

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. HURWITZ

## Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 19 (1902), p. 357-408

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1902\\_3\\_19\\_\\_357\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__357_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR  
QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES  
DES  
SÉRIES DE FOURIER,

PAR M. A. HURWITZ,

A ZÜRICH.

---

Les séries de Fourier et des développements analogues interviennent tout naturellement dans la théorie générale des courbes et des surfaces. En effet, cette théorie, envisagée au point de vue de l'Analyse, revient évidemment à l'étude des fonctions arbitraires. J'ai ainsi été amené à employer les séries de Fourier dans quelques questions de Géométrie, et j'ai obtenu dans cette voie quelques résultats qui seront développés dans le présent travail. On remarquera que mes considérations ne forment guère qu'un commencement dans un certain ordre de recherches, qui donneront sans doute encore beaucoup de résultats nouveaux.

Avant d'entrer en matière, je démontrerai un théorème sur les séries de Fourier qui joue un rôle fondamental dans mes recherches et qui, d'ailleurs, me semble être remarquable en lui-même.

1. Considérons deux fonctions réelles  $f(x)$  et  $\varphi(x)$ , bornées et intégrables dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$  et calculons les intégrales

$$(1) \quad \begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, & a'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos kx \, dx, & b'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin kx \, dx \end{cases}$$

pour  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Ce sont des valeurs finies et déterminées.

Alors la série

$$(2) \quad S = \frac{1}{2} a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k + a'_k b'_k)$$

est convergente et l'on a

$$(3) \quad S = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx.$$

Pour la démonstration, nous remarquerons, en premier lieu, qu'il suffit de considérer le cas où les fonctions  $f(x)$  et  $\varphi(x)$  sont identiques.

En effet, supposons notre théorème démontré dans ce cas spécial et désignons par  $f(x)$  et  $\varphi(x)$  deux fonctions bornées et intégrables quelconques. En appliquant le théorème à la fonction  $\lambda f(x) + \mu \varphi(x)$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes arbitraires, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\lambda f(x) + \mu \varphi(x)]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} (\lambda a_0 + \mu b_0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(\lambda a_k + \mu b_k)^2 + (\lambda a'_k + \mu b'_k)^2]. \end{aligned}$$

En développant les carrés et en comparant les coefficients de  $2\lambda\mu$  dans les deux membres, il vient

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2} a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k + a'_k b'_k).$$

On voit donc qu'il suffit de démontrer l'équation

$$(4) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + a'_k{}^2)$$

dans l'hypothèse où la fonction  $f(x)$  est bornée et intégrable dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$ , les  $a_k$  et  $a'_k$  étant définis par les équations (1). La démonstration se compose de deux parties.

D'abord nous montrons que la série dans l'équation (4) est convergente, et ensuite que la somme de cette série est égale à  $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx$ .

La convergence de la série (4) découle, comme l'a déjà remarqué

M. Harnack <sup>(1)</sup>, de l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ f(x) - \frac{1}{2} a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + a'_k \sin kx) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx - \frac{1}{2} a_0^2 - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + a'_k{}^2). \end{aligned}$$

En effet, d'après cette identité, la somme

$$(5) \quad S_n = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + a'_k{}^2)$$

reste, pour toutes les valeurs de  $n$ , inférieure à  $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx$ ; par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  est finie et déterminée.

Maintenant, il nous faut démontrer, ce qui est plus difficile, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx$ . Pour cela, nous remarquons, en premier lieu, que l'on a

$$(6) \quad S_n = \frac{1}{2\pi^2} \iint f(x) f(y) \frac{\sin(2n+1) \frac{x-y}{2}}{\sin \frac{x-y}{2}} dx dy,$$

l'intégrale double étant prise à l'intérieur du carré Q

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

En effet, la fonction  $f(x)$  étant intégrable dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$  le sera aussi, considérée comme fonction de  $x$  et  $y$ , dans le carré Q.

De même  $f(y)$  et la fonction

$$(7) \quad \frac{\sin(2n+1) \frac{x-y}{2}}{\sin \frac{x-y}{2}} = 2 \left[ \frac{1}{2} + \cos(x-y) + \cos 2(x-y) + \dots + \cos n(x-y) \right],$$

---

<sup>(1)</sup> *Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen (Mathematische Annalen, t. XVII, p. 125). Voir aussi Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 2<sup>e</sup> série, t. VI, 1882.*

qui est continue, étant intégrables dans Q, le produit

$$(8) \quad P = f(x)f(y) \frac{\sin(2n+1)\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x-y}{2}}$$

le sera aussi. Mais, d'après l'équation (7), l'intégrale double, qui figure dans l'équation (6) se décompose en une somme d'intégrales qui se réduisent évidemment aux différents termes  $\frac{1}{2}a_0^2$  et  $a_k^2 + a_k'^2$  de la somme  $S_n$ .

L'équation (6), ainsi démontrée, peut être transformée de la manière suivante. La fonction P étant symétrique par rapport à  $x$  et à  $y$ , on décomposera le carré Q par la droite  $x = y$  en deux triangles dont l'un,  $Q_1$ , est formé par les droites  $y = 0$ ,  $x = 2\pi$ ,  $x = y$ , et l'on aura

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{(Q_1)} f(x)f(y) \frac{\sin(2n+1)\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x-y}{2}} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f(y) dy \int_y^{2\pi} f(x) \frac{\sin(2n+1)\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x-y}{2}} dx. \end{aligned}$$

En substituant  $y + 2x$  au lieu de  $x$ , on trouve

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f(y) dy \int_0^{\pi-\frac{y}{2}} f(y+2x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \int_0^{2\pi-2x} f(y) f(y+2x) dy. \end{aligned}$$

Maintenant posons,  $x$  étant bornée à l'intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,

$$(9) \quad F(x) = \int_0^{2\pi-x} f(y) f(y+x) dy.$$

Nous aurons

$$S_n = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} F(2x) dx,$$

ou enfin

$$(10) \quad S_n = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} [F(2x) + F(2\pi - 2x)] dx.$$

Or, la fonction  $F(x)$  est continue dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$ , comme nous le démontrerons tout à l'heure. En outre, nous savons que  $\lim S_n$  est finie et déterminée. Mais, d'après un théorème de M. P. du Bois-Reymond <sup>(1)</sup> dont nous donnerons une démonstration ci-après, l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\sin(2n+1)x}{x} \psi(x) dx \quad (a > 0)$$

ne peut avoir une autre limite pour  $n = \infty$  que  $\frac{\pi}{2} \psi(+0)$ , si

$$\psi(+0) = \lim_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon)$$

est finie et déterminée. Par conséquent, la limite de

$$S_n = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} \frac{x}{\sin x} [F(2x) + F(2\pi - 2x)] dx$$

sera

$$\frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi}{2} [F(0) + F(2\pi)] \right\} = \frac{1}{\pi} F(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) f(y) dy \quad \text{c. q. f. d.}$$

Pour montrer que la fonction  $F(x)$ , définie par l'équation (9), est continue, nous considérons deux arguments  $x - \delta$  et  $x$  satisfaisant aux conditions

$$0 \leq x - \delta < x \leq 2\pi.$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned} F(x) - F(x - \delta) &= \int_0^{2\pi-x} f(y) [f(y+x) - f(y+x-\delta)] dy \\ &\quad - \int_{2\pi-x}^{2\pi-x+\delta} f(y) f(y+x-\delta) dy, \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Allgemeine Lehrsätze über den Gültigkeitsbereich der Integralformeln, die zur Darstellung willkürlicher Functionen dienen (Crelle's Journal, t. 79, p. 48).

ou encore

$$(11) \quad F(x) - F(x - \delta) = \int_x^{2\pi} f(y - x) [f(y) - f(y - \delta)] dy \\ - \int_0^\delta f(2\pi - x + y) f(2\pi - \delta + y) dy.$$

Désignons par  $M$  la limite supérieure de  $|f(x)|$  dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Alors la seconde intégrale de l'équation (11) a une valeur numérique plus petite que  $M^2 \delta$ , quantité qui converge vers zéro avec  $\delta$ .

Passons à l'autre intégrale de l'équation (11). Après avoir pris arbitrairement deux quantités positives  $\sigma$  et  $\varepsilon$  nous décomposons le champ d'intégration  $x \dots 2\pi$  en parties  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$  et nous désignons par  $\Delta_i$  celles de ces parties dans lesquelles l'oscillation de  $f(x)$  dépasse  $\sigma$ , par  $\Delta_k$  les autres. La fonction  $f(x)$  étant intégrable nous pouvons supposer que  $\sum \Delta_i < \varepsilon$ . Nous décomposons chaque partie  $\Delta_k$  en deux parties  $\Delta'_k$  et  $\Delta''_k$  de sorte que  $\sum \Delta'_k < \varepsilon$ . Si nous prenons  $\delta$  inférieur à la plus petite des parties  $\Delta'_k$  on a

$$|f(y) - f(y - \delta)| \leq \sigma,$$

pour tout point  $y$  de  $\Delta''_k$ , parce qu'alors les points  $y$  et  $y - \delta$  appartiennent tous les deux à  $\Delta_k$ . Maintenant on a

$$\left| \int_x^{2\pi} f(y - x) [f(y) - f(y - \delta)] dy \right| \\ \leq \sum \left| \int_{\Delta'_k} \right| + \sum \left| \int_{\Delta_i} \right| + \sum \left| \int_{\Delta''_k} \right| \\ \leq \sum \left\{ \int_{\Delta'_k} |f(y - x) f(y)| dy + \int_{\Delta'_k} |f(y - x) f(y - \delta)| dy \right\} \\ + \sum \left\{ \int_{\Delta_i} |f(y - x) f(y)| dy + \int_{\Delta_i} |f(y - x) f(y - \delta)| dy \right\} \\ + \sum \int_{\Delta''_k} |f(y - x)| |f(y) - f(y - \delta)| dy \\ \leq 2M^2 \sum \Delta'_k + 2M^2 \sum \Delta_i + \sigma M \sum \Delta''_k \\ \leq 4M^2 \varepsilon + \sigma M 2\pi.$$

De cette inégalité nous concluons immédiatement que pour toutes les valeurs assez petites de  $\delta$  la valeur numérique de  $F(x) - F(x - \delta)$  reste plus petite qu'un nombre positif choisi arbitrairement et indépendant de  $x$ .

Donc  $F(x)$  est fonction continue de  $x$ .

Quant au théorème de M. du Bois-Reymond je reproduirai ici la démonstration de l'auteur même avec des détails qui me semblent mériter quelque intérêt.

