ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE. PICARD

Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 20 (1903), p. 519-529

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__519_0>

SUR LES RELATIONS ENTRE LA THÉORIE

DES

INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE

ET CELLE DES

INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. J'ai déjà appelé l'attention sur les difficultés qui se présentent dans l'évaluation précise du nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce [1] relatives à une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

que nous supposons avoir seulement, comme il est permis, des singularités ordinaires et être placée arbitrairement par rapport aux axes (voir en particulier *Acta mathematica*, t. XXVI). En désignant par $Q(x, y, z)$ un polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double, le point capital consiste à reconnaître si l'on peut avoir

[1] Je désignerai dorénavant toujours par ρ_0 le nombre des intégrales doubles *distinctes* de seconde espèce, dont j'ai démontré l'existence dans mon Mémoire sur les intégrales doubles de seconde espèce (*Journal de Mathématiques*, 1898). Dans ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (t. II, p. 186), j'avais désigné ce nombre par ρ. *J'abandonne cette notation;* ρ aura toujours dans la suite la signification que je lui ai donnée dans différents Mémoires (*Annales de l'École Normale*, 1901, et *Acta mathematica*, t. XXVI), et ρ_0 est le nombre invariant relatif aux intégrales doubles de seconde espèce.

l'identité

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}, \tag{1}$$

A et B étant des fonctions rationnelles de x, y et z (bien entendu, dans les dérivations, z est regardée comme fonction de x et y). La grande difficulté provient de ce que A et B peuvent devenir infinies le long de certaines lignes pour lesquelles le premier membre de l'identité précédente reste fini.

2. Il était essentiel d'approfondir la question plus que je ne l'avais fait précédemment; j'indiquerai ici la marche suivie, sans entrer toutefois dans le détail de calculs un peu longs, qui trouveront leur place ailleurs. Dans l'identité ci-dessus, on peut faire disparaître les lignes d'infini inconnues de A et B et les remplacer par un nombre *déterminé* de lignes d'infini. D'après un théorème fondamental que j'ai établi antérieurement (*Annales de l'École Normale*, 1901), on peut tracer sur la surface $\rho - 1$ courbes algébriques particulières

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{\rho-1}$$

telles qu'il existe une intégrale de différentielle totale de troisième espèce ayant seulement pour courbes logarithmiques une autre courbe algébrique arbitrairement choisie et la totalité ou une partie des courbes C_1, C_2, ..., $C_{\rho-1}$ et de la courbe à l'infini de la surface; de plus cette intégrale n'aura aucune autre ligne d'infini en dehors de lignes du type $y = \text{const.}$

Ceci posé, désignons par

$$g_1(x, y) = 0, \qquad \ldots, \qquad g_{\rho-1}(x, y) = 0$$

les projections des $\rho - 1$ courbes C sur le plan des xy. On peut alors démontrer que si

$$\frac{Q}{f'_z}$$

peut se mettre sous la forme (1), on ne diminue pas la généralité *en supposant que* A *et* B *sont de la forme*

$$A = \frac{M(x, y, z)}{g_1 g_2 \cdots g_{\rho-1} f'_z}, \qquad B = \frac{N(x, y, z)}{g_1 g_2 \cdots g_{\rho-1} f'_z},$$

où M et N sont des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y, s'annulant sur la courbe double; pour y arbitraire, les quotients

$$\frac{\mathrm{M}}{g_i} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{N}}{g_i}$$

deviennent infinis seulement, à distance finie, sur la courbe C_i. Nous avons ainsi éliminé toute courbe d'infini de A et B *en dehors des courbes déterminées* $C_1, \ldots, C_{\rho-1}$ (en laissant de côté bien entendu les courbes du type $y = \text{const.}$).

3. La recherche théorique du nombre des intégrales doubles de seconde espèce ne présente plus maintenant de difficulté essentielle. Ce problème se ramène à connaître si, pour un polynome Q en x, y et z dont le degré est limité, on a

$$\frac{\mathrm{Q}}{f'_z} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}.$$

Prenons d'abord le cas le plus simple où $\rho = 1$. Alors A et B sont de la forme

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{M}(x, y, z)}{f'_z}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{N}(x, y, z)}{f'_z},$$

M et N étant des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y, s'annulant sur la courbe double.

