ÉMILE PICARD

Sur certaines surfaces algébriques dont les intégrales de différentielles totales sont algébrico-logarithmiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 20 (1903), p. 349-377

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__349_0>

SUR

CERTAINES SURFACES ALGÉBRIQUES

DONT LES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES SONT ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUES.

Par M. Émile PICARD.

Je me propose d'indiquer dans ce Mémoire certaines surfaces pour lesquelles toutes les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques. Dans des recherches antérieures, j'ai déjà examiné quelques-uns de ces cas, mais sans en achever l'étude. Telle était la surface

$$z^2 = f(x) f(y),$$

où $f(x)$ représente un polynome du troisième degré en x. La discussion complète de toutes les intégrales relatives à cette surface est assez longue; on la trouvera dans les pages qui suivent.

J'examine ensuite des cas plus étendus. Tel est celui de la surface

$$z^2 = f(x) \mathrm{F}(y),$$

où f et F sont deux polynomes quelconques. J'insiste enfin particulièrement sur les intégrales relatives à la surface

$$z^m = x^m + \mathrm{P}(y),$$

où $\mathrm{P}(y)$ est un polynome arbitraire de degré m. Je détermine aussi pour cette surface le nombre ρ qui, d'après un théorème général, démontré antérieurement, joue un rôle important dans l'étude des surfaces algébriques.

1. Étant considérée une surface

$$z^2 = f(x, y), \tag{1}$$

où f désigne un polynome en x et y de degré $2p+1$ par rapport à x, j'ai montré (*Annales de l'École Normale*, 1901) que toutes les intégrales de différentielles totales relatives à cette surface se ramènent à des intégrales de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{z}, \tag{2}$$

P et Q étant rationnelles en x et y, n'ayant, en dehors peut-être de courbes correspondant à $y =$ const., d'autres lignes logarithmiques à distance finie que des lignes données par une équation irréductible

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{3}$$

de degré *au plus égal à p* par rapport à x, la relation précédente étant d'ailleurs telle que des équations (1) et (3) on puisse tirer z sous la forme d'une fraction rationnelle de x et y.

J'ai étudié (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1901) le cas où l'équation se réduit à

$$z^2 = f(x)\,F(y),$$

f et F étant des polynomes du troisième degré respectivement en x et y; je me propose tout d'abord de compléter cette étude.

2. Dans le cas actuel ($p = 1$), la relation (3) sera du premier degré par rapport à x, et l'on doit tout d'abord chercher les fonctions rationnelles z et x de y satisfaisant à la relation

$$z^2 = f(x)\,F(y). \tag{4}$$

D'après ce que nous avons vu (*loc. cit.*), il n'existera pas, en général, de telles fonctions en dehors des solutions immédiates

$$z = 0, \qquad x = a,$$

a étant une racine de $f(x) = 0$. On le démontre en remarquant que, dans l'hypothèse de l'existence de telles fonctions, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dx}{dy}\,\frac{\mathrm{F}(y)}{z}\,\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{F}(y)}},$$

et que, par suite, l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

se transforme (en mettant pour x la fonction rationnelle de y supposée répondre à la question) en l'intégrale

$$\int \mathrm{R}(y)\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{F}(y)}},$$

R étant rationnelle en y. Comme cette intégrale doit être aussi de première espèce, il faut que $\mathrm{R}(y)$ se réduise à une constante. La fonction rationnelle cherchée x de y devra donc satisfaire à la relation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \mathrm{C}\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{F}(y)}}, \qquad (\mathrm{C}\text{ étant une constante}).$$

La réciproque est d'ailleurs immédiate : si une fonction rationnelle x de y satisfait à une telle relation on aura

$$\sqrt{f(x)\,\mathrm{F}(y)} = \mathrm{F}(y)\frac{\frac{dx}{dy}}{\mathrm{C}},$$

et, par suite, z sera rationnelle en y.

Des considérations précédentes résulte tout d'abord que, pour un polynome donné $f(x)$ du troisième degré, si le polynome du troisième degré $\mathrm{F}(y)$ est arbitraire, il ne sera pas possible de déterminer une fonction rationnelle x de y (ne se réduisant pas à une constante) satisfaisant aux conditions voulues.

De là nous concluons que toutes les intégrales de différentielles totales relatives à la surface (4) se ramènent, par la soustraction d'une expression algébrico-logarithmique, à la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x)\,F(y)}}, \tag{5}$$

où P et Q sont des *polynomes* en x, *à coefficients rationnels* en y.

D'ailleurs, par la soustraction d'une fonction rationnelle convenable en x, y et z, on peut supposer que l'on a

$$P = Ax + B,$$

A et B étant des fonctions rationnelles de y; il suffit d'appliquer la théorie élémentaire de la réduction des intégrales elliptiques.

La question est donc de savoir si l'on peut avoir une intégrale de différentielle totale telle que (5). Dans cette hypothèse, les périodes de l'intégrale relative à x

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{\sqrt{f(x)\,F(y)}}$$

ne doivent pas dépendre du paramètre y. Or il est aisé de voir que l'on ne peut choisir des fonctions rationnelles A et B de y (sauf $A = B = 0$) telles que les périodes de cette intégrale ne dépendent pas de y. Soient en effet envisagées les deux intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}},$$

dont nous désignerons par ω_1, Ω_1 et ω_2, Ω_2 les périodes correspondantes. On devra avoir

$$\begin{aligned} \frac{A\Omega_1 + B\omega_1}{\sqrt{F(y)}} &= C_1 \\ \frac{A\Omega_2 + B\omega_2}{\sqrt{F(y)}} &= C_2 \end{aligned} \qquad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes}).$$

Or les valeurs de A et B ainsi déterminées ne sont évidemment pas rationnelles en y (sauf pour $C_1 = C_2 = 0$).

On conclut de là que *toutes les intégrales relatives à la surface* (4) *se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques*.

3. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que l'on ne peut satisfaire à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \mathrm{C}\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{F}(y)}} \qquad \text{(C étant une constante)}$$

par une fonction rationnelle x de y.

