ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NIELS NIELSEN

Recherches sur les séries de factorielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 409-453

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__409_0>

RECHERCHES
SUR LES SÉRIES DE FACTORIELLES,

PAR M. NIELS NIELSEN,

A COPENHAGUE.

La remarque, faite en passant par M. Frobenius [1] il y a trente ans à peu près, savoir que l'on n'a pas réussi à donner la condition nécessaire et suffisante qui doit être remplie par une fonction développable en série de factorielles, est vraie aujourd'hui encore, je le crois. En effet, les conditions que l'on a essayé de donner jusqu'ici sont toutes insuffisantes.

Par exemple, la condition donnée par M. König [2], savoir que la fonction en question doit être holomorphe à droite d'une ligne perpendiculaire à l'axe des nombres réels, est trop nécessaire pour dire quelque chose. De même, la condition donnée par Schlömilch [3] dans son second Mémoire sur ce sujet est sans valeur considérable aussi.

Quant aux méthodes d'une portée assez étendue que l'on a appliquées pour développer une fonction donnée en série de factorielles, c'est-à-dire une série de cette forme

$$(\alpha) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 73, 1871, p. 1.

[2] *Mathematische Annalen*, t. V, 1872, p. 338.

[3] *Sitzungsberichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 1863; *Compendium der höheren Analysis*, t. II, p. 93 (3^e édition). Brunswick, 1879.

où les coefficients b_n sont indépendants de x, deux seules méritent d'être mentionnées ici :

1° *Méthode de Stirling* (¹), qui est applicable aux fonctions développables en série de puissances négatives et entières de x. Or, cette méthode ne peut donner ni le champ complet de convergence de la série de factorielles, ni la condition nécessaire et suffisante susdite. En effet, ce développement en série de puissances négatives n'a nul rapport à la série de factorielles elle-même. Supposons que la série susdite de puissances négatives de x soit divergente, cette méthode est en défaut; mais, si la fonction en question est développable en série de factorielles, une application purement formelle de la méthode de Stirling nous conduira précisément à la seule série de ce genre possible pour la fonction. Cependant, un approfondissement du problème semble être impossible par ce point de vue.

Dans l'excellent Mémoire sur la théorie élémentaire de la fonction gamma de M. J.-L.-W.-V. Jensen (²) on peut trouver un aperçu précis de la méthode de Stirling.

2° *Méthode de Schlömilch* (³), communiquée dans son premier Mémoire, est applicable aux fonctions qui se présentent sous cette forme

$$(\beta) \qquad \int_0^\infty f(t)\, e^{-tx}\, dt,$$

où $f(t)$ doit être holomorphe aux environs de $t = 0$. Schlömilch transforme son intégrale à cette autre

$$(\gamma) \qquad \int_0^1 f[-\log(1-t)](1-t)^{x-1}\, dt,$$

et sa méthode est applicable pourvu que la série de puissances positives et entières de t obtenue pour $f[-\log(1-t)]$ multipliée par $(1-t)^{x-1}$ soit intégrable terme à terme de $t = 0$ à $t = 1$. Or, la condition pour la possibilité d'une telle intégration est très difficile à

(¹) *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum*; Londres, 1730 (Citat. de Schlömilch).

(²) *Nyt Tidsskrift for Mathematik*, t. II B, 1891, p. 66.

(³) *Sitzungsberichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 1859; *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. IV, 1859, p. 390.

trouver et, de plus, le coefficient b_n de la factorielle du rang $n+1$ dans (α) se présente sous cette forme

$$b_n = C_n^0 f_{(0)}^{(n)} + C_n^1 f_{(0)}^{(n-1)} + \ldots + C_n^{n-1} f_{(0)}^{(1)},$$

extrêmement incommode à cause des difficiles nombres C_n^s désignés généralement comme les coefficients de la factorielle du rang n. C'est-à-dire que la méthode de Schlömilch exige une étude particulière de chaque fonction qu'il s'agit de développer.

Du reste, la méthode de Schlömilch est analogue à celle de Kummer [1].

Cependant, une légère modification de l'intégrale (γ) nous donnera aisément la forme commune de toutes les fonctions développables en série de factorielles. En effet, la première Section de ce Mémoire montre, après une étude directe de la série de factorielles générale, que toutes les fonctions susdites doivent se présenter sous cette forme commune

$$\int_0^1 \varphi(z)\, z^{x-1}\, dz,$$

où $\varphi(z)$, *la fonction génératrice de la série de factorielles,* doit satisfaire à de simples conditions faciles à indiquer. Inversement, la deuxième Section montre que ces conditions nécessaires sont suffisantes aussi et nous donnent directement le champ complet de convergence de la série de factorielles obtenue. De cette manière, nos résultats confirment précisément la divination de Schlömilch, savoir que l'origine des séries de factorielles est à chercher dans des intégrales définies de la forme (β).

Or, connaissant maintenant la forme générale d'une fonction développable en série de factorielles, nous déduirons immédiatement tous les résultats déjà connus pour ces séries et un nombre d'autres. Je me bornerai à citer ici les recherches contenues dans la dernière Section du présent Mémoire, relatives à la multiplication de l'argument dans une série de factorielles; les résultats ainsi obtenus semblent être complètement inaperçus jusqu'ici.

---

(1) *Journal de Crelle,* t. 17, 1837, p. 210.

I. — Propriétés générales d'une série de factorielles.

1. *Factorielles du rang très grand.* — Dans ce qui va suivre nous désignerons toujours comme factorielle de l'argument x et du rang n ce produit fini

$$x(x+1)\ldots(x+n-1);$$

effectuons la multiplication et ordonnons selon des puissances descendantes de x, nous aurons une identité de cette forme :

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x, \tag{1}$$

où les nombres entiers C_n^s figurant au second membre sont désignés généralement comme les coefficients de la factorielle du rang n.

Quant aux nombres C_n^s, on trouvera aisément une formule récursive en multipliant par $x+n$ les deux membres de (1), ce qui donnera

$$C_{n+1}^s = C_n^s + n\,C_n^{s-1}. \tag{1 a}$$

Du reste, Schläfli [1] a donné une loi pour la formation indépendante de ces nombres difficiles : « But this law is a very complicated one », dit l'illustre Cayley [2], et à juste titre, car Schläfli exprime les nombres C_n^s à l'aide d'une somme quadruple.

Cependant, Cayley ne donne aucun moyen pour détourner cette difficulté, et c'est la même chose pour les expressions données pour les nombres C_n^s par Schlömilch [3] et von Zeipel [4].

Revenons maintenant aux factorielles elles-mêmes. Dans les recherches qui nous occupent ici, la valeur limite du quotient de deux factorielles du même rang très grand joue un rôle important. Or, posant

$$\Gamma_n(x) = \frac{1.2.3\ldots(n-1).n^x}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}, \tag{α}$$

on aura

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x); \tag{β}$$

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 43, 1852, p. 1-22.
(2) *Quarterly Journal of Mathematics*, t. III, 1860, p. 368.
(3) *Journal de Crelle*, t. 44, 1852, p. 344-355; *Compendium*, t. II, p. 28.
(4) *Om monomial-og fakultets koefficienter; ur Lunds Universitets årsskrift*, 1870.

en outre, la formule (α) donnera immédiatement

$$(\gamma)\qquad \frac{y(y+1)\ldots(y+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} = \frac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_n(y)} n^{y-x};$$

c'est-à-dire que nous avons démontré ce lemme fondamental :

Faisons abstraction des valeurs entières et non positives de x et y, nous aurons généralement :

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty}\left|\frac{y(y+1)\ldots(y+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\right| = \begin{cases} 0 \\ \textit{valeur finie} \\ \infty \end{cases}$$

selon que $\mathfrak{R}(x-y) \gtreqless 0$.

Ici, et dans ce qui va suivre, la lettre gothique $\mathfrak{R}$ désigne toujours la partie réelle.

La formule (2) se démontre immédiatement aussi à l'aide du théorème fondamental relatif à la convergence ou divergence d'un produit infini, mais la formule (γ) nous est indispensable dans nos recherches suivantes.

2. *Champ de convergence d'une série de factorielles.* — Considérons maintenant une série de factorielles que nous écrivons sous cette forme

$$(\alpha)\qquad \Omega(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, b_n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

où les coefficients b_n sont indépendants de x et généralement imaginaires. Nous avons tout d'abord à décider ce que nous avons à entendre par le champ de convergence d'une telle série. A cet égard, remarquons expressément que nous n'étudierons pas les séries de factorielles qui ne sont convergentes que pour des arguments de partie réelle infiniment grande et positive, séries qui correspondent, par exemple, aux séries asymptotiques obtenues pour des fonctions transcendantes entières.

Ces restrictions faites, il est évident que notre série $\Omega(x)$ est toujours divergente pour une valeur entière et non positive de x, car les termes finissent toujours par être infinis. Cependant, la convergence de la série $\Omega(x)$ peut présenter des propriétés singulières comme le montrent ces deux exemples :

$$(\beta) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}, \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

En effet, le lemme du n° 1 montre que la première de ces séries particulières est absolument convergente, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 1$; elle est divergente pour $\mathfrak{R}(x) \leqq 0$, tandis qu'elle est convergente, mais non absolument, si $1 \geqq \mathfrak{R}(x) > 0$. Quant à la seconde série, elle est convergente, et cela absolument, pour une valeur finie quelconque de x qui ne rend pas infinis les termes de la série, c'est-à-dire les valeurs isolées

$$(\gamma) \qquad x = 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad \ldots.$$

Or, la limite de convergence de la première série passe par le premier point de discontinuité de la fonction représentée par la somme de la série convergente correspondante, tandis que la seconde série (β) est absolument convergente dans toute l'étendue du plan, abstraction faite des points isolés (γ). Divisons maintenant par $\Gamma(x)$ les deux séries (β), les séries nouvelles ainsi obtenues, savoir

$$(\delta) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(x+n+1)}, \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\Gamma(x+n+1)},$$

seront convergentes, la première pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$, la seconde pour une valeur finie quelconque de x. Cependant, l'adjonction du facteur $\frac{1}{\Gamma(x)}$ n'altère pas la nature de la convergence ou divergence de la série primitive, outre pour les valeurs (γ), de façon que nous sommes conduits à définir naturellement *le champ de convergence de la série* (α) *comme la partie du plan des x où cette série modifiée*

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, b_n}{\Gamma(x+n+1)}$$

est convergente. Dans cette partie du plan, la fonction définie par la série $\Omega(x)$ ne peut pas avoir de points singuliers, finis ou infinis, outre des pôles simples dans les points (γ) *peut-être.*

3. *Sur la convergence d'une série* $\Omega(x)$. — Appliquons maintenant le lemme du n° 1 pour démontrer une suite de théorèmes fondamentaux relatifs à la convergence d'une série de factorielles.