Supposons la fonction  $\psi(x)$  bornée et intégrable dans l'intervalle

$$0 \leq x \leq a;$$

supposons de plus que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\varepsilon) = \psi(+0)$$

soit finie et déterminée et enfin que

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin(2n+1)x}{x} \psi(x) dx = \Lambda$$

soit également finie et déterminée. Il nous faut démontrer que

$$(13) \quad \Lambda = \frac{\pi}{2} \psi(+0).$$

D'après la formule

$$\int_0^a \frac{\sin(2n+1)x}{x} \psi(x) dx = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{2^{n+1}} \psi(x) \cos yx dx dy,$$

l'équation (12) équivaut à celle-ci

$$(14) \quad \int_0^{\infty} \Psi(y) dy = \Lambda,$$

où nous avons posé

$$(15) \quad \Psi(y) = \int_0^a \psi(x) \cos yx dx.$$

Cette fonction  $\Psi(y)$  est évidemment continue pour toutes les valeurs finies de l'argument  $y$ . Remarquons tout d'abord que l'infini à la limite supérieure de l'intégrale (14) désigne un nombre impair  $2n + 1$  croissant indéfiniment. Mais on voit aisément que l'équation (14) reste exacte si nous prenons pour limite supérieure de



l'intégrale un nombre positif  $p$  croissant à l'infini d'une manière absolument quelconque. En effet, on a

$$\int_0^p \Psi(y) dy = \int_0^{2n+1} \Psi(y) dy + \int_{2n+1}^p \Psi(y) dy,$$

en désignant par  $2n + 1$  le nombre impair immédiatement au-dessous de  $p$ . Or, d'après un théorème connu, la fonction  $\Psi(y)$  définie par (15) tend vers zéro si  $y$  tend vers l'infini. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_{2n+1}^p \Psi(y) dy,$$

dont le champ  $p - (2n + 1)$  est plus petit que 2, tend vers zéro si  $p$  tend vers l'infini. Donc, on a bien

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \Psi(y) dy = \Lambda.$$

Maintenant nous ferons usage du théorème suivant dû à Lejeune-Dirichlet (1) :

*Si la fonction  $\psi(y)$  est intégrable dans tout intervalle fini de l'axe des quantités positives, si, en outre,*

$$\int_0^{\infty} \psi(y) dy = \Lambda$$

*est finie et déterminée, l'intégrale*

$$\int_0^{\infty} e^{-ty} \psi(y) dy = \Lambda(t)$$

*est aussi finie et déterminée pour chaque valeur positive de  $t$  et l'on a*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda(t) = \Lambda.$$

Mon ami et collègue M. Franel m'a communiqué une démonstration très courte et susceptible de généralisations étendues de ce théorème, que je reproduis ici avec sa permission.

---

(1) Voir *Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale*, von G.-F. Meyer, Leipzig, 1871, p. 179.

D'après les hypothèses faites on a pour toute quantité  $q > p$

$$\left| \int_p^q \psi(y) dy \right| < \varepsilon,$$

$\varepsilon$  désignant une quantité positive prise arbitrairement et  $p$  étant choisi assez grand. Mais on a, d'après le théorème de M. Bonnet,

$$\left| \int_p^q e^{-ty} \psi(y) dy \right| = \left| e^{-tp} \int_p^q \psi(y) dy \right| < \varepsilon,$$

pour toute valeur positive de  $t$ ,  $q'$  désignant une valeur comprise entre  $p$  et  $q$ . Ainsi l'on voit que

$$\Lambda(t) = \int_0^\infty e^{-ty} \psi(y) dy$$

est finie et déterminée pour  $t > 0$ . Maintenant écrivons

$$\Lambda - \Lambda(t) = \int_0^p (1 - e^{-ty}) \psi(y) dy + \int_p^\infty \psi(y) dy - \int_p^\infty e^{-ty} \psi(y) dy.$$

Après avoir choisi  $\varepsilon$  arbitrairement nous pouvons prendre  $p$  tel que les deux dernières intégrales soient numériquement plus petites que  $\frac{\varepsilon}{3}$  et cela quelle que soit la valeur de  $t > 0$ . En prenant  $t'$  assez petit la première intégrale sera, en valeur absolue,  $< \frac{\varepsilon}{3}$  pour toute valeur positive de  $t < t'$ . Donc  $|\Lambda - \Lambda(t)| < \varepsilon$  pour  $0 < t < t'$ , c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda(t) = \Lambda, \quad \text{c. q. f. d. } (1).$$

(1) Remarquons en passant que le théorème d'Abel sur les séries de puissances est une conséquence du théorème de Lejeune-Dirichlet. En effet, si l'on prend

$$\psi(y) = a_n \quad \text{pour} \quad n \leq y < n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$a_0, a_1, a_2, \dots$  désignant les termes d'une série convergente, on obtient

$$\int_0^\infty \psi(y) dy = \sum_{n=0}^\infty a_n \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-ty} \psi(y) dy = \frac{1 - e^{-t}}{t} \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-tn}.$$

Donc le théorème de Lejeune-Dirichlet donne bien

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-tn} = \sum_{n=0}^\infty a_n.$$

Revenons maintenant aux équations (14) et (15). D'après ce que nous venons de démontrer nous aurons

$$A = \lim_{t=0} \int_0^{\infty} e^{-ty} dy \int_0^a \psi(x) \cos yx dx = \lim_{t=0} \int_0^a \frac{t\psi(x)}{t^2 + x^2} dx,$$

ou

$$(16) \quad A = \lim_{t=0} \int_0^{\frac{a}{t}} \psi(tx) \frac{dx}{1+x^2}.$$

Décomposons la dernière intégrale dans la somme des intégrales

$$J_1 = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \psi(tx) \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{et} \quad J_2 = \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{a}{t}} \psi(tx) \frac{dx}{1+x^2}.$$

L'intégrale  $J_2$  est, en valeur absolue, plus petite que

$$M \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{a}{t}} \frac{dx}{1+x^2},$$

$M$  désignant la limite supérieure des valeurs de  $|\psi(x)|$ .

Donc  $J_2$  s'évanouit avec  $t$ . L'intégrale  $J_1$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} J_1 &= \psi(+0) \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} [\psi(tx) - \psi(+0)] \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \psi(+0) \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \frac{dx}{1+x^2} + J_3. \end{aligned}$$

Pour  $0 < x \leq \frac{a}{\sqrt{t}}$  nous aurons  $0 < tx \leq a\sqrt{t}$ ; donc, si nous prenons  $t$  assez petit,

$$|\psi(tx) - \psi(+0)| < \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant choisi aussi petit qu'on le veut. Alors l'intégrale  $J_3$  sera numériquement plus petite que  $\varepsilon \int_0^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \frac{dx}{1+x^2}$  et l'on voit que  $J_3$  tend vers

zéro avec  $t$ . Donc enfin pour  $t = 0$  la limite de  $J_1$  sera  $\psi(+0) \frac{\pi}{2}$  et

d'après (16)

$$A = \psi(+0) \frac{\pi}{2},$$

C. Q. F. D.

Dans la suite nous ferons usage des notations suivantes :

Soit  $f(x)$  une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle

$$0 \leq x \leq 2\pi.$$

Nous nommerons les valeurs des intégrales

$$(17) \quad \begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \\ a'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \end{cases}$$

$k$  prenant toutes les valeurs entières, les *constantes de Fourier* de la fonction  $f(x)$ , et nous écrirons l'équivalence

$$(18) \quad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + a'_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + a'_2 \sin 2x) + \dots,$$

ou aussi quelquefois

$$(18') \quad f(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos kx + a'_k \sin kx),$$

ce qui revient à (18) puisque l'on a

$$a_{-k} = a_k, \quad a'_{-k} = -a'_k.$$

Une telle équivalence (18) se transforme dans une équation seulement dans le cas où  $f(x)$  est développable en série de Fourier. Mais dans tous les cas il est permis de faire certaines opérations avec de telles équivalences.

Par exemple, en formant les constantes de Fourier des fonctions  $f(x) \cos nx$  et  $f(x) \sin nx$ , où  $n$  désigne un nombre entier, on voit aisément qu'une équivalence (18) peut être multipliée par  $\cos nx$  et  $\sin nx$  pourvu qu'on ordonne ensuite le second membre de l'équivalence suivant les cosinus et sinus des multiples de  $x$  par l'appli-

cation des formules

$$\cos kx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(k-n)x + \cos(k+n)x],$$

$$\cos kx \sin nx = \frac{1}{2} [\sin(k+n)x - \sin(k-n)x],$$

$$\sin kx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(k-n)x - \cos(k+n)x].$$

En faisant le calcul on trouve

$$(18^a) \quad f(x) \cos nx \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{a_{k+n} + a_{k-n}}{2} \cos kx + \frac{a'_{k+n} + a'_{k-n}}{2} \sin kx \right),$$

$$(18^b) \quad f(x) \sin nx \sim \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{a'_{k+n} - a'_{k-n}}{2} \cos kx - \frac{a_{k+n} - a_{k-n}}{2} \sin kx \right).$$

Le théorème que nous avons démontré plus haut permet d'exprimer les constantes de Fourier du produit  $f(x) \varphi(x)$  par les constantes de Fourier des facteurs. En effet, d'après ce théorème il résulte des équivalences (18<sup>a</sup>), (18<sup>b</sup>) et de l'équivalence

$$(19) \quad \varphi(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (b_k \cos kx + b'_k \sin kx),$$

que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} [b_k (a_{k+n} + a_{k-n}) + b'_k (a'_{k+n} + a'_{k-n})],$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} [b_k (a'_{k+n} - a'_{k-n}) - b'_k (a_{k+n} - a_{k-n})].$$

D'où cette conclusion :

Des équivalences

$$(I) \quad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + a'_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + a'_2 \sin 2x) + \dots,$$

$$(II) \quad \varphi(x) \sim \frac{1}{2} b_0 + (b_1 \cos x + b'_1 \sin x) + (b_2 \cos 2x + b'_2 \sin 2x) + \dots$$

on tire

$$(III) \quad f(x) \varphi(x) \sim \frac{1}{2} c_0 + (c_1 \cos x + c'_1 \sin x) + (c_2 \cos 2x + c'_2 \sin 2x) + \dots,$$

les constantes  $c_0, c_1, c'_1, \dots$  étant définies par les équations

$$(IV) \quad \begin{cases} c_0 = \frac{1}{2} a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k + a'_k b'_k), \\ c_n = \frac{1}{2} b_0 a_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [b_k (a_{k+n} + a_{k-n}) + b'_k (a'_{k+n} + a'_{k-n})], \\ c'_n = \frac{1}{2} b_0 a'_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [b_k (a'_{k+n} - a'_{k-n}) - b'_k (a_{k+n} - a_{k-n})]. \end{cases}$$

Puisqu'on peut échanger  $f(x)$  et  $\varphi(x)$ , il est permis d'échanger dans les formules (IV) les  $b_k$  et  $b'_k$  avec les  $a_k$  et  $a'_k$  respectivement.

