $T = \overline{T}_1^{-1}\overline{T}_2$.

Nous pouvons, en particulier, supposer que l'une des solutions communes est σ : la condition pour qu'il en soit ainsi est alors que T soit de la forme $\overline{T}^{-1}$. De sorte que nous allons considérer, en même temps que les systèmes (S) et (A), les divers systèmes $(\overline{T}^{-1}A)$.

Toutefois l'introduction de ces systèmes ne peut être d'aucune utilité si chacun d'eux admet toutes les solutions de [S, A]. La condition pour qu'il en soit ainsi est que, pour chacune des substitutions $\overline{T}$, les diverses solutions de $[S, \overline{T}^{-1}A]$, qui sont de la forme générale $\overline{T}_\alpha\overline{T}^{-1}\sigma$, soient aussi de la forme $\overline{T}_\beta\sigma$; c'est-à-dire que, à deux substitutions $\overline{T}$ quelconques, $\overline{T}$ et $\overline{T}_\beta$, en corresponde une troisième $\overline{T}_\alpha$ telle que l'on ait

$$\overline{T}_\alpha\overline{T}^{-1} = \overline{T}_\beta \qquad \text{ou} \qquad \overline{T}_\alpha = \overline{T}_\beta\overline{T}.$$

C'est donc que les substitutions $\overline{T}$ forment un groupe (G).

Remarquons de plus que, d'une manière générale, les substitutions qui transforment une solution quelconque $\overline{T}_\alpha\sigma$ de $[S, A]$ en les diverses autres solutions $\overline{T}\sigma$ ont pour symbole général $\overline{T}_\alpha^{-1}\overline{T}$. Dans le cas actuel, ce sont donc encore les substitutions du groupe (G), et nous pouvons dire :

Dans le cas particulier que nous venons de supposer, toutes les solutions de $[S, A]$ *se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les substitutions d'un groupe* (G), *et il y a autant de solutions que de substitutions dans ce groupe.*

Nous donnerons à un tel système le nom de *système automorphe*, parce qu'il ne change pas par les substitutions du groupe (G), et nous dirons que (G) *est le groupe de ce système.*

On remarquera que (S) est lui-même un système automorphe, et que son groupe est le groupe général.

2. Écartons encore ce cas particulier, et imaginons toutes les solutions communes à la fois à $[S, A]$ et à chacun des systèmes $(\overline{T}^{-1}A)$; elles seront de la forme générale $\Theta\sigma$, les Θ constituant une famille de substitutions $\overline{T}$, dont fait partie la substitution identique. La propriété qui définit les Θ, parmi les $\overline{T}$, est la suivante : une substitution Θ quelconque est une substitution $\overline{T}$ telle que, pour chaque substitution $\overline{T}$, soit $\overline{T}_\alpha$, il existe une solution de $(\overline{T}_\alpha^{-1}A)$ qui soit identique à $\Theta\sigma$; c'est-à-dire une autre substitution $\overline{T}$, soit $\overline{T}_\beta$, telle que $\overline{T}_\beta\overline{T}_\alpha^{-1}\sigma$ soit identique à $\Theta\sigma$; ou encore telle que l'on ait

$$(2) \qquad \overline{T}_\beta\overline{T}_\alpha^{-1} = \Theta \qquad \text{ou} \qquad \Theta\overline{T}_\alpha = \overline{T}_\beta.$$

Cette propriété suffit à prouver que l'*ensemble des* Θ *est un groupe* (G). Soient, en effet, Θ et Θ' deux quelconques d'entre elles, et considérons un produit de la forme $(\Theta\Theta')\overline{T}_\alpha$: d'après la propriété de Θ', il se réduit à la forme $\Theta\overline{T}_\beta$; et, par suite, d'après la propriété de Θ, à la forme $\overline{T}_\gamma$. Donc $(\Theta\Theta')$ jouit de la propriété générale (2). Il appartient, du reste, à l'ensemble $\overline{T}$, d'après la propriété de Θ, puisque Θ' est une des $\overline{T}$. Donc $(\Theta\Theta')$ est bien encore une des substitutions Θ, ce qu'il fallait établir.

Les solutions $\Theta\sigma$ sont donc les solutions d'un système automorphe, composé des équations (S) et de toutes les équations des divers systèmes $(\overline{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{A})$, dont fait partie le système donné (A).

3. Si l'on reprenait les mêmes raisonnements, de manière à avoir constamment, pour solution des systèmes considérés, une autre solution de [S, A], par exemple $\mathrm{T}_\alpha\sigma$, il faudrait considérer, au lieu de la famille des $\overline{\mathrm{T}}$, celle des substitutions $\overline{\mathrm{T}}_\alpha^{-1}\mathrm{T}$. Alors, l'une quelconque des substitutions $\mathrm{T}_\alpha^{-1}\Theta\overline{\mathrm{T}}_\alpha$ appartient à cet ensemble, et le produit $(\overline{\mathrm{T}}_\alpha^{-1}\Theta\overline{\mathrm{T}}_\alpha)(\overline{\mathrm{T}}_\alpha^{-1}\overline{\mathrm{T}})$ lui appartient encore. On arriverait donc à un groupe contenant le groupe $\overline{\mathrm{T}}_\alpha^{-1}(\mathrm{G})\overline{\mathrm{T}}_\alpha$. Mais, inversement, le même raisonnement prouve que, si Θ' appartient à ce nouveau groupe, $\overline{\mathrm{T}}_\alpha\Theta'\overline{\mathrm{T}}_\alpha^{-1}$ appartient à l'ancien. On en conclut que *le nouveau groupe est tout simplement le groupe transformé du groupe* (G) *des* Θ *par la substitution* $\overline{\mathrm{T}}_\alpha$.

Il en résulte que les solutions du nouveau système automorphe ont pour symbole général $\Theta\,\overline{\mathrm{T}}_\alpha\sigma$, ou encore qu'il se déduit de l'ancien immédiatement par la substitution $\overline{\mathrm{T}}_\alpha$. De sorte que la résolution de l'un de ces systèmes entraîne celle de l'autre, et que l'on peut indifféremment se borner à considérer l'un ou l'autre. On peut enfin remarquer que, s'ils ont une solution commune, on a une identité de la forme $\Theta_1\overline{\mathrm{T}}_\alpha = \Theta_2$, c'est-à-dire $\overline{\mathrm{T}}_\alpha = \Theta_1^{-1}\Theta_2 = \Theta_3$; mais alors toutes les substitutions $\Theta\overline{\mathrm{T}}_\alpha$ sont des substitutions Θ, et les deux systèmes ont les mêmes solutions.

Plus généralement, deux quelconques des systèmes que l'on peut ainsi obtenir, ou bien ont toutes les mêmes solutions, ou bien n'ont aucune solution commune. Cela revient à dire que la famille des $\overline{\mathrm{T}}$ peut se mettre sous la forme d'un Tableau rectangulaire :

$$\begin{array}{lllll}
1 & \Theta_1 & \Theta_2 & \ldots & \Theta_{\rho-1} \\
\overline{\mathrm{T}}_1 & \Theta_1\overline{\mathrm{T}}_1 & \Theta_2\overline{\mathrm{T}}_1 & \ldots & \Theta_{\rho-1}\overline{\mathrm{T}}_1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\overline{\mathrm{T}}_{\mu-1} & \Theta_1\overline{\mathrm{T}}_{\mu-1} & \Theta_2\overline{\mathrm{T}}_{\mu-1} & \ldots & \Theta_{\rho-1}\overline{\mathrm{T}}_{\mu-1}
\end{array}$$

dont les diverses lignes correspondent aux divers systèmes automorphes entre lesquels se répartissent les solutions de [S, A].

4. La discussion qui précède montre clairement la marche à suivre pour résoudre effectivement le problème posé.

On formera tous les systèmes (TA), et l'on cherchera s'il y en a qui aient avec [S, A] au moins une solution commune : c'est un problème d'élimination, que l'on sait résoudre. Si le système [S, A] a plus d'une solution, on a vu qu'il en est toujours ainsi. Il pourra arriver que tout système (TA) ayant avec [S, A] une solution commune admette toutes les solutions de [S, A] : c'est le cas où [S, A] est automorphe. Les vérifications faites donneront alors toutes les substitutions du groupe de ce système.

Passons au cas général. On retiendra l'un des systèmes (TA) ayant avec [S, A] au moins une solution commune, mais n'admettant pas toutes les solutions de [S, A]. Soit (T_1A) ce système.

On cherchera alors les systèmes (TA) admettant au moins une des solutions du système $[S, A, T_1A]$, obtenu en adjoignant à [S, A] les équations (T_1A). Si chacun de ces systèmes admet toutes les solutions de $[S, A, T_1A]$, celui-ci est l'un des systèmes automorphes dont on a établi l'existence.

Sinon, on retiendra l'un d'eux, (T_2A) par exemple, admettant au moins une des solutions de $[S, A, T_1A]$ sans les admettre toutes; on l'adjoindra à ce système pour former $[S, A, T_1A, T_2A]$, sur lequel on opérera de même; et ainsi de suite.

En continuant ainsi, on arrivera nécessairement à un système $[S, A, T_1A, \ldots, T_kA]$, tel que tout système (TA) qui admet une de ses solutions les admette toutes. C'est l'un des systèmes automorphes entre lesquels se répartissent les solutions de [S, A]. Les autres s'en déduiraient sans difficulté par des tâtonnements analogues aux précédents. Mais il suffit, d'après ce qu'on a vu, d'en avoir un seul.

Toutes les opérations que l'on a eu à effectuer sont rationnelles.

Il résulte, en définitive, de tout cela, que l'*on est toujours ramené, par une suite d'opérations rationnelles, à un système* [S, A'], *de même nature que le système donné* [S, A], *mais automorphe.*

II. — Des systèmes automorphes.

5. Nous devons maintenant étudier les systèmes automorphes. Nous aurons besoin, à cet effet, du théorème suivant :

Étant donné un système d'équations algébriques entre des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$, rationnelles et entières par rapport à ces indéterminées :

$$(3) \qquad F_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p);$$

si une équation de la forme

$$(4) \qquad Q(x_1, \ldots, x_n) = g,$$

où Q *est une fonction rationnelle de ses arguments, admet toutes les solutions du système* (3), *la constante* g *se calcule rationnellement au moyen des coefficients des* F_k *et de* Q.

On écarte, bien entendu, le cas où le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle Q s'annuleraient pour toutes les solutions de (3), puisqu'on pourrait alors prendre pour g une valeur constante arbitraire.

Nous partons de ce résultat connu, que toutes les solutions de (3) se répartissent en systèmes généraux de solutions, dont chacun est défini de la manière suivante : $x_1, \ldots, x_n$ s'expriment rationnellement au moyen d'un certain nombre d'inconnues auxiliaires $y_1, \ldots, y_q$, qui sont liées par une seule équation, algébrique, rationnelle et entière; et les coefficients de ces formules auxiliaires appartiennent au même domaine de rationalité que ceux des F_k.

Exprimons que (4) admet toutes les solutions appartenant à l'un de ces systèmes généraux : nous remplacerons, dans Q, les x_i en fonction des y_j, ce qui donnera, à la place de (4), une équation de même forme

$$\overline{Q}(y_1, \ldots, y_q) = g,$$

qui devra être satisfaite par toutes les solutions d'une équation algébrique unique

$$\mathfrak{F}(y_1, \ldots, y_q) = 0;$$

ce qui revient à dire qu'on est ramené au cas particulier où le système (3) se réduit à une seule équation

$$(3') \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Tout revient donc à démontrer le théorème dans ce cas.

Supposons, à cet effet, que (3′) contienne l'une des indéterminées, x_1 par exemple, au degré m. En nous servant de (3′) nous ferons disparaître de (4) toutes les puissances de x_1 supérieures à la $(m-1)^{\text{ième}}$. Mais alors (4) ne peut plus être une conséquence de (3′) sans être une identité; et comme, par hypothèse, Q n'est pas indéterminé, il se réduit à une constante qui est la valeur annoncée pour g.

6. Considérons maintenant un système automorphe quelconque, c'est-à-dire un système d'équations algébriques rationnelles et entières en $x_1, \ldots, x_n$, dont toutes les solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les substitutions d'un groupe (G); on suppose, de plus, que les solutions de ce système (B) sont en même nombre que les substitutions de (G), c'est-à-dire que chacune de ces solutions ne demeure inaltérée par aucune substitution de (G), autre que la substitution identique.

Supposons que ce système (B) soit le système (3) du numéro précédent, et que $Q(x, \ldots, x_n)$ soit l'une quelconque des fonctions symétriques élémentaires des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$. Si nous remplaçons $x_1, \ldots, x_n$ par l'une des solutions de (3), nous obtenons une certaine valeur g, et l'équation (4) admet alors toutes les solutions de (3). Nous pouvons donc, d'après le théorème précédent, calculer rationnellement la valeur g.

Toutes les solutions de (B) sont donc solutions d'un système

$$(S) \qquad \sum x_i = p_1, \qquad \sum x_i x_k = p_2, \qquad \ldots, \qquad x_1, \ldots, x_n = p_n,$$

que nous pouvons considérer comme connu. Et ce système (B) est de la forme [S, A], considérée au n° 1, à moins qu'il se réduise au système (S) lui-même, ce qui arriverait si (G) était le groupe général.

Écartons ce cas particulier, et supposons, comme nous l'avons déjà fait, que l'équation $P(x) = 0$, équivalente à (S), n'a pas de racines égales. Nous allons montrer que les équations (A), associées à (S) pour définir le système automorphe (B), peuvent être remplacées par une seule équation, de la même nature.

On sait, en effet, former, et cela d'une infinité de manières, une fonction rationnelle $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$ qui admette les seules substitutions du groupe (G), qui ne devienne indéterminée pour aucune solution de S; et telle que, si deux substitutions du groupe général la transforment en deux fonctions algébriquement distinctes, ces fonctions ne prennent des valeurs égales pour aucune solution de (S). C'est ce que nous appellerons, pour abréger, un *invariant caractéristique de* (G), *à discriminant non nul* [relativement à (S)].

Soit alors ω la valeur que prend Ω pour une solution particulière quelconque du système (B). L'équation

$$\Omega(x_1, \ldots, x_n) = \omega \tag{5}$$

admettant toutes les solutions de (B), la quantité ω se calcule rationnellement, d'après le théorème du n° 5. Et il résulte des propriétés de Ω que le système [S, (5)] admet toutes les solutions de (B), et n'en admet pas d'autres. La forme [S, (5)] est donc la forme canonique annoncée pour le système automorphe (B).

On sait qu'en supposant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ indéterminés, les diverses valeurs que prend $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$, pour les diverses solutions de (S), sont racines d'une équation *résolvante* dont les coefficients sont fonctions rationnelles de $p_1, \ldots, p_n$. Les hypothèses faites sur Ω reviennent à dire que, lorsqu'on remplace, dans les coefficients de cette résolvante, $p_1, \ldots, p_n$ par les valeurs particulières correspondant au système (B) donné, cette résolvante ne devient pas identique, et que son discriminant ne s'annule pas. La constante ω est alors une des racines de cette résolvante en Ω du système (S).

Réciproquement, si l'on adjoint, au système (S), une équation de la forme (5), où Ω est un invariant caractéristique de (G), à discriminant non nul, et où ω est racine de la résolvante en Ω, on obtient un système automorphe ayant (G) pour groupe. Car le système [S, (5)] ainsi obtenu, étant compatible à cause du choix de la valeur de ω, est automorphe et a pour groupe (G), en vertu des propriétés de Ω.

Le résultat obtenu peut donc s'énoncer :

La forme générale des systèmes automorphes que nous avons à considérer s'obtient en adjoignant à un système (S) *une équation de la forme* (5), *où* Ω *est un invariant caractéristique, à discriminant non nul, du groupe* (G) *associé au système automorphe du groupe considéré, et où* ω *est une des racines de la résolvante en* Ω *du système* (S).

7. Revenons maintenant au problème du § I. Nous pourrons énoncer les résultats des nos 3 et 4 sous une forme nouvelle en disant :

Il résulte de l'hypothèse faite [à savoir que l'on connaît les équations (A)], que *l'on connaît la valeur* ω *que prend un invariant caractéristique* $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$ *quelconque, à discriminant non nul, d'un certain groupe de substitutions* (G), *quand on y remplace* $x_1, \ldots, x_n$ *par une certaine solution* $x_1 = z_1, \ldots, x_n = z_n$ *du système* (S).

Parmi les solutions du système [S, A] se trouvent toutes celles du système [S, (5)]; et les autres se répartissent entre les divers systèmes obtenus en associant à (S) l'une des équations

$$\Omega(\overline{T}_h x_1, \ldots, \overline{T}_h x_h) = \omega \qquad (h = 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

Plus généralement les solutions de (S) se répartissent entre les divers systèmes obtenus en associant à (S) l'une quelconque des équations

$$\Omega(T x_1, \ldots, T x_n) = \omega, \tag{6}$$

où T est une substitution absolument quelconque. Tous ces systèmes étant résolus dès que l'un d'eux l'est, il est tout à fait équivalent de se donner les équations (A), ou de se donner l'une quelconque des équations (6).

Donc *le fait que l'on connaît les équations* (A) *est entièrement equivalent au fait que l'on connaît la valeur* ω *de l'invariant caractéristique* Ω.

8. Nous plaçant encore au point de vue du § I, nous pouvons supposer que l'on connaisse deux systèmes différents, tels que (A), ayant avec (S) des solutions communes, et chercher à en tirer parti.

Cela reviendra, d'après ce qui précède, à connaître deux relations de la forme (5),

$$(7) \qquad \Omega(x_1, \ldots, x_n) = \omega, \qquad \Omega'(x_1, \ldots, x_n) = \omega',$$

correspondant à deux groupes (G) et (G′). Il pourrait se faire que (S) n'eût pas de solution satisfaisant à la fois aux deux équations (7). Mais il suffirait alors de remplacer la première de ces équations par l'une des équations (6), que l'on choisirait, par tâtonnements, de manière que le système (S) ait une solution commune au moins avec le système formé de cette équation (6) et de $\Omega' = \omega'$.