Considérons maintenant la courbe entre x et z

$$f(x, y, z) = 0,$$

renfermant le paramètre y. Nous pouvons former, par des opérations rationnelles en y, un système d'intégrales abéliennes relatives à cette courbe :

$$\int \mathrm{I}_1\, dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{I}_{2p}\, dx, \quad \int \mathrm{J}_2\, dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{J}_m\, dx;$$

les $2p$ premières forment un système d'intégrales distinctes de seconde espèce, et l'intégrale

$$\int \mathrm{J}_k\, dx$$

est une intégrale de troisième espèce, ayant comme seuls points singuliers logarithmiques les points à l'infini O_1 et O_i, avec les périodes logarithmiques $+1$ et -1 (nous désignons par $O_1, O_2, \ldots, O_m$ les m points à l'infini de la courbe, qui sont distincts au point de vue de la rationalité par rapport à y). Les I et les J sont rationnels en x, y et z.

On démontre que l'on peut supposer que B est de la forme

$$B = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m,$$

les a et les c étant des fonctions rationnelles de y. Nous avons maintenant à écrire que

$$\frac{Q}{f'_z} - \frac{\partial B}{\partial y} \tag{2}$$

est la dérivée par rapport à x d'une fonction rationnelle de x, y et z. En exprimant ce fait, on trouve $2p + m - 1$ relations linéaires entre

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p}, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_m,$$

et leurs dérivées premières; aucune irrationalité par rapport à y ne s'introduit, et ces relations contiennent rationnellement y. Il est alors aisé de montrer que, si l'on peut satisfaire à ce système de $2p + m - 1$ équations différentielles linéaires à coefficients rationnels en y entre les a et les c, on pourra mettre $\frac{Q}{f'_z}$ sous la forme demandée. Or, c'est là un problème élémentaire [1].

4. Dans le cas où ρ est quelconque, la solution repose sur une analyse analogue. Aux fonctions rationnelles I et J, il faut en adjoindre d'autres se rapportant à chacune des courbes C. On forme une intégrale abélienne

$$\int H_i\, dx \qquad (H_i \text{ rationnelle en } x, y \text{ et } z)$$

---

[1] Il n'est pas sans intérêt de remarquer que le problème que nous venons de traiter généralise le problème fondamental relatif à l'existence des intégrales de différentielles totales de seconde espèce (transcendantes). Dans ce problème, Q est nul, ainsi que les c; en suivant la méthode du texte, on forme immédiatement le système d'équations différentielles, donnant les a, d'une manière plus rapide qu'à la page 165 du Tome I de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*.

relative à la courbe entre x et z, $f(x, y, z) = 0$, qui a pour points singuliers logarithmiques le point à l'infini O_1 et les points de la courbe C_i ayant la valeur considérée du paramètre y, avec les périodes logarithmiques $+1$ en ces derniers points et $-d_i$ en O_1 (d_i étant le degré de C_i). On montre alors que l'on peut mettre B sous la forme

$$B = \alpha_1 I_1 + \ldots + \alpha_{2p} I_{2p} + \gamma_2 J_2 + \ldots + \gamma_m J_m + \eta_1 H_1 + \ldots + \eta_{\rho-1} H_{\rho-1},$$

les α et les γ étant des fonctions rationnelles de y et les η des constantes.

On écrit alors, B ayant cette nouvelle valeur, que la différence (2) est la dérivée par rapport à x d'une fonction rationnelle de x, y et z. Ceci nous donne $2p + m - 1$ relations linéaires entre les α, les γ, leurs dérivées premières et les constantes η.

Le problème est donc ramené à reconnaître si l'on peut déterminer les constantes η, de manière que les équations différentielles linéaires précédentes puissent être vérifiées par des fonctions rationnelles de y, problème ne présentant aucune difficulté théorique.

En résumé, quand on connaît un système de courbes C, il est possible de reconnaître si une identité de la forme (1) est possible, et par suite *de dénombrer les intégrales distinctes de seconde espèce.*

5. Ajoutons quelques remarques importantes. On peut, à chaque courbe C_i, faire correspondre une expression $\frac{Q_i}{f'_z}$, où Q_i est un polynome en x, y, z susceptible de la forme indiquée. De plus, aucune combinaison linéaire à coefficients constants

$$\frac{C_1 Q_1 + \ldots + C_{\rho-1} Q_{\rho-1}}{f'_z}$$

ne peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

U et V étant des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y.

Enfin toute expression $\frac{Q}{f'_z}$, susceptible de la forme (1), peut s'écrire

$$\frac{A_1 Q_1 + \ldots + A_{\rho-1} Q_{\rho-1}}{f'_z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

les A étant des constantes, U et V ayant la signification ci-dessus.

Toutes les considérations que nous venons de développer sont utilisables, quand on a pu déterminer un système de courbes C. Elles sont numériquement applicables à une surface donnée, mais on comprend qu'elles ne permettent guère d'énoncer sur le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce des propositions générales. C'est en les combinant avec l'étude des périodes de certaines intégrales doubles que je suis arrivé, après bien des efforts, à obtenir quelques lois générales que j'indiquerai dans le Mémoire suivant. Arrêtons-nous seulement sur des cas particuliers très simples, qui nous donneront cependant l'occasion de faire une remarque générale sur le nombre ρ_0.