Considérons maintenant la fonction

$$F(x) = \int_0^x f(u) du,$$

$f(x)$  désignant toujours une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle  $0 \dots 2\pi$ . Les constantes de Fourier de  $F(x)$  ont les valeurs

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos kx dx \int_0^x f(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) du \int_u^{2\pi} \cos kx dx,$$

$$A'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin kx dx \int_0^x f(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) du \int_u^{2\pi} \sin kx dx,$$

ou encore

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi - x) f(x) dx,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\sin kx}{k} f(x) dx = -\frac{1}{k} a'_k \quad (k > 0),$$

$$A'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos kx - 1}{k} f(x) dx = \frac{1}{k} (a_k - a_0).$$

Donc, de l'équivalence

$$(20) \quad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + a'_k \sin kx)$$

on peut tirer l'autre

$$F(x) = \int_0^x f(u) du \sim \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{a'_k}{k} \cos kx + \frac{a'_k - a_0}{k} \sin kx \right).$$

Mais  $F(x)$  étant l'intégrale d'une fonction bornée et intégrable, on sait que  $F(x)$  est à variation bornée et continue (1). Par conséquent,  $F(x)$  est développable en série de Fourier (2) et la dernière équivalence peut être remplacée par l'équation

$$(21) \quad \int_0^x f(u) du = \frac{1}{2} A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a'_k}{k} \cos kx + \frac{a_0 - a_k}{k} \sin kx \right) \quad (0 < x < 2\pi).$$

Pour  $x = 0$  on trouve, d'après des théorèmes connus,

$$\frac{1}{2} \pi a_0 = \frac{1}{2} A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{k},$$

d'où

$$(22) \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi - x) f(x) dx = \pi a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{k}.$$

Cette équation peut être démontrée aussi par l'application de notre théorème fondamental aux fonctions

$$f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 2\pi - x \sim \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin kx.$$

D'après l'équation

$$\frac{1}{2} (\pi - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \quad (0 < x < 2\pi),$$

on a aussi

$$(21') \quad \int_0^x f(u) du = \sum_1^{\infty} \frac{a'_k}{k} + \frac{1}{2} a_0 x - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a'_k}{k} \cos kx - \frac{a_k}{k} \sin kx \right) \\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

(1) Voir JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 68.

(2) *Ibid.*, t. II, p. 241.

On obtient le même résultat en considérant la fonction  $\varphi(x)$ , qui s'annule dans l'intervalle  $x_1 \dots 2\pi$  et qui a la valeur constante 1 dans l'intervalle  $0 \dots x_1$ , où  $x_1$  désigne un argument quelconque entre 0 et  $2\pi$ . On trouve, par un calcul facile,

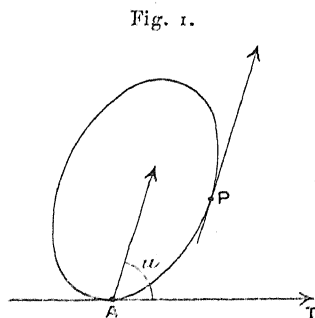
$$(23) \quad \varphi(x) \sim \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} x_1 + \sum_1^{\infty} \left( \frac{\sin k x_1}{k} \cos k x - \frac{\cos k x_1 - 1}{k} \sin k x \right) \right].$$

Des équivalences (20) et (23) nous concluons l'équation

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx &= \int_0^{x_1} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} a_0 x_1 + \sum_1^{\infty} \left[ a_k \frac{\sin k x_1}{k} - a'_k \frac{(\cos k x_1 - 1)}{k} \right], \end{aligned}$$

qui est, aux notations près, identique à l'équation (21').

2. Soit C une courbe convexe fermée (fig. 1) admettant une tangente



en chaque point P. Désignons par  $u$  l'angle formé par la direction de la tangente prise dans le sens direct de la courbe avec une position initiale AT de la tangente.

L'angle  $u$  variera de 0 à  $2\pi$  si le point P parcourt la courbe C dans le sens direct en partant du point A.

Prenons un système d'axes rectangulaires, dont l'axe des abscisses est parallèle à la tangente AT. Alors les coordonnées  $x, y$  du point P seront des fonctions continues et périodiques de  $u$ .

Nous supposons que ces fonctions ont des dérivées finies et



déterminées. D'après les équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{du} = \cos u \frac{ds}{du} = \cos u \rho, \\ \frac{dy}{du} = \sin u \frac{ds}{du} = \sin u \rho, \end{cases}$$

où  $s$  désigne l'arc AP, la courbe admettra, en chaque point P, un rayon de courbure  $\rho$  fini et déterminé. En faisant l'hypothèse que  $\rho$  est une fonction bornée et intégrable de  $u$ , nous aurons l'équivalence

$$(2) \quad \rho \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos ku + a'_k \sin ku),$$

les  $a_k$  et  $a'_k$  désignant les constantes de Fourier relatives à  $\rho$ . Ici on a

$$(3) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho \, du = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{du} \, du = \frac{1}{\pi} L,$$

où  $L$  désigne le périmètre de la courbe C. De plus, on trouve

$$(4) \quad a_1 = 0, \quad a'_1 = 0;$$

car les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \cos u \rho \, du = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{du} \, du \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin u \rho \, du = \int_0^{2\pi} \frac{dy}{du} \, du$$

s'évanouissent.

En multipliant l'équivalence (2) par  $\cos u$  et  $\sin u$  respectivement, on obtient

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{du} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} \cos ku + \frac{a'_{k+1} + a'_{k-1}}{2} \sin ku \right), \\ \frac{dy}{du} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a'_{k+1} - a'_{k-1}}{2} \cos ku - \frac{a_{k+1} - a_{k-1}}{2} \sin ku \right), \end{cases}$$

et, en intégrant,

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{a'_{k+1} + a'_{k-1}}{2k} \cos ku + \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2k} \sin ku \right), \\ y = \frac{1}{2} \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_{k+1} - a_{k-1}}{2k} \cos ku + \frac{a'_{k+1} - a'_{k-1}}{2k} \sin ku \right), \end{cases}$$

où

$$(7) \quad \alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, du, \quad \beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \, du$$

dépendent évidemment du choix de l'origine des coordonnées. Ceci établi, calculons l'aire F de la courbe C. Notre théorème fondamental nous donne

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{du} \, du = -\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a'_{k+1}{}^2 - a'_{k-1}{}^2}{k} + \frac{a_{k+1}^2 - a_{k-1}^2}{k} \right) \\ &= -\frac{\pi}{4} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{k+1} \right), \end{aligned}$$

ou, en tenant compte des équations (3) et (4),

$$F = +\frac{\pi}{4} \left( \frac{L^2}{\pi^2} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{k^2 - 1} \right).$$

Cette équation peut s'écrire

$$(8) \quad \frac{L^2}{4\pi} - F = \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{k^2 - 1}.$$

Elle met en évidence que l'on a toujours

$$(9) \quad L^2 \geq 4\pi F,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que dans le cas où

$$a_k = a'_k = 0 \quad (k = 2, 3, 4, \dots).$$

Dans ce cas, les développements (6) donnent

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\alpha + \frac{a_0}{2} \sin u, \\ y &= \frac{1}{2}\beta - \frac{a_0}{2} \cos u, \end{aligned}$$

de sorte que la courbe C est un cercle. Ainsi l'équation (8) contient le théorème des isopérimètres pour les courbes convexes.

Avant d'aller plus loin, ajoutons quelques remarques relatives à la formule (8).

La quantité  $\frac{L^2}{4\pi} - F$ , qui est un invariant par rapport au groupe de mouvements du plan, est décomposée par cette formule en une somme de termes essentiellement positifs. *Ces termes sont eux-mêmes des invariants.*

En effet, un déplacement quelconque de la courbe C revient au remplacement de l'angle  $u$  par  $u + \alpha$ ,  $\alpha$  désignant un angle constant. Donc  $a_k$  et  $a'_k$  sont remplacés par

$$(10) \quad \begin{cases} b_k = a_k \cos k\alpha - a'_k \sin k\alpha, \\ b'_k = a_k \sin k\alpha + a'_k \cos k\alpha, \end{cases}$$

et l'on a, par conséquent,

$$(11) \quad b_k^2 + b'_k{}^2 = a_k^2 + a'_k{}^2 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

En écrivant les équations (10) sous la forme

$$b_k + ib'_k = e^{kia}(a_k + ia'_k),$$

on voit aisément que les constantes

$$a_0 = \frac{L}{\pi}, \quad a_2^2 + a'_2{}^2, \quad a_3^2 + a'_3{}^2, \quad \dots$$

et les rapports des racines

$$\sqrt{a_2 + ia'_2} : \sqrt[3]{a_3 + ia'_3} : \sqrt[4]{a_4 + ia'_4} : \dots$$

forment un système complet d'invariants de la courbe C. Cela veut dire ceci : Si nous désignons par  $b_k, b'_k$  les constantes de Fourier relatives au rayon de courbure d'une seconde courbe convexe C'; si, de plus, on a

$$b_0 = a_0, \quad b_k^2 + b'_k{}^2 = a_k^2 + a'_k{}^2, \quad \sqrt[k]{b_k + ib'_k} = \lambda \sqrt[k]{a_k + ia'_k} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

où  $\lambda$  est un facteur indépendant de  $k$ , alors la courbe C' peut être obtenue par un déplacement de la courbe C.

Pour le montrer, il suffit de remarquer que, le module du facteur  $\lambda$

étant égal à l'unité (puisque  $b_k^2 + b_k'^2 = a_k^2 + a_k'^2$ ), on peut déterminer  $\alpha$  tel que  $\lambda = e^{i\alpha}$ .

On aura alors la relation (10), et en formant, d'après les équations (6), les développements en série de Fourier des coordonnées d'un point de la courbe C, d'une part, et de la courbe C', d'autre part, on reconnaît que les coordonnées des points de C' sont liées aux coordonnées des points de C par les formules de transformations des coordonnées rectangulaires.

5. Considérons maintenant la développée de la courbe C. Les coordonnées  $\xi, \eta$  du centre de courbure M correspondant au point P de C sont données par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = x - \frac{dy}{du}, \\ \eta = y + \frac{dx}{du}. \end{cases}$$

Dans la suite, nous ferons l'hypothèse que le rayon de courbure  $\rho$ , considéré comme fonction de  $u$ , admet une dérivée finie et intégrable. D'après les équations (1) (n° 2), les coordonnées  $x, y$  admettront des dérivées secondes, et les coordonnées  $\xi, \eta$  des dérivées premières (1). Lorsque le point P parcourt la courbe C dans le sens direct, le centre de courbure M correspondant parcourra en même temps le périmètre de la développée dans un sens déterminé. C'est le sens dans lequel nous voulons prendre l'intégrale

$$(2) \quad E = \int \xi d\eta = \int_0^{2\pi} \xi \frac{d\eta}{du} du$$

le long du périmètre de la développée. Dans le cas où la développée ne se coupe pas elle-même, E sera l'aire de la développée prise positivement ou négativement selon que le point M parcourt le périmètre de la développée dans le sens direct ou indirect. Dans tous les cas, E a une valeur déterminée que nous appellerons, pour abrégé, *l'aire de la développée*.