Approfondissons le cas où $\mathrm{F}(y)$ se réduit à $f(y)$. On a alors l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \mathrm{C}\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}.$$

Cette équation se rencontre dans la théorie de la multiplication des fonctions elliptiques. Supposons que les fonctions elliptiques correspondant au polynome du troisième degré $f(x)$ *n'admettent pas la multiplication complexe;* alors C sera nécessairement un entier réel m, et si, avec les notations de Weierstrass, on pose

$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

et que $\wp(u)$ désigne la fonction elliptique correspondante, on aura d'abord la solution

$$y = \wp(u), \qquad x = \wp(mu),$$

x ainsi obtenue est une fonction rationnelle de y. Nous désignerons par $\mathrm{R}_m(y)$ cette expression; on obtient ainsi des fonctions rationnelles x de y telles que z soit aussi fonction rationnelle de y, et l'on a évidemment

$$\mathrm{R}_1(y) = y.$$

L'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = m\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

admettra d'autres solutions x fonctions rationnelles de y; il est facile de trouver leur expression générale. Si l'on pose

$$x = \wp(v), \qquad y = \wp(u),$$

l'équation précédente devient

$$dv = m\,du, \qquad \text{d'où} \qquad v = mu + \mathrm{K} \qquad \text{(K étant une constante).}$$

Or, comment doit être choisie la constante K pour que de

$$x = \mathrm{p}(mu + \mathrm{K}), \qquad y = \mathrm{p}(u),$$

on tire x fonction rationnelle de y. Il faut et il suffit que

$$mu + \mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad -mu + \mathrm{K}$$

donnent pour x la même valeur, quel que soit u; ceci exige que

$$\mathrm{K} = \frac{\nu\omega + \nu'\omega'}{2},$$

ν et ν' étant des entiers, ω et ω' étant les périodes de $\mathrm{p}(u)$. Nous aurons donc pour K *quatre* valeurs conduisant à des fonctions rationnelles distinctes; le cas de $\nu = \nu' = 0$ est celui qui a été considéré ci-dessus.

Nous allons étudier la disposition sur la surface des différents couples de courbes correspondant aux diverses fonctions rationnelles x de y que nous venons de trouver. Prenons d'abord la série correspondant à $\nu = \nu' = 0$.

4. Pour *la courbe du troisième degré* entre z et x

$$z^2 = f(x)\,f(y),$$

on a, en posant $y = \mathrm{p}(u)$, la représentation paramétrique (avec le paramètre v)

$$x = \mathrm{p}(v), \qquad z = \mathrm{p}'(v)\,\mathrm{p}'(u).$$

Si l'on coupe la courbe par une droite quelconque, la somme des valeurs des v correspondant aux points de rencontre est égale à *zéro* à un multiple près des périodes.

Les valeurs $v = \pm u$ correspondent à $x = y$, et les valeurs $v = \pm mu$ correspondent à la fraction rationnelle x de y, désignée plus haut par R_m. On obtient ainsi sur la courbe précédente une succession de points; il est facile d'obtenir pour ces points une génération géométrique qui va nous être très utile.

Si l'on mène la tangente au point A correspondant à

$$x = y, \qquad z = f(y),$$

elle rencontre la courbe en un troisième point B pour lequel on a

$$v = -2u;$$

le symétrique B′ de B par rapport à Ox correspond à

$$v = 2u.$$

En joignant le point A au point B′, le troisième point C d'intersection de la droite AB′ avec la courbe correspond à

$$v = -3u.$$

Prenons le symétrique C′ de C par rapport à Ox, pour lequel $v = 3u$, la droite AC′ donne un troisième point pour lequel

$$v = -4u,$$

et, ainsi de suite, on obtiendra tous les points correspondant à $v = \pm mu$.

Considérons les deux points correspondant à u et $-mu$; la droite qui les joint coupe encore la courbe au point correspondant à $(m-1)u$. Soit

$$z = ax + b$$

l'équation de cette droite, où a et b sont manifestement des fonctions rationnelles de y. L'équation du troisième degré en x

$$(ax+b)^2 - f(x)f(y) = 0$$

aura pour racines

$$R_1(y), \quad R_{m-1}(y) \quad \text{et} \quad R_m(y).$$

Si donc nous revenons à la surface

$$z^2 = f(x)f(y),$$

l'expression

$$(\alpha) \qquad A \log \frac{ax+b+z}{ax+b-z} \qquad \text{(A étant une constante)}$$

aura, comme courbes logarithmiques, les trois couples de courbes

$$z = \pm(ax+b), \qquad x = R_k(y),$$

où k a les trois valeurs 1, $m-1$ et m.

Donc, si une intégrale de différentielle totale admet le couple de courbes logarithmiques correspondant à $k = m$, on pourra, par la soustraction de l'expression (α) avec une valeur convenable de A, faire disparaître ce couple de courbes et le remplacer par les couples de courbes correspondant à $k = 1$ et $k = m - 1$. En allant ainsi, de proche en proche, on arrivera à n'avoir plus, comme courbes logarithmiques, que les couples de courbes correspondant à

$$k = 1 \quad \text{et} \quad k = 2,$$

mais, pour ce dernier cas, on peut, d'après la construction indiquée plus haut, déterminer a et b rationnelles en y, de telle sorte que

$$(ax + b)^2 - f(x)f(y)$$

admette $R_1(y)$ comme racine double et $R_2(y)$ comme racine simple; alors $k = 2$ est ramené à $k = 1$.

5. Nous n'avons encore considéré que la première série de couples de courbes, celle qui correspond à

$$v = \pm mu.$$

L'étude des *trois* autres séries sera très facile. Il suffira de prendre la série correspondant à

$$v = \pm mu + \frac{\omega}{2},$$

et désignons par

$$x = \rho_m(y)$$

la fonction rationnelle correspondante.