6. Nous avons déjà eu l'occasion d'utiliser la facilité avec laquelle s'appliquent nos théories générales aux surfaces dont l'équation est de la forme

$$z^2 = f(x, y). \tag{3}$$

A la vérité, elles ne rentrent pas dans la catégorie des surfaces à singularités ordinaires, mais cependant, avec peu de modifications, les théorèmes généraux trouvent leur application. Il y a en particulier, pour ces surfaces, un nombre ρ qui a une assez grande analogie avec la lettre désignée plus haut de la même manière (*voir*, en particulier, *Annales de l'École Normale*, 1901 et 1903).

Si, pour la surface (3), le nombre ρ est nul, toute expression de la forme

$$\frac{P(x, y)}{\sqrt{f(x, y)}} \qquad (\text{P polynome en } x \text{ et } y),$$

susceptible de la forme $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$, peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M}{\sqrt{f}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N}{\sqrt{f}}\right),$$

M et N étant des polynomes en x, à coefficients rationnels en y.

Prenons, en particulier, les surfaces

$$z^2 = f(x)\,\mathrm{F}(y),$$

où $f(x)$ et $\mathrm{F}(y)$ sont des polynomes arbitraires de degrés $2p+1$ et $2q+1$. Sous cette condition que les polynomes précédents ne présentent pas de particularités spéciales, on peut démontrer que l'on a pour la surface précédente $\rho = 0$, et l'on en déduit que le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce est donné par la formule

$$\rho_0 = 4pq.$$

7. Le résultat précédent peut être inexact dans certains cas particuliers. Supposons que $f(x)$ et $\mathrm{F}(y)$ soient du *troisième* degré. On aura bien $\rho_0 = 4$, s'il est impossible de satisfaire à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \mathrm{C}\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{F}(y)}} \qquad (\text{C étant une constante convenable})$$

en prenant pour x une fonction rationnelle de y (ne se réduisant pas à une constante); mais, dans d'autres cas, il n'en sera pas de même. Par exemple, si les deux polynomes f et F sont identiques, le nombre ρ n'est plus nul, et l'on démontre que

$$\rho_0 = 3,$$

pourvu toutefois que les fonctions elliptiques correspondant au polynome du troisième degré $f(x)$ n'admettent pas la multiplication complexe.

Les conclusions sont encore différentes si nous sommes dans un cas de multiplication complexe. La valeur du nombre ρ a changé et cette modification a sa répercussion sur la valeur de ρ_0. On trouve alors

$$\rho_0 = 2.$$

Tout cela résulte facilement des résultats établis pages 358 et suivantes de ce Volume.

8. Les exemples précédents suffisent pour appeler l'attention sur une circonstance extrêmement remarquable : je veux parler *du caractère arithmétique de l'invariant* ρ_0. Ce nombre peut ne pas dépendre seu-

lement de questions de configurations et de singularités relatives à la surface algébrique, La nature *arithmétique* des coefficients de l'équation de la surface influe sur sa valeur. Ainsi, pour la surface

$$z^2 = f(x)f(y) \qquad (f \text{ polynome du troisième degré}),$$

le nombre ρ_0 est égal à *trois* en général. Ce nombre s'abaisse à *deux*, quand les coefficients de $f(x)$ satisfont aux conditions arithmétiques relatives à la multiplication complexe. L'invariant ρ_0 est donc, à ce point de vue, bien différent de son analogue $2p$ dans la théorie des courbes algébriques (p étant le genre de Riemann), ou des genres géométrique et numérique p_g et p_n aujourd'hui classiques dans la théorie des surfaces algébriques.

9. Reprenant la surface à singularités ordinaires, nous rappellerons encore qu'il résulte de nos recherches antérieures que :

Toute intégrale double de seconde espèce

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

(P étant un polynome s'annulant sur la courbe double) *se ramène à un nombre limité d'intégrales de seconde espèce*

$$\int\int \frac{M_i(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} \tag{4}$$

(le polynome M_i s'annulant sur la courbe double) *par la soustraction d'intégrales de la forme*

$$\int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\,dy, \tag{5}$$

U *et* V *étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y et s'annulant sur la courbe double.*

On peut évidemment supposer qu'aucune combinaison linéaire des intégrales (4) n'est de la forme (5).