---

(1) Les équivalences (5) du n° 2 se transforment alors en équations.

D'après (5) et (6) du n° 2, on a

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2} \alpha + \sum_1^{\infty} \left[ \frac{a'_{k-1}(k-1) - a'_{k+1}(k+1)}{2k} \cos ku \right. \\ \quad \left. + \frac{a_{k+1}(k+1) - a_{k-1}(k-1)}{2k} \sin ku \right], \\ \eta = \frac{1}{2} \beta + \sum_1^{\infty} \left[ \frac{a_{k+1}(k+1) + a_{k-1}(k-1)}{2k} \cos ku \right. \\ \quad \left. + \frac{a'_{k+1}(k+1) + a'_{k-1}(k-1)}{2k} \sin ku \right]. \end{array} \right.$$

Les développements de  $\xi$  et  $\eta$  résultant de l'intégration des équivalences relatives à  $\frac{d\xi}{du}$  et  $\frac{d\eta}{du}$  respectivement, il est évident que ces équivalences sont les suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{du} \sim \sum_1^{\infty} \left[ \frac{a_{k+1}(k+1) - a_{k-1}(k-1)}{2} \cos ku \right. \\ \quad \left. + \frac{a'_{k+1}(k+1) - a'_{k-1}(k-1)}{2} \sin ku \right], \\ \frac{d\eta}{du} \sim \sum_1^{\infty} \left[ \frac{a'_{k+1}(k+1) + a'_{k-1}(k-1)}{2} \cos ku \right. \\ \quad \left. - \frac{a_{k+1}(k+1) + a_{k-1}(k-1)}{2} \sin ku \right]. \end{array} \right.$$

En combinant le développement de  $\xi$  et l'équivalence relatifs à  $\frac{d\eta}{du}$ , nous trouvons

$$E = \pi \sum_1^{\infty} \left[ \frac{a'_{k-1}(k-1)^2 - a'_{k+1}(k+1)^2}{4k} + \frac{a_{k-1}^2(k-1)^2 - a_{k+1}^2(k+1)^2}{4k} \right],$$

où, après quelques réductions faciles,

$$(5) \quad E = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1} (a_k^2 + a'_k{}^2).$$

On voit que l'aire  $E$  de la développée est essentiellement négative et ne s'évanouit que dans le cas où la courbe  $C$  est un cercle. Donc, si la

développée ne se coupe pas elle-même, le centre de courbure parcourt la développée dans le sens indirect lorsque le point correspondant de la courbe primitive parcourt celle-ci dans le sens direct.

Considérons maintenant l'intégrale du carré du rayon de courbure

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} \rho^2 du = \pi \left[ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_2^{\infty} (a_k^2 + a'_k{}^2) \right] = \frac{L^2}{2\pi} + \pi \sum_2^{\infty} (a_k^2 + a'_k{}^2).$$

En tenant compte de l'équation (8) du n° 2, on obtient aisément

$$(7) \quad F - E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 du.$$

C'est un résultat qu'on peut démontrer directement par une transformation de l'intégrale (2) et qui a évidemment une signification géométrique simple.

Mais combinons les expressions de F et E d'une autre manière en écrivant

$$\frac{L^2}{4\pi} - F - \mu |E| = -\frac{\pi}{2} \sum_2^{\infty} \frac{\mu k^2 - 1}{k^2 - 1} (a_k^2 + a'_k{}^2),$$

où  $\mu$  désigne un facteur réel positif. La somme, dans le second membre, sera essentiellement positive si nous prenons  $\mu \geq \frac{1}{4}$ . Nous pouvons donc ajouter à l'inégalité du théorème des isopérimètres

$$F \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

la suivante qui la complète

$$(8) \quad F + \frac{1}{4} |E| \geq \frac{L^2}{4\pi},$$

où  $|E|$  désigne l'aire de la développée prise en valeur absolue.

Cherchons les courbes pour lesquelles on a le signe d'égalité dans (8). Elles sont évidemment caractérisées par l'évanouissement des constantes  $a_k$  et  $a'_k$  pour  $k > 2$ .

On aura donc pour ces courbes, d'après les équations (6) du n° 2,

$$x = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} [(a'_2 \cos u - (a_2 + a_0) \sin u)] - \frac{1}{6}(a'_2 \cos 3u - a_2 \sin 3u),$$

$$y = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}[(a_2 - a_0) \cos u + a'_2 \sin u] - \frac{1}{6}(a_2 \cos 3u + a'_2 \sin 3u).$$

Par une translation des axes des coordonnées, nous pouvons faire disparaître les constantes  $\alpha$  et  $\beta$ . Puis, en faisant tourner le nouveau système des axes autour de l'origine, nous pouvons annuler la constante  $a_2$ , comme cela résulte des équations (10) du n° 2. Enfin, si nous augmentons ou diminuons la constante  $a_0$  d'une constante arbitrairement choisie, cela revient évidemment à remplacer la courbe par une de ses parallèles.

Donc les courbes cherchées sont les parallèles des courbes représentées par

$$x = -\frac{1}{2}a'_2 \left( \cos u + \frac{1}{3} \cos 3u \right), \quad y = \frac{1}{2}a'_2 \left( \sin u - \frac{1}{3} \sin 3u \right),$$

ou encore par

$$(9) \quad x = c \cos^3 u, \quad y = -c \sin^3 u,$$

$c = -\frac{2}{3}a'_2$  étant une constante arbitraire. Ces équations (9) donnent, pour  $c = 0$ , l'origine, pour  $c \geq 0$  une astéroïde. Donc :

Le signe d'égalité dans (8) a lieu seulement pour le cercle et pour les parallèles de l'astéroïde.

Remarquons encore que la parallèle

$$x = c \cos^3 u + \frac{1}{2}a_0 \sin u, \quad y = -c \sin^3 u - \frac{1}{2}a_0 \cos u$$

de l'astéroïde (9) est une courbe convexe fermée dès que la constante  $a_0$  est plus grande que  $9|c|$ .

Tirons enfin une conséquence intéressante du développement (6).

La moyenne arithmétique du carré de  $\rho$  étant

$$M(\rho^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 du,$$

on voit que l'on a

$$M(\rho^2) \geq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que pour le cercle. Donc, si nous excluons le cercle, il y aura toujours, parmi les rayons de courbure d'une courbe convexe fermée, un au moins de ces rayons  $\rho_0$  qui surpasse  $\frac{L}{2\pi}$ . Car si l'on avait toujours

$$\rho \leq \frac{L}{2\pi},$$

on aurait

$$M(\rho^2) \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2,$$

et non pas

$$M(\rho^2) > \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2.$$

Maintenant

$$\rho_0 > \frac{L}{2\pi}$$

donne

$$2\pi\rho_0 > L,$$

d'où cette conclusion :

*Parmi les cercles de courbure d'une courbe convexe fermée, qui n'est pas elle-même un cercle, il y a toujours un au moins de ces cercles dont la circonférence est plus grande que le périmètre L de la courbe.*

4. En passant à d'autres recherches qui nous amèneront à quelques théorèmes intéressants se rapportant à certaines intégrales, nous conserverons les notations et les hypothèses du n° 2.

Soit toujours P le point de la courbe convexe C appartenant à l'angle  $u$ . La tangente au point P aura l'équation

$$(1) \quad X \sin u - Y \cos u = p(u),$$

où nous avons posé

$$(2) \quad p(u) = x \sin u - y \cos u.$$

La fonction  $p(u)$  représente la longueur de la perpendiculaire



abaissée de l'origine sur la tangente. D'après nos hypothèses,  $p(u)$  admet des dérivées du premier et du second ordre. En tenant compte des équations (1) du n° 2, on obtient

$$(3) \quad \begin{cases} p'(u) = x \cos u + y \sin u, \\ p''(u) = -x \sin u + y \cos u + \rho(u) = -p(u) + \rho(u), \end{cases}$$

où nous avons désigné, pour plus de clarté, par  $\rho(u)$  le rayon de courbure  $\rho$  correspondant au point P. Substituons pour  $x$  et  $y$  les développements (6) du n° 2; nous trouvons, après un calcul facile,

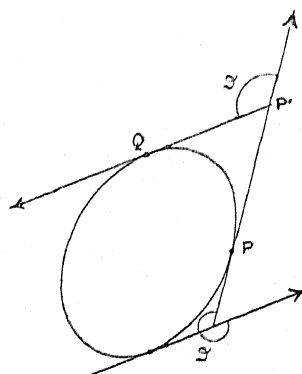
$$(4) \quad \begin{cases} p(u) = \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} \beta \cos u + \frac{1}{2} \alpha \sin u - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} (a_k \cos ku + a'_k \sin ku), \\ p'(u) = \frac{1}{2} \alpha \cos u + \frac{1}{2} \beta \sin u - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1} (a'_k \cos ku - a_k \sin ku). \end{cases}$$

Cela posé, considérons, outre la tangente en P, celle au point Q, qui correspond à l'angle  $u + \vartheta$  et qui est représentée par l'équation

$$(5) \quad X \sin(u + \vartheta) - Y \cos(u + \vartheta) = p(u + \vartheta),$$

$\vartheta$  désignant un angle constant compris entre 0 et  $2\pi$ . Les deux tangentes se coupent au point P' sous l'angle  $\vartheta$  (fig. 2). Donc, si nous

Fig. 2.



faisons varier  $u$  de zéro jusqu'à  $2\pi$ , le point P' décrira la courbe  $C_\vartheta$ , lieu des points d'où l'on voit la courbe C sous l'angle  $\pi - \vartheta$ , si  $\vartheta < \pi$ , et sous l'angle  $\vartheta - \pi$ , si  $\vartheta > \pi$ . La série des courbes  $C_\vartheta$  correspondant

aux angles  $\mathfrak{S} = 0 \dots \pi$  couvre toute la partie du plan extérieure à la courbe C. La courbe  $C_0$  se confond avec la courbe C et la courbe  $C_\pi$  est rejetée à l'infini. Enfin la courbe  $C_{2\pi-\mathfrak{S}}$  est identique à la courbe  $C_\mathfrak{S}$ .