Supposons donc que le système [S, (7)] a au moins une solution : les autres s'en déduiront évidemment par les substitutions du plus grand sous-groupe (G″) commun à (G) et (G′). On est donc en présence d'un nouveau système automorphe relatif à ce groupe (G″), et caractérisé par une relation nouvelle

$$(8) \qquad \Omega''(x_1, \ldots, x_n) = \omega''.$$

On verrait du reste facilement que les solutions de tout système formé de (S) et de l'une des équations transformées, soit de $\Omega = \omega$, soit de $\Omega' = \omega'$, se répartissent en systèmes formés de (S) et de diverses transformées de (8). Il en résulte que si l'on avait remplacé les équations (7) par deux de leurs transformées, choisies de manière à avoir en commun une solution de (S), on obtiendrait comme équation finale une transformée de (8). De sorte que le fait que l'on connaît la seule relation (8) est entièrement équivalent à l'hypothèse.

Ces conclusions se généralisent immédiatement pour le cas où l'on aurait un nombre quelconque de systèmes (A) admettant des solutions de (S).

III. — Le théorème de Galois.

9. Nous supposons maintenant une équation $P(x) = 0$ donnée, dont les coefficients appartiennent à un certain domaine de rationalité (R) donné.

Nous disons que l'équation est *spéciale* dans [R], s'il lui correspond quelque système de relations [A], dont les coefficients appartiennent à [R], et admettant une solution de (S) sans les admettre toutes. Dans le cas contraire, l'équation est dite *générale* (¹).

Supposons l'équation donnée spéciale, et cherchons à préciser le degré de spécialité de cette équation. D'après les développements précédents, on est en droit de ne considérer, parmi les relations [A] possibles, que celles qui se composent d'une équation unique de la forme [5], et qui admettent une même solution σ de (S).

En d'autres termes, tout revient à caractériser l'ensemble des fonctions $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$, à coefficients rationnels dans [R], et *à discriminants non nuls*, qui prennent une valeur numérique rationnelle quand on y remplace $x_1, \ldots, x_n$ par les valeurs $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ constituant une solution σ de (S).

La discussion du n° 8 prouve que le sous-groupe maximum, commun aux groupes de ces diverses fonctions, a lui-même un invariant caractéristique faisant partie des fonctions considérées. Soit (Γ) ce sous-groupe commun, et $J(x_1, \ldots, x_n)$ cet invariant caractéristique.

Réciproquement, soit $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$ un invariant d'un groupe (G) contenant (Γ). L'équation

$$\Omega(x_1, \ldots, x_n) = \Omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

admet toutes les solutions du système formé de (S) et de l'équation, rationnelle dans [R],

$$J(x_1, \ldots, x_n) = J(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = j. \tag{9}$$

Donc, d'après le théorème du n° 5, $\Omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une valeur numérique appartenant à [R].

On obtient donc un premier énoncé du théorème de Galois :

Si l'on considère toutes les fonctions $\Omega(x, \ldots, x_n)$, rationnelles en $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients rationnels dans [R], ET DONT LE DISCRIMINANT NE S'ANNULE PAS POUR L'ÉQUATION CONSIDÉRÉE, *l'ensemble de celles de ces fonctions qui prennent une valeur numérique rationnelle dans* [R] *quand on*

(¹) Ces dénominations paraissent dues à M. Drach. — *Voir* sa Thèse (Paris, 1898), page 32.

y remplace $x_1, \ldots, x_n$ *par les racines de l'équation donnée, prises dans un ordre déterminé, toujours le même, est identique à l'ensemble de celles de ces fonctions qui ne changent pas quand on y effectue, sur les indéterminées* $x_1, \ldots, x_n$, *les substitutions d'un certain groupe* (Γ).

C'est donc l'équation (9) (ou l'une de ses transformées), c'est-à-dire, en somme, le groupe (Γ) qui lui est associé (ou l'un de ses transformés) qui caractérise la manière particulière dont l'équation donnée est spéciale.

Remarquons que, chacune des fonctions Ω de l'énoncé précédent correspondant à un système automorphe, cet énoncé pourrait se remplacer par le suivant :

L'ensemble des systèmes automorphes, rationnels dans [R], *et qui admettent une même solution de* (S), *est identique à l'ensemble des systèmes automorphes, admettant cette solution, et dont le groupe contient un certain groupe* (Γ). Lorsque la solution de (S) considérée est remplacée par une autre, le groupe (Γ) est remplacé par l'un de ses transformés.

On peut également donner à cet énoncé une forme un peu plus large, en se servant de ce résultat du n° 4, que les solutions de tout système [S, A], rationnel dans [R], se répartissent entre divers systèmes automorphes qui s'en déduisent par des calculs rationnels. On peut donc dire :

A toute équation $P(x) = 0$ *spéciale correspond une famille de systèmes automorphes, rationnels dans* [R], *transformés les uns des autres, et tels que tout système* [S, A], *également rationnel dans* [R], *admet toutes les solutions de l'un quelconque de ces systèmes dès qu'il en admet une.* Le système [S, (9)] est l'un de ces systèmes automorphes.

10. Au point de vue théorique, il est intéressant de montrer que l'énoncé classique du théorème de Galois se déduit facilement de ce qui précède.

Soit d'abord $\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle de $x_1, \ldots, x_n$, dont les coefficients appartiennent à [R]; et supposons que $\mathfrak{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ soit un nombre f faisant aussi partie de [R]. L'équation

(10) $$\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_n) - f = 0$$

constitue un système (A), rationnel dans [R], et admettant la solution σ. Donc, d'après l'énoncé précédent, il admet toutes les solutions de [(S), (9)]. Comme la solution la plus générale de [S, (9)] est

$$\Theta x_i = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{ou} \qquad x_i = \Theta\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Θ étant la substitution générale de (Γ), on aura donc

$$\mathfrak{F}(\Theta\alpha_1, \ldots, \Theta\alpha_n) = f = \mathfrak{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est *numériquement invariante* par les substitutions de (Γ).

Réciproquement, si $\mathfrak{F}$ a cette propriété, l'équation

$$\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

admet toutes les solutions de [S, (9)]; et, d'après le théorème du n° 5, son second membre, c'est-à-dire la *valeur numérique* de $\mathfrak{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, appartient à [R].

On a donc retrouvé les deux parties de l'énoncé de Galois.

11. La théorie qui vient d'être faite pour les systèmes automorphes tels que (S), peut s'étendre à tout système automorphe (B), relatif à un groupe (G).

D'abord on pourra traiter pour un tel système le problème fondamental analogue à celui du § I, et par la même méthode. On arrivera à ce résultat que, de tout système compatible formé de (B) et d'équations telles que (A), on peut déduire, par voie rationnelle, un nouveau système automorphe, relatif à un sous-groupe de (G), et dont (B, A) admet toutes les solutions. Et l'ensemble des solutions de (B, A) se répartit entre divers systèmes automorphes, transformés du précédent par des substitutions de (G).

Considérant ensuite un système automorphe (B) donné, dont les coefficients appartiennent à un domaine de rationalité [R] donné, on dira qu'il est *spécial*, s'il lui correspond quelque système d'équations (A), rationnelles dans [R], et telles que (B, A) ait au moins une solution, sans admettre toutes celles de (B). Dans le cas contraire, le système (B) sera dit *général*.

Avec cette terminologie, le théorème de Galois, pour l'équation $P(x) = 0$, peut s'énoncer :

A toute équation $P(x) = 0$, SPÉCIALE *dans* [R], *correspond une famille, et une seule, de systèmes automorphes, rationnels et* GÉNÉRAUX *dans* [R], *transformés les uns des autres par les substitutions du groupe général, et dont toutes les solutions appartiennent au système* (S) *équivalent à l'équation proposée.*

Et plus généralement :

A tout système automorphe (B), *rationnel et* SPÉCIAL *dans* [R], *correspond une famille, et une seule, de systèmes automorphes, rationnels et* GÉNÉRAUX *dans* [R], *transformés les uns des autres par les substitutions du groupe* (G) *de* (B), *et dont toutes les solutions appartiennent au système* (B) *donné.*

L'un quelconque de ces systèmes généraux a pour groupe un sous-groupe de (G), qui pourra être appelé le *groupe de rationalité* de (B), comme le groupe (Γ) du n° 9 est appelé le *groupe de rationalité* de $P(x) = 0$.

Enfin, la méthode qui a été suivie s'appliquerait encore, sans modification, au cas de systèmes automorphes dans la définition desquels interviendrait, au lieu d'un groupe de substitutions, un groupe formé d'un nombre fini de transformations d'une forme quelconque. Elle s'appliquerait donc, en particulier, au cas d'une équation abélienne, le groupe correspondant étant formé de transformations rationnelles effectuées sur une seule indéterminée.

IV. — Sur la résolution des systèmes automorphes.

12. Il est facile d'interpréter la partie de la théorie de Galois, qui concerne la réduction progressive du groupe d'une équation donnée, comme étudiant les conditions de la résolution des systèmes auto-

morphes les uns par les autres. Pour abréger, nous nous bornerons à marquer la suite des idées, et à énoncer les résultats essentiels.

D'abord, si un système automorphe a pour groupe associé un groupe intransitif, il peut se remplacer par plusieurs systèmes automorphes à moins d'inconnues, et à groupes transitifs. On peut donc supposer qu'on ne considère que des systèmes automorphes à groupes transitifs.

Soient (B) un tel système; (G) son groupe; (G′) un sous-groupe de (G). Si l'on cherche à former un système automorphe (B′), ayant pour groupe (G′), ou l'un des sous-groupes de (G) homologues de (G′), et dont les solutions appartiennent à (B), on est conduit à chercher une racine d'une certaine équation résolvante. Mais cette équation résolvante peut être spéciale, et l'on doit lui substituer un système automorphe résolvant, dont le groupe (G_1) est isomorphe à (G) : ce groupe (G_1) est simple, si (G′) contient un sous-groupe invariant maximum de (G). Si l'on a résolu ce système automorphe résolvant, on peut former rationnellement un système automorphe (B″), dont les solutions appartiennent à (B), et ayant pour groupe associé le plus grand sous-groupe (G″) de (G′) qui soit invariant dans (G).

De là résulte que la résolution de tout système automorphe, à groupe non simple, peut se ramener à la résolution successive d'une suite de systèmes automorphes à groupes simples.

13. Il reste à étudier inversement à quelle condition la résolution d'un système automorphe auxiliaire peut rendre spécial un système automorphe général donné; c'est-à-dire permet de le remplacer par un nouveau système automorphe ayant pour groupe associé un sous-groupe du groupe du système donné. La conclusion bien connue est qu'il n'y a pas lieu d'employer, comme systèmes auxiliaires, d'autres systèmes que les systèmes résolvants considérés dans le numéro précédent.

On prévoit par là que la difficulté du problème de la résolution d'un système automorphe dépend, non du nombre des inconnues, mais de la structure du groupe associé au système.

On peut démontrer, en effet, que, si l'on a un groupe quelconque de substitutions (G_0), isomorphe holoédriquement au groupe (G) du système (B) donné, mais ne dépendant pas nécessairement du même nombre d'indéterminées, on peut former rationnellement un système automorphe (B_0), ayant (G_0) pour groupe associé, et dont la résolution entraînera celle de (B).

CHAPITRE II.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ORDINAIRES.

I. — Problème fondamental.

14. Nous allons voir, dans ce Chapitre, comment la théorie, développée par M. Picard et par l'auteur pour les équations différentielles linéaires ordinaires, peut se calquer sur la théorie du Chapitre précédent. Nous montrerons ainsi le lien entre la méthode suivie par M. Picard et qui se trouve exposée dans son *Traité d'Analyse*, et celle que j'avais autrefois adoptée dans ma Thèse : cette dernière prêtait à certaines objections qui se trouveront levées par les développements qui suivent.

Reprenons donc la marche suivie dans le Chapitre précédent et traitons d'abord le problème fondamental suivant :

Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad P(x) = \frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n(t)x = 0,$$

on suppose connues une ou plusieurs relations différentielles entre n fonctions $x_1 = \alpha_1(t), \ldots, x_n = \alpha_n(t)$ constituant un système fondamental d'intégrales de cette équation. Ces relations, que nous désignons, pour abréger l'écriture, par

$$(A) \qquad G_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

sont supposées rationnelles par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ et par rapport à leurs dérivées. *Quel parti en peut-on tirer pour l'intégration de* $P(x) = 0$?

Ce problème a été traité par Lie ([1]); la solution que nous allons en donner ne diffère de celle de Lie que par le mode d'exposition et la forme sous laquelle nous présenterons les résultats.

Nous remplaçons d'abord l'équation (1) par le système équivalent d'équations différentielles en $x_1, \ldots, x_n$

$$(S) \qquad \Delta p_k(t) + \Delta_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\Delta = \text{déterminant de } \left| x_i \quad \frac{dx_i}{dt} \quad \cdots \quad \frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}} \right| \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Delta_k = \text{déterminant de } \left| x_i \quad \frac{dx_i}{dt} \quad \cdots \quad \frac{d^{n-k-1}x_i}{dt^{n-k-1}} \quad \frac{d^n x_i}{dt^n} \quad \frac{d^{n-k+1}x_i}{dt^{n-k+1}} \quad \cdots \quad \frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}} \right|$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous désignerons par σ une *solution* quelconque de (S)

$$(\sigma) \qquad x_i = \alpha_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire un système de fonctions satisfaisant aux équations (S) et n'annulant pas Δ : ce n'est pas autre chose qu'un système fondamental d'intégrales de (1). Toutes les solutions de (S) se déduisent d'une solution σ quelconque par les diverses transformations du groupe linéaire homogène général, dont la transformation générale sera représentée par

$$(T) \qquad x'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = T x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous désignerons par $T\sigma$ la solution définie par les équations

$$(T\sigma) \qquad T x_i = \alpha_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et par (TA) le système différentiel

$$(TA) \qquad G_k(T x_1, \ldots, T x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

([1]) *Leipziger Berichte*, 11 mai 1891.

obtenu en remplaçant, dans les équations (A), les fonctions inconnues par les expressions $\mathrm{T}x_i$. Il est essentiel de remarquer qu'il n'y a qu'une transformation T faisant passer de la solution σ à une autre solution σ' quelconque. Nous pourrons dire que le système (S) est un *système différentiel automorphe* relatif au groupe linéaire homogène général.

Nous appelons en effet *système automorphe* tout système différentiel dépendant de n fonctions inconnues $x_1, \ldots, x_n$ et de p variables indépendantes $t_1, \ldots, t_p$, dont la solution la plus générale se déduit d'une solution particulière quelconque en effectuant sur $x_1, \ldots, x_n$ la transformation générale d'un groupe fini ou infini; tel, de plus, qu'une solution du système n'admette aucune transformation de ce groupe.

15. Cela posé, on peut reprendre, à peu près mot pour mot, en changeant seulement partout le mot de *substitution* en celui de *transformation linéaire homogène*, les raisonnements du Chapitre précédent. Nous abrégerons donc un peu.

Nous supposons que σ soit une solution de $[\mathrm{S}, \mathrm{A}]$ et nous désignons par le symbole $\overline{\mathrm{T}}\sigma$ toute autre solution de ce système : les $\overline{\mathrm{T}}$ sont donc une certaine famille de transformations T. Nous pouvons écarter le cas où cette famille se réduit à la seule transformation identique : la solution unique de $[\mathrm{S}, \mathrm{A}]$ se calculerait alors rationnellement.

Considérons les systèmes $[\mathrm{S}, \mathrm{TA}]$ qui admettent la solution σ : ce sont les systèmes de la forme $[\mathrm{S}, \overline{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{A}]$. Si chacun d'eux admet toutes les solutions de $[\mathrm{S}, \mathrm{A}]$, c'est que les $\overline{\mathrm{T}}$ constituent un groupe et que $[\mathrm{S}, \mathrm{A}]$ est un système automorphe, relatif à ce groupe. On le constate en vérifiant que le système (TA) ne peut avoir avec $[\mathrm{S}, \mathrm{A}]$ une solution commune sans admettre toutes les solutions de $[\mathrm{S}, \mathrm{A}]$. Et l'on détermine le groupe correspondant en cherchant toutes les transformations T qui laissent $[\mathrm{S}, \mathrm{A}]$ invariant.

Dans le cas général, on verra, en raisonnant comme au n° 3, que les solutions communes à tous les systèmes $[\mathrm{S}, \overline{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{A}]$ sont données par le symbole général $\Theta\sigma$, où Θ est la transformation générale du groupe formé par celles des transformations $\overline{\mathrm{T}}$ telles que tout produit $\Theta\overline{\mathrm{T}}$ soit encore une transformation $\overline{\mathrm{T}}$.

De même, les solutions communes à tous les systèmes [S, TA] admettant une autre solution de [S, A] seraient de la forme

$$(\overline{\mathrm{T}}_\alpha^{-1}\Theta\overline{\mathrm{T}}_\alpha)\sigma',$$

c'est-à-dire correspondraient à un groupe transformé du groupe des Θ par l'une des transformations $\overline{\mathrm{T}}$.

L'ensemble des solutions $\Theta\sigma$, par exemple, est défini par un système automorphe relatif au groupe des Θ, et qu'on obtiendrait facilement si l'on connaissait σ. En effet, en exprimant que le système (TA) admet la solution σ, on obtiendrait certaines équations de conditions entre les constantes arbitraires c_{ij} figurant dans T. En écrivant ensuite que les équations du système (TA) sont des conséquences de ces équations de condition, on obtiendrait un certain nombre d'équations qui, jointes à (S), définiraient le système automorphe cherché.

Les solutions du système [S, A] se répartiront entre une suite finie ou infinie de systèmes automorphes analogues, relatifs aux groupes transformés du groupe des Θ par les diverses transformations $\overline{\mathrm{T}}$.