10. Supposons maintenant que l'intégrale double

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'} \tag{6}$$

(P polynome s'annulant sur la courbe double) ne soit pas de seconde espèce. Cette intégrale aura $2p$ résidus relatifs à la ligne à l'infini de la surface. Admettons qu'on puisse trouver $2p$ intégrales doubles

$$\mathrm{A}_1, \quad \mathrm{A}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_{2p}$$

de la forme précédente, telles que le déterminant d'ordre $2p$ formé avec l'ensemble des résidus de ces intégrales soit différent de zéro. On pourra alors de l'intégrale (6) retrancher une intégrale convenable

$$A_1 \mathrm{A}_1 + A_2 \mathrm{A}_2 + \ldots + A_{2p} \mathrm{A}_{2p}$$

(les A étant des constantes), de telle sorte que la différence soit une intégrale de seconde espèce. On a donc la conclusion suivante :

On peut trouver un certain nombre s d'intégrales de la forme (6), *soient*

$$\Theta_i = \int\int \frac{P_i(x, y, z)}{f'_z} dx\, dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

les polynomes P_i *en* (x, y, z) *s'annulant sur la courbe double, de telle sorte que toute intégrale* (20) *soit susceptible de se mettre sous la forme*

$$\alpha_1 \Theta_1 + \ldots + \alpha_s \Theta_s + \int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\, dy,$$

les α *étant des constantes,* U *et* V *étant des polynomes en* x *et* z *à coefficients rationnels en* y, *s'annulant sur la courbe double.*

On peut d'ailleurs supposer que s est le nombre *minimum*, c'est-à-dire qu'aucune combinaison linéaire des Θ n'est susceptible de la forme (5).

11. Nous avons admis qu'on peut trouver une intégrale de la forme (6), dont les $2p$ résidus relatifs à la ligne à l'infini de la surface ont des valeurs arbitrairement données. Pour l'établir, considérons une intégrale abélienne arbitraire de seconde espèce de la courbe entre x et z,

$$f(x, y, z) = 0,$$

qui soit de la forme

$$\int \frac{P(x, y, z)\, dx}{f'_z}, \tag{7}$$

P étant un polynome en x, y et z, s'annulant sur la courbe double. Envisageons l'équation différentielle linéaire E d'ordre $2p$, relative aux $2p$ périodes de cette intégrale regardées comme fonctions de y; nous avons déjà bien des fois considéré cette équation E, qui a joué un rôle essentiel dans nos théories. Plaçons-nous dans le cas, qui est général, où cette équation n'admet pas comme intégrale un polynome en y. En désignant par $\omega(y)$ une période arbitraire de l'intégrale abélienne (7), nous avons vu antérieurement que

$$\int \omega(y)\, dy,$$

prise autour du point à l'infini, était un résidu de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$

Considérons $2p$ périodes distinctes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}$$

de (7). On a les développements autour de $y = \infty$

$$\omega_i = \alpha_i^n y^n + \alpha_i^{n-1} y^{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_i^{-1}}{y} + \frac{\alpha_i^{-2}}{y^2} + \ldots + \frac{\alpha_i^{-k}}{y^k} + \ldots.$$

Les $2p$ fonctions ω_i sont linéairement indépendantes. De plus, il n'y a pas de combinaisons linéaires des ω_i qui se réduisent à un polynome en y.

Il en résulte que, pour k pris suffisamment grand, les $2p$ expressions linéaires

$$a_1 \alpha_i^{-k} + a_2 \alpha_i^{-(k-1)} + \ldots + a_k \alpha_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{8}$$

aux indéterminées

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k$$

sont linéairement indépendantes, car si, pour toute valeur de k, ces expressions linéaires n'étaient pas indépendantes, tous les déterminants d'ordre $2p$ formés avec les α_i^{-h} seraient nuls, et l'on pourrait former une combinaison linéaire des ω_i se réduisant à un polynome. Le nombre k étant pris suffisamment grand, envisageons l'intégrale double

$$\iint \frac{\varphi(y)\,\mathrm{P}(x, y, z)}{f'_z}\,dx\,dy,$$

où l'on pose

$$\varphi(y) = a_1 y^{k-1} + a_2 y^{k-2} + \ldots + a_{k-1} y + a_k,$$

les a étant des indéterminées. Les $2p$ résidus de cette intégrale double sont, au facteur $2\pi i$ près, les expressions (8). D'après ce qui précède, on peut choisir ces indéterminées a de manière que ces expressions aient telles valeurs que l'on veut, puisqu'elles sont linéairement indépendantes. Il est donc établi qu'*on peut trouver une intégrale double* (6) *ayant* $2p$ *résidus arbitrairement choisis*. Cette remarque nous sera utile dans le Mémoire qui va suivre.