Calculons maintenant l'aire  $F_\mathfrak{S}$  de la courbe  $C_\mathfrak{S}$ , l'angle  $\mathfrak{S}$  étant compris entre 0 et  $\pi$ . Le point P' parcourt la courbe  $C_\mathfrak{S}$  dans le sens direct lorsque  $u$  varie de 0 à  $2\pi$ . Donc on a

$$(6) \quad F_\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( X \frac{dY}{du} - Y \frac{dX}{du} \right) du,$$

X et Y étant déterminés par les équations (1) et (5). En résolvant ces équations, on trouve

$$(7) \quad \begin{cases} X \sin \mathfrak{S} = p(u + \mathfrak{S}) \cos u - p(u) \cos(u + \mathfrak{S}), \\ Y \sin \mathfrak{S} = p(u + \mathfrak{S}) \sin u - p(u) \sin(u + \mathfrak{S}), \end{cases}$$

et, en différentiant,

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{dX}{du} \sin \mathfrak{S} = -Y \sin \mathfrak{S} + p'(u + \mathfrak{S}) \cos u - p'(u) \cos(u + \mathfrak{S}), \\ \frac{dY}{du} \sin \mathfrak{S} = X \sin \mathfrak{S} + p'(u + \mathfrak{S}) \sin u - p'(u) \sin(u + \mathfrak{S}). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left( X \frac{dY}{du} - Y \frac{dX}{du} \right) \sin^2 \mathfrak{S} \\ &= (X \sin \mathfrak{S})^2 + (Y \sin \mathfrak{S})^2 + p'(u + \mathfrak{S}) (\sin u X \sin \mathfrak{S} - \cos u Y \sin \mathfrak{S}) \\ & \quad - p'(u) [\sin(u + \mathfrak{S}) X \sin \mathfrak{S} - \cos(u + \mathfrak{S}) Y \sin \mathfrak{S}] \\ &= p^2(u + \mathfrak{S}) + p^2(u) - 2p(u)p(u + \mathfrak{S}) \cos \mathfrak{S} \\ & \quad + [p'(u + \mathfrak{S})p(u) - p'(u)p(u + \mathfrak{S})] \sin \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

L'aire  $F_\mathfrak{S}$  a donc l'expression suivante :

$$F_\mathfrak{S} = \frac{1}{\sin^2 \mathfrak{S}} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ [p^2(u) + p^2(u + \mathfrak{S}) - 2p(u)p(u + \mathfrak{S}) \cos \mathfrak{S}] \\ + [p'(u + \mathfrak{S})p(u) - p'(u)p(u + \mathfrak{S})] \sin \mathfrak{S} \} du.$$

Mais la fonction  $p(u)$  ayant la période  $2\pi$ , on a

$$\int_0^{2\pi} p^2(u + \mathfrak{S}) du = \int_0^{2\pi} p^2(u) du;$$

de plus, une intégration par parties nous donne

$$\int_0^{2\pi} p(u + \vartheta) p'(u) du = - \int_0^{2\pi} p(u) p'(u + \vartheta) du.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire finalement

$$(8) \quad \sin^2 \vartheta F_{\vartheta} = \int_0^{2\pi} p(u) [p(u) - p(u + \vartheta) \cos \vartheta + p'(u + \vartheta) \sin \vartheta] du.$$

Remarquons en passant que l'expression

$$p(u) - p(u + \vartheta) \cos \vartheta + p'(u + \vartheta) \sin \vartheta$$

a une signification géométrique simple : c'est la distance du point Q à la tangente au point P, comme on le démontre par un calcul facile.

Évaluons maintenant l'intégrale (8) à l'aide de notre théorème fondamental et supposons, pour abrégier le calcul, que l'origine des coordonnées soit choisie de manière que les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  [voir (7), n° 2] s'évanouissent. Les équations (4) nous donnent

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{1}{2} \alpha_0 - \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} (a_k \cos ku + a'_k \sin ku), \\ p(u + \vartheta) &= \frac{1}{2} \alpha_0 - \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} [ (a_k \cos k\vartheta + a'_k \sin k\vartheta) \cos ku \\ &\quad - (a_k \sin k\vartheta - a'_k \cos k\vartheta) \sin ku ], \\ p'(u + \vartheta) &= + \sum_2^{\infty} \frac{k}{k^2 - 1} [ (a_k \sin k\vartheta - a'_k \cos k\vartheta) \cos ku \\ &\quad + (a_k \cos k\vartheta + a'_k \sin k\vartheta) \sin ku ]. \end{aligned}$$

Donc

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &p(u) - p(u + \vartheta) \cos \vartheta + p'(u + \vartheta) \sin \vartheta \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0 (1 - \cos \vartheta) + \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} (\alpha_k \cos ku + \alpha'_k \sin ku), \end{aligned} \right.$$

les constantes  $\alpha_k$  et  $\alpha'_k$  ayant les valeurs

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_k &= a_k (\cos \vartheta \cos k\vartheta + k \sin \vartheta \sin k\vartheta - 1) \\ &\quad + a'_k (\cos \vartheta \sin k\vartheta - k \sin \vartheta \cos k\vartheta), \\ \alpha'_k &= -a_k (\cos \vartheta \sin k\vartheta - k \sin \vartheta \cos k\vartheta) \\ &\quad + a'_k (\cos \vartheta \cos k\vartheta + k \sin \vartheta \sin k\vartheta - 1). \end{aligned} \right.$$

En combinant les développements (4) et (9), on obtient

$$\begin{aligned} \sin^2 \vartheta F_{\vartheta} &= \pi \left[ \frac{1}{2} a_0^2 (1 - \cos \vartheta) - \sum_2^{\infty} \frac{1}{(k^2 - 1)^2} (a_k \alpha_k + a'_k \alpha'_k) \right] \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} a_0^2 (1 - \cos \vartheta) + \sum_2^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{(k^2 - 1)^2} (1 - \cos \vartheta \cos k\vartheta - k \sin \vartheta \sin k\vartheta) \right], \end{aligned}$$

ou enfin

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin^2 \vartheta F_{\vartheta} &= \frac{L^2}{2\pi} (1 - \cos \vartheta) \\ &+ \frac{\pi}{2} \sum_2^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{(k^2 - 1)^2} [2 - (k + 1) \cos(k - 1)\vartheta \\ &\quad + (k - 1) \cos(k + 1)\vartheta]. \end{aligned} \right.$$

Cette formule, démontrée dans l'hypothèse  $0 < \vartheta < \pi$ , subsiste évidemment encore pour  $\vartheta = 0$  et, puisque la courbe  $C_{2\pi - \vartheta}$  est identique à la courbe  $C_{\vartheta}$ , aussi pour les valeurs de  $\vartheta$  satisfaisant aux conditions  $\pi < \vartheta \leq 2\pi$ .

De l'inégalité

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &2 + |(k + 1) \cos(k - 1)\vartheta| + |(k - 1) \cos(k + 1)\vartheta| \\ &\leq 2 + (k + 1) + (k - 1) = 2(1 + k), \end{aligned} \right.$$

nous pouvons conclure que la somme qui figure dans le second membre de l'équation (11) est uniformément convergente pour toutes les valeurs de  $\vartheta$ ; car la série

$$\sum_2^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{(k^2 - 1)^2} 2(1 + k)$$

est convergente. Donc cette somme (11) représente une fonction continue de  $\vartheta$ . En faisant tendre  $\vartheta$  vers  $\pi$ , on reconnaît que l'aire  $F_{\vartheta}$  devient infinie pour  $\vartheta = \pi$ , de manière que le produit  $\sin^2 \vartheta F_{\vartheta}$  tende vers

$$(13) \quad A = \frac{L^2}{\pi} + 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{a_{2k}^2 + a'_{2k}{}^2}{(4k^2 - 1)^2}.$$

De l'inégalité (12) nous pouvons conclure en outre qu'il est permis

d'ordonner le second membre de l'équation (11) suivant les cosinus des multiples de  $\mathfrak{S}$ . L'équation (11) nous donne ainsi le développement de  $\sin^2 \mathfrak{S} F_{\mathfrak{S}}$  en série de Fourier.

En dérivant l'équation (11), on trouve

$$(14) \quad \frac{1}{\sin \mathfrak{S}} \frac{d}{d\mathfrak{S}} (\sin^2 \mathfrak{S} F_{\mathfrak{S}}) = \frac{L^2}{2\pi} - \pi \sum_2^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{k^2 - 1} \cos k\mathfrak{S}.$$

La série  $\sum \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{k^2 - 1} \cos k\mathfrak{S}$  étant uniformément convergente et, par conséquent, intégrable terme à terme, la dérivation que nous venons de faire est légitime.

Nous pouvons de même dériver l'équation (14) encore deux fois de suite, ce qui nous donne les développements

$$(15) \quad \frac{d}{d\mathfrak{S}} \left[ \frac{1}{\sin \mathfrak{S}} \frac{d}{d\mathfrak{S}} (\sin^2 \mathfrak{S} F_{\mathfrak{S}}) \right] = \pi \sum_2^{\infty} \frac{k(a_k^2 + a'_k{}^2)}{k^2 - 1} \sin k\mathfrak{S},$$

$$(16) \quad \frac{d^2}{d\mathfrak{S}^2} \left[ \frac{1}{\sin \mathfrak{S}} \frac{d}{d\mathfrak{S}} (\sin^2 \mathfrak{S} F_{\mathfrak{S}}) \right] = \pi \sum_2^{\infty} \frac{k^2(a_k^2 + a'_k{}^2)}{k^2 - 1} \cos k\mathfrak{S}.$$

En tenant compte de l'équation (8), on reconnaît aisément que les séries précédentes représentent les valeurs de certaines intégrales.

On a, par exemple,

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{2\pi} p(u) \rho(u + \mathfrak{S}) du &= \int_0^{2\pi} \rho(u) p(u + \mathfrak{S}) du \\ &= \frac{L^2}{2\pi} - \pi \sum_2^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{k^2 - 1} \cos k\mathfrak{S}, \end{aligned} \right.$$

comme on le voit, en appliquant notre théorème fondamental aux fonctions

$$p(u) = \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} \beta \cos u + \frac{1}{2} \alpha \sin u - \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} (a_k \cos ku + a'_k \sin ku),$$

$$\begin{aligned} \rho(u + \mathfrak{S}) &\sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_2^{\infty} (a_k \cos k\mathfrak{S} + a'_k \sin k\mathfrak{S}) \cos ku \\ &\quad + (a'_k \cos k\mathfrak{S} - a_k \sin k\mathfrak{S}) \sin ku, \end{aligned}$$

ou encore aux fonctions

$$\begin{aligned} \rho(u + \vartheta) &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} (\alpha \sin \vartheta - \beta \cos \vartheta) \cos u + \frac{1}{2} (\beta \sin \vartheta + \alpha \cos \vartheta) \sin u \\ &\quad - \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} [(a_k \cos k\vartheta + a'_k \sin k\vartheta) \cos ku \\ &\quad \quad \quad + (a'_k \cos k\vartheta - a_k \sin k\vartheta) \sin ku], \\ \rho(u) &\sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_2^{\infty} (a_k \cos ku + a'_k \sin ku). \end{aligned}$$

On obtient de la même manière

$$(18) \quad \int_0^{2\pi} \rho(u) \rho(u + \vartheta) du = \frac{L^2}{2\pi} + \pi \sum_2^{\infty} (a_k^2 + a'_k{}^2) \cos k\vartheta.$$

$$(19) \quad \int_0^{2\pi} \rho(u) p(u + \vartheta) du = \frac{L^2}{2\pi} + \pi \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \cos \vartheta + \pi \sum_2^{\infty} \frac{a_k^2 + a'_k{}^2}{(k^2 - 1)^2} \cos k\vartheta.$$

Mais considérons en particulier l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} [\rho(u) + p(u + \pi)]^2 du,$$

qui nous amènera à des résultats susceptibles d'une interprétation géométrique simple.