I. *La limite du champ de convergence absolue de la série* $\Omega(x)$ *est une ligne droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme susdit. En effet, on voit aisément que ces deux séries

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,|b_n|}{|(x+iy)(x+1+iy)\ldots(x+iy+n)|},$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,|b_n|}{|(x+iy')(x+1+iy')\ldots(x+n+iy')|}$$

sont en même temps convergentes ou divergentes, parce que le quotient des termes du même rang dans les deux séries est fini.

II. *Si tous les termes de la série* $\Omega(x)$ *sont finis pour une valeur fixe de* x, *la série* $\Omega(x')$ *est certainement absolument convergente, pourvu que* $\mathfrak{R}(x'-x) > 1$.

Le lemme du n° 1 donne ici, même pour n très grand,

$$\frac{n!\,|b_n|}{|x'(x'+1)\ldots(x'+n)|} = \frac{n!\,|b_n|\,n^{\mathfrak{R}(x-x')}\mathrm{K}}{|x(x+1)\ldots(x+n)|} = \frac{\mathrm{K}'}{n^{\mathfrak{R}(x'-x)}},$$

où K et K′ désignent deux nombres positifs et finis. Pour des valeurs entières et non positives de x ou de x', il faut tenir compte des remarques faites au n° 2.

III. *Une fonction ne peut être développée en série de factorielles de l'argument* x *que d'une seule façon, pourvu qu'un tel développement soit possible.*

En effet, supposons que nous ayons deux développements différents en séries de factorielles; nous aurons une égalité de cette forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,b_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,b'_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Or, multipliant par x les deux membres de cette équation et supposant ensuite $\mathfrak{R}(x) = +\infty$, ce qui est permis en vertu du théorème II, on aura

$$b_0 = b'_0,$$

et ainsi de suite.

Remarquons en passant que notre théorème ne dit rien sur l'impossibilité de développer une fonction en plusieurs séries de factorielles des arguments différents, problème que nous avons à étudier dans la Section V.

4. *Transformation de $\Omega(x)$ dans une intégrale définie.* — Pour démontrer qu'une série de factorielles convergente pour une valeur finie de l'argument peut être transformée dans une intégrale définie, il est nécessaire d'établir ces autres théorèmes :

IV. *Supposons que $\Omega(x)$ soit convergente pour une valeur finie quelconque de x; la série de puissances*

$$\varphi(1-z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \tag{3}$$

a son rayon de convergence égal à un au moins.

Si la série $\Omega(x)$ est convergente, nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!\,|b_n|}{|x(x+1)\ldots(x+n)|} = \lim_{n=\infty} \frac{|\Gamma_n(x)|\,|b_n|}{n^{\mathfrak{R}(x)}} = 0,$$

ce qui montre clairement que la série de puissances (3) est convergente toujours si $|z|$ ne surpasse pas l'unité.

La formule (α) au n° 1 nous donne encore cette autre proposition :

V. *Si la série de puissances* (3) *est convergente pour $|z| > 1$, la série de factorielles est convergente pour une valeur finie quelconque de x.*

L'inverse n'est pas vrai, comme le montre clairement la formule (19) au n° 9.

Quant à une série $\Omega(x)$ convergente dans toute l'étendue du plan, nous aurons ce théorème :

VI. *Supposons que $\Omega(x)$, convergente pour une valeur finie quelconque de x, $\varphi(z)$, doit être holomorphe aux environs de $z = 0$ aussi, et la série* *de puissances correspondante :*

$$(3_a) \qquad \varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

a son rayon de convergence égal à un au moins.

L'inverse n'est pas vrai, comme le montre aussi la formule (19) au n° 9.

Supposons maintenant que $-n$ soit un négatif entier fini; la fonction $\Omega(x)$ a un pôle simple dans le point $z = -n$, dont le résidu est égal à

$$(3_b) \qquad a_n = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \binom{n+p}{p} b_{n+p},$$

de façon que cette somme a toujours une valeur finie, et, en outre, nous aurons immédiatement, en vertu de (3) :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \varphi^{(n)}(0),$$

ce qui établit la démonstration de notre énoncé.

Ces trois propositions démontrées, il est facile d'établir ce théorème, essentiel dans ce qui va suivre :

VII. *Supposons $\Omega(x)$ convergente pour des valeurs finies de x; nous aurons cette formule*

$$(4) \qquad \frac{(-1)^n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \int_0^1 \varphi^{(n)}(z) z^{x+n-1} dz = \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

où n désigne un positif entier fini mais d'une grandeur suffisante pour que $\mathfrak{R}(x+n)$ ait une grandeur convenable.

La définition même de $\varphi(1-z)$ nous donnera immédiatement

$$(\beta) \qquad \frac{(-1)^n}{n!} \varphi^{(n)}(1-z) = \binom{n}{0} b_n + \binom{n+1}{1} b_{n+1} z + \binom{n+2}{2} b_{n+2} z^2 + \ldots;$$

multiplions maintenant par $(1-z)^{x+n-1}$ les deux membres de (β), nous aurons

$$(\gamma) \qquad \frac{(-1)^n}{n!} \varphi^{(n)}(1-z)(1-z)^{x+n-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s}{s} b_{n+s} z^s (1-z)^{x+n-1},$$

et la série infinie figurant au second membre de (γ) a évidemment ces trois propriétés :

1° La série est uniformément convergente dans l'intervalle $0 \leqq z < 1$;

2° Les termes de la série sont des fonctions intégrables de $z = 0$ à $z = 1$;

3° La série obtenue en intégrant terme à terme de $z = 0$ à $z = 1$ est convergente; en effet, elle n'est autre chose que la somme de derniers termes de $\Omega(x)$ en commençant par le $(n+1)^{\text{ième}}$.

Cela posé, un théorème fondamental (¹) montre que la série obtenue en intégrant terme à terme de $z = 0$ à $z = 1$ notre série susdite représente précisément l'intégrale de la fonction figurant au premier membre de (γ). Transformons encore légèrement l'intégrale ainsi obtenue, nous trouvons notre formule (4).

Posons particulièrement $n = 0$; la formule (4) donnera cette autre

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(z) z^{x-1}\, dz, \tag{4a}$$

qui est vraie, pourvu que la série de factorielles $\Omega(x)$ soit convergente et que l'intégrale ait un sens.

C'est la formule (4_a) qui justifie la désignation *fonction génératrice* pour la fonction $\varphi(z)$.

5. *Propriété essentielle de $\varphi(z)$.* — Démontrons encore ce théorème fondamental relatif à la fonction génératrice.

VIII. *Si la série $\Omega(x)$ est convergente, il est possible de déterminer un positif entier* N, *tel que cette inégalité*

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(z) z^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)} \right| < \varepsilon, \tag{5}$$

a lieu dans tout l'intervalle $0 \leqq z \leqq 1$, *pourvu que* $n \geqq$ N, *tandis que* ε *désigne une quantité positive donnée auparavant et aussi petite qu'on le veut.*

(¹) U. Dini, *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse.* Leipzig, 1892, p. 521.

En vertu des remarques que nous venons de faire sur la série (γ) du paragraphe précédent, nous aurons, à l'aide de (4),

$$(\alpha) \qquad \left| \int_1^z \frac{\varphi^{(n)}(z) z^{x+n-1}}{\Gamma(x+n)} dz \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pourvu que les conditions susdites soient remplies. Or, une intégration par parties donnera, en vertu de (α),

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(z) z^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)} - \frac{(-1)^n b_n}{\Gamma(x+n+1)} - \int_1^z \frac{\varphi^{(n+1)}(z) z^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)} dz \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui démontrera immédiatement la formule (5).

Quant à la fonction $\varphi(z)$ elle-même, nous avons cette autre proposition.

IX. *Supposons que les deux membres de* (4_a) *aient un sens; nous aurons*

$$(6) \qquad \lim_{z=0} \left| \frac{\varphi(z) z^x}{\Gamma(x+1)} \right| = 0.$$

Cette formule peut être déduite immédiatement de (4_a) en y intégrant par parties.

II. — Détermination des fonctions développables en série de factorielles.

6. *Énoncé des conditions nécessaires et suffisantes.* — Les propositions que nous venons d'exposer dans la section précédente nous avaient donné les conditions *nécessaires* qui doivent être remplies par une fonction développable en série de factorielles. Ici nous avons à démontrer que ces conditions nécessaires sont *suffisantes* aussi.

A cet égard, supposons que la fonction génératrice $\varphi(z)$ ait les propriétés suivantes :

1° $\varphi(z)$ est holomorphe aux environs de $z = 1$, et cela de façon que la série de puissances correspondante

$$\varphi(1-z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

a son rayon de convergence égal à 1 au moins.

2° Si le point $z = +0$ est singulier pour $\varphi(z)$, il ne doit pas être essentiel, mais tel que $\varphi(z)$ ait des dérivées d'un ordre quelconque; de plus, soit $\varphi^{(p)}(z)$ la première de ces dérivées, p positif entier fini, qui est infini pour $z = +0$, il doit être possible de déterminer un nombre réel et fini λ tel que

$$\lim_{z=+0} |z^{x+p}\varphi^{(p)}(z)| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}, \tag{7}$$

selon que $\mathfrak{R}(x) \gtrless \lambda$. La désignation $z = +0$ indique comme ordinairement que la quantité z destinée à décroître infiniment doit être considérée toujours comme positive. Nous désignons toujours λ comme *premier nombre caractéristique de la fonction génératrice* $\varphi(z)$.

3° Il doit être possible de déterminer un nombre réel fini λ' tel que

$$\lim_{z=1} \left| \frac{\varphi^{(n)}(z) z^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)} \right| \begin{matrix} < \varepsilon \\ > \mathrm{E} \end{matrix}, \tag{8}$$

selon que $\mathfrak{R}(x) \gtrless \lambda'$, pourvu que n soit plus grand que ou égal à un certain nombre positif entier N; ε et E désignent deux nombres positifs respectivement aussi petit et aussi grand qu'on le veut.

Le nombre λ' est désigné comme le *second nombre caractéristique de la fonction génératrice* $\varphi(z)$.

Si $z = 1$ est le seul point singulier de $\varphi(1-z)$ sur la circonférence de son cercle de convergence, les deux nombres λ et λ' coïncident.