16. Sans connaître rien que les équations (A) on pourra trouver l'un de ces systèmes de la manière suivante :

Employons de nouveau la méthode des coefficients indéterminés et écrivons que (TA) admet une solution de [S, A] sans les admettre toutes. Cela donnera certaines relations entre les c_{ij}, dont on devra calculer une solution particulière quelconque : à cette solution correspondra un système (T_1A), et l'on considérera le système [S, A, T_1A].

Écrivant de nouveau que (TA) admet au moins une solution de ce système, il se pourra qu'il en résulte que (TA) les admette toutes. Dans ce cas [S, A, T_1A] serait le système automorphe cherché.

Dans le cas contraire, on retiendra les relations entre les c_{ij} qui expriment que (TA) admet une solution de [S, A, T_1A] sans les admettre toutes, et l'on calculera une solution particulière quelconque de ce système de relations entre les c_{ij} : elle correspondra à un système (T_2A) qu'on adjoindra au système [S, A, T_1A], qui sera ainsi remplacé par le système nouveau [S, A, T_1A, T_2A], sur lequel on opérera de même, et ainsi de suite.

Comme un système différentiel compatible ne peut admettre un nombre illimité d'équations du même ordre, algébriquement indépendantes, la suite des opérations se terminera. C'est-à-dire qu'on arrivera à un système $[S, A, T_1 A, \ldots, T_k A]$ tel que tout système (TA) admettant une de ses solutions les admette toutes. C'est le système automorphe cherché.

Soit (Σ) ce système. Les solutions de (S) se répartissent entre les divers systèmes $(T\Sigma)$. Les solutions de $[S, A]$ se répartissent aussi entre divers systèmes $(T\Sigma)$ dont on obtiendra la forme générale en écrivant que $(T\Sigma)$ a comme conséquence les équations (A) : cela donnera des relations entre les c_{ij} dont on aurait à chercher la solution générale.

Au point de vue pratique, il n'y a aucun intérêt à cette recherche, puisque l'intégration d'un des systèmes $(T\Sigma)$ entraîne celle de tous les autres, car on peut obtenir, au moyen de calculs de la même nature que les précédents, les transformations T, qui font passer de l'un de ces systèmes à un autre de ces systèmes, supposés donnés.

La conclusion est, en définitive, que l'*on est toujours ramené à un système* $[S, A']$ *automorphe, dont toutes les solutions appartiennent à* (A), et les opérations nécessaires pour cela sont entièrement rationnelles, sauf celles qui consistent à chercher des solutions particulières de certaines relations algébriques entre certaines constantes.

II. — Des systèmes automorphes à groupes linéaires.

17. Soit (Σ) un système différentiel automorphe, relatif à un groupe (G) linéaire homogène. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les fonctions inconnues, t la variable indépendante supposée unique, et soit $x_1 = \alpha_1(t), \ldots, x_n = \alpha_n(t)$ une solution : nous pourrons supposer, comme cela se présente toujours pour les systèmes automorphes auxquels nous avons été conduits, que $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ sont des fonctions linéairement indépendantes. Cela revient à supposer que l'équation $\Delta = 0$ (*voir* la signification de Δ n° 14) n'est pas une conséquence des équations de (Σ).

Considérons alors l'une quelconque des fonctions différentielles $\frac{\Delta_k}{\Delta}$ (*voir* n° 14), et soit $-p_k(t)$ la fonction de t à laquelle elle se réduit pour $x_1=\alpha_1(t), \ldots, x_n=\alpha_n(t)$. L'équation différentielle

$$\Delta_k+p_k(t)\Delta=0 \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta_k}{\Delta}=-p_k(t) \tag{2}$$

est une conséquence des équations (Σ), puisqu'elle admet toutes les transformations T, et, en particulier, toutes celles de (G), de sorte que, admettant la solution $x_1=\alpha_1(t), \ldots, x_n=\alpha_n(t)$ de (Σ), elle les admet *toutes*. Il en résulte que cette même équation (2), considérée comme équation algébrique en $x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^n x_n}{dt^n}$, est une conséquence algébrique des équations du système (Σ), différentiées jusqu'à l'ordre n. D'où l'on conclut, au moyen du théorème général du n° 5, que la fonction $p_k(t)$ se calcule rationnellement au moyen des coefficients des équations (Σ) et de leurs dérivées.

On peut donc considérer le système (Σ) comme composé d'un système (S) connu et de certaines autres équations (A).

Le groupe (G) peut être considéré comme connu, car c'est, en vertu des hypothèses, le plus grand groupe linéaire homogène laissant (Σ) invariant : c'est de plus un groupe algébrique, et l'on peut faire en sorte que les paramètres figurent rationnellement dans ses équations. On peut, par suite, calculer un invariant différentiel caractéristique de ce groupe, que nous désignerons pour abréger par $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$: cela veut dire que les seules transformations linéaires homogènes que Ω admette sont celles de (G). Nous pouvons supposer de plus [1] que Ω ne devient pas indéterminé pour $x_1=\alpha_1(t), \ldots, x_n=\alpha_n(t)$; et que si $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$ et $\Omega(\mathrm{T}x_1, \ldots, \mathrm{T}x_n)$ ne sont pas identiques, $\Omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\Omega(\mathrm{T}\alpha_1, \ldots, \mathrm{T}\alpha_n)$ ne sont pas non plus des fonctions de t identiques.

On voit alors que le système formé de (S) et de l'équation unique

$$\Omega(x_1, \ldots, x_n)=\Omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{3}$$

admet toutes les solutions de (Σ) et pas d'autres; et il en résulte, par

[1] *Voir*, sur ce point, BEKE, *Math. Annalen*, t. XLIX, p. 573.

un raisonnement semblable à celui que nous avons fait plus haut pour l'équation (2), que le second membre de (3) est une fonction $\omega(t)$ qui se calcule rationnellement au moyen des coefficients des équations (Σ) et de leurs dérivées. On pourra donc toujours supposer les équations (Σ) données comme se composant des équations (S) et d'une équation unique

$$\Omega(x_1, \ldots, x_n) = \omega(t), \tag{4}$$

où Ω est ce que nous pouvons appeler, par analogie et pour abréger, un *invariant différentiel caractéristique de* (G), *dont le discriminant n'est pas nul pour le système particulier* (S).

La fonction $\omega(t)$ est du reste liée, comme l'on sait, aux fonctions $p_k(t)$ par une relation différentielle que l'on sait former et que l'on peut considérer comme une *résolvante en* Ω de l'équation $P(x) = 0$.

18. Revenons maintenant au problème du § I. Nous pouvons dire qu'*il résulte de l'hypothèse faite que l'on connaît la valeur* $\omega(t)$ *que prend un invariant caractéristique* Ω, *à discriminant non nul, d'un certain groupe linéaire homogène* (G), *quand on y remplace* $x_1, \ldots, x_n$ *par une certaine solution du système* [S, A]; de telle sorte que le système [S, (4)] n'admet pas de solution qui n'appartienne à [S, A].

Si l'on supposait connus plusieurs systèmes tels que (A), ayant avec (S), séparément, des solutions communes [c'est-à-dire, d'après ce qui précède, plusieurs équations analogues à (4)], on montrerait d'abord, en raisonnant comme au n° 7, qu'il n'y a nulle restriction à supposer que le système formé de (S) et de toutes ces équations a lui-même des solutions; et que, par suite, on peut remplacer toutes ces équations par une seule de la même forme, où figurera un invariant caractéristique à discriminant non nul du sous-groupe commun aux divers groupes qui correspondent aux diverses équations (4) données.

III. — Théorie rationnelle d'intégration de l'équation linéaire d'ordre n.

19. Nous supposons maintenant une équation particulière $P(x) = 0$ donnée dont les coefficients appartiennent à un certain domaine de

rationalité donné [R]. On doit considérer comme faisant partie de ce domaine toutes les fonctions de t qui se présentent sous la forme de fonctions rationnelles de t, des coefficients $p_k(t)$ et de leurs dérivées, et peut-être de certaines autres fonctions de t connues et de leurs dérivées, les coefficients de ces fonctions rationnelles pouvant être des constantes absolument quelconques.

Il en résulte que, si l'on se trouvait, relativement à cette équation, dans les conditions du problème du § I, les coefficients des équations (A) étant supposés appartenir au domaine (R), les coefficients de tous les systèmes automorphes que nous en avons déduits appartiendraient encore au même domaine; et, par suite, il en serait de même de la fonction $\omega(t)$ qui figurerait dans l'équation (4) correspondant à l'un quelconque de ces systèmes automorphes.

Nous dirons précisément qu'une équation $P(x) = 0$ cesse d'être *générale* pour être *spéciale*, s'il existe quelque système d'équations (A) dont les coefficients appartiennent à [R] et qui admette certaines des solutions du système (S), équivalent à la proposée, sans les admettre toutes. Pour préciser le degré de spécialité de l'équation donnée, il faudra donc caractériser tous les systèmes (A) satisfaisant aux conditions énoncées.

Mais, d'après la remarque que nous venons de faire, jointe aux résultats du n° 16, il suffira de chercher à caractériser l'ensemble des diverses équations de la forme (4) qui satisfont aux mêmes conditions, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions différentielles $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$, à coefficients rationnels dans [R] et à discriminant non nul, qui deviennent, quand on y remplace $x_1, \ldots, x_n$ par les fonctions $x_1 = \alpha_1(t), \ldots, x_n = \alpha_n(t)$, constituant une même solution quelconque de (S), des fonctions de t appartenant elles-mêmes au domaine [R].

Alors les raisonnements que j'ai exposés dans ma thèse deviennent tout à fait rigoureux, tandis qu'ils sont en défaut si l'on ne prend pas le soin d'écarter les fonctions de Ω qui ne sont pas à discriminant non nul et que l'on est en droit de laisser de côté d'après la discussion que nous venons de faire. L'énoncé du théorème général, analogue à celui de Galois, que j'ai donné dans ma thèse, est donc exact, avec cette restriction qu'il ne s'applique qu'aux fonctions Ω à discriminant non nul.

On pourrait, pour arriver au même résultat, employer des raisonnements calqués sur ceux du n° 9. Comme au n° 9, on peut aussi énoncer le théorème fondamental sous une forme un peu différente, en disant :

Il existe un type de groupes linéaires homogènes algébriques, tel que à chacun d'eux correspond un système automorphe, dont les coefficients appartiennent au domaine [R] *et dont toutes les solutions sont solutions de* (S). *Tout système* [S, A], *dont les coefficients appartiennent à* [R], *admet toutes les solutions de l'un quelconque de ces systèmes automorphes, dès qu'il en admet une. Et tout système automorphe, dont le groupe est algébrique et contient celui de l'un de ces systèmes, et qui admet l'une des solutions de ce même système, est rationnel dans* [R].

20. Indiquons enfin comment on pourrait arriver, par la même voie, à l'énoncé de M. Picard.

Soit d'abord $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction rationnelle de $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées, et dont les coefficients appartiennent à [R], et supposons que $\mathcal{F}[\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)]$ soit une fonction $f(t)$ du domaine [R]. L'équation

$$(5) \qquad \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) = f(t)$$

constitue alors un système (A). On en déduirait, par la méthode des § I et II, une équation (4)

$$(4) \qquad \Omega(x_1, \ldots, x_n) = \omega(t),$$

également rationnelle dans [R] et dont le premier membre est un invariant caractéristique, à discriminant non nul, d'un certain groupe linéaire homogène (G); et (5) admet toutes les solutions du système [S, (4)], dont on peut supposer qu'il admet la solution $x_1 = \alpha_1(t), \ldots, x_n = \alpha_n(t)$. Si donc Θ est l'une quelconque des transformations de (G), on a

$$\mathcal{F}[\Theta\alpha_1(t), \ldots, \Theta\alpha_n(t)] = f(t),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}[\Theta\alpha_1(t), \ldots, \Theta\alpha_n(t)] = \mathcal{F}[\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)];$$

de telle sorte que $\mathcal{F}$ est *numériquement invariante* par les transformations de (G). Comme, d'après le premier énoncé, (G) contient le groupe de rationalité de l'équation, correspondant à la solution

$$x_1 = \alpha_1(t), \ \ldots, \ x_n = \alpha_n(t),$$

la première partie du théorème de M. Picard se trouve établie.

Réciproquement, dire que $\mathfrak{F}$ admet numériquement, pour $x_i = \alpha_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, les transformations du groupe de rationalité de l'équation, tel qu'il est défini dans le premier énoncé, c'est dire que l'équation

$$\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{F}[\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)] \tag{6}$$

admet toutes les solutions du système automorphe, rationnel dans [R], correspondant à ce groupe, d'après l'énoncé du numéro précédent. Il suffit alors de se servir du théorème du n° 5, comme on l'a fait au n° 17, pour l'équation (2); et l'on conclut que le second membre de (6) appartient au domaine [R]. C'est la seconde partie du théorème qui restait à établir.

21. Nous bornerons là ces indications sur les équations linéaires. Remarquons seulement que les mêmes méthodes s'appliqueraient à des systèmes automorphes, où figureraient une ou plusieurs variables indépendantes, et relatifs à des groupes de transformations finis, en supposant connue la forme générale des équations qui définissent l'une quelconque des transformations du groupe associé au système considéré.

On sait que l'extension de la théorie de Galois à de tels systèmes a été indiquée par l'auteur et par M. Cotton.

CHAPITRE III.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, LINÉAIRES ET HOMOGÈNES DU PREMIER ORDRE.

I. — Problème fondamental.

22. Nous considérerons dans ce Chapitre une équation de la forme

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P}(x) = \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t, t_1, \ldots, t_n) \frac{\partial x}{\partial t_i} = 0.$$

Tout ce que nous en dirons s'appliquerait, avec des modifications de détails faciles, à un système complet de plusieurs équations de la même forme.

Nous désignerons par σ une *solution* quelconque de (1) : nous entendons par là un système de n intégrales

$$(\sigma) \qquad x_1 = \alpha_1(t, t_1, \ldots, t_n), \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n(t, t_1, \ldots, t_n),$$

qui soient des fonctions de $t_1, \ldots, t_n$ indépendantes. Nous dirons aussi que σ est une solution du système

$$\text{(S)} \qquad \Delta_k + p_k \Delta = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\Delta = \frac{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(t_1 \ldots, t_n)}, \qquad \Delta_k = \frac{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(t_1, \ldots, t_{k-1}, t, t_{k+1}, \ldots, t_n)},$$

et que l'on doit, en réalité, substituer à $\mathrm{P}(x) = 0$ dans tout ce qui suivra. C'est un système automorphe, car ses diverses solutions se déduisent d'une solution σ quelconque par les transformations

$$\text{(T)} \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{T}x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

du groupe ponctuel général, et deux transformations T différentes, appliquées à une même solution σ, donnent toujours deux solutions nouvelles distinctes.

Comme dans les Chapitres précédents, nous désignerons par $T\sigma$ la solution définie par les équations

$$(T\sigma) \qquad Tx_i = \alpha_i(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si cette solution est connue, ainsi que σ, la transformation T est entièrement déterminée.

Cela posé, nous allons reprendre l'analyse des Chapitres précédents et traiter d'abord ce que nous appelons le *problème préliminaire fondamental* (1) :

On suppose connues une ou plusieurs équations aux dérivées partielles entre $x_1, \ldots, x_n$ et leurs dérivées prises par rapport à $t, t_1, \ldots, t_n$, qui sont satisfaites par une solution (σ) de (S). Quel parti en peut-on tirer pour l'intégration de (S)?

Nous représenterons symboliquement par

$$(A) \qquad G_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

les relations données, que nous supposerons, pour plus de netteté, rationnelles et entières par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ et leurs dérivées, ainsi que par rapport à $t, t_1, \ldots, t_n$. Mais on pourrait supposer plus généralement qu'on se place dans un domaine de rationalité quelconque de fonctions des éléments considérés, dans lequel les différentiations et les éliminations seraient, par définition, des opérations rationnelles.

Enfin, nous désignerons par (TA) le système déduit du système (A) en y remplaçant chacune des fonctions $x_1, \ldots, x_n$ par les expressions $Tx_1, \ldots, Tx_n$, et les dérivées par les expressions qui en résultent par différentiation. Nous l'écrirons symboliquement

$$(TA) \qquad G_k(Tx_1, \ldots, Tx_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

23. Ces notations posées, nous considérons le système différentiel [S, A] qui admet par hypothèse la solution σ; et nous pouvons représenter les autres solutions par le symbole général $T\sigma$, les T

(1) Traité par nous, au moyen d'une autre méthode, dans les *Comptes rendus* (t. CXXVIII, p. 544).

étant une famille de transformations T bien déterminée. Cette famille se réduirait à la transformation identique, si [S, A] n'avait d'autre solution que σ : cette solution se calculerait, dans ce cas, rationnellement. Nous écarterons ce cas, où l'intégration de (S) est achevée, tout le problème de l'intégration de (S) étant de trouver une solution quelconque.

Considérons tous les systèmes (TA) qui admettent une même solution de [S, A], la solution σ par exemple. Comme les solutions de [S, TA] ont pour symbole général $\mathrm{T}\bar{\mathrm{T}}\sigma$, les systèmes considérés sont tous ceux pour lesquels T est de la forme $\bar{\mathrm{T}}^{-1}$. Nous allons donc imaginer l'ensemble des solutions communes à tous les systèmes $[S, \bar{\mathrm{T}}^{-1}A]$.

Il pourrait se faire que cet ensemble ne fût autre que l'ensemble des solutions $\bar{\mathrm{T}}\sigma$ de [S, A]. On montrerait, comme au n° 2, que les $\bar{\mathrm{T}}$ forment alors un groupe (G), et que les solutions de [S, A] se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les transformations de ce groupe; de plus, aucune de ces solutions n'admet de transformation de (G) qui la laisse invariante. *Le système* [S, A] *serait donc, dans ce cas, un système automorphe, relatif au groupe* (G).