Considérons, comme plus haut, sur la courbe entre z et x,

$$z^2 = f(x)p'^2(u)$$

le point A correspondant à

$$v = mu + \frac{\omega}{2};$$

les coordonnées de A sont

$$x = p\left(mu + \frac{\omega}{2}\right), \qquad z = p'\left(mu + \frac{\omega}{2}\right)p'(u).$$

Considérons aussi le point B correspondant à

$$v = \frac{\omega}{2};$$

les coordonnées de B sont

$$x = \alpha, \qquad z = 0 \qquad (\alpha \text{ étant une racine de } f).$$

La droite joignant A et B rencontre la courbe en un troisième point correspondant à

$$v = -mu.$$

Désignons par $z = ax + b$ la droite joignant ces points (a et b sont rationnels en y). L'équation du troisième degré en x

$$(ax+b)^2 - f(x)f(y) = 0$$

admettra pour racines α, $\rho_m(y)$ et $R_m(y)$. Si donc on revient à la surface

$$z^2 = f(x)f(y),$$

l'expression

$$\log\frac{ax+b+z}{ax+b-z}$$

admettra comme courbes logarithmiques les deux couples de courbes correspondant à

$$x = \rho_m(y) \qquad \text{et} \qquad x = R_m(y).$$

On peut donc, par une soustraction convenable, ramener le premier couple de courbes logarithmiques au second. Mais les couples de ce type viennent d'être étudiés et nous avons vu que l'on pouvait se borner à envisager le couple de courbes correspondant à $x = y$.

Finalement, *toute intégrale de différentielle totale relative à la surface*

$$z^2 = f(x)f(y)$$

peut, par la soustraction d'expressions algébrico-logarithmiques convenables, être ramenée à n'avoir, à distance finie, d'autres courbes logarithmiques que le couple de courbes correspondant à

$$x = y.$$

Nous ne parlons pas des courbes correspondant à $x = \alpha$ (où α serait d'ailleurs nécessairement racine de f) qui ne peuvent être des courbes logarithmiques pour les intégrales envisagées.

L'intégrale sera donc de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{(x-y)^m \sqrt{f(x)\,f(y)}},$$

P et Q étant des polynomes en x à coefficients rationnels en y. Enfin des réductions tout élémentaires permettent de ramener cette intégrale au cas de

$$m = 1.$$

6. Considérons donc l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{(x-y)\sqrt{f(x)\,f(y)}},$$

où P et Q sont des polynomes en x à coefficients rationnels en y.

Les périodes de l'intégrale relative à x

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{(x-y)\sqrt{f(x)\,f(y)}}$$

ne doivent pas dépendre du paramètre y. En particulier, l'expression

$$\frac{P(x, x)}{f(x)}$$

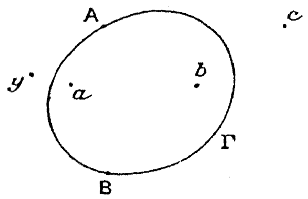
doit se réduire à une constante; cette constante est différente de *zéro*, sinon les deux lignes correspondant à $x = y$ ne seraient pas des courbes logarithmiques et nous serions dans le cas étudié plus haut. On peut supposer que la constante est égale à *un*.

Si l'on considère d'une manière générale l'intégrale ci-dessus, P étant de la nature indiquée et avec la condition

$$P(x, x) = f(x),$$

les périodes cycliques de cette intégrale sont des fonctions de y, la période polaire étant *un*. Les points singuliers de ces périodes regardées comme fonctions de y sont les trois racines de $f(y)$ et le point à l'infini. Envisageons, dans le plan de la variable x, le cycle Γ (*fig.* 1),

Fig. 1.

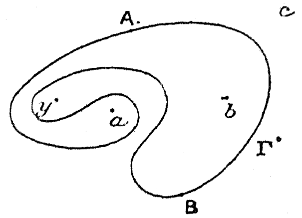


comprenant à son intérieur deux des racines a et b et laissant y à son extérieur, et supposons y voisin de a. Nous avons pour une détermination de $\sqrt{f(x)}$ en un point A du contour et pour une détermination de $\sqrt{f(y)}$ une période déterminée ω. Supposons, pour fixer les idées, que la détermination de $\sqrt{f(x)}$ en A soit celle qui devient $\sqrt{f(y)}$ quand x va de A en y par un chemin rectiligne.

Faisons maintenant décrire à y un contour fermé autour de a. Le cycle Γ va se déformer, fuyant en quelque sorte devant y, et nous aurons, quand y sera revenu à sa position initiale, une nouvelle position Γ' du cycle Γ correspondant à la seconde figure, où l'on a supposé, comme il est permis, que seulement la portion de Γ comprise entre le point A et un autre point B s'est modifiée.

Au point de départ A (*fig.* 2), le signe de $\sqrt{f(y)}$ n'est pas le même

Fig. 2.



dans les deux cas, puisque y a tourné autour de a; les éléments de l'intégrale ont donc des signes différents au départ. Il est alors aisé de voir ce que devient ω quand y a tourné autour de a; on reconnaît de suite, en comparant les deux figures, que

$$\omega \text{ se transforme en } -\omega - 4\pi i.$$

Faisons maintenant décrire à y un autre chemin fermé enveloppant les trois points a, b, c. Quand y revient à son point de départ, le radical $\sqrt{f(y)}$ a changé de signe, rien par ailleurs n'étant modifié; par suite

$$\omega \text{ se transforme en } -\omega;$$

Or ω a dû rester invariable. On a donc

$$\omega = 0.$$

D'autre part, la circulation de y autour de a changeant ω en $-\omega - 4\pi i$, on voit que l'on arrive à un résultat absurde. Nous en concluons que l'intégrale, dont nous avons supposé l'existence, ne saurait exister. Donc, *toutes les intégrales de différentielles totales relatives à la surface*

$$z^2 = f(x)f(y)$$

s'expriment par des combinaisons algébrico-logarithmiques.

On a seulement supposé que les fonctions elliptiques correspondant au polynome $f(x)$ n'admettent pas la multiplication complexe.

7. Relativement à ce dernier cas, faisons seulement l'étude d'un cas particulier; des considérations analogues s'appliqueraient à tous les cas de multiplication complexe. Soit

$$f(x) = 4x^3 - 1;$$

l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = C\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

ne pourra être vérifiée par une fonction rationnelle x de y que si

$$C = m + n\varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ racine cubique imaginaire de l'unité}).$$

Les fonctions rationnelles x de y se déduisent, en raisonnant comme plus haut, des deux équations

$$y = p(u), \qquad x = p[(m + n\varepsilon)u + K],$$

où K est une demi-période.