Or, ces définitions adoptées, nous avons ce théorème général :

X. *Les seules fonctions développables en série de factorielles sont des intégrales définies de cette forme*

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(z) z^{x-1}\, dz,$$

où $\varphi(z)$ *désigne la fonction génératrice susdite. Inversement, cette intégrale est toujours développable.*

Quant au champ de convergence de la série de factorielles ainsi obtenue, il se détermine à l'aide des deux nombres caractéristiques λ et λ' de la manière suivante :

XI. *Si le point* $z = 1$ *est le seul point singulier de* $\varphi(1-z)$ *situé dans* *la circonférence de son cercle de convergence, la série de factorielles* $\Omega(x)$ *est convergente dans le demi-plan situé à droite de la ligne* $\mathfrak{R}(x) = \lambda$, *perpendiculaire à l'axe des nombres réels.*

XI$_a$. *Supposons que* $\varphi(1 - z)$ *n'ait pas de points singuliers dans la circonférence susdite; la série de factorielles* $\Omega(x)$ *est convergente dans toute l'étendue du plan (avec la restriction du* n° 2).

XII. *Dans le cas où* $\varphi(1 - z)$ *a des points singuliers dans la circonférence susdite, outre* $z = 1$, *la série* $\Omega(x)$ *est convergente, pourvu que* $\mathfrak{R}(x) > \Lambda$, Λ *désignant le plus grand des nombres* λ *et* λ'.

XII$_a$. *Si le point* $z = 1$ *n'est pas singulier, le champ de convergence* $\Omega(x)$ *est limité par la ligne droite* $\mathfrak{R}(x) = \lambda'$.

Démontrons maintenant ces cinq théorèmes.

7. *Lemme fondamental sur* $\varphi(x)$. — La méthode appliquée au n° 4 pour transformer la série de factorielles $\Omega(x)$ dans une intégrale définie est en défaut ici, parce que nous ne savons rien sur l'existence d'une telle série et bien moins sur sa convergence. C'est pourquoi nous nous sommes bornés à appliquer l'intégration par parties et, pour cela, ce lemme essentiel relatif à la fonction génératrice nous sera indispensable.

Supposons z *réel et* $0 < z \leqq 1$; *supposons encore* $\mathfrak{R}(x) > \lambda$; *il est possible de déterminer un positif entier* N, *tel que l'on ait cette inégalité*

$$\left| \frac{(1-z)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-z)}{\Gamma(x+n+1)} \right| < \varepsilon, \tag{9}$$

où $n \geqq$ N *et où* ε *désigne une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut.*

Pour démontrer ce lemme, supposons tout d'abord $p = 0$ et $\lambda > 0$, c'est-à-dire que $\varphi(0)$ est infini. Mettons ensuite

$$(1-z)^x \varphi(1-z) = g(z), \qquad \varphi(1-z) = (1-z)^{-x} g(z);$$

la formule de Leibniz donnera, après une légère modification,

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(1-z) = (1-z)^{-x} \sum_{s=0}^{s=n} \binom{-x}{s} \frac{n!}{(n-s)!} (1-z)^{-s} g^{(n-s)}(z),$$

ou bien

$$(\alpha)\qquad (-1)^n(1-z)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-z) = n!\sum_{s=0}^{s=n}\binom{-x}{s}\frac{(1-z)^{n-s}}{(n-s)!}g^{(n-s)}(z).$$

Fixons maintenant sur l'axe réel un point z, tel que $1 > z > 0$, et décrivons autour de z comme centre un cercle c' du rayon $1-z$; il est évident que $|g(z)|$ reste fini dans tous les points de la circonférence de c', même dans le point $z=1$. Cela posé, une proposition fondamentale, due à Cauchy [1], donnera, pour des valeurs positives et entières d'une grandeur quelconque de r, cette inégalité

$$(\beta)\qquad \frac{(1-z)^r}{r!}|g^{(r)}(z)| < \mathrm{M},$$

où M désigne une quantité positive et finie.

Or, on aura encore

$$(-1)^s\binom{-x}{s} = \frac{x(x+1)\dots(x+s-1)}{1.2.3\dots s} = \frac{s^{x-1}}{\Gamma_s(x)},$$

d'où, en désignant par K un nombre positif fini, on aura, en vertu de (α) et (β), cette autre inégalité

$$(\gamma)\qquad |(1-z)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-z)| < n!\left[\mathrm{M} + \mathrm{K}\,n^{\mathrm{R}(x)}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{n}\left(\frac{s}{n}\right)^{\mathrm{R}(x)-1}\right].$$

Faisons maintenant croître au delà de toute limite le positif entier n; la somme représentée par le signe $\sum$ au second membre de (γ) se transforme dans une intégrale définie dont la valeur est toujours finie; c'est-à-dire que nous aurons généralement, en divisant par $\Gamma(x+n+1)$, une inégalité de cette forme

$$(\delta)\qquad \left|\frac{(1-z)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-z)}{\Gamma(x+n+1)}\right| < \frac{\mathrm{B}\,|\Gamma_n(x+1)|}{|\Gamma(x+1)|},$$

où B est une quantité finie et positive.

Les points aux environs de $z=1$ exigent une recherche particulière parce que le cercle c' qui correspond à ces points se réduit à son

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II. Paris, 1893, p. 111.

centre. Démontrons maintenant, par la conclusion ordinaire de n à $n+1$, que nous obtiendrons aussi pour ces points une inégalité de la forme (δ). A cet égard, nous posons, pour abréger,

$$(1-z)^{x+n}\varphi^{(n)}(1-z) = \varphi_n(z),$$

ce qui donnera immédiatement

$$-\frac{\varphi'_n(1-z)(1-z)}{\Gamma(x+n+2)} = \frac{x+n}{x+n+1}\,\frac{\varphi_n(1-z)}{\Gamma(x+n+1)} + \frac{\varphi_{n+1}(1-z)}{\Gamma(x+n+2)},$$

et notre proposition est une conséquence immédiate d'un théorème bien connu [1].

Quant au point $z=+0$, notre hypothèse sur la fonction $\varphi(z)$ ne suffit pas pour établir une inégalité de la forme (δ). Au contraire, il faut de la connaissance ultérieure sur la nature de $\varphi(1-z)$ dans les autres points de la circonférence de son cercle de convergence. C'est pourquoi nous avons introduit dans le paragraphe précédent le second nombre caractéristique λ'.

Si tous les points susdits sont des points ordinaires pour $\varphi(1-z)$, l'inégalité (δ) est vraie aussi pour $z=0$.

Supposons maintenant λ non positif, mais situé entre $-p$ et $-p+1$, p étant un entier fini et positif. Dans ce cas, les raisonnements précédents s'appliquent sur la fonction $\varphi^{(p)}(1-z)$, qui satisfait aussi aux conditions du n° 6 et pour laquelle le premier nombre caractéristique est positif.

Or, l'inégalité (δ) est vraie pour une valeur de x pour laquelle la différence $\mathfrak{R}(x-\lambda)$ est une quantité positive mais aussi petite qu'on le veut. Cela posé, le lemme du n° 1 démontrera aisément l'inégalité (9) et, cette inégalité connue, la démonstration de nos cinq théorèmes susdits est très facile.

8. *Démonstration de* XI, XI$_a$. *Exemples.* — Dans ce cas, l'inégalité (9) est vraie aussi pour $z=0$, comme nous l'avons déjà remarqué. Cela posé, une intégration par parties donnera immé-

---

[1] U. Dini, *Grundlagen*, p. 104.

diatement

$$(\alpha)\quad \int_0^1 \varphi(z) z^{x-1}\,dz = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \varphi^{(s)}(1)}{x(x+1)\ldots(x+s)} + \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1)\ldots(x+n)} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(z) z^{x+n}\,dz,$$

pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \lambda$.

Or, une application directe de l'inégalité (9) donnera pour le terme de reste R_n, figurant au second membre de (α),

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0 \qquad \text{pourvu que} \qquad \mathfrak{R}(x) > \lambda;$$

c'est-à-dire que nous obtiendrons ce développement en série de factorielles

$$(10)\qquad \int_0^1 \varphi(z) z^{x+1}\,dz = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varphi^{(s)}(z)}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \qquad \mathfrak{R}(x) > \lambda,$$

ce qui n'est autre chose que notre théorème XI.

Considérons les exemples suivants :

1° $\varphi(z) = z^{-\alpha}$, $\lambda = \mathfrak{R}(\alpha)$; nous aurons cette formule élémentaire

$$(11)\quad \frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x(x+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x(x+1)(x+2)} + \ldots, \qquad \mathfrak{R}(x-\alpha) > 0.$$

2° $\varphi(z) = (\log z)^{p-1}$, $\lambda = 0$; la formule bien connue [1] pour la formation indépendante des dérivées d'ordre supérieur de $f(\log z)$ prises par rapport à z donnera

$$(12)\qquad \frac{1}{x^p} = \sum_{s=p}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-p}}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0,$$

où les C sont précisément les coefficients de factorielle.

3° $\varphi(z) = \log\left(\sin\frac{\pi z}{2}\right)$, $\lambda = 0$; une transformation donnera ici

$$(13)\quad \int_0^\pi \varphi^{x-1} \log\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = -2\pi^x \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1.2.3\ldots 2s}{x(x+1)\ldots(x+2s)}\,\frac{l_{2s}}{2s}, \quad \mathfrak{R}(x) > 0,$$

---

(1) SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, t. II, p. 12. Brunswick, 1879.

où l'on a posé, pour abréger,

$$t_r = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(2s+1)^r} \qquad (r > 1).$$

4° $\varphi(z) = \log\left(\cot\frac{z\pi}{2}\right)$, $\lambda = 0$; nous aurons de même

$$(14) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{x-1} \log\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^x \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2s+1)!}{x(x+1)\ldots(x+2s+1)} \cdot \frac{\tau_{2s+1}}{2s+1}, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0,$$

où τ_r désigne cette série numérique

$$\tau_r = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)^r} \qquad (r \geqq 1).$$

Les formules (11) et (12) sont dues à Stirling. Appliquant (α), on trouvera le terme de reste de (11) sous une forme finie; différentiant $p-1$ fois par rapport à α cette série finie, posant ensuite $\alpha = 0$, on obtient une formule qui est due à Schlömilch [1], tandis que la série infinie (11) donnera, de la même manière, précisément la formule (12).

Considérons maintenant le cas où $z = 1$ est point ordinaire de $\varphi(1-z)$; les remarques faites à la fin du n° 7 montrent que l'inégalité (9) garde sa validité pour une valeur finie quelconque de x. Cela posé, il est évident tout d'abord que la formule (10) est vraie, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$. Désignons ensuite par n un positif entier, choisi de façon que $\mathfrak{R}(x+n+1) > 0$; une intégration par parties donnera

$$(\beta) \quad \sum_{s=n+1}^{s=n+p} \frac{(-1)^s \varphi^{(s)}(1)}{x(x+1)\ldots(x+s)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1)\ldots(x+n)} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(z)\, z^{x+n}\, dz$$
$$+ \frac{(-1)^{n+p}}{x(x+1)\ldots(x+n+p)} \int_0^1 \varphi^{(n+p+1)}(z)\, z^{x+n+p}\, dz.$$

---

[1] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. IV, 1859, p. 396.