24. Écartons encore ce cas facile; et soit $\Theta\sigma$ le symbole général des solutions de (S) communes à tous les systèmes $(\bar{\mathrm{T}}^{-1}A)$. Les Θ forment un ensemble de transformations T. On démontrerait, comme au n° 3, que cet ensemble de $\bar{\mathrm{T}}$ est caractérisé par ce fait que c'est le plus grand ensemble de transformations Θ, appartenant à l'ensemble général des $\bar{\mathrm{T}}$, et telles que, pour chacune d'elles, chaque transformation de la forme $\Theta\bar{\mathrm{T}}$ soit encore une transformation $\bar{\mathrm{T}}$. On prouverait encore, comme au n° 3, que cet ensemble des Θ est un groupe (G).

Il nous faut montrer maintenant que *les $\Theta\sigma$ sont les diverses solutions d'un système automorphe*, composé des équations (S) et d'un système (A′) d'autres équations différentielles.

Soit, en effet, (A_1) l'un des systèmes $(\bar{\mathrm{T}}^{-1}A)$, qui admette la solution σ sans admettre toutes celles de [S, A]. Et considérons le système $[S, A, A_1]$ obtenu en adjoignant les équations (A_1) à celles de [S, A].

Il pourrait se faire que tous les systèmes $(\bar{\mathrm{T}}^{-1}A)$ admettent toutes les solutions de $[S, A, A_1]$: ce système serait alors le système automorphe annoncé.

S'il n'en est pas ainsi, soit (A_2) un système $(\bar{T}^{-1}A)$ qui n'admette pas toutes les solutions de $[S, A, A_1]$. Et considérons le système $[S, A, A_1, A_2]$. Si tout système $(\bar{T}^{-1}A)$ en admet toutes les solutions, ce système $[S, A, A_1, A_2]$ est le système automorphe annoncé. S'il n'en est pas ainsi, on continuera la même marche, c'est-à-dire qu'on aura une suite de systèmes

$$[S, A],\quad [S, A, A_1],\quad [S, A, A_1, A_2],\quad \ldots,$$

dont les degrés d'indétermination iront toujours en décroissant. Chacun d'eux admet toutes les solutions $\Theta\sigma$; et cette suite se continue tant qu'on n'arrive pas à un système qui n'admette pas uniquement ces solutions.

Comme ce sont toujours des équations nouvelles du même ordre maximum que l'on ajoute pour passer d'un de ces systèmes au suivant, il résulte des propriétés générales des systèmes différentiels que les opérations indiquées ne peuvent se poursuivre indéfiniment. On arrivera donc à un dernier système qui sera le système automorphe annoncé $[S, A']$.

25. Il est clair que cette suite d'opérations ne pourrait se faire effectivement sans connaître d'abord la solution particulière σ considérée.

Sans nous préoccuper pour le moment de cette difficulté, remarquons que, si l'on reprenait ces calculs en partant d'une autre solution $\bar{T}\sigma$ de $[S, A]$, ils devraient conduire à un système automorphe qui ne serait autre que $[S, \bar{T}A']$, et qui aurait pour groupe associé le groupe $(\bar{T}^{-1}G\bar{T})$. Cela se verrait comme le fait analogue du n° 3.

On en conclut que *les solutions de (S, A) se partagent en une série, finie ou infinie, de systèmes automorphes dont les groupes associés sont du même type et dont la forme générale est $[S, TA']$.*

Du reste, l'ensemble des solutions de (S) lui-même peut se répartir entre les divers systèmes automorphes de la forme $[S, TA']$, deux de ces systèmes ne pouvant avoir de solution commune sans être identiques.

26. Nous allons voir que l'*on peut, au moins jusqu'à un certain point, déterminer la forme générale des systèmes* $[S, \overline{T}A']$, *et déterminer entièrement autant de systèmes* $[S, TA']$ *que l'on voudra. Et cela, par des opérations toutes rationnelles.*

Partons du système $[S, A]$ et formons le système (TA), en laissant pour le moment indéterminées les fonctions φ_i qui figurent dans la transformation (T). Et exprimons que le système $[S, A, TA]$ a au moins une solution : cela donnera un système d'équations différentielles entre les fonctions φ_i qui n'est jamais impossible et que nous appellerons le système auxiliaire (H_0). Il pourra se faire que, pour tout système de fonctions φ_i satisfaisant à ce système (H_0), les équations (TA) soient des conséquences des équations $[S, A]$: c'est le cas où le système $[S, A]$ est automorphe. Nous pouvons l'écarter.

Nous désignerons alors par $\varphi_i = \varphi_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ une solution quelconque du système (H_0); et nous désignerons par (A_1) l'ensemble des équations (TA) correspondantes, où nous aurons remplacé les lettres φ_i par les lettres $\varphi_i^{(1)}$, et d'où nous pourrons faire disparaître un certain nombre des dérivées des $\varphi_i^{(1)}$, en tenant compte de ce qu'elles sont une solution du système auxiliaire (H_0).

Cela fait, nous considérons de nouveau le système indéterminé (TA) et nous écrivons que le système (S, A, A_1, TA) a au moins une solution; ce qui fournira un système d'équations différentielles auxiliaires entre les φ_i, dans les coefficients desquelles figureront les $\varphi_i^{(1)}$. Nous l'appellerons le système (H_1). Il pourra arriver que, pour toute solution du système, (TA) admette toutes les solutions de (S, A, A_1) : celui-ci serait alors, sous le bénéfice des équations (H_0), auxquelles les $\varphi_i^{(1)}$ sont assujettis, un quelconque des systèmes automorphes $[S, \overline{T}A']$ que nous cherchons. C'est ce que nous exprimons en disant que nous possédons dans ce cas la forme générale de ces systèmes automorphes; mais on voit que, pour la déterminer effectivement, il faudrait intégrer le système auxiliaire (H_0).

En poursuivant ainsi, suivant une marche calquée sur celle du n° 24, on arrivera, dans le cas général, au résultat suivant :

On aura une forme générale des équations des systèmes automorphes $[S, \overline{T}A']$, dans laquelle figureront un certain nombre de systèmes de fonctions indéterminées des variables $x_1, \ldots, x_n$:

$$\varphi_1^{(1)}, \quad \varphi_2^{(1)}, \quad \ldots, \quad \varphi_n^{(1)}; \quad \varphi_1^{(2)}, \quad \ldots, \quad \varphi_n^{(2)}; \quad \ldots; \quad \varphi_1^{(r)}, \quad \ldots, \quad \varphi_n^{(r)},$$

qui sont supposées vérifier un certain nombre de relations différentielles, nécessaires et suffisantes pour que les équations en question définissent l'un quelconque de ces systèmes automorphes considérés. Ces relations se répartissent en plusieurs groupes : (H_0), (H_1) ... (H_{r-1}), et les relations (H_{k-1}) lient entre elles les k premiers systèmes des fonctions φ_i indéterminées. De sorte que l'intégration complète des équations (H_0), (H_1), ..., (H_{r-1}) fournirait tous les systèmes $[\mathrm{S}, \mathrm{TA}']$, et qu'une solution quelconque de l'ensemble de ces équations fournirait l'un quelconque de ces systèmes, qu'on pourrait admettre être le système $[\mathrm{S}, \mathrm{A}']$, sur lequel nous avions raisonné d'abord.

II. — Des systèmes automorphes.

27. Pour aller plus loin, il nous faut étudier de plus près les systèmes automorphes, afin de pouvoir introduire leur forme canonique. Cette forme a été donnée par Lie (¹); mais il nous sera utile de la retrouver directement, et d'en établir diverses propriétés. Nous nous servirons à cet effet de quelques résultats, que nous avons démontrés dans un Travail précédent (²), et que nous rappellerons d'abord, aussi brièvement que possible. Ils concernent la théorie générale des groupes continus de transformations, finis ou infinis.

Les équations de définition des transformations finies

$$x'_i = y_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de tout groupe continu (G) peuvent se mettre sous la forme, donnée par Lie,

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{U}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \ldots) = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

(¹) *Leipziger Berichte*, 1895, p. 282 et suivantes.

(²) *Sur la Théorie des groupes continus* (*Annales de l'École Normale*, octobre 1903).

où

$$y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = \frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n} y_k}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}.$$

Les U_s constituent un système complet d'invariants différentiels de (G), quand on considère les y_k comme les variables transformées par le groupe, et les x_i comme non transformées ; les ω_s se déduisent des U_s en y remplaçant les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ respectivement par $x_1, \ldots, x_n$.

Une autre forme des mêmes équations a été donnée par M. P. Médolaghi. Il y intervient un certain groupe auxiliaire infini $\mathfrak{L}$, dont la transformation générale est de la forme

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ u'_s = \mathrm{L}_s(u_1, \ldots, u_p \mid \ldots \varphi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}, \ldots) & (s = 1, 2, \ldots, p); \end{cases}$$

où les φ_i sont des fonctions arbitraires, les $\varphi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}$ désignant leurs dérivées partielles ; et où les L_s sont des fonctions déterminées de leurs arguments.

Si l'on ne garde que la seconde série d'équations (II), on obtient les équations

$$\text{(III)}\quad u'_s = \mathrm{L}_s(u_1, \ldots, u_p \mid \ldots \varphi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

qui sont celles d'un groupe fini $\mathfrak{L}$, si l'on y considère les $\varphi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}$ comme des constantes arbitraires. Résolues par rapport à $u_1, \ldots, u_p$, elles s'écrivent sous une forme analogue

$$\text{(III')}\quad u_s = \mathfrak{L}_s(u'_1, \ldots, u'_p \mid \ldots \varphi_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Le théorème de M. Médolaghi consiste en ce que l'on a identiquement

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \mathrm{U}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}, \ldots) \\ \quad = \mathfrak{L}_s[(\omega_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n) \ldots \mid \ldots y_j^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} \ldots)] \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

Cette forme est utile, quand on a à faire dans les équations (I), ou, plus généralement, dans les équations de la forme

$$\text{(V)}\quad \mathrm{U}_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}, \ldots) = \theta_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

des changements de variables.

1° Si l'on fait dans les U_s, sur les variables indépendantes, une transformation quelconque

$$(\mathrm{T}) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a, en désignant par $y_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ les dérivées partielles des y_k par rapport à ces nouvelles variables, les identités

$$(\mathrm{VI}) \quad \begin{gathered} U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \\ = L_s[\ldots U_h(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \ldots | \ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] \\ (s = 1, 2, \ldots, p), \end{gathered}$$

qui s'écrivent aussi, eu égard à la correspondance des formules (III) et (III'),

$$(\mathrm{VI}') \quad \begin{gathered} U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \\ = \mathfrak{L}_s[\ldots U_h(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \ldots | \ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] \\ (s = 1, 2, \ldots, p). \end{gathered}$$

Il en résulte que le système transformé de (V), par la transformation T effectuée sur les variables indépendantes, c'est-à-dire le système

$$U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \ldots) = \theta_s(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

où l'on remplace les x'_i par leurs valeurs, s'écrit

$$(\mathrm{VII}) \left\{ \begin{array}{l} U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \ldots) = \bar{\theta}_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p), \\ \quad \text{avec} \\ \bar{\theta}_s(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{L}_s[\theta_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \ldots, \theta_p(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) | \ldots, \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] \\ \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, p). \end{array} \right.$$

2° Supposons, en second lieu, que l'on effectue la transformation T sur les variables indépendantes; et posons

$$\bar{y}_k = \varphi_k(y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad \bar{y}_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \frac{\partial \bar{y}_k^{\beta_1 + \ldots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}.$$

Par la comparaison des formules (III), (III') et (IV), le système (V) s'écrit d'abord, à volonté,

$$(\mathrm{V}')\quad \mathfrak{L}_s[\omega_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n)|\ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots] = \theta_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

ou

$$(\mathrm{VI}'')\quad \mathrm{L}_s[\theta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \theta_p(x_1, \ldots, x_n)|\ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots] = \omega_s(y_1, \ldots, y_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

Le système transformé, que nous considérons maintenant, s'écrit donc

$$\mathrm{L}_s[\theta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \theta_p(x_1, \ldots, x_n)|\ldots \bar{y}_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots] = \omega_s(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

Étudions les premiers membres. Nous considérons les transformations du groupe $\mathfrak{L}$ suivantes :

$$\begin{cases} x'_i = y_i(x_1, \ldots, x_n) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ u'_s = \mathrm{L}_s(u_1, \ldots, u_p|\ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots) & (s = 1, 2, \ldots, p); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_i = \varphi_i(x'_1, \ldots, x'_n) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ u''_s = \mathrm{L}_s(u'_1, \ldots, u'_p|\ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots) & (s = 1, 2, \ldots, p); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_i = \bar{y}_i(x_1, \ldots, x_n) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ u''_s = \mathrm{L}_s(u_1, \ldots, u_p|\ldots \bar{y}_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots) & (s = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

Dans les conditions actuelles, la troisième est le produit des deux premières, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$\mathrm{L}_s(u_1, \ldots, u_p|\ldots \bar{y}_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots) = \mathrm{L}_s[\ldots \mathrm{L}_h(u_1, \ldots, u_p|\ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots)\ldots|\ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

Donc on a

$$\mathrm{L}_s[\theta_1(x_1, \ldots, x_n)\ldots|\ldots \bar{y}_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots] = \mathrm{L}_s\{\ldots \mathrm{L}_h[\theta_1(x_1, \ldots, x_n)\ldots|\ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots]\ldots|\ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots\}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

De sorte que le système transformé s'écrira

$$\mathrm{L}_s\{\ldots \mathrm{L}_h[\theta_1(x_1, \ldots, x_n)\ldots|\ldots y_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots]\ldots|\ldots \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots\} = \omega_s(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

c'est-à-dire, à cause de l'équivalence de (III) et (III'),

$$
(\mathrm{VIII})\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{L}_s[\theta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \theta_p(x_1, \ldots, x_n) | \ldots y_j^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \ldots] = \overline{\omega}_s(y_1, \ldots, y_n) \\
\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, p); \\
\quad \text{ou bien} \\
\mathfrak{L}_s[\overline{\omega}_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \overline{\omega}_p(y_1, \ldots, y_n) | \ldots y_j^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \ldots] = \theta_s(x_1, \ldots, x_n) \\
\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, p); \\
\quad \text{avec} \\
\overline{\omega}_s(y_1, \ldots y_n) = \mathfrak{L}_s[\omega_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \ldots, \omega_p(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) | \ldots \varphi_j^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \ldots] \\
\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, p).
\end{array}\right.
$$

3° Si l'on cherche enfin les équations de définition du groupe transformé du groupe (G) par la transformation T, on les obtient en combinant les deux résultats précédents. Ce sont donc celles qui se déduisent des équations de (G), écrites sous la forme de Médolaghi, c'est-à-dire

$$
(\mathrm{IX}) \quad \mathfrak{L}_s[\omega_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \omega_p(y_1, \ldots, y_n) | \ldots y_j^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \ldots) = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, p),
$$

ou

$$
(\mathrm{IX}') \quad \mathrm{L}_s[\omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_p(x_1, \ldots, x_n) | \ldots y_j^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \ldots) = \omega_s(y_1, \ldots, y_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, p),
$$

en y remplaçant les fonctions ω_s par celles qui en résultent par les formules

$$
(\mathrm{X}) \quad \overline{\omega}_s(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{L}_s[\omega_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \ldots, \omega_p(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) | \ldots \varphi_j^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \ldots] \quad (s = 1, 2, \ldots, p),
$$

où les lettres φ_j désignent, par abréviation, les fonctions $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$.

Rappelons enfin quelle est la signification précise de ce nouveau groupe (G'), que nous désignons par $[\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{G})\mathrm{T}]$. L'une des transformations de (G) étant

$$
y_i = \Theta x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),
$$

la transformation correspondante de (G') est

$$
\mathrm{T} y_i = \Theta \mathrm{T} x_i, \qquad \text{ou} \qquad y_i = [\mathrm{T}^{-1} \Theta \mathrm{T}] x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).
$$

28. Revenons aux systèmes automorphes auxquels nous avons été conduits au paragraphe précédent. Et soit [S, A′] l'un d'eux. Nous pourrons d'abord, au moyen des relations $P(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, qui équivalent au système (S), faire disparaître des équations (A′) toutes les différentiations par rapport à t, qui n'y figurera plus dès lors que comme un paramètre arbitraire. Supposons que cela soit fait.

Soit alors

$$(\sigma) \qquad x_i = \alpha_i(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

une solution de ce système automorphe. Nous supposons expressément qu'il y en a dans lesquelles les fonctions α_i sont indépendantes, c'est-à-dire que les équations du système n'ont pas comme conséquence la relation $\Delta = 0$. Cela concorde du reste avec les hypothèses faites au paragraphe précédent.

Faisons alors, dans le système [S, A′], le changement de variables

$$(2) \qquad t' = t, \qquad t'_i = \alpha_i(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (S) se réduira à

$$(\overline{S}) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial t'} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et les équations (A′) à un système $(\overline{A'})$, admettant la solution

$$x_i = t'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et dont les autres solutions se déduiront de celle-là par les transformations du groupe (G), associé au système considéré : les équations de l'une quelconque de ces transformations ne devront, bien entendu, pas contenir le paramètre t (ou t'). Du reste, si l'on suppose que le système est sous forme complètement intégrable, en différentiant les équations $(\overline{A'})$ par rapport à t', en tenant compte des équations (S), c'est-à-dire en considérant toujours t' comme un paramètre, on ne devra obtenir que des conséquences des équations (A′). D'où l'on conclut que l'on peut écrire les équations (A′) de telle manière que t n'y figure pas.