Convenons d'appeler *points opposés* les points P et P<sub>1</sub> de la courbe correspondant respectivement aux angles u et u + π.

L'expression

$$(20) \quad P(u) = \rho(u) + p(u + \pi) = \frac{L}{\pi} - \sum_1^{\infty} \frac{2}{4k^2 - 1} (a_{2k} \cos 2ku + a'_{2k} \sin 2ku)$$

représente la distance entre les deux tangentes parallèles touchant la courbe C en deux points opposés. Si l'on veut, P(u) est la projection orthogonale de la courbe dans la direction donnée par l'angle u (1).

(1) M. Minkowski, dans ses recherches sur les corps convexes, a le premier considéré les projections orthogonales des corps et des courbes. Il en a donné plusieurs théorèmes intéressants. Entre autres aussi l'équation  $\int_0^{2\pi} P(u) du = 2L$ , qui est renfermée dans le développement (20). Pour les recherches de M. Minkowski, voir les deux Notes : *Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Vol. IX, p. 115); et *Sur les surfaces convexes fermées* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*; janvier 1901).

Un Mémoire étendu contenant les recherches ultérieures de M. Minkowski sur les corps convexes paraîtra prochainement dans les *Mathematische Annalen*.

Or l'équation

$$(21) \quad M[P^2(u)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [P(u)]^2 du = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{a_{2k}^2 + a'_{2k}{}^2}{(4k^2 - 1)^2},$$

dans laquelle le second membre est égal à  $\frac{1}{\pi} A$  [voir (13)], nous montre que la moyenne arithmétique des carrés de toutes les projections d'une courbe convexe satisfait à l'inégalité

$$(22) \quad M[P^2(u)] \geq \left(\frac{L}{\pi}\right)^2.$$

Nous en pouvons conclure en particulier qu'il existe toujours des projections qui ne sont pas inférieures à  $\frac{L}{\pi}$ , c'est-à-dire au diamètre d'un cercle ayant même périmètre que la courbe C. Le signe d'égalité dans (22) n'a lieu que dans le cas où

$$a_{2k} = a'_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Mais alors on a, d'après (20),

$$P(u) = p(u) + p(u + \pi) = \frac{L}{\pi},$$

d'où ce résultat :

*Toutes les projections  $P(u)$  de la courbe ont la même valeur constante  $\frac{L}{\pi}$ .*

Ces courbes convexes, qui ont la même projection dans toutes les directions possibles, me semblent mériter une étude particulière (<sup>1</sup>). Considérons, pour plus de simplicité, celles de ces courbes pour lesquelles le rayon de courbure  $\rho(u)$  est développable en série de Fourier. Le développement de  $\rho(u)$  aura la forme [voir (2), (4) du n° 2]

$$(23) \quad \rho(u) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{2k+1} \cos(2k+1)u + a'_{2k+1} \sin(2k+1)u];$$

les coordonnées du point P de la courbe, dont la tangente fait l'angle  $u$

(<sup>1</sup>) Reulaux, dans son Œuvre *Theoretische Kinematik* (Braunschweig, 1875), a fait quelques remarques au sujet de ces courbes et en a donné quelques exemples. Les courbes particulières formées par Reulaux se composent d'arcs de cercle.

avec l'axe des abscisses positives seront [d'après (6), n° 2]

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \alpha + \frac{\alpha_0}{2} \sin u + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{a'_{2k+1} + a'_{2k-1}}{4k} \cos 2ku \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{a_{2k+1} + a_{2k-1}}{4k} \sin 2ku \right), \\ y = \frac{1}{2} \beta - \frac{\alpha_0}{2} \cos u + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_{2k+1} - a_{2k-1}}{4k} \cos 2ku \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{a'_{2k+1} - a'_{2k-1}}{4k} \sin 2ku \right); \end{array} \right.$$

enfin on aura, d'après les équations (3) du n° 3,

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2} \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a'_{2k-1}(2k-1) - a'_{2k+1}(2k+1)}{4k} \cos 2ku \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{a_{2k+1}(2k+1) - a_{2k-1}(2k-1)}{4k} \sin 2ku \right), \\ \eta = \frac{1}{2} \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_{2k+1}(2k+1) + a_{2k-1}(2k-1)}{4k} \cos 2ku \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{a'_{2k+1}(2k+1) + a'_{2k-1}(2k-1)}{4k} \sin 2ku \right), \end{array} \right.$$

$\xi$  et  $\eta$  désignant les coordonnées du centre de courbure correspondant au point P.

Les valeurs de  $\xi$  et  $\eta$  ne changeant pas si l'on remplace  $u$  par  $u + \pi$ , il est évident que les centres de courbure correspondant à deux points opposés P et P<sub>1</sub> se confondent. Donc la droite PP<sub>1</sub> est normale à la courbe C en chacun des points P et P<sub>1</sub>. En d'autres termes : *Toute normale de la courbe est une binormale. Ou encore : La développée de la courbe est une courbe double, dans ce sens que le centre de courbure parcourt la développée deux fois de suite lorsque le point correspondant de la courbe primitive parcourt celle-ci une fois.*

Ce sont là, comme on le voit aisément, des propriétés caractéristiques de ce genre de courbes. Une autre propriété caractéristique résulte des remarques suivantes :

Si nous changeons la valeur de la constante  $\alpha_0$ , les formules (23) et (24) ne s'appliquent plus à la courbe C, mais à une de ses paral-



lèles. Considérons en particulier celle de ces parallèles  $C'$  que l'on obtient en remplaçant  $\alpha_0$  par zéro.

Alors les développements (24) ne contiendront plus que l'angle  $2u$ ; de sorte que la parallèle  $C'$  est une courbe double, le point appartenant à l'angle  $u + \pi$  se confondant avec le point appartenant à l'angle  $u$ .  $C'$  n'est plus une courbe convexe, comme cela résulte déjà de ce qu'il n'y a qu'une seule tangente de la courbe parallèle à une droite donnée. De plus, si l'on suppose que le rayon de courbure  $\rho(u)$  varie d'une manière continue, on voit que  $\rho(u)$  doit nécessairement changer de signe dans l'intervalle  $0 \dots \pi$ , les valeurs  $\rho(0) = \sum_1^{\infty} a_{2k+1}$  et

$\rho(\pi) = -\sum_1^{\infty} a_{2k+1}$  étant de signes opposés. En faisant, en outre, l'hypothèse que l'équation

$$\rho(u) \equiv \sum_1^{\infty} [a_{2k+1} \cos(2k+1)u + a'_{2k+1} \sin(2k+1)u] = 0$$

n'admette qu'un nombre limité de racines dans l'intervalle  $u = 0 \dots \pi$ , ce nombre de racines sera impair et au moins égal à 3. Car, s'il n'existait qu'une seule racine  $u = \alpha$ , la fonction  $\rho(u)$  ne changerait de signe dans l'intervalle  $u = 0 \dots 2\pi$  que pour  $u = \alpha$  et  $u = \alpha + \pi$ . Donc  $\rho(u) \sin(u - \alpha)$  serait d'un signe constant dans tout l'intervalle  $0 \dots 2\pi$ . Mais c'est ce qui est impossible, l'intégrale  $\int_0^{2\pi} \rho(u) \sin(u - \alpha) du$  ayant évidemment la valeur 0<sup>(1)</sup>.

Donc, dans les hypothèses où nous nous sommes placé, la courbe  $C'$  possède un nombre impair, au moins égal à 3, de points de rebroussements.

(1) En généralisant ce raisonnement, on obtient le théorème suivant :

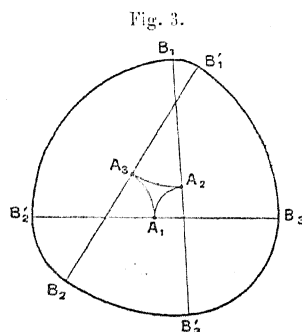
Dans l'hypothèse que

$$f(u) = [a_n \cos nu + a'_n \sin nu] + [a_{n+1} \cos(n+1)u + a'_{n+1} \sin(n+1)u] + \dots$$

représente une fonction continue dans l'intervalle  $0 \leq u \leq 2\pi$ , l'équation  $f(u) = 0$  admet dans cet intervalle au moins  $2n$  racines.

C'est une généralisation d'un théorème dû à Sturm.

Ces remarques nous ont conduit à la construction suivante, qui nous fournit des courbes simples du genre considéré. Prenons trois arcs de cercles dont chacun touche extérieurement les deux autres à ses extrémités (fig. 3). Ces trois arcs forment une courbe  $A_1A_2A_3 = C'$



dont les parallèles, telles que  $B_1B_2B_3B_1' = C$ , sont évidemment des courbes convexes ayant une même projection orthogonale sur toutes les droites de leur plan.

De même, les courbes convexes qui sont les parallèles de l'hypocyclide à trois rebroussements sont des courbes de l'espèce considérée.

§. Considérons maintenant une fonction  $f(\vartheta)$  bornée et intégrable dans l'intervalle  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ , satisfaisant à la condition

$$f(2\pi - \vartheta) = f(\vartheta)$$

et développable en série de Fourier.

Le développement de  $f(\vartheta)$  aura la forme

$$(1) \quad f(\vartheta) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_1^{\infty} c_k \cos k\vartheta.$$

En combinant ce développement avec l'équation (14) du n° 4, nous obtenons

$$(2) \quad \int_0^{\pi} \frac{f(\vartheta)}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin^2 \vartheta F \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta)}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin^2 \vartheta F \vartheta) d\vartheta \\ = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{L^2 c_0}{2\pi} - \pi \sum_2^{\infty} \frac{c_k (a_k^2 + a_k'^2)}{k^2 - 1} \right].$$

L'intégrale se décompose dans les deux suivantes :

$$\int_0^\pi f(\vartheta) \sin \vartheta dF_\vartheta + \int_0^\pi {}_2 f(\vartheta) \cos \vartheta F_\vartheta d\vartheta = J_1 + J_2,$$

dont nous allons transformer la seconde  $J_2$  par une intégration par parties.