Or, le premier membre de cette équation n'est autre chose que le terme de reste de la série de factorielles (10); quant au second membre, il tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pour une valeur finie quelconque de x (avec la restriction du n° 2); c'est-à-dire que notre série de factorielles ainsi obtenue est convergente dans toute l'étendue du plan, et voilà la démonstration du théorème XI_a.

Considérons les exemples suivants :

1° $\varphi(z) = \frac{1}{1+z}$; la fonction correspondante peut s'écrire sous cette forme

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x+s},$$

ce qui donnera

$$\beta(x) = -\mathrm{D}_x \log \mathrm{B}\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};$$

nous aurons dans ce cas

$$(15) \qquad \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} \cdot \frac{1}{2^{s+1}}.$$

2° $\varphi(z) = e^{-z}$, ce qui donnera la fonction de Prym

$$\mathrm{P}(x) = \int_0^1 e^{-z} z^{x-1}\, dz = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{1}{x+s},$$

ou bien développée en série de factorielles

$$(16) \qquad \mathrm{P}(x) = \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

formule qui est due à M. Bourguet (¹).

3° $\varphi(z) = e^{z-1}$; nous aurons pour la fonction

$$\mathrm{P}_1(x) = \frac{1}{e} \int_0^1 e^z z^{x-1}\, dz = \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{s!} \cdot \frac{1}{x+s}$$

(¹) Citat. de M. Jensen, *loc. cit.*, p. 59.

ce développement en série de factorielles

$$(17) \qquad \mathrm{P}_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x(x+1)\ldots(x+s)}.$$

Les désignations très analogues employées pour les deux fonctions $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{P}_1(x)$ se justifient par les résultats obtenus au n° 12.

9. *Démonstration de* XII, XII_a. *Exemples.* — Une application des formules (α) et (β) du paragraphe précédent établit immédiatement la démonstration aussi pour ces deux théorèmes, de façon que nous pouvons nous borner à considérer les exemples suivants :

1° $\varphi(1-z) = \frac{1}{1-z^3}$, $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$; nous aurons

$$(18) \qquad \int_0^1 \frac{(1-z)^{x-1}}{1-z^3}\,dz = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(3s)!}{x(x+1)\ldots(x+3s)}, \qquad \Re(x) > 1.$$

2° $\varphi(z) = \frac{1}{2-z}$, $\lambda = \lambda' = 0$; nous aurons pour la fonction

$$\beta_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{2^{s+1}} \cdot \frac{1}{x+s}$$

ce développement en série de factorielles

$$(19) \qquad \beta_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \qquad \Re(x) > 0.$$

La désignation très analogue à celle de l'exemple 1° du théorème XI_a se justifie aussi par les résultats généraux obtenus dans le n° 12.

3° $\varphi(z) = \frac{z^{-\alpha}-1}{1-z}$; pour déterminer λ', développons en série de puissances positives la fonction $\varphi(1-z)$; nous aurons aisément

$$\lambda' = \Re(\alpha),$$

d'où la formule bien connue [1]

$$(20) \quad \psi(x-\alpha) - \psi(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)}{s.x(x+1)\ldots(x+s-1)}, \qquad \Re(x-\alpha) > 0,$$

---

[1] *Voir* par exemple Laurent, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 466. Paris, 1888.

où $\psi(x)$ désigne la fonction de Gauss, savoir :

$$\psi(x) = \mathrm{D}_x \log \Gamma(x) = \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z}\, dz.$$

10. *Autre forme de l'intégrale obtenue pour* $\Omega(x)$. — Pour ce qui va suivre, il nous sera utile de transformer notre expression intégrale qui représente toutes les fonctions développables en série de factorielles. A cet égard, posons

$$z = e^{-t}, \qquad \varphi(e^{-t}) = f(t);$$

nous aurons

$$\int_0^1 \varphi(z) z^{x-1}\, dz = \int_0^\infty f(t) e^{-tx}\, dt, \tag{21}$$

ce qui est précisément l'intégrale que Schlömilch a considérée dans son premier Mémoire sur les séries de factorielles, c'est-à-dire que nous venons de donner la démonstration rigoureuse du postulat de Schlömilch ([1]), savoir que l'origine des séries de factorielles est à chercher dans des intégrales définies de la même forme que celle figurant au second membre de (21).

Quant aux coefficients de la série de factorielles générale, nous aurons, en vertu d'une formule bien connue,

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s f^{(n-s)}(0). \tag{21$_a$}$$

III. — Propriétés générales d'une série de factorielles.

11. *Champ complet de convergence.* — La forme même des conditions nécessaires et suffisantes qui doivent être remplies par une fonction développable en série de factorielles nous donne immédiatement aussi la détermination du champ complet de convergence de la série obtenue. En vérité, nos formules générales démontrent cette proposition :

XIII. *La limite du champ de convergence* (*absolue ou non*) *d'une série*

([1]) *Loc. cit.*, p. 391.

de factorielles est formée par une ligne droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels et déterminée à l'aide des nombres caractéristiques de la fonction génératrice.

Dans nos recherches préliminaires sur la convergence d'une série de factorielles, nous avons démontré déjà, au n° 2, que la limite du champ de convergence absolue d'une telle série est aussi une ligne droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels.

Ces deux propositions relatives au champ de convergence d'une série de factorielles ont été communiquées sans démonstration par M. Jensen (1).

La proposition II du n° 2 montre encore que, si la série de factorielles peut être non absolument convergente, c'est-à-dire que les deux lignes susdites ne coïncident pas, *leur distance ne peut pas être plus grande que l'unité.*

Considérons encore ces circonstances d'un autre point de vue. Fixons, dans la partie finie du plan des x, un point quelconque ω et supposons que la série de factorielles soit convergente dans ce point; elle sera convergente aussi dans tous les points finis ou infinis situés à droite de, ou précisément sur, la ligne droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels et passant par le point ω. De plus, notre série sera certainement absolument convergente dans tous les points dont les distances de la perpendiculaire susdite ne sont pas plus petites que l'unité. En somme : *La convergence de $\Omega(x)$ est toujours uniforme.*

On peut tirer des conclusions analogues sur la divergence d'une série de factorielles $\Omega(x)$ dans les points situés à gauche, ou précisément sur, la ligne droite susdite, pourvu que $\Omega(\omega)$ soit divergente.

Quant à la distance des deux limites de convergence d'une série de factorielles, supposons que $\Omega(\omega)$ soit divergente, mais que $\Omega(\omega+\varepsilon)$ soit non absolument convergente, pourvu que ε soit une quantité positive finie, mais aussi petite qu'on le veut. Désignons ensuite par $R_{n,p}(\omega)$ le terme de reste de la série $\Omega(\omega)$, savoir :

$$R_{n,p}(\omega) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}, \tag{α}$$

(1) *Loc. cit.*, p. 69.

ce qui donnera, en vertu du lemme du n° 1,

$$(\beta)\qquad R_{n,p}(\omega+\delta)=\frac{k_{n+1}u_{n+1}}{(n+1)^{\delta}}+\frac{k_{n+2}u_{n+2}}{(n+2)^{\delta}}+\ldots+\frac{k_{n+p}u_{n+p}}{(n+p)^{\delta}},$$

où les nombres k sont finis.

Supposons maintenant qu'un nombre aussi grand qu'on le veut des termes u figurant au second membre de (α), pourvu que n et p soient suffisamment grands, satisfassent à cette condition

$$\lim_{s=\infty}|s^{\varepsilon'}u_s|=\infty,$$

où ε' désigne une quantité positive finie, mais aussi petite qu'on le veut. *Dans ce cas, comme le montre clairement la formule* (β), *la distance entre les deux limites de convergence est précisément égale à l'unité.*

12. *Fonctions conjuguées.* — Supposons que la fonction génératrice $\varphi(z)$ soit holomorphe aux intérieurs des deux cercles dont les équations en coordonnées rectangles sont

$$x^2+y^2=1,\qquad x^2+y^2=2x;$$

c'est-à-dire que nous aurons ces deux séries de puissances :

$$(\alpha)\qquad \varphi(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots,$$

$$(\beta)\qquad \varphi(1-z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots,$$

qui ont leurs rayons de convergence égaux à un au moins.

Supposons encore qu'il soit possible de déterminer deux nombres réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\varphi^{(n)}(1)}{\Gamma(x+n+1)}\right|=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases},\qquad \lim_{n=\infty}\left|\frac{\varphi^{(n)}(0)}{\Gamma(x+n+1)}\right|=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases},$$

selon que l'on ait respectivement

$$\mathfrak{R}(x)\gtrless\lambda_1,\qquad \mathfrak{R}(x)\gtrless\lambda_2,$$

nous obtiendrons ces deux développements en séries de factorielles :

$$(22)\qquad F(x)=\int_0^1\varphi(z)\quad z^{x-1}\,dz=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!\,b_s}{x(x+1)\ldots(x+s)},\qquad \mathfrak{R}(x)>\lambda_1,$$

$$(22_a)\qquad F_1(x)=\int_0^1\varphi(1-z)z^{x-1}\,dz=\sum^{s=\infty}\frac{s!\,a_s}{x(x+1)\ldots(x+s)},\qquad \mathfrak{R}(x)>\lambda_2.$$

Transformons maintenant les deux intégrales obtenues pour $F(x)$ et $F_1(x)$ en posant $1 - z$ au lieu de z, et développons, d'après la formule du binome, la fonction $(1-z)^{x-1}$; nous verrons que les deux séries infinies ainsi obtenues, multipliées par la fonction correspondante φ, sont intégrables terme à terme de $z = 0$ à $z = 1$, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$, car $\varphi(z)$ est intégrable dans le même intervalle. De cette manière, nous obtiendrons ces deux séries remarquables :

$$(23) \qquad F(x) = F_1(1) + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-s)}{1.2.3\ldots s} F_1(s+1),$$

$$(23_a) \qquad F_1(x) = F(1) + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-s)}{1.2.3\ldots s} F(s+1),$$

valables toutes les deux pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$.

Enfin, supposons que les deux séries de puissances (α) et (β) soient intégrables terme à terme de $z = 0$ à $z = 1$; nous aurons encore

$$(24) \qquad F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{x+s},$$

$$(24_a) \qquad F_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_s}{x+s},$$

séries qui sont très remarquables en comparaison avec (22) et (22_a); elles sont valables du reste dans toute l'étendue du plan.