On voit donc que si, n'ayant plus d'égard à la variable t', on considère les diverses solutions de $(\overline{A'})$ comme définissant des transformations qui remplacent les variables $t'_1, \ldots, t'_n$ par les variables $x_1, \ldots, x_n$, ces équations $(\overline{A}')$ ne sont pas autre chose que les équations de définition des transformations finies du groupe (G); et qu'elles ont par suite la forme (I) (n° 27), aux notations près employées pour désigner les variables, c'est-à-dire

$$(\overline{A}')\quad U_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \omega_s(t'_1, \ldots, t'_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

où l'on a posé

$$x_k'^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \frac{\partial^{\beta_1 + \ldots + \beta_n} x_k}{\partial t_1'^{\beta_1}, \ldots, \partial t_n'^{\beta_n}}.$$

Nous n'avons plus maintenant qu'à faire, en sens inverse, le changement de variables (2). Dans les équations $(\overline{S})$, cela redonnera le système (S); dans les équations $(\overline{A}')$, cela donnera, en vertu des formules (VIII) du numéro 27,

$$(A')\quad U_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

avec

$$(3)\quad \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n) = \mathfrak{L}_s[\omega_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \omega_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \ldots \alpha_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] \\ (s = 1, 2, \ldots, p),$$

ou encore, à cause des identités (IV) du numéro 27,

$$(4)\quad \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n) = U_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p);$$

ces dernières formules résultant du reste, immédiatement, de ce que (σ) est solution de (A').

Nous avons obtenu ainsi la forme canonique annoncée pour les équations (A') : *les invariants fondamentaux qui figurent dans les équations de définition des transformations finies de* (G), *sous leurs formes de Lie, sont égales à des fonctions connues des variables indépendantes* $t, t_1, \ldots, t_n$.

Aux notations près, on a donc un système tel que le système (V) du numéro précédent, puisque t joue le rôle de paramètre. On pourra donc employer les formes équivalentes (V′) et (V″), c'est-à-dire ici

$$(5)\quad \mathfrak{L}_s[\ldots \omega_h(x_1, \ldots, x_n) \ldots | \ldots x_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)} \ldots] = \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

et

$$(6) \quad \mathbf{L}_s[\ldots \theta_h(t, t_1, \ldots, t_n)\ldots | \ldots x_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}\ldots] = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

De plus, si l'on transforme le système [S, A′] par la transformation

$$(\mathrm{T}) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

effectuée sur les variables dépendantes, on obtiendra, en vertu des formules (VIII) et (X) du numéro 27, le système [S, TA′], où *les équations* (TA′) *se déduiront des équations* (5) *ou* (6), *en y remplaçant les fonctions* ω_s *qui figurent dans les équations de définition du groupe* (G), *prises sous la forme de Médolaghi, par les fonctions* $\overline{\omega}_s$, *données par les formules* (X), *qui donneraient, sous la même forme, le groupe* T^{-1} (G) T, *et en conservant les mêmes fonctions* $\theta_s(t, t_1, \ldots, t_n)$.

29. Quand un système automorphe [S, A′] est donné sous une forme quelconque, pour le ramener à la forme canonique du numéro précédent, on peut opérer comme il suit. On cherchera les équations de définition du groupe (G) associé à ce système. Il résulte des raisonnements du n° 28 et de la propriété fondamentale des équations de définition d'un groupe, que c'est le plus grand groupe de transformations T laissant le système donné invariant. Ces équations de définition s'obtiendront donc par des calculs rationnels, et l'on pourra, par des calculs rationnels aussi, les ramener à leur forme de Lie, c'est-à-dire calculer les fonctions invariantes fondamentales U_s. Il n'y a plus qu'à les prendre pour variables nouvelles à la place des dérivées ou fonctions inconnues par rapport auxquelles on peut résoudre les équations (A′), supposées débarrassées, comme on l'a expliqué, des dérivations par rapport à t, pour obtenir les équations canoniques cherchées; et cette dernière partie du calcul n'exige encore que des éliminations, c'est-à-dire des opérations rationnelles.

On verrait encore très nettement que les $\theta_s(t, t_1, \ldots, t_n)$ font partie du domaine de rationalité dans lequel on opère, en appliquant le théorème du n° 5, comme on le fera au n° 42 du Chapitre suivant.

Appliquons ce résultat au système [S, A′] auquel a conduit l'analyse du paragraphe précédent; on peut le supposer ramené à la forme (5), où les ω_s sont en évidence. Et il résulte du résultat obtenu à la fin du numéro précédent, sur les systèmes [S, TA′], que les fonctions auxiliaires $\varphi_i^{(k)}$, introduites au n° 26, ne figureront dans ces équations (5) que dans les expressions des fonctions ω_s; et que, au contraire, les fonctions $\theta_s(t, t_1, \ldots, t_n)$ seront entièrement connues.

On pourra donc représenter les divers systèmes [S, TA′] *de la manière suivante, plus simple que celle du n° 26.* On gardera les équations (5) obtenues, mais en y considérant les fonctions ω_s comme des fonctions indéterminées. En écrivant que le système [S, A] donné admet toutes les solutions du système [S, (5)], on obtiendra un système unique d'équations différentielles auxiliaires (II), définissant les systèmes de fonctions ω_s correspondant aux systèmes [S, TA′], c'est-à-dire définissant les divers groupes $\overline{\mathrm{T}}^{-1}(\mathrm{G})\overline{\mathrm{T}}$ associés à ces systèmes.

30. Il reste à montrer que *l'on peut déterminer autant de systèmes* [S, TA′] *que l'on voudra;* c'est-à-dire déterminer les fonctions ω_s qui figurent dans les équations (5) ou (6), de manière que ces équations admettent une solution de (S), arbitrairement choisie.

Nous nous donnons pour cela les fonctions

$$x_1^0 = \mathfrak{F}(t_1, \ldots, t_n), \qquad \ldots, \qquad x_n^0 = \mathfrak{F}_n(t_1, \ldots, t_n), \tag{7}$$

auxquelles se réduisent, pour une valeur arbitraire $t = t_0$, les fonctions $x_1, \ldots, x_n$, qui constituent la solution considérée. On peut supposer que ces équations (7) peuvent se résoudre par rapport à $t_1, \ldots, t_n$, puisque t_0 est arbitraire; soient

$$t_i = \beta_i(x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

les formules obtenues par cette résolution; elles permettent de calculer les dérivées de x_i^0, en fonction également de $x_1^0, \ldots, x_n^0$, par des formules

$$x_j^{0\,\delta_1 \ldots \delta_n} = \gamma_{j\delta_1 \ldots \delta_n}(x_1^0, \ldots, x_n^0). \tag{9}$$

Les conditions qui expriment que (6) admet la solution considérée sont donc

$$\omega_s(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \mathrm{L}_s[\ldots \theta_h(t_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \ldots | \ldots \gamma_{j\delta_1 \ldots \delta_n}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \ldots] \tag{10}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

c'est-à-dire, puisque les $x_1^0, \ldots, x_n^0$ sont indépendants,

$$(11)\quad \begin{gathered}\omega_s(x_1, \ldots, x_n) \\ = L_s\{\ldots\theta_h[t_0, \beta_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \beta_n(x_1, \ldots, x_n)]\ldots|\ldots\gamma_l|\delta_1, \ldots, \delta_n(x_1, \ldots, x_n)\ldots\}, \\ (s = 1, 2, \ldots, p).\end{gathered}$$

Les formules deviennent très simples, si la solution considérée est une *solution principale*, c'est-à-dire si l'on a

$$(12)\qquad x_1^0 = t_1, \quad \ldots, \quad x_n^0 = t_n.$$

En effet, on a à faire dans les équations (5), $x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n$. Et, comme leurs premiers membres ne sont autres que les fonctions U_s, ils deviennent, d'après la définition même des ω_s, les fonctions $\omega_s(t_1, \ldots, t_n)$. On a donc les conditions

$$\omega_s(t_1, \ldots, t_n) = \theta_s(t_0, t_1, \ldots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

ou encore, en changeant les notations,

$$(13)\qquad \omega_s(x_1, \ldots, x_n) = \theta_s(t_0, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces calculs ne s'appliquent plus, si (G) se réduit à la transformation identique, c'est-à-dire si le système [S, A'] n'a qu'une solution, ou, plus généralement, si (G) n'est plus un groupe continu, c'est-à-dire si le système [S, A'] cesse d'être un système différentiel, pour devenir un système algébrique.

Examinons ce cas particulier : les équations du système [S, A'] pourront se mettre sous une forme telle que les dérivées des x_i n'y figurent plus. Ce seront alors des équations rationnelles en $t, t_1, \ldots, t_n$ dont les coefficients dépendent rationnellement de $x_1, \ldots, x_n$, des fonctions $\varphi_i^{(k)}$ introduites dans les calculs du n° 26, et de leurs dérivées. Elles détermineraient pour $x_1, \ldots, x_n$, si l'on connaissait l'expression des fonctions $\varphi_i^{(k)}$, des fonctions de $t, t_1, \ldots, t_n$, indépendantes par rapport à $t_1, \ldots, t_n$. Donc, maintenant, elles doivent se réduire à un système d'équations algébriques en $t_1, \ldots, t_n$, déterminant ces indéterminées; et l'on pourra réduire ce système, par la théorie générale de l'élimination, à la forme suivante : une équation unique (R) entre t et t_1; et des formules (R') donnant rationnellement $t_2, \ldots, t_n$ en fonction de t et t_1, et ne contenant t_1 qu'à un degré inférieur à celui auquel il figure dans l'équation précédente. Comme, du reste, les systèmes [S, TA′] se déduisent de [S, A′], en faisant, dans les coefficients de celui-ci, des transformations ne portant que sur $x_1, \ldots, x_n$, on voit que si [S, A′] doit donner pour (R) une équation en t et t_1 décomposable, il en sera de même quand on laissera dans les coefficients les arbitraires $\varphi_i^{(k)}$ et leurs dérivées, en tenant compte seulement des équations auxiliaires (H_j) qui lient ces arbitraires. De sorte que le système [S, A′], même sous cette forme en partie indéterminée, se décomposera en plusieurs autres, que l'on traitera séparément.

Nous pouvons donc supposer l'équation (R) irréductible en t et t_1. Désignons alors par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ les coefficients de (R) et des (R′), qui sont certaines fonctions connues de $x_1, \ldots, x_n$, des $\varphi_i^{(k)}$ et de leurs dérivées. Nous écrirons l'un d'eux, symboliquement,

$$\lambda_h = \lambda_h[x_1, \ldots, x_n \mid \ldots \varphi_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) \ldots].$$

Le groupe (G) est défini comme le plus grand groupe de transformations, qui, effectuées sur le système [(R), (R′)], laissent ce système invariant.

Sous la forme où l'on a ramené ce système, cette invariance exige que chacune de ces fonctions λ_h demeure invariante. Le groupe (G) est donc défini par les équations

$$\lambda_h[x_1, \ldots, x_n \mid \ldots \varphi_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)] = \lambda_h[x'_1, \ldots, x'_n \mid \ldots \varphi_i^{(k)}(x'_1, \ldots, x'_n) \ldots]$$
$$(p = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Il en résulte que, parmi les λ_h, il y en a au moins n d'indépendants; et que, si on les prend pour inconnues auxiliaires, leurs valeurs en $t, t_1, \ldots, t_n$ sont uniques, aussitôt que les $\varphi_i^{(k)}$ sont choisis. D'ailleurs les relations qui peuvent lier les λ_h sont indépendantes de la solution particulière adoptée pour $\varphi_i^{(k)}$, car le passage d'une solution à une autre se fait, comme il a été remarqué plus haut, par une transformation effectuée sur $x_1, \ldots, x_n$, dans les λ_h eux-mêmes. Ces relations ne peuvent donc être que des conséquences des équations auxiliaires (H_j), et sont par conséquent connues. En plus de ces relations, les λ_h ne sont liés à $t, t_1, \ldots, t_n$ que par les équations (R) et (R′). On peut donc, sans avoir à déterminer les $\varphi_i^{(k)}$, calculer les expressions $\theta_h(t, t_1, \ldots, t_n)$ des λ_h en fonction de $t, t_1, \ldots, t_n$. Et, d'après la remarque faite plus haut, il y en aura n d'indépendantes, c'est-à-dire qui donneront un système d'intégrales de l'équation $P(x) = 0$. Dans ce cas, celle-ci s'intègre donc rationnellement ([1]).

Des considérations analogues s'appliquent au cas où (G) est un groupe continu, et montrent comment on pourra opérer pour ramener le système [S, A′] à la forme canonique de Lie

$$U_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Les premiers membres dépendront des $\varphi_i^{(k)}$ et de leurs dérivées, mais la forme des fonctions $\mathfrak{L}_s$ correspondantes n'en dépend pas; et nous avons montré dans le Mémoire déjà cité comment on obtient ces fonctions, connaissant les U_s.

Du mode de calcul indiqué résulte, en particulier, que, si (G) est intransitif, les valeurs de ses invariants d'ordre zéro en fonction de $t, t_1, \ldots, t_n$ sont connues rationnellement.

III. — Discussion des résultats obtenus.

31. La différence essentielle avec les résultats analogues des Chapitres précédents est l'intervention de ce système (H) auxiliaire, dont on est porté à penser qu'il ne pourra être intégré en général. Nous montrerons, par un exemple simple, qu'il en est bien ainsi.

Auparavant, voyons comment on vérifiera, en général, que le système [S, A] donné est complètement intégrable. On pourra supposer que les équations (A) ont été débarrassées des différentiations par rapport à t, et qu'elles forment, par rapport aux autres variables, un système complètement intégrable.

Cette première vérification étant faite, imaginons que l'on fasse, dans le système [S, A], le changement de variables

$$t' = t, \qquad t'_i = f_i(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

([1]) Si l'on veut calculer une solution principale, on aura à résoudre une équation algébrique ayant son groupe de Galois isomorphe au groupe (G).

dans lequel les f_i sont les fonctions qui constituent une solution quelconque de (S). Le système (S) se réduira à

$$(\overline{\mathrm{S}}) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial t'} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et la condition d'intégrabilité cherchée sera que, si l'on différentie les équations $(\overline{\mathrm{A}})$, provenant des équations (A), par rapport à t' considéré comme un paramètre, on n'obtienne que des conséquences des équations $(\overline{\mathrm{A}})$. En d'autres termes, la condition est que le système $(\overline{\mathrm{A}})$ admette la transformation infinitésimale $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t'}$.

Refaisons maintenant le changement de variables inverse. La transformation infinitésimale $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t'}$ se change identiquement en

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t, t_1, \ldots, t_n)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t_i};$$

de sorte que la condition cherchée est donc : 1° que les équations (A) forment un système complètement intégrable, relativement aux variables $t_1, \ldots, t_n$ seules; 2° que ce système (A) admette la transformation infinitésimale P(F), que l'on devra prolonger en considérant $x_1, \ldots, x_n$ comme des variables non transformées.

32. L'exemple que nous allons traiter est le suivant : nous prenons pour équation (1) l'équation

$$(14) \qquad \mathrm{P}(x) = \frac{\partial x}{\partial t} + t_1 \mathrm{M}(t)\frac{\partial x}{\partial t_1} = 0,$$

où M est une fonction rationnelle quelconque, et pour système (A) l'équation unique

$$(15) \qquad t_1\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + t_1^2\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^3 + \frac{\partial x}{\partial t_1} f(x) = 0,$$

où $f(x)$ est également une fonction rationnelle quelconque.

La transformation P(F) prolongée est ici, en posant

$$\frac{\partial x}{\partial t_1} = x'_1, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} = x''_1, \qquad \ldots,$$

$$(16) \qquad \mathrm{P}(\mathrm{F}) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + t_1 \mathrm{M}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t_1} - x'_1 \mathrm{M}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'_1} - 2x''_1 \mathrm{M}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x''_1}.$$

Comme l'équation (15) ne contient pas t, exprimer qu'elle admet la transformation (16) revient à exprimer qu'elle admet la transformation

$$t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - x'_1 \frac{\partial F}{\partial x'_1} - 2x''_1 \frac{\partial F}{\partial x''_1},$$

c'est-à-dire qu'elle est homogène, en considérant t_1 comme de degré 1, x'_1 comme de degré -1, et x''_1 comme de degré -2. La vérification est immédiate : le système (15), (16) est complètement intégrable.

Appliquons la méthode du n° 26. Nous faisons dans (15) la transformation indéterminée

$$x' = \varphi(x). \tag{17}$$

Cela donne l'équation nouvelle

$$t_1 \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + \varphi'^2 t_1^2 \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^3 + \frac{\varphi''}{\varphi'} t_1 \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^2 + f(x)\frac{\partial x}{\partial t_1} = 0,$$

qu'on peut remplacer, pour l'associer avec (15), par

$$(\varphi'^2 - 1) t_1^2 \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^3 + \frac{\varphi''}{\varphi'} t_1 \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1} = -\frac{\varphi''}{\varphi'(\varphi'^2 - 1)} = \omega(x). \tag{18}$$

La condition pour qu'elle soit compatible avec (15) est

$$\omega' + \omega^2 + f(x) - 1 = 0; \tag{19}$$

et, si elle est remplie, (15) est une conséquence de (18). Il est visible que les opérations doivent être arrêtées là. L'équation (18) constitue avec (14) le système automorphe $[S, \overline{T}A']$ quelconque de la théorie générale, le système auxiliaire (II) étant ici l'équation (19). Or cette dernière est une équation de Riccati ne présentant aucune particularité : le résultat annoncé est donc vérifié.

Nous devons donc conclure que *le véritable parti à tirer, dans notre problème, de la connaissance du système* (A), *ne doit pas être cherché dans l'intégration même de ce système, mais dans celle des systèmes plus* *simples, automorphes, qu'on en peut déduire rationnellement;* et, par exemple, dans celle des systèmes de la forme [1]

$$(20) \qquad L_s[\ldots \theta_h(t, t_1, \ldots, t_n), \ldots | \ldots x_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}] = \theta_s(t_0, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

dont chacun admet comme solution une solution principale de (S) dont on connaît les données initiales. Si, par hasard, cette solution principale appartenait à (A), toutes les solutions du système (20) lui appartiendraient aussi.

En d'autres termes, *c'est par la détermination des fonctions*

$$\theta_s(t, t_1, \ldots, t_n),$$

servant à construire les systèmes (20), *qu'on utilisera le plus avantageusement la connaissance des équations* (A).