Posons, à cet effet,

$$(3) \quad \psi(\vartheta) = {}_2 \int_\pi f(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta;$$

nous aurons

$$J_2 = \int_0^\pi F_\vartheta d\psi(\vartheta) = [F_\vartheta \psi(\vartheta)]_0^\pi - \int_0^\pi \psi(\vartheta) dF_\vartheta,$$

de sorte que l'équation (2) peut s'écrire ainsi :

$$(4) \quad \int_0^\pi \chi(\vartheta) dF_\vartheta = [F_\vartheta \psi(\vartheta)]_0^\pi + \frac{\pi}{2} \left[ \frac{L^2 c_0}{2\pi} - \pi \sum_2 \frac{c_k (a_k^2 + a_k'^2)}{k^2 - 1} \right]$$

où nous avons posé

$$(5) \quad \chi(\vartheta) = f(\vartheta) \sin \vartheta - \psi(\vartheta).$$

L'intégrale, dans l'équation (4), peut être mise sous une autre forme. En effet, désignons par  $d\sigma$  un élément de surface situé à l'extérieur de la courbe C. Soit de plus  $\alpha$  l'angle sous lequel on voit la courbe C de l'élément  $d\sigma$ , c'est-à-dire l'angle des deux tangentes allant de l'élément  $d\sigma$  à la courbe C. Cet angle ayant la valeur constante  $\pi - \vartheta$  le long de la courbe  $C_\vartheta$ , on a évidemment

$$(6) \quad \int_0^\pi \chi(\vartheta) dF_\vartheta = \int \int \chi(\pi - \alpha) d\sigma,$$

L'intégrale double se rapportant à la partie du plan extérieur à la courbe C.

Pour que  $F_\vartheta \psi(\vartheta)$  reste finie pour  $\vartheta = \pi$ , la fonction  $\psi(\vartheta)$  doit s'évanouir, pour  $\vartheta = \pi$ , au moins comme  $(\vartheta - \pi)^2$ . Cette condition sera certainement remplie d'après (3) si  $f(\vartheta)$ , étant développable aux environs de  $\vartheta = \pi$  suivant les puissances de  $\vartheta - \pi$ , s'évanouit pour  $\vartheta = \pi$ .

Introduisons enfin le développement (1) pour  $f(\vartheta)$  dans les expressions (3) et (5) pour  $\psi(\vartheta)$  et  $\chi(\vartheta)$ . Nous trouvons, après un calcul facile :

$$(7) \quad \begin{cases} \psi(\vartheta) = c_1(\vartheta - \pi) + \sum_1^{\infty} \frac{c_{k-1} + c_{k+1}}{k} \sin k\vartheta, \\ \chi(\vartheta) = c_1(\pi - \vartheta) + \sum_1^{\infty} \frac{(k-2)c_{k-1} - (k+2)c_{k+1}}{2k} \sin k\vartheta. \end{cases}$$

Faisons maintenant quelques applications des formules précédentes. Prenons en premier lieu  $c_0 = 2, c_1 = 1, c_k = 0$  pour  $k > 1$ , c'est-à-dire

$$f(\vartheta) = 1 + \cos \vartheta.$$

Nous aurons, d'après (7),

$$\begin{aligned} \psi(\vartheta) &= (\vartheta - \pi) + 2 \sin \vartheta + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta, \\ \chi(\vartheta) &= \pi - \vartheta - \sin \vartheta. \end{aligned}$$

La fonction  $\psi(\vartheta)$  s'annule pour  $\vartheta = \pi$  comme  $(\vartheta - \pi)^3$ , le développement de  $f(\vartheta)$  aux environs de  $\vartheta = \pi$  commençant par le terme

$$\frac{(\vartheta - \pi)^2}{2}.$$

Donc

$$[F_{\vartheta} \psi(\vartheta)]_{\pi} = -\pi F,$$

et les équations (4) et (6) nous donnent

$$(8) \quad \int \int (\alpha - \sin \alpha) d\sigma = \frac{L^2}{2} - \pi F.$$

Cette formule remarquable a été donnée, pour la première fois, par le géomètre anglais Crofton, qui l'a trouvée par des considérations appartenant au calcul des probabilités. M. J.-A. Serret en a donné une autre démonstration dans un Mémoire publié dans le Tome IV de ces *Annales* (année 1869).

Prenons en second lieu  $c_0 = 2, c_1 = 0, c_2 = -1, c_k = 0$  pour  $k > 2$ , c'est-à-dire

$$f(\vartheta) = 1 - \cos 2\vartheta.$$

Nous obtenons

$$\psi(\vartheta) = \sin \vartheta - \frac{1}{3} \sin 3\vartheta = \frac{4}{3} \sin^3 \vartheta,$$

$$\chi(\vartheta) = \frac{1}{2} \sin \vartheta - \frac{1}{6} \sin 3\vartheta = \frac{2}{3} \sin^3 \vartheta,$$

et l'équation (4) donnera

$$(9) \quad \iint \sin^3 \alpha \, d\sigma = \frac{3}{4} L^2 + \frac{\pi^2}{4} (a_2^2 + a_2'^2).$$

En faisant plus généralement

$$f(\vartheta) = 1 + (-1)^{k+1} \cos k\vartheta \quad (k > 1),$$

on trouve

$$(10) \quad \iint \left[ 2 \sin \alpha - \frac{k+1}{k-1} \sin(k-1)\alpha + \frac{k-1}{k+1} \sin(k+1)\alpha \right] d\sigma \\ = L^2 + (-1)^k \pi^2 \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k^2 - 1}.$$

Cette équation met en évidence ce fait que la somme des carrés des intégrales

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho \cos ku \, du, \quad a_k' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho \sin ku \, du$$

est un invariant par rapport aux mouvements du plan.

6. D'après les recherches de M. C. Jordan (1), la courbe

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

est rectifiable, si les fonctions  $f(t)$  et  $\varphi(t)$  sont continues et à variation limitée. L'arc  $s$  étant une fonction continue et toujours croissante de  $t$ , il est évident que nous pouvons introduire l'arc  $s$  comme variable indépendante au lieu de  $t$  sans changer le caractère des fonctions qui représentent les coordonnées  $(x, y)$  d'un point variable sur la courbe. Si la courbe considérée est fermée et de périmètre  $L$ , les coor-

---

(1) *Cours d'Analyse*, t. I, p. 105.

données  $(x, y)$  seront des fonctions continues et à variation limitée de

$$(1) \quad u = s \frac{2\pi}{L}$$

admettant la période  $2\pi$ . Il s'ensuit que  $x$  et  $y$  sont développables en série de Fourier, ou que toute courbe fermée et rectifiable peut être représentée par des équations de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos ku + a'_k \sin ku), \\ y = \frac{1}{2} b_0 + \sum_1^{\infty} (b_k \cos ku + b'_k \sin ku), \end{cases}$$

le paramètre  $u$ , qui varie de 0 à  $2\pi$ , étant proportionnel à l'arc  $s$  de la courbe. Ceci établi, nous supposons, dans ce qui suit, que les coordonnées  $x$  et  $y$ , considérées comme fonctions de l'arc  $s$  (ou, ce qui revient au même, de  $u$ ) admettent des dérivées dans la direction des arcs croissants et que ces dérivées sont des fonctions intégrables de  $s$  (ou de  $u$ ). Alors on sait que  $x$  et  $y$  se reproduisent par l'intégration des dérivées  $\frac{dx}{du}$  et  $\frac{dy}{du}$  (<sup>1</sup>). Par conséquent, on aura les équivalences

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{du} \sim \sum_1^{\infty} (ka'_k \cos ku - ka_k \sin ku), \\ \frac{dy}{du} \sim \sum_1^{\infty} (kb'_k \cos ku - kb_k \sin ku). \end{cases}$$

En outre, puisque  $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ , on a

$$(4) \quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2.$$

En intégrant entre les limites  $u = 0$  et  $u = 2\pi$ , nous trouvons,

(<sup>1</sup>) DINI, *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*, 1878, § 199.

d'après notre théorème fondamental,

$$(5) \quad \pi \sum_1^{\infty} k^2 (a_k^2 + a'_k{}^2 + b_k^2 + b'_k{}^2) = 2\pi \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2.$$

D'un autre côté, l'aire  $F$  de la courbe s'exprime par l'intégrale

$$F = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{du} du,$$

d'où

$$(6) \quad \pi \sum_1^{\infty} k (a_k b'_k - a'_k b_k) = F.$$

Des équations (5) et (6) nous tirons

$$(7) \quad \frac{L^2}{2\pi} - 2F = \pi \sum_1^{\infty} [(ka_k - b'_k)^2 + (ka'_k + b_k)^2 + (k^2 - 1)(b_k^2 + b'_k{}^2)].$$

*On aura donc toujours*

$$(8) \quad L^2 \geq 4\pi F,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que dans les conditions

$$b_1 = -a'_1, \quad b'_1 = a_1, \quad a_k = a'_k = b_k = b'_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Ces conditions remplies, on a, d'après (2),

$$x = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos u + a'_1 \sin u,$$

$$y = \frac{1}{2} b_0 - a'_1 \cos u + a_1 \sin u,$$

de sorte que la courbe est un cercle. Ainsi, les expressions (5) et (6) du périmètre  $L$  et de l'aire  $F$  d'une courbe mettent en évidence le théorème fondamental des isopérimètres.

Les coefficients des développements (2) sont des constantes caractéristiques pour les courbes rectifiables. Ces constantes ont les propriétés suivantes :

En premier lieu, d'après les équations

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x du = \frac{1}{L} \int x ds, \quad \frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y du = \frac{1}{L} \int y ds,$$

le point dont les coordonnées sont  $\left(\frac{1}{2}a_0, \frac{1}{2}b_0\right)$  est le barycentre du périmètre de la courbe.

Considérons, en second lieu, les constantes

$$(9) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos ku \, du, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos ku \, du,$$

$k$  désignant un entier différent de zéro. Si nous augmentons les coordonnées  $x$  et  $y$  de constantes arbitraires, c'est-à-dire si nous effectuons une translation quelconque du système des axes de coordonnées, les valeurs de  $a_k$  et  $b_k$  ne changent pas.