Remarquons encore que les deux groupes de coefficients a_n et b_n s'expriment l'un par l'autre à l'aide de (3_b) du n° 4.

Ce sont les formules de (22) à (24_a) qui justifient la désignation *fonctions conjuguées* pour $F(x)$ et $F_1(x)$. Les fonctions $P(x)$ et $P_1(x)$ introduites au n° 8 et $\beta(x)$ et $\beta_1(x)$ introduites aux n^{os} 8, 9 respectivement, nous fournissent des exemples des fonctions conjuguées.

13. $\varphi(z)$ *est de la forme* $\varphi_1(z)\varphi_2(z)$. — Soient maintenant $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ deux fonctions génératrices dont les nombres caractéristiques sont λ_1 et λ'_1, λ_2 et λ'_2 respectivement; on verra sur-le-champ que le produit

$$\varphi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z)$$

est une fonction génératrice aussi dont le premier nombre caractéristique λ est égal à la somme de λ_1 et λ_2. Quant au second nombre caractéristique λ' de $\varphi(z)$, nous aurons d'abord, à l'aide de la formule de Leibniz,

$$\frac{\varphi^{(n)}(z)}{n!} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\varphi_1^{(s)}(z)}{s!} \cdot \frac{\varphi_2^{(n-s)}(z)}{(n-s)!},$$

d'où

$$(\alpha) \quad (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(z)}{n!} = \Gamma(\lambda'_1+1)\,\Gamma(\lambda'_2+1) \sum_{s=0}^{s=n} \binom{-\lambda'_1-1}{s} \binom{-\lambda'_2-1}{n-s} K_1^s(z)\, K_2^{n-s}(z),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\varphi_1^{(s)}(z) = K_1^s(z)\,\Gamma(\lambda'_1+s+1), \qquad \varphi_2^{(s)}(z) = K_2^s(z)\,\Gamma(\lambda'_2+s+1).$$

Supposons maintenant pour un instant que les deux nombres λ'_1 et λ'_2 soient plus grands que -1 tous les deux; les produits de coefficients des binomes figurant au second membre de (α) ont tous le même signe, ce qui donnera, en vertu d'une formule bien connue, pour les coefficients du binome, une inégalité de cette forme

$$\lim_{z=1} |\varphi^{(n)}(z)| < M n! \left| \binom{-\lambda'_1-\lambda'_2-2}{n} \right|,$$

où M est une quantité positive finie, d'où

$$\lambda' = \lambda'_1 + \lambda'_2 + 1.$$

Généralement, si les deux nombres λ'_1 et λ'_2 ne sont pas plus grands que -1 tous les deux, les produits de coefficients du binome susdit sont de signes alternés pour des valeurs suffisamment petites de s et de $n-s$, c'est-à-dire que nous avons, dans ce cas,

$$\lim_{z=1} |\varphi^{(n)}(z)| < M n! \left| \binom{-\lambda'_1-\lambda'_2-2}{n} \right| + M' n! \left| \binom{-\Lambda-1}{n} \right|,$$

où M et M' sont deux quantités positives et finies, tandis que Λ est le plus grand des nombres caractéristiques λ'_1 et λ'_2.

Cela posé, nous avons généralement, pour la détermination des nombres λ et λ', ces deux formules :

$$(25) \qquad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \lambda = A',$$

où Λ' désigne le plus grand des trois nombres $\lambda'_1 + \lambda'_2 + 1$, λ'_1 et λ'_2.

Posons encore, pour abréger,

$$(26)\qquad \frac{(-1)^n \varphi^{(n)}(1)}{n!} = b_n, \qquad \frac{(-1)^n \varphi_1^{(n)}(1)}{n!} = b'_n, \qquad \frac{(-1)^n \varphi_2^{(n)}(1)}{n!} = b''_n;$$

nous aurons

$$(26_a)\qquad b_n = \sum_{s=0}^{s=n} b'_s b''_{n-s}.$$

Montrons maintenant, par des exemples convenables, le rôle fondamental joué par les recherches précédentes dans la théorie des séries de factorielles.

14. *Applications.* — Dans ce qui va suivre nous posons toujours

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(z)\, z^{x-1}\, dz = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\ldots+(x+s)}.$$

Cela posé, démontrons les propositions suivantes :

XIV. *Soit y une constante finie quelconque; nous aurons cette formule pour l'addition des arguments :*

$$(27)\qquad \Omega(x-y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\left[\binom{y}{0} b_s + \binom{y+1}{1} b_{s-1} + \ldots + \binom{y+s}{s} b_0\right]}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

où le champ de convergence de la série de factorielles peut être déterminé à l'aide de (25) *en y posant*

$$\lambda_2 = \lambda'_2 = \Re(y).$$

La démonstration s'effectue aisément à l'aide des formules générales du numéro précédent si nous posons

$$\varphi_1(z) = \varphi(z), \qquad \varphi_2(z) = z^{-y}.$$

Posant, dans (27), $x + y$ au lieu de x, on obtiendra $\Omega(x)$ développée en série de factorielles de l'argument $x + y$.

L'hypothèse

$$\varphi_1(z) = \varphi(z), \qquad \varphi_2(z) = (\log z)^p,$$

p désignant un positif entier, donnera cette nouvelle proposition :

XV. *La dérivée $p^{\text{ième}}$ de $\Omega(x)$ est développable aussi en série de factorielles comme suit :*

$$(28)\quad \Omega^{(p)}(x) = (-1)^p p! \sum_{s=p}^{s=\infty} \frac{s!\left[\frac{b_0}{s!}C_s^{s-p} + \frac{b_1}{(s-1)!}C_{s-1}^{s-p-1} + \ldots + \frac{b_{s-p}}{(s-p)!}C_p^0\right]}{x(x+1)\ldots(x+p)},$$

où le champ de convergence peut être déterminé à l'aide de (25) *en y posant*

$$\lambda_2 = \lambda'_2 = 0.$$

Posons encore

$$\varphi_2(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1},$$

où n doit être un positif entier; nous aurons

$$\varphi_2^{(r)}(1) = r!\left[\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-r-1}\right], \qquad r \leqq n-1,$$

de façon qu'une formule élémentaire donnera

$$b''_r = (-1)^r \binom{n}{r+1}, \qquad r \leqq n-1,$$

d'où cette formule remarquable

$$(29)\quad \sum_{s=0}^{s=n-1} \Omega(x+s) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{r!\left[\binom{n}{1}b_r - \binom{n}{2}b_{r-1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b_{r-n+1}\right]}{x(x+1)\ldots(x+r)},$$

qui est valable dans le champ de convergence de $\Omega(x)$. Remarquons que les sommes figurant aux numérateurs au second membre sont toutes finies; dans les premiers termes, il faut supprimer tous les b de l'indice négatif.

Posons, dans (29), $x+1$ au lieu de x; nous aurons, en soustrayant,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega(x) - \Omega(x+n) \\ &\quad = \sum^{r=\infty} \frac{(r+1)!\left[\binom{n}{1}b_r - \binom{n}{2}b_{r-1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b_{r-n+1}\right]}{x(x+1)\ldots(x+r+1)},\end{aligned}\right.$$

formule qui est valable aussi surtout où l'est la série de factorielles primitive $\Omega(x)$.

15. *Généralisation d'une formule de Stirling.* — Reprenons maintenant d'un autre point de vue les recherches que nous avons accomplies au n° 13. A cet égard, nous supposons que cette série de puissances

$$(\alpha) \qquad \varphi_2(z) = a''_0 + a''_1 z + a''_2 z^2 + \ldots$$

ait un rayon de convergence égal à un au moins; supposons encore

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 \mathrm{R}_n(z)\,\varphi_1(z)\,z^{x-1}\,dz = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}, \qquad \text{selon que } \mathfrak{R}(x) \gtrless \omega,$$

où $\mathrm{R}_n(z)$ désigne le terme de reste de la série (α), tandis que $\varphi_1(z)$ est une fonction donnée.

Posons encore

$$\Omega_1(x) = \int_0^1 \varphi_1(z)\,z^{x-1}\,dz,$$

et supposons que cette intégrale ait un sens pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \omega'$; nous aurons cette formule générale

$$(31) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} a''_s \Omega_1(x+s) = \int_0^1 \varphi_1(z)\,\varphi_2(z)\,z^{x-1}\,dz,$$

valable pourvu que l'on ait à la fois $\mathfrak{R}(x)$ plus grand que ω et ω'.

L'application de cette formule dans la théorie des séries de factorielles et l'utilisation de la symétrie du second membre se présentent si immédiatement à l'aide des formules générales du n° 13, que nous pouvons nous borner à considérer ici cet exemple essentiel.

Supposons que nous ayons ce développement en série de factorielles

$$(32) \qquad \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(z)\,z^{x-1}\,dz = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,b_s}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

valable pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \omega$; posons encore

$$(33) \qquad \Omega_1(x) = \int_0^1 \varphi_1(z)\,z^{x-1}\,dz, \qquad \text{où} \qquad \varphi_1(z) = \varphi(z)(1-z);$$

nous aurons

$$\frac{(-1)^n}{n!}\varphi_1^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(1),$$

ce qui donnera cette autre série de factorielles

$$(33_a) \qquad \Omega_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)!\, b_s}{x(x+1)\dots(x+s+1)},$$

valable aussi pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \omega$.

Cela posé, appliquons la formule générale (31) pour

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{1-z};$$

nous aurons immédiatement ces deux formules remarquables

$$(34) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \Omega_1(x+s) = \Omega(x) - \Omega(x+n),$$

$$(34_a) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \Omega_1(x+s) = \Omega(x),$$

valables toutes les deux, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \omega$, de sorte qu'une comparaison des deux séries de factorielles (32) et (33_a) nous donne cette proposition fondamentale due à Stirling :

XVI. *Supposons le premier coefficient d'une série de factorielles $\Omega_1(x)$ égal à zéro; cette série infinie*

$$\Omega_1(x) + \Omega_1(x+1) + \Omega_1(x+2) + \dots$$

est développable aussi dans une série de factorielles $\Omega(x)$ dont les coefficients, abstraction faite des facteurs numériques, sont les mêmes que ceux de $\Omega_1(x)$. Les deux séries $\Omega_1(x)$ et $\Omega(x)$ ont les mêmes champs de convergence.

Posons, par exemple,

$$\varphi(z) = (\log z)^p,$$

p désignant un positif entier; nous aurons, en vertu de (12), cet autre développement

$$(35) \qquad \frac{(-1)^p}{p!}\psi^{(p)}(x) = \sum_{s=p+1}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-p-1}}{s.x(x+1)\ldots(x+s)},$$

tandis que la fonction $\psi(x)$ ne peut pas être développée dans une série de factorielles.