33. En ayant égard à la forme (9) des systèmes (TA') on peut définir les fonctions $\theta_s(t, t_1, \ldots, t_n)$, que nous avons appris à calculer rationnellement, de la manière suivante :

Ce sont les fonctions de $t, t_1, \ldots, t_n$ *auxquelles se réduisent les invariants fondamentaux de l'un quelconque des groupes ponctuels* (G) *en* $x_1, \ldots, x_n$ *faisant partie d'un même type, lorsqu'on y remplace* $x_1, \ldots, x_n$ *par les fonctions de* $t, t_1, \ldots, t_n$ *constituant l'une des solutions de* (S). Pour que ces fonctions restent les mêmes pour les divers groupes (G) du même type, il faut que, pour chacun d'eux, la solution de (S) employée fasse partie d'une famille de solutions, associée à ce groupe.

Si l'on considérait un groupe (G) déterminé, ayant pour équations de définition les équations

$$(21) \qquad U_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}, \ldots) = \omega_s(t_1, \ldots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

---

(1) D'après la nature des calculs à faire pour obtenir les L_s et les $\mathfrak{L}_s$, quand on connaît les U_s, les coefficients des L_s et des $\mathfrak{L}_s$, considérés comme fonctions des $x_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}$, dont ils dépendent rationnellement, peuvent être des fonctions *algébriques*, non rationnelles, des θ_h. Mais il sera toujours facile de modifier les équations (20) de manière à les rendre entièrement rationnelles, par de nouvelles éliminations.

où

$$x_k^{(\beta_1,\dots,\beta_n)} = \frac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_n} x_k}{\partial t_1^{\beta_1}\dots\partial t_n^{\beta_n}},$$

toutes les fonctions $\theta_s(t, t_1, \dots, t_n)$ obtenues en substituant dans les premiers membres de ces équations les diverses solutions de (S) satisferaient à un même système, qu'on peut appeler un *système résolvant* de (S). Nous allons indiquer comment on déterminera ce système résolvant : le résultat auquel nous parviendrons montrera qu'il est le même pour tous les groupes (G) d'un même type.

Le système cherché doit évidemment s'obtenir en écrivant que le système formé de (S) et des équations

$$(22)\quad U_1(x_1, \dots, x_n, \dots, x_k^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}, \dots) = \theta_s(t, t_1, \dots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \dots, p)$$

est complètement intégrable. Pour obtenir ces conditions, nous n'aurons qu'à appliquer la règle obtenue au n° 31.

Nous avons d'abord à écrire les conditions d'intégrabilité des équations (22), considérées seules, et t étant considéré comme un simple paramètre. En vertu de la méthode de recherche des groupes d'un même type, que nous avons exposée dans un précédent Mémoire [1], on obtient ainsi un système (ϖ) d'équations différentielles liant les fonctions θ_s aux arguments $t_1, \dots, t_n$, qui définit l'ensemble des groupes du même type que (G) : en ce sens que, si l'on remplace dans les équations de (G), prises sous la forme de Medolaghi,

$$\mathcal{L}_s[\dots\omega_h(x_1, \dots, x_n)\dots|\dots x_j^{(\delta_1,\dots,\delta_n)}\dots] = \omega_s(t_1, \dots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \dots, p),$$

les fonctions ω_h par les divers systèmes de fonctions θ_h, solutions de ce système (ϖ), on obtient précisément les équations de définition des divers groupes semblables à (G). Nous pouvons considérer ce système (ϖ), définissant les groupes du type de (G), comme calculé : la solution générale en est du reste connue, (G) étant connu.

A ce système (ϖ) nous devons maintenant, d'après la règle du n° 31, adjoindre les relations obtenues en écrivant que le système (22) admet

---

[1] *Sur la Théorie des groupes continus* (*Annales de l'École Normale*, 1903).

la transformation infinitésimale $P(F)$. Or, pour calculer $P(U_s)$, nous remarquons que le terme $\frac{\partial F}{\partial t}$ de $P(F)$ n'a pas à intervenir; nous pouvons donc remplacer $P(F)$ par

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t, t_1, \ldots, t_n) \frac{\partial F}{\partial t_i},$$

et t ne figurera pas explicitement dans les calculs. Nous pouvons, par suite, appliquer la formule générale de prolongement (3) du n° 1 du Mémoire cité, en tenant compte des identités (29) du n° 7 du même Mémoire. Avec les notations de ce même Mémoire, il vient

$$P(U_s) = \sum_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{p_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}}{\alpha_1! \ldots ! \alpha_n!} \lambda_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n s}(U_1, \ldots, U_p) \qquad (s = 1, 2, \ldots p);$$

où les $\lambda_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n|s}$ sont les coefficients des transformations infinitésimales du groupe g, dont la définition a été rappelée au n° 27.

Les équations à adjoindre aux équations (ϖ) sont donc, sous forme entièrement explicite,

$$\text{(23)} \qquad \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t, t_1, \ldots, t_n) \frac{\partial \theta_s}{\partial t_i} \sum_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{p_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}}{\alpha_1! \ldots ! \alpha_n!} \lambda_{i|\alpha_1, \ldots, \alpha_n|s}(\theta_1, \ldots, \theta_p)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

avec

$$p_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} p_i}{\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}}.$$

Le système résolvant cherché est donc le système $[(\varpi), (23)]$. On voit bien qu'il ne dépend que d'éléments communs à tous les groupes (G) d'un même type. Et le résultat que nous avons tiré de la connaissance des équations (A) est que *nous connaissons une solution rationnelle de ce système résolvant.*

IV. — Nouvelle interprétation des résultats précédents.

34. Les résultats de l'étude de notre problème fondamental, que nous venons d'énoncer sous diverses formes, sont susceptibles d'une interprétation toute différente, que nous avions indiquée autrefois, dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([1]).

Pour y arriver, nous introduisons le groupe formé par les transformations de la forme générale

$$t' = t, \qquad t'_i = \chi_i(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui laissent l'équation $P(x) = 0$ invariante. C'est ce que nous appellerons le *groupe des transformations* Ω : nous les considérerons du reste comme des transformations entre les seules variables $t_1, \ldots, t_n$, puisque t ne joue que le rôle d'un paramètre. Nous écrirons donc l'une quelconque d'entre elles

$$(\Omega) \qquad t'_i = \chi_i(t, t_1, \ldots, t_n) = \Omega t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Introduisons encore, comme précédemment, une solution quelconque σ de (S), et considérons-la comme définissant elle-même une transformation des mêmes variables

$$(\Sigma) \qquad \bar{t}_i = \alpha_i(t, t_1, \ldots, t_n) = \Sigma t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que les équations qui définissent cette solution s'écrivent symboliquement

$$(\sigma) \qquad x_i = \Sigma t_i \qquad \text{ou} \qquad t_i = \Sigma^{-1} x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Par la transformation (Ω), ces équations deviennent

$$x_i = \Sigma t'_i = \Sigma \Omega t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et, pour qu'elles définissent une nouvelle solution, il faut et il suffit qu'il existe une transformation T telle que ces équations soient iden-

---

([1]) Tome CXXVIII, p. 544 et suiv.

tiques à celles de la solution $T\sigma$, qui sont

$$Tx_i = \Sigma t_i \qquad \text{ou} \qquad x_i = T^{-1}\Sigma t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui conduit à la relation symbolique

$$\Sigma\Omega = T^{-1}\Sigma,$$

ou encore

$$\Omega = \Sigma^{-1}T^{-1}\Sigma. \tag{24}$$

Remarquons alors que, si l'on effectue cette transformation dans les équations d'une autre solution $T'\sigma$ quelconque, on obtient

$$T'x_i = \Sigma\Sigma^{-1}T^{-1}\Sigma t_i = T^{-1}\Sigma t_i,$$

ou

$$TT'x_i = \Sigma t_i, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad T''x_i = \Sigma t_i,$$

c'est-à-dire une nouvelle solution.

La formule (24) définit donc le groupe des transformations Ω; c'est le groupe transformé du groupe ponctuel général par la transformation Σ. On vérifierait sans peine, ce qui est évident *a priori*, qu'il ne dépend pas de la solution σ employée.

35. Reprenons maintenant le système (S, A), donné dans notre problème fondamental, et cherchons le groupe des transformations Ω laissant ce système invariant. Nous raisonnons comme au numéro précédent, en appelant Σ la transformation fournie par une solution quelconque σ de [S, A] et $\bar{T}\sigma$ les autres solutions de [S, A], comme plus haut. On trouve immédiatement que, devant changer σ en une autre solution de [S, A], les transformations Ω cherchées sont de la forme

$$\bar{\Omega} = \Sigma^{-1}\Theta^{-1}\Sigma, \tag{25}$$

où les Θ appartiennent à l'ensemble des $\bar{T}$. Effectuons donc cette transformation dans les équations d'une solution $\bar{T}\sigma$ quelconque, et écrivons que cela donne une solution $\bar{T}'\sigma$. Nous avons à identifier les deux systèmes

$$\bar{T}x_i = \Sigma(\Sigma^{-1}\Theta^{-1}\Sigma)\, t_i = \Theta^{-1}\Sigma t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$\bar{T}'x_i = \Sigma t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela donne l'égalité symbolique

$$\overline{\mathrm{T}}^{-1}\Theta^{-1}\Sigma = \overline{\mathrm{T}}'^{-1}\Sigma,$$

ou bien

$$\Theta\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{T}}'. \tag{26}$$

Donc, chaque transformation Ω appartenant au groupe cherché est une transformation de la forme (25), dans laquelle Θ est une transformation $\overline{\mathrm{T}}$ telle qu'à chaque transformation $\overline{\mathrm{T}}$ en corresponde une $\overline{\mathrm{T}}'$, donnant lieu à l'identité (26). Nous retombons sur la définition des transformations Θ du n° 24.

Donc, le groupe des $\overline{\Omega}$ est le transformé du groupe (G) du n° 24 par la transformation Σ. On vérifierait facilement, ce qui est évident d'après sa définition primitive, qu'il ne change pas si l'on remplace la transformation Σ par celle qui correspond à toute autre solution de [S, A].

Appelons (K) ce nouveau groupe et cherchons ses équations de définition. D'après les formules (IX) et (X) du n° 27, ces équations seront, puisque t ne joue que le rôle d'un paramètre,

$$\mathcal{L}_s[\ldots \bar{\theta}_h(t, t'_1, \ldots, t'_n)\ldots|\ldots t_j'^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}\ldots] = \bar{\theta}_s(t, t_1, \ldots, t_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p);$$

en posant

$$t_j'^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} = \frac{\partial^{\delta_1+\ldots+\delta_n} t'_j}{\partial t_1^{\delta_1}, \ldots, \partial t_n^{\delta_n}},$$

et

$$\bar{\theta}_s(t, t_1, \ldots, t_n) = \mathcal{L}_s[(\ldots \omega_h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ldots|\ldots \alpha_j'^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}\ldots]$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p).$$

Si nous comparons ces dernières formules aux formules (3) du n° 28, nous constatons l'identité entre ces fonctions $\bar{\theta}_s$ et les fonctions θ_s précédemment calculées. Le groupe (K) a donc pour équations de définition

$$\text{(K)} \qquad \mathcal{L}_s[\ldots \theta_h(t, t'_1, \ldots, t'_n)\ldots|\ldots t_j'^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)}\ldots] = \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

où t est un paramètre arbitraire, non transformé.

36. On arrive donc à ce résultat remarquable que *tout le parti que nous savons tirer de la connaissance des équations* (A) *dépend essentielle-*

ment de la nature du groupe (K), *formé des transformations* Ω *qui laissent le système* [S, A] *invariant*.

Nous pouvons, de plus, maintenant, substituer à la méthode précédemment donnée pour la formation du système automorphe (20) une méthode bien plus simple. Tout revient, en effet, à la détermination des fonctions θ_s et des fonctions ξ_s, c'est-à-dire tout revient à mettre les équations de définition du groupe (K) sous la forme de Medolaghi. Or, on peut obtenir immédiatement les équations de définition de (K), sous une première forme, en écrivant que l'une quelconque de ses transformations laisse invariant le système [S, A]. Il n'y a plus ensuite qu'à passer de cette première forme à la forme canonique de Medolaghi, opération qui a été étudiée dans le Mémoire déjà cité. Les calculs à faire pour cela sont tous rationnels ([1]). On ne doit du reste garder des équations de définition considérées que celles qui ne contiennent aucune différentiation par rapport à t; si l'on a éliminé des équations (A), comme il a été expliqué précédemment, toute différentiation par rapport à t, on a simplement à écrire les équations de définition du groupe de transformations, effectuées sur les seules variables $t_1, \ldots, t_n$, et qui laissent le système (A) invariant; et t ne figure dans ce calcul que comme un paramètre.

Cela résulte de ce que, pour définir complètement le groupe (K), il faudrait joindre aux équations écrites à la fin du n° 35 celles qui proviendraient des équations qui expriment que le groupe (G) ne transforme pas la variable t. Cherchons les équations ainsi obtenues : nous partons des équations

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les x_i sont fonctions de certaines autres variables indépendantes $z_1, \ldots, z_n$; et nous devons faire d'abord sur ces variables la transformation Σ, c'est-à-dire

$$z_i = \alpha_i(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

c'est au fond la même transformation qui a été employée au n° 31;

([1]) Avec la restriction indiquée ci-dessus, dans la note de la page 58.

elle donne les équations

$$P(x_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous devons ensuite faire la même transformation sur les x_i, c'est-à-dire poser

$$x_i = \alpha_i(t, t'_1, \ldots, t'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t'_k} P(t'_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or, on a

$$P'(\alpha_i) \equiv \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t'_k} p_k(t, t'_1, \ldots, t'_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations précédentes deviennent donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t_k}\Big[P(t'_k) - p_k(t, t'_1, \ldots, t'_n)\Big] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire, enfin,

$$(\mathrm{K}') \qquad P(t'_k) - p_k(t, t'_1, \ldots, t'_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Or, ce sont précisément les équations que l'on obtient quand on exprime que la transformation (Ω)

$$t'_k = \chi_k(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

laisse invariante l'équation $P(x) = 0$, c'est-à-dire le système (S).

On obtiendra donc un système équivalent aux équations (K) du n° 35 en se servant seulement des équations (A), comme il a été dit plus haut.

Les seconds membres des équations ainsi obtenues, et ramenées à la forme de Medolaghi, seront, en général, non pas les fonctions θ_s cherchées, mais des fonctions des θ_s et de t.

Mais, en faisant $t = t_0$ dans ces équations, on obtiendra les équations de définition d'un groupe semblable à (G). On pourra donc écrire les équations (5) du n° 28, les ω_s et les θ_s y étant, pour un moment, indéterminées. Et il ne restera plus qu'à identifier avec le système obtenu par le calcul du n° 26, pour obtenir l'expression explicite des fonctions θ_s.

Remarquons enfin que le système $[S, A']$ que l'on arrive à construire, par l'une ou l'autre des méthodes précédentes, est en quelque sorte *doublement automorphe*, puisque ses solutions s'échangent transitivement aussi bien par les transformations du groupe (K), effectuées sur $t_1, \ldots, t_n$, que par celles du groupe (G), effectuées sur $x_1, \ldots, x_n$. Ce groupe (K) est du reste le même pour tous les systèmes $[S, TA']$.

Comme on a, de plus, pour toute solution σ de $[S, A']$,

$$(\mathrm{K}) = \Sigma^{-1}(\mathrm{G})\,\Sigma,$$

on voit que l'intégration du système $[S, A']$ revient à la détermination d'une certaine famille de transformations changeant (G) en (K). Ces considérations s'appliquent à une classe très étendue de systèmes automorphes.

37. L'introduction des transformations Ω va nous conduire à une propriété importante des systèmes résolvants introduits au n° 33. En reprenant les notations du n° 7 de notre Mémoire, déjà cité, sur les groupes continus, nous pouvons dire que les équations (23) expriment que la multiplicité

$$u_s = \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p) \tag{27}$$

admet la transformation infinitésimale

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t_i} + \sum_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{p_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}}{\alpha_1! \ldots ! \alpha_n!} \mathrm{A}_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} \mathrm{F}. \tag{28}$$

Les équations (ϖ) expriment qu'elle fait partie d'un ensemble de multiplicités homologues par rapport au groupe infini, dont la transformation infinitésimale générale est

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t, t_1, \ldots, t_n) \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t_i} + \sum_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{\xi_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}}{\alpha_1! \ldots ! \alpha_n!} \mathrm{A}_{i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n} \mathrm{F}, \tag{29}$$

les ξ_i étant arbitraires (*voir* n° 15 du Mémoire cité).

On en conclut que la solution générale du système [(ϖ), (23)] — [ou la multiplicité (27) correspondante] — se déduit d'une solution particulière quelconque — [ou de la multiplicité (27) correspondante] — par les transformations du groupe infini formé des transformations (29) qui laissent la transformation (28) invariante, c'est-à-dire qui correspond aux fonctions ξ_i satisfaisant à

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum p_i \frac{\partial F}{\partial t_i}, \quad \sum \xi_i \frac{\partial F}{\partial t_i}\right) = 0.$$

Or cette condition définit précisément le groupe des transformations Ω.

Donc, *le groupe qui échange les solutions du système résolvant est isomorphe au groupe des Ω, c'est-à-dire au groupe ponctuel général à n variables*. Sa transformation infinitésimale générale est (29), à condition que $\sum \xi_i \frac{\partial F}{\partial t_i}$ y soit la transformation infinitésimale générale du groupe des Ω.

Ce fait donne à penser qu'il n'y a aucun intérêt à considérer ces systèmes résolvants, pour intégrer l'équation $P(x) = 0$, tant que celle-ci ne présente pas de particularités. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.

Il serait enfin facile de vérifier que *la recherche des fonctions θ_s est liée à la détermination d'une classe de sous-groupes du groupe des Ω*, à savoir des sous-groupes qui appartiennent au même type que (K); et cela redonnerait les derniers résultats que nous venons d'obtenir.

CHAPITRE IV.

SUR LA THÉORIE DE M. DRACH.

I. — Le théorème fondamental.

38. Revenons encore, pour un moment, sur le problème du Chapitre précédent, en conservant les mêmes notations. Et supposons

que nous connaissions deux systèmes, de la forme du système (A), ayant séparément des solutions communes avec (S).