A ces fractions rationnelles peuvent correspondre des couples de courbes logarithmiques pour les intégrales de différentielles totales considérées. On verrait, comme ci-dessus, que l'on peut se borner à $K = 0$ et considérer par suite les fractions rationnelles x de y correspondant à

$$y = p(u), \qquad x = p[\pm(m + n\varepsilon)u].$$

En particulier, pour

$$m = 1, \qquad n = 0$$

on a la solution déjà considérée plus haut

$$x = y;$$

et pour

$$m = 0, \qquad n = 1$$

on a

$$x = \varepsilon y.$$

On va voir que tous les couples de courbes logarithmiques peuvent être ramenés aux deux couples de courbes correspondant à

$$x = y \qquad \text{et à} \qquad x = \varepsilon y.$$

Tout d'abord le raisonnement fait plus haut pour montrer que tous les couples de courbes correspondant à

$$y = p(u), \qquad x = p(mu)$$

se ramènent à $x = y$ est encore applicable.

On verra pareillement que tous les couples de courbes correspondant à

$$y = p(u), \qquad x = p(n\varepsilon u)$$

se ramènent au cas de $n = 1$, c'est-à-dire à $x = \varepsilon y$.

Soit enfin le cas général correspondant à

$$y = p(u), \qquad x = p(v) \qquad \text{avec} \qquad v = (m + n\varepsilon)u.$$

Nous considérons sur la courbe, entre z et x,

$$z^2 = f(x) p'^2(u)$$

le point

$$x = p(v), \qquad z = p'(v) p'(u) \qquad [v = (m + n\varepsilon) u].$$

Il est en ligne droite avec les deux points ayant les coordonnées

$$\begin{aligned} x &= p(mu), & z &= p'(-mu)\; p'(u), \\ x &= p(n\varepsilon u), & z &= p'(-n\varepsilon u) p'(u), \end{aligned}$$

puisque la somme des arguments

$$(m + n\varepsilon) u, \quad -mu, \quad -n\varepsilon u$$

correspondant à ces trois points est nulle. Soit

$$z = ax + b$$

l'équation de la droite joignant ces trois points, où a et b sont des fonctions rationnelles de y. Alors, en revenant à la surface

$$z^2 = f(x) f(y),$$

l'expression

$$\log \frac{ax + b - z}{ax + b + z}$$

permet de ramener le couple de courbes logarithmiques correspondant à

$$v = (m + n\varepsilon) u$$

aux couples correspondant à

$$v = mu \qquad \text{et à} \qquad v = n\varepsilon u.$$

C'est toujours le même mode de raisonnement, et finalement nous sommes ramenés aux deux couples relatifs à

$$x = y, \qquad x = \varepsilon y.$$

8. Par suite, dans notre exemple actuel, on voit immédiatement que l'on peut se borner à envisager les intégrales de différentielles

totales de la forme

$$\int \frac{P\,dy + Q\,dx}{(x-y)(x-\varepsilon y)\sqrt{f(x)f(y)}},$$

P et Q étant des polynomes en x, à coefficients rationnels en y.

L'intégrale diffère de celle que nous avons étudiée au n° 4 par la présence au dénominateur du facteur $x - \varepsilon y$. Mais les raisonnements faits (*loc. cit.*) vont encore être applicables avec peu de modifications et nous arriverons à la même conclusion, à savoir que toutes les intégrales relatives à la surface

$$z^2 = (4x^3 - 1)(4y^3 - 1)$$

se ramènent encore à des combinaisons algébrico-logarithmiques.

Reportons-nous, en effet, à la figure faite plus haut; a, b, c représentent les trois racines de $4x^3 - 1$. Il faudrait encore marquer le point correspondant à $y\varepsilon$. Si y est voisin de a, le point $y\varepsilon$ sera voisin d'un des deux autres points. Supposons qu'il soit voisin de c. Toutes les parties du raisonnement fait au n° 4 sont encore applicables, puisque le point $y\varepsilon$ restant voisin de c n'amène aucune modification dans Γ quand y tourne autour de a. On arrive donc encore à une contradiction, et par suite l'intégrale dont nous avons admis l'existence ne peut être construite, et les seules intégrales sont des combinaisons algébrico-logarithmiques.

II.

7. Les cas particuliers que nous venons d'examiner se rapportaient à des surfaces donnant des sections du genre *un*, pour $y = \text{const}$. Voici des cas plus généraux et mettant en évidence des circonstances intéressantes.

Envisageons la surface

$$z^2 = f(x)F(y),$$

$f(x)$ étant un polynome de degré $2p + 1$ (à racines simples) et $F(y)$ un polynome arbitraire. D'après la théorie générale, développée précédemment, nous avons à rechercher les courbes

$$\varphi(x, y) = 0$$

de degré p au plus en x, tels que, pour (x, y) satisfaisant à cette dernière équation, z soit fonction rationnelle de x et de y. Nous allons démontrer que de telles courbes n'existent pas, en dehors des courbes $x = a$, en désignant par a une racine de $f(x)$.

Soit

$$z = \sqrt{F(y)}\zeta,$$

on aura

$$\zeta^2 = f(x),$$

et l'on pourra satisfaire à cette équation en prenant pour ζ une fonction rationnelle de x, y et $\sqrt{F(y)}$, les deux lettres x et y étant liées par la relation $\varphi = 0$ que l'on suppose exister. Donnons à y une valeur déterminée et considérons une détermination de $\sqrt{F(y)}$; on aura, pour x, les p racines $x_1, x_2, \ldots, x_p$, en supposant φ de degré p et irréductible. Formons les sommes

$$\text{(E)} \qquad \frac{x_1^\lambda\, dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^\lambda\, dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \ldots + \frac{x_p^\lambda\, dx_p}{\sqrt{f(x_p)}} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Puisque $\sqrt{f(x_i)}$ est une fonction rationnelle de x_i, y et $\sqrt{F(y)}$, les sommes précédentes seront de la forme

$$R_\lambda[y, \sqrt{F(y)}]\, dy,$$

les R_λ étant rationnelles en y et $\sqrt{F(y)}$, et les intégrales

$$\int R_\lambda[y, \sqrt{F(y)}]\, dy$$

seront des intégrales de première espèce. Toutes les fonctions R_λ ne peuvent être identiquement nulles (à moins que les x ne soient constants); car, des équations obtenues en égalant à *zéro* les expressions (E), on déduirait que deux des x sont égaux, ce qui est contradictoire avec l'irréductibilité supposée de l'équation $\varphi = 0$. Ceci posé, nous aurons donc au moins une intégrale de première espèce relative à la courbe

$$u^2 = F(y),$$

qui aura les mêmes périodes qu'une intégrale de première espèce relative à la courbe

$$v^2 = f(x).$$

Cette circonstance ne peut se présenter *si le polynome* F (y) *est arbitraire*, ce qui démontre l'impossibilité de la relation $\varphi = 0$ jouissant de la propriété indiquée.