16. *Sur la méthode de Stirling.* — Supposons la fonction $F(x)$ développable en série convergente de puissances négatives entières de x comme voici :

$$(\alpha) \qquad F(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \ldots, \qquad |x| > \omega;$$

les termes de cette série, le premier exclu, peuvent être développés en séries de factorielles absolument convergentes, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$, comme le montre la formule (12).

De cette manière nous obtiendrons pour $F(x)$ une série à double entrée, ce qui donnera aisément cette série de factorielles

$$(36) \qquad F(x) = \frac{a_1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}C_s^0 + a_s C_s^1 + \ldots + a_2 C_s^{s-1}}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

qui est certainement absolument convergente pourvu que $\mathfrak{R}(x) > \omega$. Ce développement trouvé, les formules (34) et (34_a) nous donnent des développements nouveaux.

Cette méthode de Stirling s'applique facilement dans un grand nombre de cas, principalement dans la théorie de la *fonction gamma*, pour trouver les séries de factorielles pour les deux fonctions $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$, comme l'a fait voir exactement M. Jensen [1] dans son excellent Mémoire.

Cependant, la méthode de Stirling a le défaut essentiel de ne pouvoir nous dire quelque chose relative au champ complet de convergence de la série de factorielles ainsi obtenue. Par exemple, M. Jensen trouve que les séries de Binet obtenues pour $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$ sont absolument convergentes pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 1$, et la méthode ne peut

---

[1] *Loc. cit.*, p. 66-71.

pas déterminer plus exactement ce champ de convergence; maintenant les séries en question sont convergentes, mais non absolument, pourvu que $1 > \mathfrak{R}(x) > 0$, comme nous le démontrerons bientôt.

Or, le défaut le plus essentiel de la méthode de Stirling est celui d'être inapplicable généralement pour les fonctions développables en série de factorielles. En effet, la convergence ou divergence de la série de puissances négatives (α) n'a nullement rapport à la possibilité de développer $F(x)$ en série de factorielles.

Considérons maintenant d'un autre point de vue la méthode de Stirling. Nous savons que toutes les fonctions développables en série de factorielles doivent se présenter sous cette forme

$$F(x) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-tx}\, dt,$$

où $f(t)$ est holomorphe aux environs de $t = 0$. Supposons ensuite que cette série infinie,

$$(\beta) \qquad f(t)\, e^{-tx} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}}{s!}\, t^s e^{-tx},$$

soit intégrable terme à terme de $t = 0$ à $t = \infty$; nous obtiendrons précisément la série (α), et (36) s'accorde bien avec (21_a) du n° 10.

Au contraire, supposons $F(x)$ développable en série de factorielles, mais que la série (β) ne soit pas intégrable terme à terme. Néanmoins effectuons *formellement* une telle intégration, ce qui nous donne la série asymptotique de $F(x)$; formons ensuite à l'aide de cette série divergente la formule correspondante (36). Ces calculs faits, la formule générale (21) montre clairement que cette série de factorielles, qui n'a préalablement qu'un sens *purement formel*, est précisément la série obtenue pour $F(x)$ en appliquant la méthode rigoureuse; c'est-à-dire que nous avons cette proposition :

Supposons connu que la fonction $F(x)$ soit développable en série de factorielles, la méthode de Stirling nous donne ce développement soit que la série de puissances négatives (α) soit convergente ou non.

Les séries de Binet nous présentent un exemple net de cette proposition.

IV. — Développements de quelques fonctions particulières.

17. *Séries de Binet.* — Désignons par $\omega(x)$ cette fonction célèbre

$$\omega(x) = \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log\sqrt{2\pi};$$

nous aurons, d'après Cauchy [1],

$$(\alpha) \qquad \omega(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-tx}}{t}\,dt, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0,$$

formule qui nous fournira un moyen simple pour développer en série de factorielles la fonction $\omega(x)$. En effet, nous avons, dans ce cas, la fonction génératrice

$$(\beta) \qquad \varphi(1 - z) = \frac{2\log(1 - z) + 2z - z\log(1 - z)}{z[\log(1 - z)]^2};$$

c'est-à-dire que $z = 1$ est le seul point singulier de $\varphi(1 - z)$ dans la circonférence de son cercle de convergence, et le nombre caractéristique λ est égal à zéro, ce qui montre que notre fonction $\omega(x)$ est développable en série de factorielles convergente pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$.

Le développement en série de puissances positives obtenu pour $\varphi(z)$ est bien connu [2], mais peu commode ici, de façon que nous avons à appliquer la formule (21_a) au n° 10. Or, une formule d'Euler donnera

$$(\gamma) \qquad f(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s B_{2s+1}}{(2s + 2)!}\,t^{2s},$$

où les coefficients

$$B_1, \quad B_3, \quad B_5, \quad B_7, \quad B_9, \quad \ldots$$

désignent les nombres de Bernoulli. Cela posé, nous obtiendrons

---

(1) Cit. de G.-F. Meyer : *Theorie der bestimmten Integrale*, p. 136; Leipzig, 1871.

(2) Schlömilch, *Compendium*, t. II, p. 15.

cette série de factorielles

$$(37)\qquad \omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \qquad \Re(x) > 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(37_a)\qquad A_s = \sum_{r=0}^{\leqq\frac{s}{2}} \frac{(-1)^r}{(2r+1)(2r+2)} C_s^{s-2r} B_{2r+1}.$$

La série de puissances négatives obtenue pour $\omega(x)$ est divergente; en effet, elle n'est autre chose que la célèbre série de Stirling.

Considérons maintenant la fonction $\omega_1(x)$, analogue à $\omega(x)$, savoir

$$\omega_1(x) = \log x - \psi(x) = \frac{1}{2x} - D_x\omega(x),$$

ou bien

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2x} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) e^{-tx}\, dt, \qquad \Re(x) > 0,$$

ce qui donnera, en vertu de (γ),

$$(38)\qquad \omega_1(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A'_s}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \qquad \Re(x) > 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(38_a)\qquad A'_s = \sum_{r=0}^{\leqq\frac{s-1}{2}} \frac{(-1)^r}{2r+2} C_s^{s-2r-1} B_{2r+1}.$$

La formule (37) est due à Binet [1], qui a indiqué aussi (38) [2]. Posant dans (38) $x = 1$, on obtiendra cette formule numérique pour la constante d'Euler :

$$(39)\qquad C = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A'_s}{(s+1)!}$$

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, XXVII^e Cahier, 1839, p. 339.

[2] *Loc. cit.*, p. 339.

qui est due à Binet [1] aussi; elle pourrait servir à calculer le nombre C si Adams [2] n'avait pas effectué un tel calcul, et cela avec 263 décimales.

18. *Sur les nombres* B_{2n+1} *et* C_n^s. — On voit que les expressions des coefficients A_n et A'_n figurant dans les séries de Binet que nous venons de trouver sont différentes des expressions ordinaires qui ne contiennent pas les nombres de Bernoulli, mais qui ont, de l'autre côté, le double nombre de termes. Or, les nombres de Bernoulli étant bien connus d'après la table d'Adams [3], qui contient ces nombres de B_1 à B_{123}, nos expressions nouvelles sont certainement plus commodes pour un calcul numérique.

A l'aide de la série de Gudermann [4] pour $\omega(x)$ et de la série analogue obtenue pour $\omega_1(x)$ on trouve aisément, par la méthode de Stirling, les expressions ordinaires pour les coefficients A_s et A'_s, comme l'a fait voir M. Jensen [5]. Or, égalant ces expressions différentes obtenues pour le même coefficient, on trouvera ces deux relations entre les nombres de Bernoulli et les coefficients C_n^s:

$$(40) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (n-s)}{(n-s+1)(n-s+2)} C_n^s = 2n \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s+1)(2s+2)} C_n^{n-2s} B_{2s+1},$$

$$(40_a) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s C_n^s}{n-s+1} = (-1)^{n+1} n \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s}{2s+1} C_n^{n-2s-1} B_{2s+1}.$$

Cependant, il est possible de développer, par le même point de vue, quelques autres formules plus remarquables contenant ces deux groupes de nombres rationnels. A cet égard, différentions n fois par rapport à x l'intégrale définie obtenue pour $\omega(x)$, ce qui est permis;

(1) *Loc. cit.*, p. 258.
(2) *Proceedings of the Royal Society of London*, t. XXVII, 1878, p. 88-94.
(3) *Journal de Crelle*, t. 85, 1878, p. 269-272.
(4) *Journal de Crelle*, t. 29, 1845, p. 210.
(5) *Loc. cit.*, p. 71, 83.

nous aurons

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{(x+s)^n} &= \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{2x^n}\\ &\quad+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)t^{n-2}e^{-tx}\,dt.\end{aligned}\right.$$

L'intégrale définie figurant au second membre de (α) peut être développée en série de factorielles à l'aide de la méthode ordinaire, ce qui donnera

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)t^{n-2}e^{-tx}\,dt=\sum_{s=n}^{s=\infty}\frac{A_s^n}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$A_s^n=\sum_{r=0}^{\leqq\frac{s-n}{2}}\frac{(-1)^r}{2r+2}\binom{n+2r}{2r+1}C_s^{s-n-2r}B_{2r+1}.$$

Quant aux autres fonctions figurant dans (α), elles sont développées en séries de factorielles dans (35) au nº 15 et (12) au nº 8, de façon qu'une comparaison des coefficients donnera cette équation remarquable

$$(41)\qquad \sum_{r=0}^{\leqq\frac{s-n}{2}}\frac{(-1)^r}{2r+2}\binom{n+2r}{2r+1}C_s^{s-n-2r}B_{2r+1}=\frac{C_s^{s-n+1}}{s+1}-\frac{C_{s-1}^{s-n+1}}{n+1}-\frac{C_{s-1}^{s-n}}{2}.$$

Dans le cas $n=2$, le deuxième terme au second membre de (41) se présente sous forme illusoire, ce qui s'accorde bien avec le fait que x^{-1} ne peut pas être développé en série de factorielles de l'argument x. Cependant, la formule garde sa validité si nous supprimons simplement ce terme; c'est-à-dire que nous aurons, après un simple calcul, cette formule particulière

$$(41_a)\qquad \sum_{r=0}^{\leqq\frac{s}{2}-1}(-1)^r C_s^{s-2r-2}B_{2r+1}=\frac{s-1}{2}\,\frac{(s-1)!}{s+1},$$

qui a été observée par M. A. Radicke [1].

---

[1] *Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen*, p. 15; Halle, 1880.