En raisonnant comme aux Chapitres I et II, on conclut des résultats du Chapitre précédent qu'on pourra former deux systèmes automorphes $[S, A_1]$, $[S, A_2]$, relatifs à deux groupes (G_1) et (G_2), et ayant en commun une solution arbitraire de S; par exemple, une solution principale quelconque. Le système $[S, A_1, A_2]$ sera alors lui-même un système automorphe, relatif au groupe formé des transformations communes à (G_1) et (G_2); et c'est à la recherche d'une solution de ce nouveau système que sera ramené le problème de l'intégration de (S).

Ceci montre, en particulier, que l'intégration complète de l'un quelconque des systèmes résolvants considérés au n° 33 entraînerait l'intégration complète de (S), car elle donnerait autant de systèmes $[S, A_1]$, $[S, A_2]$, ... que l'on voudrait, relatifs à des groupes semblables entre eux : et tous ces groupes ne peuvent avoir de transformation commune autre que la transformation identique, puisque le groupe ponctuel général est simple. Cela prouve que, comme nous l'avions dit plus haut, pour une équation $P(x) = 0$ absolument générale, il n'y a pas d'intérêt à essayer de l'intégrer en se servant de ces systèmes résolvants.

Revenons au cas des deux systèmes (A) quelconques donnés. En nous servant des résultats du n° 36, nous pourrons déterminer deux groupes (K_1), (K_2) de transformations Ω, par leurs équations de définition. Cela donne du même coup les équations de définition du sous-groupe commun à (K_1) et (K_2), qui est un transformé du sous-groupe commun à (G_1) et (G_2).

39. Nous supposons maintenant une équation $P(x) = 0$ donnée, à coefficients rationnels en $t, t_1, \ldots, t_n$. Et nous disons qu'elle est *spéciale* s'il existe quelque système de relations (A), rationnelles par rapport à $t, t_1, \ldots, t_n$, par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ et par rapport à leurs dérivées, qui soit compatible avec (S). L'équation est dite *générale* dans le cas contraire.

Dans cette définition pourront être considérées comme rationnelles toutes les fonctions des arguments précédents appartenant à un certain domaine de rationalité [R]. Ce domaine sera défini par certaines fonctions fondamentales : et toutes les fonctions construites rationnellement (au sens habituel du mot) avec ces fonctions fondamentales et les variables considérées, et toutes celles qui se déduisent de telles fonctions par des différentiations et des éliminations appartiendront à [R]. On considère, en d'autres termes, comme opérations rationnelles non seulement celles qu'on désigne ainsi en Algèbre élémentaire, mais aussi les différentiations et les opérations consistant à éliminer des variables entre des équations finies déjà rationnelles par rapport à ces variables; et aussi celles par lesquelles on exprime l'équivalence de deux systèmes d'équations de la même nature.

Les opérations par lesquelles nous avons traité le problème fondamental du Chapitre précédent sont donc toutes rationnelles, si les équations (A) données sont elles-mêmes rationnelles dans le domaine [R] considéré. Avec cette hypothèse, les systèmes automorphes auxquels nous sommes arrivés sont eux-mêmes rationnels : ceux du moins qui seront déterminés par la condition d'admettre une solution principale donnée, ou tout au moins une solution définie par des valeurs initiales appartenant au domaine [R].

Ces principes posés, nous allons pouvoir préciser le *degré de spécialité* d'un système (S) donné, et discuter la théorie esquissée par M. Drach dans sa Thèse.

40. Les résultats des n^{os} 30, 31, 32 montrent, en effet, qu'à tout système rationnel (A) compatible avec (S) en correspond un admettant comme solution une solution principale quelconque de (S), définie par ses données initiales, et qui est transformé d'un système dont toutes les solutions appartiennent à [S, A]. Ce nouveau système doit donc être considéré comme au moins aussi simple que [S, A].

Ceci nous conduit à nous limiter, au moins dans une première étude, aux systèmes (A) qui admettent comme solution une même solution principale déterminée σ_0 de (S).

Les résultats des mêmes numéros nous montrent encore que, de tout système [S, A] de cette nature, on peut déduire rationnellement un système [S, A′] automorphe dont toutes les solutions appartiennent à [S, A], et admettant encore σ_0 comme solution.

Au point de vue où nous venons de nous placer, *nous sommes donc en droit de ne considérer parmi les systèmes* [S, A] *rationnels, admettant la solution* σ_0, *que ceux qui sont automorphes;* puisque nous pouvons dire, d'après ce qui précède, que ce sont les plus simples.

Et il résulte immédiatement de la discussion du n° 38 que, *parmi tous ces systèmes, il y en a un dont les solutions appartiennent à tous les autres* (et même, d'après ce qui précède, à tous les systèmes [S, A] rationnels admettant la solution σ_0). Nous pouvons dire que c'est le plus simple de tous. Soit [S, B] ce système, et (G) son groupe: (G) sera appelé le *groupe de rationalité* de $P(x) = 0$, correspondant au domaine de rationalité [R], et à la solution principale σ_0.

Il résulte encore de la discussion du n° 38 que *le groupe associé à l'un quelconque des systèmes automorphes* [S, A], *rationnels et admettant la solution* σ_0, *contient* (G).

41. A ce résultat on peut joindre une réciproque.

Imaginons une équation différentielle quelconque, de la forme

$$(1) \qquad Q(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(\beta_0 \ldots \beta_n)}, \ldots \mid t, t_1, \ldots, t_n) = g(t, t_1, \ldots, t_n),$$

dont le premier membre soit fonction rationnelle de tous ses arguments; et supposons qu'elle soit vérifiée par toutes les solutions de [S, B]. Je dis que la fonction g du second membre appartient aussi au domaine de rationalité [R].

En effet, cette équation est une conséquence algébrique (c'est-à-dire en considérant tous les arguments qui y figurent comme des indéterminées) des équations du système [S, B] mis sous forme complètement intégrable, différentiées, le cas échéant, jusqu'à l'ordre de Q.

Il suffit donc d'appliquer le théorème général du n° 5 pour conclure que g se calcule, par voie rationnelle, au moyen des équations [S, B] et de la fonction Q; puisque nous supposons les éliminations et les identifications possibles dans le domaine [R].

Pour plus de netteté, on pourra s'astreindre à n'admettre, dans le domaine de rationalité [R], que des fonctions des dérivées des x_i qui soient rationnelles, au sens élémentaire du mot, par rapport à ces dérivées, les coefficients de ces dérivées dans ces fonctions pouvant être des fonctions des variables $t, t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n$ rationnelles au sens plus général défini au n° 39. Étant donnée la forme trouvée pour les équations de définition de tous les groupes-types connus, cette restriction ne saurait être gênante.

Alors, si le groupe (G) est transitif, ce ne sont que les dérivées $x_k^{\beta_0 \ldots \beta_n}$ qui interviennent dans le calcul précédent, et l'on est rigoureusement dans les conditions de la démonstration du théorème général du n° 5 sur lequel nous nous appuyons.

Si le groupe (G) est intransitif, on fera d'abord les éliminations nécessaires pour se débarrasser partout des fonctions $x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ que l'on pourra supposer égales à ses invariants d'ordre zéro distincts. Et l'on sera ramené au cas d'un groupe transitif, pour une équation $P_1(x) = 0$ à $\nu + 1$ variables indépendantes seulement. Dans ce calcul, on pourra avoir à faire certaines résolutions d'équations finies; il est clair que l'on devra, si besoin est, adjoindre au domaine de rationalité les coefficients de $P_1(x)$ et ceux des invariants fondamentaux du nouveau groupe dans lequel (G) se sera transformé.

Cette légère difficulté tient à l'incertitude sur la nature des opérations qui interviennent dans la démonstration du théorème du n° 5, quand on opère dans un domaine de rationalité quelconque. Elle tient donc à la nature même de la question. Mais elle disparaît absolument si le domaine [R] est le domaine naturel des fonctions rationnelles, au sens usuel du mot, par rapport à $t, t_1, \ldots, t_n; x_1, \ldots, x_n$ et leurs dérivées.

Nous nous en tiendrons à l'hypothèse, moins restrictive, faite plus haut sur [R], en supposant dorénavant que l'on est toujours dans le cas d'un groupe (G) transitif, ce que l'on peut réaliser, le cas échéant, comme nous l'avons expliqué. Nous pouvons alors conclure, en toute assurance, que, *sous ces hypothèses, la fonction* $g(t, t_1, \ldots, t_n)$ *est rationnelle.*

42. Imaginons, en particulier, un système automorphe quelconque associé à un groupe dont les équations de définition (des transformations finies) soient rationnelles, et admettant la solution σ_0. Les équations de ce système sont de la forme (1); et, si le groupe associé au système contient (G), le système admet toutes les solutions de [S, B]. Donc, en vertu de la réciproque précédente, les seconds membres des équations du système seront rationnels.

Donc, *tout système automorphe, satisfaisant aux conditions énoncées, et dont le groupe associé contient* (G), *est rationnel.*

Nous sommes ainsi arrivés à un théorème tout à fait précis, et qui est l'analogue du fameux théorème de Galois. Il ne sera pas inutile de l'énoncer à nouveau en entier.

43. Théorème fondamental (*Premier énoncé*). — *Étant donné un domaine de rationalité* [R] *défini par l'adjonction, au domaine naturel, d'un certain nombre de fonctions de* $x_1, \ldots, x_n$; $t, t_1, \ldots, t_n$; *on considère une équation* $\mathrm{P}(x) = 0$ *dont les coefficients appartiennent à ce domaine* [R], *dont aucune intégrale ne puisse se calculer par la résolution d'équations finies rationnelles dans* [R], *et qui soit spéciale dans* [R]. *On imagine tous les groupes de transformations en* $x_1, \ldots, x_n$ *dont les transformations finies sont définies par des équations de définition rationnelles dans* [R]; *et les systèmes automorphes* [S, A] *correspondant à ces groupes, et contenant les équations* (S) : *ces systèmes définissant, par conséquent, comme* (S), *des fonctions* $x_1, \ldots, x_n$ *des variables indépendantes* $t, t_1, \ldots, t_n$. Cela posé :

A chaque solution principale σ_0 *de* (S) *correspond un groupe transitif* (G), *de l'espèce considérée, appelé groupe de rationalité de l'équation* $\mathrm{P}(x) = 0$, *et jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Tout système* [S, A], *de l'espèce considérée, qui admet la solution* σ_0, *et dont les équations sont rationnelles, a pour groupe associé un groupe contenant* (G);

2° *Tout système* [S, A], *de l'espèce considérée, dont le groupe associé contient* (G), *et qui admet la solution* σ_0, *se compose d'équations rationnelles;*

3° *Il existe un système* [S, B], *ayant* (G) *pour groupe associé, et admettant la solution* σ_0.

Les résultats du Chapitre précédent nous permettent d'ajouter immédiatement :

Les groupes de rationalité, correspondant à diverses solutions principales, sont semblables.

On pourrait, plus généralement, d'après les résultats du n° 30, substituer dans l'énoncé précédent, à la solution principale σ_0, toute solution qui, pour une valeur convenable t_0 de la variable t, se réduirait à des fonctions $x_1^0, \ldots, x_n^0$ de $t, \ldots, t_n$, définies par des équations

$$t_i = \beta_i(x_1^0, \ldots, x_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans les seconds membres desquelles figureraient des fonctions $\beta_i(x_1, \ldots, x_n)$ appartenant au domaine de rationalité [R]. Le groupe de rationalité ainsi obtenu serait encore semblable à (G). D'une manière plus précise, ce serait $T^{-1}(G)T$, T désignant la transformation

$$(T) \qquad x_i = \beta_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

liant cette nouvelle solution $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ à la solution principale σ_0, supposée correspondre à la valeur t_0 de la variable t (¹). La condition que nous supposons est donc que la solution considérée soit liée à une solution principale par une transformation (T) rationnelle.

41. Pour les autres solutions de (S), on ne peut rien dire de général. Mais il existe certainement des solutions pour lesquelles le théorème est faux. Il n'y a, pour s'en assurer, qu'à se reporter à l'exemple du n° 32, le domaine de rationalité [R] étant le domaine

(¹) Les groupes de rationalité qui correspondent à deux solutions principales différentes sont semblables, en général, par une transformation qui n'est pas rationnelle ni même algébrique.

naturel. Pour toute solution principale, on a le système [S, B], où (B) est

$$t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1} = x,$$

et le groupe de rationalité (G) est le groupe linéaire homogène

$$x' = a x;$$

car c'est le groupe associé au système [S, B] précédent, il n'a pas de sous-groupe transitif, et l'équation considérée n'est pas intégrable algébriquement, pour une fonction rationnelle $M(t)$ quelconque.

Or les solutions qui satisfont à l'équation (15) du n° 32 ne peuvent satisfaire à aucune équation rationnelle qui n'en soit pas une conséquence. En effet, on en déduirait une équation rationnelle du premier ordre, à laquelle satisferait la solution considérée. Cette nouvelle équation, devant admettre la transformation infinitésimale $P(F)$, serait, d'après ce qu'on a vu au n° 32, de la forme

$$f\left[t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1}, x, \alpha(t, t_1)\right] = 0, \tag{2}$$

en désignant par $\alpha(t, t_1)$ une solution quelconque de $P(x) = 0$. Et, comme le premier membre doit être fonction rationnelle de tous les arguments qui y figurent, il ne peut contenir α. Sans quoi, étant fonction rationnelle de x et $\frac{\partial x}{\partial t_1}$, c'est-à-dire de x et $t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1}$, les coefficients des termes monomes en $x^\lambda \left(t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^\mu$ seraient des fonctions rationnelles de t et t_1; et comme, d'après la forme de (2), ils ne dépendent que de α, α serait fonction algébrique de t et t_1, ce qui est impossible.

L'équation (2) se réduit donc, en réalité, à la forme

$$f\left(t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1}, x\right) = 0,$$

f étant fonction rationnelle de ses arguments, et l'on en conclut

$$t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1} = \varpi(x),$$

ϖ étant une fonction algébrique.

Cette équation devant être compatible avec l'équation (15) du n° 32, $\varpi(x)$ devrait être une intégrale de l'équation de Riccati

$$\omega' + \omega^2 + f(x) - 1 = 0,$$

ce qui est impossible pour une fonction rationnelle $f(x)$ quelconque, puisque cette équation de Riccati n'a pas alors d'intégrale algébrique.

Les solutions de l'équation

$$P(x) \equiv \frac{\partial x}{\partial t} + t_1 M(t) \frac{\partial x}{\partial t_1} = 0 \tag{14}$$

qui satisfont à

$$t_1 \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + t_1^2 \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^3 + \frac{\partial x}{\partial t_1} f(x) = 0 \tag{15}$$

ne satisfont donc à aucune équation rationnelle qui ne soit pas une conséquence de ces équations [(14), (15)]; et comme ces équations ne forment pas un système automorphe, le théorème ne peut s'appliquer à aucune de ces solutions.

II. — Deuxième forme du théorème fondamental.

45. Nous allons maintenant transformer l'énoncé du n° 43 de manière à le rendre plus semblable à l'énoncé classique du théorème de Galois.

Nous considérerons les diverses fonctions Q de la forme indiquée au n° 41. Pour chacune d'elles nous désignerons par $\overline{Q}$ la fonction de $t, t_1, \ldots, t_n$ à laquelle elle se réduit quand on y remplace les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ par celles qui constituent une solution principale σ_0, toujours la même. Les diverses solutions du système formé de (S) et de l'équation $Q = \overline{Q}$ peuvent se représenter, sans ambiguïté, par $\overline{T}\sigma_0$, $\overline{T}$ désignant l'une quelconque des transformations d'une famille déterminée de transformations $\overline{T}$. Nous dirons alors, par définition, que Q, considérée comme fonction des intégrales de $P(x) = 0$ qui constituent la solution σ_0, *admet numériquement* les diverses transformations $\overline{T}$, et pas d'autres.

Cette définition s'appliquerait encore au cas où l'on partirait d'une solution absolument quelconque, au lieu de partir de la solution σ_0 : bien entendu, les transformations T seraient alors remplacées, en général, par d'autres.

Mais bornons-nous d'abord au cas où σ_0 est une solution principale : $\overline{Q}$ s'appellera, pour abréger, la *valeur numérique* de Q.

Supposons d'abord cette valeur numérique rationnelle, c'est-à-dire que ce soit une fonction de $t, t_1, \ldots, t_n$ appartenant au domaine de rationalité [R].

Si le système [S, A] formé de (S) et de $Q = \overline{Q}$, est automorphe, son groupe se confond avec l'ensemble des $\overline{T}$, qui, en vertu du théorème fondamental du n° 43, contient dès lors (G). Donc R admet numériquement le groupe (G).

Si le système [S, A] considéré n'est pas automorphe, nous savons, par le Chapitre précédent, qu'on en peut déduire un système automorphe rationnel, admettant la solution σ_0, et dont toutes les solutions appartiennent à l'ensemble des $\overline{T}\sigma_0$; c'est-à-dire dont le groupe ne contient que des transformations T. Or ce groupe contient (G) d'après notre théorème fondamental. Donc, dans ce cas encore, Q admet numériquement le groupe (G).

Réciproquement, si Q admet numériquement le groupe (G), on peut appliquer le théorème du n° 41 à l'équation $Q = \overline{Q}$; c'est-à-dire que la valeur numérique de Q est rationnelle.

Donc, sous les hypothèses énoncées en détail au n° 43, on peut dire :

Théorème fondamental (*Deuxième énoncé*). — *A toute solution principale, $x_i = \alpha_i(t, t_1, \ldots, t_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, correspond un groupe* (G) *de transformations ponctuelles en $x_1, \ldots, x_n$ et un seul, possédant la double propriété suivante :*

1° *Toute fonction rationnelle de $t, t_1, \ldots, t_n$; de $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées, qui, considérée comme fonction des intégrales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, a une valeur numérique rationnelle, admet, au même point de vue, c'est-à-dire numériquement, les transformations du groupe* (G).