Nous avons supposé le polynome irréductible φ de degré p par rapport à x; la même démonstration s'appliquerait si φ était d'un moindre degré que p.

De cette analyse nous concluons [en remarquant de plus que la surface

$$z^2 = f(x)\mathrm{F}(y)$$

n'a pas d'intégrale de seconde espèce] que *toutes les intégrales relatives à cette surface sont algébrico-logarithmiques.* On suppose, bien entendu, que F (y) est un polynome arbitraire.

23. Les conclusions précédentes s'étendraient immédiatement (en raisonnant comme au n° 19) aux équations de la forme

$$z^2 = a(y)x^{2p+1} + b(y),$$

a et b étant des polynomes arbitraires en y.

24. Nous avons donc ainsi obtenu des cas particuliers assez étendus pour lesquels les intégrales de différentielles totales de troisième espèce peuvent être étudiées. Si l'on cherche à traiter le cas d'une surface de degré m (à singularités ordinaires)

$$f(x, y, z) = 0,$$

on devra considérer les courbes gauches tracées sur cette surface. Soit une telle courbe de la surface; elle coupe la courbe définie par la relation entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0$$

en un certain groupe de points dépendant rationnellement du paramètre y. Il faudrait donc étudier les groupes de points sur la courbe précédente *qui dépendent rationnellement* de y. On peut supposer que ces groupes de points ne contiennent pas plus de p points (p désignant le genre de la courbe f pour y arbitraire); c'est ce que nous allons commencer par démontrer.

Envisageons en effet un groupe de λ points ($\lambda > p$), et rappelons-nous que la dimension des adjointes d'ordre $m-3+\alpha$ ($\alpha \geqq 1$) est

$$p-2+m\alpha,$$

Or on peut choisir un nombre μ dans la suite

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-1,$$

de telle sorte que l'on ait

$$\lambda+\mu=p-2+m\alpha \qquad (\alpha \text{ entier} \geqq 1).$$

Ceci posé, nous avons vu que les m points à l'infini de la courbe f sont à considérer comme distincts au point de vue de la rationalité par rapport à y. Joignons alors aux λ points du groupe considéré, μ des points à l'infini, nous pouvons dire que nous avons un groupe de $\lambda+\mu$ points dépendant rationnellement de y. Par ces $\lambda+\mu$ points on peut faire passer une adjointe au moins d'ordre

$$m-3+\alpha,$$

et, en dehors de $\lambda+\mu$ points et des points doubles, nous avons p points de rencontre. Nous sommes donc ramenés à un groupe de p points (dont quelques-uns pourraient être à l'infini); c'est ce que nous voulions montrer.

25. L'étude générale des groupes de p points sur la courbe f, dépendant rationnellement de y, ne paraît pas facile. Nous allons étudier seulement le cas particulier de la courbe

$$(\alpha) \qquad z^m = x^m + \mathrm{P}(y),$$

où $\mathrm{P}(y)$ est un polynome *arbitraire* de degré m. Nous considérons donc, sur la courbe (α) entre z et x, un groupe de p points $\left[p \text{ étant ici } \frac{(m-1)(m-2)}{2}\right]$ dépendant rationnellement de y; posons

$$x = \xi \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)},$$
$$z = \zeta \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)};$$

on aura

$$(\beta) \qquad \zeta^m = \xi^m + 1.$$

Sur la courbe (β) correspond au groupe des p points de la courbe (α) un groupe de p points dépendant rationnellement de y et de $\sqrt[m]{P(y)}$. Désignons ces p points par

$$(\xi_1, \zeta_1), \quad (\xi_2, \zeta_2), \quad \ldots, \quad (\xi_p, \zeta_p),$$

et soit une intégrale de première espèce de la courbe (β)

$$\int \frac{Q_i(\xi, \zeta)\, d\xi}{\zeta^{m-1}};$$

la somme

$$\frac{Q_i(\xi_1, \zeta_1)\, d\xi_1}{\zeta_1^{m-1}} + \frac{Q_i(\xi_2, \zeta_2)\, d\xi_2}{\zeta_2^{m-1}} + \ldots + \frac{Q_i(\xi_p, \zeta_p)\, d\xi_p}{\zeta_p^{m-1}}$$

(où les différentielles sont relatives à la variable y) sera nécessairement de la forme

$$R_i\left[y, \sqrt[m]{P(y)}\right] dy$$

R_i étant une fonction rationnelle de y et $\sqrt[m]{P(y)}$, et l'intégrale

$$\int R_i\left[y, \sqrt[m]{P(y)}\right] dy$$

sera nécessairement une intégrale de *première espèce* relative à la courbe entre u et y

$$u^m = P(y).$$

Nous avons donc les p équations

$$\frac{Q_i(\xi_1, \zeta_1)\, d\xi_1}{\zeta_1^{m-1}} + \frac{Q_i(\xi_2, \zeta_2)\, d\xi_2}{\zeta_2^{m-1}} + \ldots + \frac{Q_i(\xi_p, \zeta_p)\, d\xi_p}{\zeta_p^{m-1}} = R_i\left[y, \sqrt[m]{P(y)}\right] dy$$

pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

Si ces équations admettent une solution donnant pour toute fonction symétrique des p points $(\xi_1, \zeta_1) \ldots (\xi_p, \zeta_p)$ une fonction rationnelle de y et $\sqrt[m]{P(y)}$, il est nécessaire que les périodes des intégrales

$$\int R_i\left[y, \sqrt[m]{P(y)}\right] dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

soient les périodes correspondantes des intégrales

$$\int \frac{Q_i(\xi, \zeta)\, d\xi}{\zeta^{m-1}}.$$

Or ceci est impossible quand le polynome P (y) est un polynome arbitraire de degré m (en supposant $m>3$); car alors il ne peut arriver qu'une intégrale de première espèce relative à la courbe