Il est évident que les formules de (40) à (41_a) ne sont autre chose que des conséquences de la formule générale trouvée pour les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de $\log z$ prises par rapport à z; cependant, la démonstration de nos formules semble être très longue d'un tel point de vue.

19. *Séries de Schlömilch.* — Dans son premier Mémoire sur les séries de factorielles, Schlömilch [1] étudie particulièrement la fonction

$$(\alpha) \qquad S(\nu, x) = \int_0^\infty (1+t)^{-\nu} e^{-tx} dt.$$

Dans ce cas, la fonction $\varphi(1-z)$ a sur la circonférence de son cercle de convergence le seul point singulier $z=1$, et le nombre caractéristique λ est égal à zéro; c'est-à-dire que la série de factorielles obtenue pour $S(\nu, x)$ est convergente, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$. Pour le coefficient général, nous aurons cette expression

$$(42) \qquad A_n^\nu = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s C_n^{n-s-1} \nu(\nu+1)\ldots(\nu+s).$$

Transformons maintenant, avec Schlömilch, notre intégrale en posant

$$t = \frac{u}{x} - 1;$$

nous aurons

$$(\beta) \qquad S(\nu, x) = x^{\nu-1} e^x \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u^\nu} du,$$

ce qui donnera, pour $\nu = 1$,

$$(43) \qquad S(1, x) = e^x \, li\, e^{-x},$$

où $li e^{-x}$ désigne le logarithme intégral ordinaire. Posons encore $\nu = \frac{1}{2}$; une légère modification donnera

$$(44) \qquad S\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{2e^x}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-t^2} dt,$$

ce qui n'est autre chose que la transcendante de Kramp.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 396-401.

De cette manière Schlömilch a, le premier, développé en série de factorielles ces deux fonctions célèbres.

Les intégrales obtenues de (β), en y remplaçant la fonction e^{-u} par $\cos u$ ou par $\sin u$ qui ont fait de la peine à Schlömilch ([1]), se traitent immédiatement à l'aide de nos recherches générales accomplies dans la section qui va suivre.

20. *Développement de* $Z^\nu(x) - Y^\nu(x)$. — Très analogue à l'intégrale de Schlömilch est cette autre que j'ai trouvée dans mes recherches sur les fonctions cylindriques :

$$(\alpha)\qquad \int_0^\infty (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-tx}\,dt = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)2^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,x^\nu}\left[Z^\nu(x) - Y^\nu(x)\right],$$

où $Y^\nu(x)$ désigne la fonction cylindrique de seconde espèce, savoir :

$$Y^\nu(x) = \frac{1}{\sin\nu\pi}\left[\cos\nu\pi\, J^\nu(x) - J^\nu(x)\right],$$

tandis que $Z^\nu(x)$ est une fonction très analogue à $J^\nu(x)$, savoir :

$$Z^\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s+1}}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+s+\frac{3}{2}\right)},$$

ou bien, pourvu que $\mathfrak{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$:

$$Z^\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi.$$

Dans le cas particulier $\nu = 0$, la formule (α) appartient à E. Meissel ([2]), tandis que M. H. Weber ([3]) a trouvé (α) pour ν entier.

On voit aisément que notre intégrale (α) est développable en série de factorielles convergente, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$. Pour les coeffi-

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 402-404.

([2]) *Gewerbschulprogramm*, Iserlohn, 1862; citation de Meissel : *Jahresbericht über die Ober-Realschule in Kiel;* 1890.

([3]) *Journal de Crelle*, t. 75, 1873, p. 86-87.

cients généraux, nous obtiendrons ici :

$$(45)\qquad A_p^{2n} = \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p C_{2n}^{2p} (2n-2p)! \binom{\nu-\frac{1}{2}}{n-p}.$$

$$(45_a)\qquad A_p^{2n+1} = \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p C_{2n+1}^{2p+1} (2n-2p)! \binom{\nu-\frac{1}{2}}{n-p},$$

Notre série de factorielles ainsi obtenue, la première dans la théorie des fonctions cylindriques, nous permet de calculer la valeur de $Z^\nu(x)$ pour des valeurs très grandes de $|x|$, car le calcul numérique de $Y^\nu(x)$ peut être effectué à l'aide des séries asymptotiques trouvées par Hankel ([1]). Un tel calcul numérique de $Z^\nu(x)$ est essentiel, parce que cette fonction joue un rôle fondamental dans un grand nombre de questions de la Physique mathématique; on peut consulter, par exemple, des recherches de MM. Rayleigh ([2]), Bruns ([3]), H. Struwe ([4]).

De plus, dans une autre occasion je démontrerai, en m'appuyant sur les recherches générales de M. U. Dini ([5]), qu'une fonction *arbitraire* peut être développée en série infinie où $J^\nu(x)$ et $Z^\nu(x)$ jouent le même rôle que $\cos x$ et $\sin x$ dans les séries de Fourier. Cependant, ces nouvelles séries sont plus générales que celles de Fourier, parce qu'elles peuvent représenter des fonctions non développables en séries ordinaires de Fourier.

V. — Multiplication de l'argument dans une série de factorielles.

21. *Transformation d'une intégrale définie.* — Une proposition élémentaire relative à la convergence d'une série de factorielles nous a fait voir déjà, au n° 2, qu'une fonction ne peut être développée que

---

([1]) *Mathematische Annalen*, t. I, 1869, p. 494.
([2]) *Theory of Sound*, t. II, p. 164. Londres, 1896.
([3]) *Wiedemann's Annalen*, t. XVII, 1882, p. 1008.
([4]) *Astronomische Nachrichten*, 104, 1883.
([5]) *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, t. I, Pise, 1880, et les fragments inédits du Tome II que l'éminent géomètre m'a remis.

d'une seule façon selon des factorielles de l'argument x. Au n° 14, nous avons démontré qu'il est possible de développer selon des factorielles de l'argument $x+y$ une fonction de x, pourvu que y soit une quantité finie. Ici, nous avons à étudier le problème beaucoup plus difficile relatif au développement d'une fonction de x selon des factorielles de l'argument αx, où α désigne une constante convenable.

A cet égard, prenons pour point de départ les deux expressions générales obtenues pour une fonction développable en série de factorielles, savoir :

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(z)\, z^{x-1}\, dz = \int_0^\infty \varphi(e^{-t})\, e^{-tx}\, dt. \tag{α}$$

Cela posé, nous aurons, α désignant une constante finie et différente de zéro :

$$\Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \int_0^1 \varphi(z)\, z^{\frac{x}{\alpha}-1}\, dz = \int_0^\infty \varphi(e^{-t})\, e^{-\frac{tx}{\alpha}}\, dt; \tag{β}$$

or, nous avons en premier lieu à transformer les deux intégrales (β) en autres de la forme (α), ce qui nous conduira à poser $t = \alpha u$, d'où nous obtiendrons, pour la dernière des intégrales susdites,

$$\Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha \int_0^{\infty\cdot\frac{1}{\alpha}} \varphi(e^{-\alpha u})\, e^{-ux}\, du, \tag{γ}$$

où la limite supérieure indique qu'il faut effectuer l'intégration, de $n = 0$ à $n = \infty$, le long de la ligne droite passant par le point $\frac{1}{\alpha}$. Décrivons ensuite, autour de l'origine comme centre, un cercle du rayon très grand R, et supposons que la fonction $\varphi(e^{-\alpha u})$ n'ait pas de points singuliers situés à l'intérieur ou aux limites du secteur formé par l'axe des nombres réels et le rayon passant par le point $\frac{1}{\alpha}$. Ces conditions remplies, une intégration le long de la circonférence du secteur susdit donnera, en vertu du théorème de Cauchy,

$$\int_0^{\mathrm{R}} - i\mathrm{R} \int_0^{\omega} e^{-\alpha \mathrm{R} e^{-i\theta}} \varphi(e^{-\alpha \mathrm{R} e^{-i\theta}})\, e^{-i\theta}\, d\theta = \int_0^{\mathrm{R}\cdot\frac{1}{\alpha}}, \tag{δ}$$

où l'on a posé

$$(\varepsilon)\qquad \alpha = \rho\, e^{i\omega}.$$

Or, la formule (δ) montre clairement que notre transformation nécessaire susdite est possible, pourvu que

$$(46)\qquad \lim_{\mathrm{R}=\infty}\left[\mathrm{R}\int_0^{\omega} e^{-x\mathrm{R}e^{-i\theta}}\varphi\left(e^{-\alpha\mathrm{R}e^{-i\theta}}\right)e^{-i\theta}\,d\theta\right] = 0,$$

condition qui est nécessaire et suffisante à la fois. Maintenant, il est aisé de voir que cette condition est remplie pourvu que l'on ait ces quatre conditions plus simples :

$$(47)\qquad \mathfrak{R}(x) > 0,\quad \mathfrak{R}(\alpha) > 0,\quad \mathfrak{R}(x-\alpha\lambda) > 0,\quad \mathfrak{R}\left(\frac{x}{\alpha}\right) > 0;$$

c'est-à-dire que nous avons certainement, dans ce cas, ces deux formules essentielles dans les recherches qui nous occupent ici :

$$(48)\qquad \Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha\int_0^1 \varphi(z^\alpha)\,z^{x-1}\,dz = \alpha\int_0^\infty f(\alpha t)\,e^{-tx}\,dt,\qquad f(t) = \varphi(e^{-t}),$$

où l'intégration doit être effectuée le long de l'axe des nombres positifs.

Cependant, ces formules établies, il n'est nullement sûr que la fonction $\Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ soit développable en série de factorielles de l'argument x; cela exige une recherche particulière que nous avons maintenant à établir.

22. $\varphi(z)$ *n'a pas de points singuliers finis outre* $z = 0$ *peut-être*. — Considérons d'abord le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ est une fonction entière, et supposons encore $\mathfrak{R}(\alpha) > 0$; la fonction $\varphi(z^\alpha)$ admet $z = 0$ comme seul point singulier fini, et le nombre caractéristique est précisément égal à $-\mathfrak{R}(\alpha)$. Mettons encore αx au lieu de x; nous aurons cette proposition :

I. *Si la fonction génératrice est une fonction entière,* $\Omega(x)$ *peut être développée en série de factorielles de l'argument* αx *convergente pourvu que*

$$\mathfrak{R}(x) > 0,\qquad \mathfrak{R}(\alpha x) > 0,\qquad \mathfrak{R}(\alpha) > 0,\qquad \mathfrak{R}(\alpha x + \alpha) > 0.$$

Quant aux coefficients de ce développement, la formule (21_a) donnera immédiatement ici

$$(49)\qquad A_n(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=n-1} f^{(n-s)}(0)\, C_n^s\, \alpha^{n-s+1},$$

expression qui est très remarquable, comparée avec (21_a). Au contraire, l'expression obtenue pour les dérivées d'ordre supérieur de $\varphi(z^\alpha)$ prises par rapport à z (1) est généralement très incommode ici.