2° *Toute fonction de la même nature, qui admet numériquement les transformations de* (G), *a une valeur numérique rationnelle.*

Ce groupe (G) *est identique au groupe de rationalité du premier énoncé* (nº 43).

46. Le théorème s'appliquerait encore, évidemment, aux solutions plus générales définies au nº 43, et qui ne sont, en somme, que les solutions principales des équations déduites de $P(x) = 0$ par une transformation rationnelle effectuée sur les variables $t_1, \ldots, t_n$. Mais que pouvons-nous dire pour des solutions absolument quelconques?

Soit $T\sigma_0$ une telle solution, absolument quelconque, mais qui sera toujours la même dans ce qui va suivre; σ_0 désignant toujours la solution principale qui donne (G) pour groupe de rationalité. Nous désignerons par $\overline{Q}$ ce que devient Q quand on y substitue cette solution $T\sigma_0$.

Supposons d'abord $\overline{Q}$ rationnel, et considérons encore le système [S, A] formé de (S) et de $Q = \overline{Q}$. D'après l'étude générale du Chapitre précédent, ce système a la propriété suivante : ses solutions se répartissent entre des systèmes automorphes; soit [S, A′] celui d'entre eux qui admet la solution $T\sigma_0$. Alors le système $[S, T^{-1}A']$ admet la solution σ_0, et d'après ce qu'on a vu au nº 30, est, par suite, rationnel. Son groupe est $T(G')T^{-1}$, si (G') est le groupe de [S, A′]. Or il contient (G), groupe de rationalité relatif à σ_0. Donc, inversement, (G') contient le groupe $T^{-1}(G)T$.

On voit donc que $\overline{Q}$, considérée comme fonction de la solution $T\sigma_0$, admet le groupe $T^{-1}(G)T$ qui est absolument déterminé. La première partie de l'énoncé du numéro précédent s'applique donc encore à la solution $T\sigma_0$, en substituant à (G) le groupe semblable $T^{-1}(G)T$.

Passons à la seconde Partie. C'est-à-dire que nous supposons ici que Q, comme fonction de la solution $T\sigma_0$, admet le groupe $T^{-1}(G)T$. Je dis que la valeur numérique $\overline{Q}$ est encore rationnelle.

Considérons, en effet, le système automorphe, ayant pour groupe associé $T^{-1}(G)T$, et ayant $T\sigma_0$ pour une de ses solutions. D'après les résultats du nº 29, il s'obtient en adjoignant à (S) des équations de la forme

$$(3)\quad V_s(t, t_1, \ldots, t_n \mid \ldots, x_j^{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}, \ldots) = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

où les premiers membres sont rationnels et connus, tandis que les fonctions ω_s ne le sont pas, mais ont des expressions bien déterminées. Alors, d'après le raisonnement du n° 41, l'équation $\overline{\mathrm{Q}} = \mathrm{Q}$ admettant toutes les solutions du système $[(\mathrm{S}), (3)]$, $\overline{\mathrm{Q}}$ s'exprime rationnellement au moyen des coefficients des équations (3) et de Q. Et les ω_s ne peuvent figurer dans cette expression, puisque $\overline{\mathrm{Q}}$ ne dépend que de $t, t_1, \ldots, t_n$. Plus exactement, si les ω_s et leurs dérivées figuraient dans cette expression, on pourrait imaginer qu'on y donne aux $x_1, \ldots, x_n$ des valeurs constantes, c'est-à-dire qu'elles se trouveraient remplacées par des constantes. De toute façon on voit que $\overline{\overline{\mathrm{Q}}}$ a bien une expression rationnelle en $t, t_1, \ldots, t_n$.

Donc le groupe $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{G})\mathrm{T}$ *jouit, pour la solution* $\mathrm{T}\sigma_0$, *des deux propriétés* 1° *et* 2° *de l'énoncé du n°* 45.

47. Il y a cependant une différence essentielle entre le cas de la solution $\mathrm{T}\sigma_0$ quelconque et celui de la solution σ_0. La voici :

Pour la solution σ_0 *il existe un système rationnel n'ayant pas d'autres solutions que* σ_0 *et celles qui en dérivent par les transformations du groupe de rationalité* (G). *Tandis que pour une solution* $\mathrm{T}\sigma_0$ *quelconque, il n'existe pas, en général, de système rationnel admettant pour ses seules solutions* $\mathrm{T}\sigma_0$ *et ses transformées par les diverses transformations du groupe* $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{G})\mathrm{T}$.

L'étude faite au n° 44 sur l'exemple particulier du n° 32 montre clairement cette différence.

D'une manière plus générale, considérons deux systèmes rationnels de la forme $[\mathrm{S}, \mathrm{A}]$ admettant la solution $\mathrm{T}\sigma_0$. Si aucun des deux n'admet toutes les solutions de l'autre, on en déduira, en réunissant les équations des deux systèmes, un nouveau système de même forme, et dont le degré d'indétermination sera moindre. Comme le degré d'indétermination d'un système ne peut diminuer indéfiniment par l'adjonction de nouvelles équations, on en conclut que, *parmi tous les systèmes rationnels admettant la solution* $\mathrm{T}\sigma_0$, *il y en a un et un seul dont le degré d'indétermination est minimum, et tous les autres admettent forcément toutes les solutions de celui-là.*

Si nous appliquons à ce système la méthode de réduction du Chapitre précédent, il se décompose en systèmes automorphes, dont les groupes sont, d'après un raisonnement fait au n° 46, des transformés d'un même groupe contenant (G). Les solutions de chacun de ces systèmes automorphes doivent se répartir à leur tour entre des systèmes automorphes dont les groupes associés soient divers groupes transformés de (G). Car le fait se produit pour tout système automorphe, dont le groupe contient (G) et qui admet la solution σ_0, puisque c'est un système rationnel [S, A] admettant cette solution; et les systèmes en question sont des transformés d'un tel système.

Donc les solutions du système rationnel [S, C], *de degré d'indétermination minimum parmi ceux qui admettent la solution quelconque* $T\sigma_0$, *se partagent entre des systèmes automorphes dont les groupes associés sont semblables au groupe de rationalité* (G), *correspondant à* σ_0.

L'un quelconque de ces systèmes automorphes sera de la forme (3), où les V_s sont rationnels, tandis que les ω_s sont définis par un système différentiel auxiliaire (H), obtenu en exprimant que le système [S, C] admet toutes les solutions de (3).

Et *ce système* (H), *dont les équations sont rationnelles, est tel qu'il n'existe aucune équation différentielle rationnelle, ayant avec lui, comme solution commune, celle qui correspond au groupe* $T^{-1}(G)T$, *et qui ne soit une conséquence des équations de ce système*. Car, s'il en était autrement, le système [S, C] ne serait pas le système d'indétermination minima, parmi les systèmes rationnels admettant la solution $T\sigma_0$.

48. Ce système (H) contiendra les équations du système (ϖ) qui donnerait les fonctions ω_s fournissant les équations de définition de tous les groupes du même type que (G) : cela résulte de la théorie que nous avons donnée, dans le Mémoire déjà cité, pour la détermination de ces types, puisque le groupe (K), où l'on considère t comme un paramètre, est du type de (G), et est défini par les fonctions θ_s; et que l'on a (n° 28),

$$V_s = L_s[\ldots, \theta_h(t, t_1, \ldots, t_n), \ldots | \ldots, \varphi_j^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces équations (ϖ), qui sont des conditions d'intégrabilité du système (3), sont les seules équations que le système (H) doive nécessairement contenir, d'après notre étude des systèmes résolvants (n° 33).

Donc, pour les solutions $T\sigma_0$ absolument quelconques, le système (H) se réduira au système ($\mathfrak{T}$).

Il en résulte également qu'il y aura des solutions correspondant à un système (H), formé en adjoignant aux équations ($\mathfrak{T}$) des équations rationnelles absolument quelconques, compatibles seulement avec les équations ($\mathfrak{T}$).

Telle est la raison générale des faits que nous avions constatés sur l'exemple particulier des n^{os} 32 et 45.

III. — Troisième forme du théorème fondamental.

49. Nous allons faire intervenir maintenant les considérations du § IV du Chapitre précédent.

Nous sommes arrivés, dans ce qui précède, à cette conclusion qu'il existe un système automorphe rationnel [S, B], dans lequel les équations (B) sont de la forme

$$\text{(B)} \qquad \mathfrak{L}_s[\ldots, \theta_h(t_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots | \ldots, x_j^{(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)}, \ldots] = \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p)$$

et tel qu'il n'en existe pas de même forme, possédant un degré d'indétermination moindre. Le groupe (G), associé à ce système, est le groupe de rationalité, relatif à la solution principale σ_0, qui correspond à la valeur t_0 de t.

Donc, d'après le n° 35, il existe un groupe (K) de transformations Ω, ne se réduisant pas à la transformation identique, et qui ne se confond pas non plus avec le groupe général des transformations Ω, dont les équations de définition (de ses transformations finies) sont rationnelles.

Ces équations de définition sont précisément

$$\text{(K)} \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_s[\ldots, \theta_h(t', t'_1, \ldots, t'_n), \ldots | \ldots, t_j'^{(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)}, \ldots] = \theta_s(t, t_1, \ldots, t_n) \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, p), \\ t' = t. \end{cases}$$

Le groupe (K) est, du reste, le transformé de (G) par la transformation Σ_0, qui est définie par les équations

$$x_i = \alpha_i^0(t, t_1, \ldots, t_n) = \Sigma_0 t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui définissent aussi la solution σ_0.

Supposons que les équations de définition d'un autre groupe (K′) de transformations Ω se trouvent rationnelles. Alors, d'après la formule (24) du n° 34, il lui correspond un groupe ponctuel (G′), défini par l'identité symbolique

$$(4) \qquad (G') = \Sigma_0(K')\Sigma_0^{-1};$$

et, en faisant $t = t_0$ dans cette identité, comme Σ_0 se réduit alors à la transformation identique, on reconnaît que les équations de définition de (G′) se déduisent de celles des équations de définition de (K′) où t ne figure que comme paramètre en y remplaçant t par t_0 (*Cf.* n° 36).

Les équations de définition de (G′) sont donc rationnelles. On obtiendra, par suite, un système [S, A] rationnel pour définir l'ensemble des solutions σ de (S) telles que les transformations Σ qui leur correspondent, comme il a été dit au n° 34, satisfassent à l'identité symbolique

$$(G') = \Sigma(K')\Sigma^{-1}.$$

Ce système [S, A] admet, en vertu de (4), la solution σ_0. C'est un système automorphe, dont le groupe (G_1) est le plus grand groupe dans lequel (G′) soit invariant. Car, si l'on pose $\sigma = T\sigma_0$, c'est-à-dire $\Sigma = T^{-1}\Sigma_0$, on voit que T est définie par la condition de laisser (G′) invariant.

Alors, d'après le théorème fondamental, (G_1) contient (G). Mais le plus grand groupe de transformations Ω laissant [S, A] invariant est le groupe (K_1), défini par l'identité (n° 36)

$$(K_1) = \Sigma_0^{-1}(G_1)\Sigma_0.$$

On en conclut, à cause de (4) et de la formule analogue

$$(K) = \Sigma_0^{-1}(G)\Sigma_0,$$

que (K′) est un sous-groupe invariant de (K_1), et que (K_1) contient (K).

On remarquera que l'on arriverait à la même conclusion, par la même voie, si l'on supposait seulement que ce sont les équations de définition des transformations infinitésimales de (K′) qui sont rationnelles.

50. Nous allons considérer, inversement, un groupe $(\overline{K}')$ — (de transformations Ω) — contenant (K′); en supposant que ses équations de définition sont rationnelles par rapport aux dérivées des t'_j par rapport aux t_i (*voir* n° 34). Considérons encore le groupe $(\overline{G}')$, qui lui correspond par la formule (4) : il contient (G) et est, par suite, transitif. Ses équations de définition se déduisent d'une partie de celles de $(\overline{K}')$ en y faisant

$$t = t_0, \quad t_i = x_i, \quad t'_j = x'_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

elles sont donc rationnelles par rapport aux dérivées des x'_j par rapport aux x_i et se mettent sous la forme

$$\overline{\mathfrak{L}}_s[\ldots, \overline{\omega}_h(x'_1, \ldots, x'_n), \ldots | \ldots, x'^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}_j, \ldots] = \overline{\omega}_s(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p'),$$

où les $\overline{\mathfrak{L}}_s$ sont des fonctions rationnelles de leurs arguments, tandis que nous ne savons encore rien sur les $\overline{\omega}_s$.

Mais, si nous écrivons que ces équations admettent toutes les solutions des équations de définition de (G), qui sont rationnelles, nous obtiendrons des formules donnant les $\overline{\omega}_s(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction rationnelle des $\overline{\omega}_s(x'_1, \ldots, x'_n)$ et des variables x'_i et x_i. On le verrait en raisonnant comme au n° 41. Or ces formules ne peuvent lier les x'_i aux x_i : elles prouvent donc que les $\overline{\omega}_s(x_1, \ldots, x_n)$ sont des fonctions rationnelles de $x_1, \ldots, x_n$.

Donc les équations de définition de $(\overline{G}')$ sont rationnelles (¹).

Considérons alors le système automorphe [S, A], qui a $(\overline{G}')$ pour groupe, et admet la solution σ_0. D'après le théorème fondamental, il est rationnel, puisque $(\overline{G}')$ contient (G). Donc les équations de défi-

(¹) Ce résultat permettrait d'énoncer le théorème fondamental du n° 43 sous une forme un peu plus large, en imposant seulement aux groupes considérés la condition que leurs équations de définition soient rationnelles par rapport aux dérivées des x'_j par rapport aux x_i.

nition du plus grand groupe de transformations Ω qu'il admette sont aussi rationnelles. Or ce groupe est, d'après le n° 36, le groupe $\Sigma_0^{-1}(G')\Sigma_0$; c'est donc le groupe (K'). Donc, sous les hypothèses faites, les équations de définition de (K') sont rationnelles.

Pour compléter le résultat, il faudrait examiner s'il en est de même pour tous les sous-groupes invariants de (K'). Cela paraît certain pour ceux qui échangent transitivement les variables t_i. Mais nous nous bornerons, pour le moment, aux résultats précédents.

Nous pouvons, en résumé, énoncer le théorème suivant, qui est, en réalité, une troisième forme du théorème fondamental du n° 43.

Théorème fondamental. (*Troisième énoncé.*) — *Si l'équation* $P(x) = 0$ *n'a pas d'intégrale qui se calcule algébriquement dans le domaine de rationalité considéré, et si elle est spéciale, il existe un groupe* (K) *de transformations* Ω, *dont les transformations finies sont définies par des équations de définition rationnelles, et qui ne se réduit ni au groupe général des* Ω, *ni à la seule transformation identique. Tout groupe de transformations* Ω, *qui contient* (K), *a ses équations de définition entièrement rationnelles dès qu'elles sont rationnelles par rapport aux dérivées. Et tout autre groupe de transformations* Ω, *ayant, pour ses équations finies, des équations de définition rationnelles, contient ce groupe* (K), *ou est un sous-groupe invariant d'un groupe contenant* (K).

Ce groupe (K) *est semblable au groupe de rationalité de l'équation,* relatif à une solution principale quelconque σ_0, par la transformation de $x_1, \ldots, x_n$ en $t_1, \ldots, t_n$ définie par les équations mêmes qui donnent cette solution σ_0.

Si l'équation est générale, le groupe (K) n'est plus que le groupe général de toutes les transformations Ω.

La nature du groupe (K) *est caractéristique de la manière particulière dont l'équation donnée est spéciale :* cela résulte de sa similitude avec le groupe de rationalité.

L'avantage de cette nouvelle forme du théorème fondamental est qu'il n'y a plus à tenir compte de telle ou telle solution de l'équation donnée. Il n'y a qu'un groupe (K), tandis qu'il y a une infinité de groupes de rationalité (G), pour une même équation.

51. Il existe une classe étendue d'équations $P(x)=0$, pour lesquelles on peut dire immédiatement quel est le groupe de l'équation. Ces équations se définissent de la manière suivante :

Nous supposons connues les équations de définition des transformations finies d'un groupe quelconque

$$(5)\qquad U_s(x'_1, \ldots, x'_n, \ldots, x'^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}_j, \ldots) = \omega_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s=1, 2, \ldots, p);$$

et nous supposons l'équation $P(x)$ de la forme

$$(6)\qquad \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t, t_1, \ldots, t_n)\frac{\partial x}{\partial t_i} = 0,$$

où les fonctions ξ_i sont celles qui figurent dans une transformation infinitésimale du groupe (5), dépendant du paramètre t, et qui serait par conséquent

$$XF = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Alors le système

$$(7)\qquad U_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x^{(\delta_1, \ldots, \delta_n)}_j) = \omega_s(t_1, \ldots, t_n) \qquad (s=1, 2, \ldots, p)$$

admet la transformation

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t, t_1, \ldots, t_n)\frac{\partial F}{\partial t_i},$$

d'après la propriété fondamentale des équations de définition d'un groupe quelconque, et admet par conséquent aussi

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t, t_1, \ldots, t_n)\frac{\partial F}{\partial t_i}.$$

Donc, d'après le n° 31, le système formé du système (S) équivalent à (6) et des équations (7) est un système automorphe : et ce système admet ici toutes les solutions principales de (S).

Donc le groupe de rationalité de (S) contient le groupe (5). On prévoit que, si XF ne présente, parmi les transformations infinitésimales de ce groupe, dépendant d'un paramètre, aucune particularité, le groupe (5) sera précisément le groupe de rationalité de l'équation (6).

On le vérifie sans peine pour l'exemple particulier du n° 32, pour lequel les équations (5) se réduisent à

$$\frac{1}{x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

ERRATA.

Lire, *dans l'Introduction*, page 13, lignes 10 et 11 :

. . . ce sont tous ceux qui, ayant leurs équations de définition rationnelles par rapport aux dérivées qui y figurent, contiennent un certain groupe (K), isomorphe holoédriquement au groupe de rationalité de l'équation ; et des sous-groupes invariants de ceux-là.