$$u^m = \mathrm{P}(y)$$

n'ait d'autres périodes que celles d'une intégrale de première espèce relative à la courbe

$$\zeta^m = \xi^m + 1.$$

On en conclut que tous les R sont identiquement nuls, et nous avons les relations

$$(\gamma) \quad \frac{\mathrm{Q}_i(\xi_1, \zeta_1)\,d\xi_1}{\zeta_1^{m-1}} + \frac{\mathrm{Q}_i(\xi_2, \zeta_2)\,d\xi_2}{\zeta_2^{m-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{Q}_i(\xi_p, \zeta_p)\,d\xi_p}{\zeta_p^{m-1}} = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On peut énoncer ce résultat sous une autre forme. Soient

$$(\xi_1^0, \zeta_1^0), \quad (\xi_2^0, \zeta_2^0), \quad \ldots, \quad (\xi_p^0, \zeta_p^0)$$

les valeurs des (ξ, η) pour $y = y_0$ et une certaine détermination de $\sqrt[m]{\mathrm{P}(y_0)}$; la somme des intégrales

$$\int_{\xi_1^0, \zeta_1^0}^{\xi_1, \zeta_1} + \int_{\xi_2^0, \zeta_2^0}^{\xi_2, \zeta_2} + \ldots + \int_{\xi_p^0, \zeta_p^0}^{\xi_p, \zeta_p},$$

où nous n'avons pas écrit l'élément

$$\frac{\mathrm{Q}_i(\xi, \zeta)\,d\xi}{\zeta^{m-1}},$$

sera une fonction de y dont la dérivée est nulle. Elle est donc égale à une constante (à des périodes près), et cette constante est nulle (d'après sa valeur pour $y = y_0$).

Les équations (γ) nous apprennent d'ailleurs, si les (ξ, η) dépendent de y, que le déterminant

$$|\,\mathrm{Q}_i(\xi_h, \zeta_h)\,| = 0,$$

et, par suite, les points

$$(\xi_1, \zeta_1), \quad \ldots, \quad (\xi_p, \zeta_p)$$

sont sur une adjointe d'ordre $m - 3$.

Ceci posé, considérons une telle adjointe passant par ces points; elle rencontre encore la courbe (β) aux $p-2$ points

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad \ldots, \quad (\alpha_{p-2}, \beta_{p-2}).$$

Pour $y = y_0$, on aura en particulier

$$(\alpha_1^0, \beta_1^0), \quad \ldots, \quad (\alpha_{p-2}^0\, \beta_{p-2}^0).$$

On aura évidemment, pour toute intégrale de première espèce,

$$\int_{\xi_1^0, \zeta_1^0}^{\xi_1, \zeta_1} + \int_{\xi_2^0, \zeta_2^0}^{\xi_2, \zeta_2} + \ldots + \int_{\xi_p^0, \zeta_p^0}^{\xi_p, \zeta_p} + \int_{\alpha_1^0, \beta_1^0}^{\alpha_1^0, \beta_1^0} + \ldots + \int_{\alpha_{p-2}^0, \beta_{p-2}^0}^{\alpha_{p-2}^0, \beta_{p-2}^0} = 0.$$

Or, si l'on a une courbe de genre p et $2p-2$ points de cette courbe situés sur une adjointe d'ordre $m-3$,

$$(\xi_1^0, \zeta_1^0), \quad \ldots, \quad (\xi_{2p-2}^0, \eta_{2p-2}^0),$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que $2p-2$ autres points

$$(\xi_1, \zeta_1), \quad \ldots, \quad (\xi_{2p-2}, \eta_{2p-2})$$

soient sur une adjointe d'ordre $m-3$ s'expriment par les p relations

$$\int_{\xi_1^0, \zeta_1^0}^{\xi_1, \zeta_1} + \int_{\xi_2^0, \zeta_2^0}^{\xi_2, \zeta_2} + \ldots + \int_{\xi_{2p-2}^0, \zeta_{2p-2}^0}^{\xi_{2p-2}, \zeta_{2p-2}} \equiv 0,$$

formées avec les p intégrales de première espèce.

Si nous appliquons ce résultat, nous voyons que les $2p-2$ points

$$(\xi_1 \zeta_1), \quad (\xi_p, \zeta_p), \quad (\alpha_1^0, \beta_1^0) \quad \ldots, \quad (\alpha_{p-2}^0, \beta_{p-2}^0)$$

sont sur une adjointe d'ordre $m-3$. Par suite, si nous revenons à la courbe entre z et x,

$$z^m = x^m + \mathrm{P}(y),$$

nous aurons sur elle le groupe des p points, dont nous sommes partis, situé sur une adjointe d'ordre $m-3$, et cette adjointe rencontrera la courbe en $p-2$ points dont les coordonnées seront

$$\alpha_i^0 \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)}, \quad \beta_i^0 \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-2).$$

La correspondance entre les deux courbes

$$z^m = x^m + P(y) \qquad \text{et} \qquad \zeta^m = \xi^m + 1$$

est d'ailleurs telle qu'à un point de la première correspondent m points de la seconde $\left[\text{suivant la détermination de } \sqrt[m]{P(y)}\right]$, et les coordonnées de ces m points diffèrent par un facteur qui est une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Il résulte de là que, pour la surface

$$z^m = x^m + P(y),$$

on peut trouver une surface

$$R(x, y, z) = 0$$

de degré $m - 3$ en x et z rencontrant la surface à distance finie suivant la courbe initiale considérée (correspondant au groupe des p points), et suivant les $p - 2$ courbes planes

$$x - \lambda_i z = 0 \qquad \left(\lambda_i = \frac{\alpha_i^0}{\beta_i^0}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, p-2);$$

il pourra y avoir aussi des courbes de rencontre correspondant à $y = \text{const.}$, ces constantes étant racines de $P(y) = 0$.