Supposons maintenant que $z = 0$ soit point singulier de $\varphi(z)$ et le seul situé dans la partie finie du plan; il est évident que le nombre caractéristique de $\varphi(z^\alpha)$ est précisément égal à $\lambda\mathfrak{R}(\alpha)$. Cela posé, mettons encore αx au lieu de x; nous aurons cette autre proposition :

II. *Supposons que $\varphi(z)$ ait le seul point singulier fini $z = 0$; $\Omega(x)$ est développable en série de factorielles de l'argument αx, convergente pourvu que l'on ait à la fois*

$$\mathfrak{R}(\alpha) > 0, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0, \qquad \mathfrak{R}(\alpha x) > \lambda\mathfrak{R}(\alpha).$$

Il est évident que toutes les fonctions particulières étudiées dans la Section précédente sont développables de cette façon. Considérons, par exemple, la fonction $\omega(x)$; nous aurons ce développement :

$$(50)\qquad \omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s(\alpha)}{\alpha x(\alpha x + 1)\dots(\alpha x + s)},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(50_a)\qquad A_n(\alpha) = \sum_{r=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r \alpha^{n-2r+1}}{(2r+1)(2r+2)} C_n^{n-2r} B_{2r+1},$$

et ce développement est valable, pourvu que l'on ait à la fois

$$(50_b)\qquad \mathfrak{R}(\alpha) > 0, \qquad \mathfrak{R}(x) > 0, \qquad \mathfrak{R}(\alpha x) > 0.$$

(1) Schlömilch, *Compendium*, t. II, p. 9.

Considérons encore la fonction génératrice $\varphi(z) = \frac{1}{z}$; nous aurons

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \qquad \mathfrak{R}(x) > 1,$$

de sorte que notre méthode générale donnera précisément la formule (11) au n° 8 pour $\alpha = 1$.

23. *Cas d'une fonction génératrice générale.* — Ici nous avons à démontrer que la possibilité de la multiplication de l'argument est beaucoup plus étroite pour toutes les autres fonctions développables en série de factorielles. A cet égard, supposons que

$$u = \sigma e^{i\tau}, \qquad z = r e^{i\nu}$$

soient des valeurs correspondantes de z et de $u = z^{\frac{1}{\alpha}}$, tandis que nous posons encore

$$\alpha = \rho e^{i\omega}.$$

Supposons que les deux angles réels ν et ω aient des valeurs situées entre 0 et 2π. Cela posé, nous obtiendrons une équation de cette forme

$$(\alpha) \qquad e^{\log r + i\nu} = e^{(\log\sigma + i\tau)(\rho\cos\omega + i\rho\sin\omega)}.$$

Décrivons maintenant deux cercles C_0 et C_1 ayant leurs centres aux points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ respectivement et leurs rayons égaux à l'unité; il est évident que tous les points singuliers finis de la fonction $\varphi(z^\alpha)$ doivent être situés à l'extérieur, ou sur la circonférence au plus du cercle C_1, pour que $\Omega\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ soit développable en série de factorielles de l'argument x. C'est-à-dire que l'on doit avoir, pour un tel point,

$$(\beta) \qquad \sigma \geqq 2\cos\tau,$$

ce qui donnera, en vertu de (α),

$$(\gamma) \qquad e^{\frac{\log r\cos\omega + (\nu + 2p\pi)\sin\omega}{\rho}} \geqq 2\cos\left(\frac{(\nu + 2p\pi)\cos\omega - \log r\sin\omega}{\rho}\right).$$

Or, supposons $\sin\omega \gtrless 0$; il est possible de déterminer des valeurs pour le nombre entier quelconque p telles que le second membre de (γ) a une valeur positive et finie, tandis que le premier membre deviendra aussi petit qu'on le veut, c'est-à-dire que l'inégalité (β) est impossible, et nous avons cette autre proposition :

III. *Supposons que la fonction génératrice $\varphi(z)$ ait des points singuliers finis outre $z = 0$; α ne peut avoir que des valeurs réelles.*

Posons ensuite $\sin\omega = 0$ ou bien $\rho = \alpha$; l'inégalité (γ) s'écrira sous cette forme :

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \geqq 2\cos\left(\frac{v + 2p\pi}{\alpha}\right), \tag{52}$$

condition qui doit être remplie par tous les points singuliers finis de $\varphi(z)$, outre $z = 0$, ce qui nous donnera aisément cette nouvelle proposition :

IV. *Si les modules des points singuliers finis de $\varphi(z)$, outre $z = 0$, ne sont pas tous plus grands que l'unité, α ne peut avoir que des valeurs rationnelles.*

En effet, si l'on admet $r \leqq 1$, tandis que α est irrationnel, il sera toujours possible de déterminer des valeurs entières de p telles que le second membre de (52) est aussi approché de 2 qu'on le veut, tandis que le premier membre ne peut pas surpasser l'unité.

24. *Sur les valeurs rationnelles de α.* — Supposons maintenant que $\varphi(z)$ ait des points singuliers situés à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle C_0, outre $z = 0$, nous avons encore ce théorème :

V. *Si α est réduit à être rationnel, son numérateur ne peut être que* 1, 2 *ou* 3.

Dans ce cas, aucun des angles réels figurant au second membre de (52), privés des multiples possibles de 2π, ne peut être situé entre $-\frac{\pi}{3}$ et $+\frac{\pi}{3}$. Posons maintenant

$$\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \frac{bv}{a} = v' + 2q\pi, \qquad \pi \geqq v' \geqq \frac{\pi}{3},$$

où q désigne un nombre entier, et mettons encore

$$\frac{2bp\pi}{a} = -\frac{2r\pi}{a} + 2s\pi,$$

ou, ce qui vaut autant,

$$(\alpha) \qquad bp - as = -r.$$

Or, cette équation indéterminée nous donne toujours des solutions entières de p et s pour une valeur entière quelconque de r, car la fraction $\frac{a}{b}$ peut être considérée comme irréductible.

Cela posé, admettons $a \geqq 4$; nous pouvons toujours mettre

$$\frac{m+1}{a}\pi > \varphi' \geqq \frac{m\pi}{a},$$

m désignant un positif entier convenable. Or, je dis qu'il est possible de déterminer un positif entier r, tel que l'on ait à la fois

$$\frac{m\pi}{a} - \frac{2r\pi}{a} > -\frac{\pi}{3}, \qquad \frac{(m+1)\pi}{a} - \frac{2r\pi}{a} < \frac{\pi}{3},$$

ou, ce qui vaut autant,

$$(\beta) \qquad 3m + a > 6r > 3m - a + 3,$$

inégalités qui donnent toujours des valeurs positives entières de r, pourvu que $a \geqq 4$. Or, une telle valeur de r déterminée, p peut être tiré de (α).

Le cas où φ' est situé entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{3}$ se traite d'une manière analogue.

Quant aux fractions du numérateur 3, nous aurons encore cette proposition :

VI. *Les fractions de la forme $\frac{3}{t}$ ne sont possibles que si tous les points singuliers susdits, outre $z = 0$, de $\varphi(z)$ sont de la forme $e^{\frac{p\pi i}{q}}$, où les fractions $\frac{p}{q}$ sont irréductibles; de plus, tous les numérateurs p doivent être impairs et t un multiple impair de tous les dénominateurs q.*

La démonstration peut être établie indirectement. En effet, supposons d'abord que t ne soit pas multiple de q; il sera possible de déterminer des nombres entiers s et m tels que

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{p\pi}{q} + 2m\pi\right)\frac{t}{3} = \frac{r\pi}{3q} + 2s\pi,$$

où l'on a à la fois

$$r \equiv tp \pmod{2q}, \qquad 0 < |r| < q,$$

postulat qui se démontre aisément à l'aide de l'équation indéterminée pour s et m déduite de (γ).

Soit maintenant t un multiple de q; l'équation (γ) est impossible et l'on démontre aisément que les propriétés énoncées pour p, q et t sont nécessaires et suffisantes pour admettre une fraction du numérateur 3.

Supposons encore qu'un point singulier de $\varphi(z)$ se présente sous la forme de e^{vi}, où le quotient de v et π est un nombre irrationnel, et fixons pour t une valeur entière déterminée mais quelconque; il sera possible de déterminer deux positifs entiers très grands p et q, tels que

$$\frac{p + \frac{1}{2t}}{q} > \frac{v}{\pi} > \frac{p}{q},$$

et l'équation (γ) montre clairement que la fonction $\varphi(z^\alpha)$ a des points singuliers situés à l'intérieur du cercle C_1 de l'équation

$$x^2 + y^2 = 2x.$$

Ces résultats établis, on voit aisément que les points singuliers correspondants de $\varphi(z)$, dont les modules sont situés entre 0 et 1, nous donnent toujours pour $\varphi(z^\alpha)$ des points singuliers situés à l'intérieur de C_1, et voilà la démonstration complète de notre proposition.

25. *Développements nouveaux de* $D_x \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Considérons en particulier la fonction $\beta(x)$ introduite au n° 8, formule (15); le seul point singulier de $\varphi(z)$ est $z = -1$; c'est-à-dire que α peut avoir les valeurs suivantes :

$$\frac{1}{2s+1}, \quad \frac{2}{2s+1}, \quad \frac{3}{2s+1},$$

où s désigne un entier non négatif. Posons $\alpha = 2$; nous aurons

$$\beta\left(\frac{x}{2}\right) = 2\int_0^1 \frac{z^{x-1}}{1+z^2}\,dz,$$

de façon qu'une formule de Liouville (¹) donnera immédiatement

$$(-1)^n \varphi^n(1) = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \sin\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Mettons ensuite $2x$ au lieu de x, nous aurons cette formule nouvelle

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{2x(2x+1)\ldots(2x+s)} \cdot \frac{\sin\frac{(s+1)\pi}{4}}{2^{\frac{s+1}{2}}}, \tag{53}$$

qui est valable dans toute l'étendue du plan.

Dans le cas $\alpha = 3$, nous aurons, après une décomposition ordinaire,

$$\beta\left(\frac{x}{3}\right) = \beta(x) - \int_0^1 \frac{z-2}{z^2-z+1} z^{x-1}\,dz,$$

ce qui donnera de la même manière

$$\beta(x) = \beta(3x) + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! \sin\frac{(2s+1)\pi}{6}}{3x(3x+1)\ldots(3x+s)}, \tag{54}$$

formule qui est valable pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$. La série de factorielles ainsi obtenue est absolument convergente pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 1$.

(¹) Citation de Frenet, *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 80; Paris, 1882.