Remarquons que λ_i^m est différent de *un*, à cause de la relation

$$(\beta_i^0)^m = (\alpha_i^0)^m + 1;$$

nous supposons ici le point (α_i^0, β_i^0) à distance finie; s'il était à l'infini, le point (x, z) serait à l'infini pour y arbitraire, et, par suite, sans intérêt pour nous. De ce que λ_i n'est pas une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, il résulte que le plan

$$x - \lambda_i z = 0$$

coupe la surface suivant une courbe irréductible.

26. De ces résultats nous allons pouvoir tirer des conclusions intéressantes sur les intégrales de différentielles totales relatives à la surface de degré m

$$z^m = x^m + P(y),$$

où $P(y)$ est un polynome arbitraire de degré m.

Par la soustraction d'expressions de la forme

$$C \log R(x, y, z) - C \sum_i \log(x - \lambda_i z),$$

où R a la signification du paragraphe précédent et où C désigne une constante convenable, nous pouvons ramener l'intégrale à n'avoir plus à distance finie d'autres lignes logarithmiques que des courbes correspondant à $y =$ const. Nous faisons, en effet, disparaître par ces soustractions toutes les courbes logarithmiques à distance finie, en n'introduisant peut-être que des courbes logarithmiques correspondant à des équations de la forme $y = a$, a étant une racine de $P(y) = 0$, valeur pour laquelle la courbe entre z et x se décompose en m droites.

En résumé, par des soustractions de logarithmes de fonctions rationnelles, nous sommes assuré de pouvoir ramener toute intégrale de différentielle totale relative à la surface

$$z^m = x^m + P(y)$$

à une intégrale ne pouvant avoir, à distance finie, d'autres courbes logarithmiques que les droites correspondant aux sections de la surface par les plans $y = a$ [a étant racine de $P(y)$]. On n'oubliera pas d'ailleurs que toute l'analyse précédente suppose que le polynome $P(y)$ n'est pas un polynome particulier de degré m.

27. Soit donc l'intégrale de différentielle totale

$$\text{(E)} \qquad \int P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy,$$

n'ayant d'autres lignes logarithmiques que les droites sections de la surface par les plans $y = a$, où a est une racine de $P(y)$.

L'intégrale

$$(\alpha) \qquad \int P(x, \bar{y}, z)\, dx$$

sera une intégrale abélienne pour la courbe entre z et x

$$z^m = x^m + P(\bar{y})$$

($\bar{y}$ étant arbitraire et différent des a), n'ayant pas de point singulier logarithmique à distance finie, puisque l'intégrale (E) n'a d'autres lignes logarithmiques que les droites sections de la surface par les plans $y = a$. On sait d'ailleurs que, par la soustraction d'une expression de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{R}(x, y, z),$$

on ramènera l'intégrale (α) à la forme

$$\int \frac{\mathrm{F}(x, y, z)\, dx}{z^{m-1}},$$

F étant un polynome en x et z à coefficients rationnels en y, et l'on peut supposer que le degré de ce polynome en x et z est au plus $2m - 4$.

Les périodes (polaires ou cycliques) de cette intégrale ne doivent pas dépendre de y. L'intégrale précédente est de la forme

$$\sum \int \frac{a_{\alpha\beta}\, x^\alpha z^\beta\, dx}{z^{m-1}},$$

α et β étant des entiers positifs ($\alpha + \beta \leqq 2m - 4$), et les $a_{\alpha\beta}$ étant des fonctions rationnelles de y. Considérons d'abord les termes pour lesquels $\alpha + \beta$ a la valeur k, comprise entre o et $m - 4$, et la valeur $k + m$.

En posant dans l'équation de la courbe

$$z^m = x^m + \mathrm{P}(y) \qquad z = \zeta \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)} \qquad \text{et} \qquad x = \xi \sqrt[m]{\mathrm{P}(y)},$$

nous aurons une intégrale où

$$\mathrm{P}(y)^{\frac{k+2}{m}}$$

sera un facteur, et qui sera de la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum \mathrm{P}(y)^{\frac{k+2}{m}} \int \frac{a_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha \zeta^\beta\, d\xi}{\zeta^{m-1}},$$

$a_{\alpha\beta}$ étant encore rationnelle en y, et ne représentant pas nécessairement la même fonction que plus haut.

Envisageons ensuite les termes où $\alpha + \beta$ a la valeur $m - 3$; on est alors conduit à l'expression

$$\text{(II)} \qquad \sum \mathrm{P}(y)^{\frac{m-1}{m}} \int \frac{a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\,d\xi}{\zeta^{m-1}}.$$

Enfin, les termes où $\alpha+\beta=m-2$ conduisent à

$$\text{(III)} \qquad \sum \int \frac{a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\zeta^{\beta}\,d\xi}{\zeta^{m-1}}.$$

La somme des périodes des intégrales (I), (II) et (III) doit être une constante indépendante de y. Il s'ensuit que la somme des périodes des intégrales (I) et (II) doit être nulle; sinon

$$\sqrt[m]{\mathrm{P}(y)}$$

satisferait à une équation d'ordre $m-1$ au plus, dont les coefficients seraient rationnels en y.

Nous concluons de là que, dans l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{F}(x, y, z)\,dx}{f'_z},$$

les termes qui correspondent à $\alpha+\beta \neq m-2$ donnent une fonction rationnelle de x, y et z. On peut retrancher celle-ci de l'intégrale de différentielle totale envisagée, et nous avons alors une intégrale de différentielle totale, dans laquelle le coefficient de dx est

$$\sum \frac{a_{\alpha\beta}x^{\alpha}z^{\beta}}{z^{m-1}} \qquad (\alpha+\beta=m-2).$$

Les périodes de l'intégrale

$$\int \sum \frac{a_{\alpha\beta}x^{\alpha}z^{\beta}\,dx}{z^{m-1}} \qquad (a_{\alpha\beta} \text{ fraction rationnelle})$$

ne doivent pas dépendre de y.

Il en sera ainsi *si les $a_{\alpha\beta}$ sont des constantes,* et il est facile dans ce cas d'avoir la valeur de l'intégrale. Désignons par ε une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité et écrivons

$$\log(z-\varepsilon x)$$

sous la forme d'une intégrale de différentielle totale, et nous rappelant que

$$z^m = x^m + P(y).$$

Le coefficient de dx sera

$$\frac{1}{z - \varepsilon x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon\right)$$

ou

$$\frac{1}{z - \varepsilon x} \frac{x^{m-1} - \varepsilon z^{m-1}}{z^{m-1}} = -\frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \frac{z^{m-1} - \varepsilon^{m-1} x^{m-1}}{z - \varepsilon x} \frac{1}{z^{m-1}},$$

et l'on a, par suite, l'intégrale

$$-\frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \int \frac{z^{m-2} + \varepsilon x z^{m-3} + \varepsilon^2 x^2 z^{m-4} + \ldots + \varepsilon^{m-2} x^{m-2}}{z^{m-1}} \, dx,$$

qui est de la forme des intégrales considérées plus haut. En prenant successivement pour ε les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, nous aurons ainsi m intégrales dont la somme est nulle, et l'on voit immédiatement que toute intégrale

$$\int \frac{x^\alpha z^\beta \, dx}{z^{m-1}} \qquad (\alpha + \beta = m - 2)$$

est la somme de $m - 1$ des intégrales précédentes, et s'exprime par conséquent par les logarithmes de $z - \varepsilon x$ en prenant, pour ε, $(m - 1)$ racines $m^{\text{ièmes}}$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ de l'unité.

Nous avons supposé que les $a_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas de y. *Si les $a_{\alpha\beta}$ dépendent de y*, l'intégrale considérée

$$\int \sum \frac{a_{\alpha\beta} x^\alpha z^\beta \, dx}{z^{m-1}}$$

aura pour valeur

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} \varphi_i \log(z - \varepsilon_i x),$$

les φ étant des fonctions rationnelles de y. On aurait donc une intégrale de différentielle totale

$$\int A \, dx + B \, dy,$$

relative à la surface

$$z^m = x^m + P(y),$$

dans laquelle

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{i=m-1} \varphi_i \log(z - \varepsilon_i x),$$

les φ étant rationnelles en y. Mais ceci est impossible, si les φ ne sont pas des constantes, car on aurait, à cause de $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$,

$$B = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^{i=m-1} \varphi_i \log(z - \varepsilon_i x) + \text{fonction de } y,$$

et cette fonction B ne peut être rationnelle en x, y et z que si les φ sont des constantes. Il en résulte que les intégrales considérées de la surface sont nécessairement de la forme

$$\Sigma C_i \log(z - \varepsilon_i x) + \Sigma A \log(y - a) + R(y),$$

les C et les A étant des constantes, et R (y) une fonction rationnelle de y.

Nous pouvons donc conclure :

Toutes les intégrales de différentielles totales relatives à la surface

$$z^m = x^m + P(y)$$

[où $P(y)$ est un polynome arbitraire de degré m], *s'expriment par des combinaisons algébrico-logarithmiques.*

28. Terminons en cherchant le nombre des courbes irréductibles sur la surface précédente répondant à l'énoncé du théorème fondamental sur les intégrales de différentielles totales, que j'ai établi précédemment (*Annales de l'École Normale*, 1901, p. 408) et où figure un nombre ρ. Étant considérée une courbe irréductible quelconque de la surface, on peut, d'après tout ce qui précède, former une intégrale de différentielle totale n'ayant d'autres courbes logarithmiques que cette courbe, et la totalité ou une partie de la courbe à l'infini et des

droites sections de la surface par les plans

$$y = a$$

[a étant racine de $P(y)$].

Or de cette intégrale on peut faire disparaître comme courbes logarithmiques les m droites obtenues en coupant la surface par le plan

$$y = a_1,$$

a_1 étant une racine *déterminée* de $P(y)$, et les $m - 1$ droites sections de la surface par le plan

$$z - \varepsilon_1 x = 0,$$

ε_1 étant une racine $m^{\text{ième}}$ *déterminée* de l'unité (la $m^{\text{ième}}$ droite d'intersection figurant déjà parmi les m précédentes). On peut, en effet, retrancher de l'intégrale l'expression

$$\begin{aligned} &A_2 \log(y - a_2) + \ldots + A_m \log(y - a_m) \\ &\quad + B_1 \log(z - \varepsilon_1 x) + B_2 \log(z - \varepsilon_2 x) + \ldots + B_m \log(z - \varepsilon_m x), \end{aligned}$$

les A et les B étant des constantes convenablement choisies de façon à faire disparaître les $2m - 1$ lignes logarithmiques indiquées.

Donc, en considérant les $(m - 1)^2$ lignes droites Δ de la surface *situées* dans les plans

$$y = a_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, m)$$

et *non situées* dans le plan

$$z - \varepsilon_1 x = 0,$$

il existe certainement une intégrale de troisième espèce ayant comme lignes logarithmiques une courbe arbitrairement choisie, et la totalité ou une partie des lignes Δ et de la courbe à l'infini. D'ailleurs, il n'existe pas d'intégrale ayant seulement comme courbes logarithmiques la totalité ou une partie des lignes Δ et de la courbe à l'infini. En effet, d'après le paragraphe précédent, une telle intégrale serait, à une fonction rationnelle près, de la forme

$$\begin{aligned} &C_1 \log(z - \varepsilon_1 x) + C_2 \log(z - \varepsilon_2 x) + \ldots + C_m \log(z - \varepsilon_m x) \\ &\qquad\qquad + A_1 \log(y - a_1) + \ldots + A_m \log(y - a_m). \end{aligned}$$

Or les droites de la surface dans le plan

$$y = a_1$$

ne doivent pas être des courbes logarithmiques. Donc, on doit avoir

$$C_1 + A_1 = 0, \qquad C_2 + A_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad C_m + A_1 = 0;$$

l'expression est donc de la forme

$$-A_1 P(y) + A_1 \log(y - a_1) + \ldots + A_m \log(y - a_m),$$

car

$$(z - \varepsilon_1 x)(z - \varepsilon_2 x) \ldots (z - \varepsilon_m x) = P(y).$$

Donc, l'expression peut encore s'écrire

$$A'_2 \log(y - a_2) + \ldots + A'_m \log(y - a_m),$$

et, comme les droites situées dans le plan

$$z - \varepsilon_1 x = 0$$

ne doivent pas être des courbes logarithmiques, tous les A′ sont nuls.

Le nombre désigné par ρ dans l'énoncé du théorème fondamental est donc ici égal à

$$(m - 1)^2 + 1.$$