D'un autre côté, si nous remplaçons le système des axes par un autre ayant même origine, les constantes  $a_k, b_k$ , par rapport au nouveau système, seront

$$(9') \quad \bar{a}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{x} \cos ku \, du, \quad \bar{b}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{y} \cos ku \, du,$$

où

$$\bar{x} = \cos \alpha x + \sin \alpha y, \quad \bar{y} = -\sin \alpha x + \cos \alpha y.$$

On aura donc

$$\bar{a}_k = \cos \alpha a_k + \sin \alpha b_k, \quad \bar{b}_k = -\sin \alpha a_k + \cos \alpha b_k,$$

ce qui montre que le point dont les coordonnées sont  $(a_k, b_k)$  ne change pas si l'on remplace le système des axes de coordonnées par un autre ayant même origine.

On peut donc affirmer que :

*Le vecteur allant de l'origine au point  $(a_k, b_k)$  est indépendant du choix des axes de coordonnées ou, ce qui revient au même, que ce vecteur est un invariant de la courbe par rapport aux mouvements du plan.*

Ce théorème subsiste évidemment si nous mettons à la place du point  $(a_k, b_k)$  le point dont les coordonnées sont

$$(10) \quad a'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin ku \, du, \quad b'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin ku \, du \quad (k > 0).$$



Il s'ensuit, en particulier, que les valeurs des constantes

$$a_k^2 + b_k^2, \quad a_k'^2 + b_k'^2, \quad a_k b_k' - a_k' b_k \quad (k > 0)$$

représentent des invariants de la courbe.

C'est au moyen de ces invariants que s'expriment, d'après (5) et (6), le carré du périmètre  $L$  et l'aire  $F$  de la courbe.

Considérons maintenant la moyenne du carré de la distance de l'origine à un point variable de la courbe, moyenne que nous désignons par

$$(11) \quad R^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) du.$$

Pour abrégier, nous appellerons le cercle de rayon  $R$ , dont le centre est à l'origine, le *cercle moyen de la courbe pour l'origine*.

D'après les développements (2), on aura

$$(12) \quad R^2 = \frac{1}{4} (a_0^2 + b_0^2) + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (a_k^2 + b_k^2 + a_k'^2 + b_k'^2),$$

ou encore

$$(12') \quad R^2 = r^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (a_k^2 + b_k^2 + a_k'^2 + b_k'^2),$$

$r$  désignant la distance de l'origine au barycentre  $\left(\frac{1}{2}a_0, \frac{1}{2}b_0\right)$  du périmètre de la courbe.

La plus petite valeur  $R_0$  de  $R$  correspond au cas où l'origine se confond avec le barycentre du périmètre de la courbe. On a évidemment

$$(13) \quad R_0^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (a_k^2 + b_k^2 + a_k'^2 + b_k'^2), \quad R^2 = r^2 + R_0^2.$$

De l'équation (5) nous tirons

$$(14) \quad \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 - R_0^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (k^2 - 1) (a_k^2 + b_k^2 + a_k'^2 + b_k'^2).$$

Cette somme est essentiellement positive et ne peut s'annuler que dans les conditions

$$a_k = b_k = a_k' = b_k' = 0 \quad (k = 2, 3, 4, \dots).$$

On voit aisément qu'alors la courbe est un cercle. Donc, le cercle excepté, on a toujours

$$L > 2\pi R_0,$$

c'est-à-dire que le cercle moyen d'une courbe, correspondant au barycentre du périmètre de la courbe, a plus petit périmètre que la courbe, excepté dans le cas où la courbe est elle-même un cercle. Dans ce cas, le cercle moyen considéré se confond évidemment avec la courbe elle-même.

7. Supposons maintenant que les coordonnées  $x, y$  d'un point de la courbe admettent des dérivées par rapport à l'arc  $s$  jusqu'à un certain ordre  $n$ , les dérivées jusqu'à l'ordre  $n - 1$  étant continues, tandis que les dérivées de l'ordre  $n$  sont au moins intégrables.

Pour abrégé l'écriture, nous désignerons les dérivations par rapport à

$$u = \frac{2\pi}{L} s$$

par des accents. Les dérivées premières seront

$$(1) \quad x' = \frac{L}{2\pi} \frac{dx}{ds} = \frac{L}{2\pi} \cos \alpha, \quad y' = \frac{L}{2\pi} \frac{dy}{ds} = \frac{L}{2\pi} \sin \alpha,$$

$\alpha$  désignant l'angle que fait la tangente avec l'axe des abscisses.

Ces équations peuvent être réunies dans l'équation unique

$$(2) \quad x' + iy' = \frac{L}{2\pi} e^{i\alpha}.$$

En différentiant par rapport à  $u$ , on obtient

$$(3) \quad x'' + iy'' = i \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 e^{i\alpha} k,$$

où

$$(4) \quad k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

désigne la courbure. Une nouvelle dérivation donne

$$(5) \quad x''' + iy''' = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 e^{i\alpha} \left( -k^2 + i \frac{dk}{ds} \right)$$

et, en continuant ainsi, on trouve

$$(6) \quad x^{(m)} + iy^{(m)} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^m e^{i\alpha} (\gamma_m + i\delta_m) \quad (m = 1, 2, 3, \dots, n),$$

où  $\gamma_m$  et  $\delta_m$  s'expriment, d'une manière rationnelle et entière, en fonction de  $k, \frac{dk}{ds}, \frac{d^2k}{ds^2}, \dots, \frac{d^{m-2}k}{ds^{m-2}}$ .

Ceci établi, considérons les intégrales

$$(7) \quad J_{\lambda, \mu} = \int_0^{2\pi} (x^{(\lambda)} + iy^{(\lambda)})(x^{(\mu)} - iy^{(\mu)}) du.$$

Lorsque  $\lambda > 0, \mu > 0$ , on aura, d'après (6),

$$(8) \quad J_{\lambda, \mu} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\lambda+\mu-1} \int (\gamma_\lambda + i\delta_\lambda)(\gamma_\mu - i\delta_\mu) ds,$$

ce qui met en évidence le caractère d'invariance de  $J_{\lambda, \mu}$  par rapport aux mouvements du plan. Calculons maintenant l'intégrale  $J_{\lambda, \mu}$  à l'aide de notre théorème fondamental.

D'après les équations (2) du n° 6, nous aurons les équivalences

$$(9) \quad \begin{cases} x^{(\lambda)} \sim \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_\lambda + \sum_1^\infty k^\lambda \left[ a_k \cos\left(ku + \frac{\lambda\pi}{2}\right) + a'_k \sin\left(ku + \frac{\lambda\pi}{2}\right) \right], \\ y^{(\lambda)} \sim \frac{1}{2} b_0 \varepsilon_\lambda + \sum_1^\infty k^\lambda \left[ b_k \cos\left(ku + \frac{\lambda\pi}{2}\right) + b'_k \sin\left(ku + \frac{\lambda\pi}{2}\right) \right], \end{cases}$$

$\varepsilon_\lambda$  étant  $= 1$  ou  $= 0$ , suivant que  $\lambda = 0$  ou  $\lambda > 0$ . Le signe d'équivalence dans (9) peut d'ailleurs être remplacé par le signe d'égalité pour  $\lambda = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

En supposant, en premier lieu,

$$\mu \equiv \lambda \pmod{2},$$

nous trouvons

$$(10) \quad J_{\lambda, \mu} = (-1)^{\frac{\mu-\lambda}{2}} \pi \sum_1^\infty k^{\lambda+\mu} (a_k^2 + b_k^2 + a'_k{}^2 + b'_k{}^2),$$

excepté dans le cas où  $\lambda = 0, \mu = 0$ , l'intégrale  $J_{\lambda, \mu}$  se confondant alors avec l'intégrale considérée au n° 6,

$$(10') \quad J_{0,0} = \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) du = \pi \left[ \frac{1}{2} (a_0^2 + b_0^2) + \sum_1^\infty (a_k^2 + b_k^2 + a'_k{}^2 + b'_k{}^2) \right].$$

Supposons, en second lieu,

$$\mu \equiv \lambda + 1 \pmod{2}.$$

Nous obtenons alors

$$(11) \quad J_{\lambda, \mu} = i(-1)^{\frac{\mu - \lambda + 1}{2}} 2\pi \sum_1^{\infty} k^{\lambda + \mu} (a_k b'_k - a'_k b_k).$$

Les équations (10) et (11) montrent que l'intégrale  $J_{\lambda, \mu}$  ne dépend essentiellement que de la somme  $\lambda + \mu$  et que  $J_{\lambda, \mu}$  a une valeur réelle ou purement imaginaire suivant que  $\lambda + \mu$  est un nombre pair ou impair. Ces conséquences immédiates des équations (10) et (11) peuvent d'ailleurs être vérifiées aisément par une intégration par parties de l'intégrale  $J_{\lambda, \mu}$ .

Considérons maintenant les intégrales  $J_{\lambda, \mu}$  correspondant aux petites valeurs des indices  $\lambda, \mu$ . On a

$$J_{1,0} = -J_{0,1} = \int_0^{2\pi} (x' + iy')(x - iy) du = i \int (x dy - y dx) = 2iF,$$

où  $F$  désigne l'aire enfermée par la courbe. D'après (11), l'aire  $F$  s'exprime donc par la somme

$$(12) \quad F = \pi \sum_1^{\infty} k(a_k b'_k - a'_k b_k),$$

comme nous l'avons déjà trouvé au n° 6.

En exprimant les intégrales  $J_{1,1}, J_{2,1}, J_{2,2}, J_{3,2}$  d'une part à l'aide de (8), d'autre part par les équations (10) et (11), on obtient

$$(13) \quad \frac{L^2}{2\pi} = \pi \sum_1^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + a'_k{}^2 + b'_k{}^2),$$

$$(14) \quad \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int k ds = 2\pi \sum_1^{\infty} k^3 (a_k b'_k - a'_k b_k),$$

$$(15) \quad \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int k^2 ds = \pi \sum_1^{\infty} k^4 (a_k^2 + b_k^2 + a'_k{}^2 + b'_k{}^2),$$

$$(16) \quad \left(\frac{L}{2\pi}\right)^4 \int k^3 ds = 2\pi \sum_1^{\infty} k^5 (a_k b'_k - a'_k b_k).$$

D'après (4), l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int k ds = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha = \omega$$

désigne le nombre de tours que fait la tangente si l'on parcourt la courbe, tandis que l'intégrale

$$\frac{1}{L} \int k^2 ds = \frac{1}{L} \int \frac{ds}{\rho^2} = M\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

représente la moyenne arithmétique de l'inverse du carré du rayon de courbure.

En combinant les développements (14) et (15), on trouve

$$(17) \quad \frac{L^4}{(2\pi)^3} M\left(\frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{L^2}{2\pi} \omega \\ = \pi \sum_1^{\infty} k^2 [(ka_k - b'_k)^2 + (ka'_k + b_k)^2 + (k^2 - 1)(b_k^2 + b'_k{}^2)].$$

On aura donc toujours

$$(18) \quad \frac{L^4}{(2\pi)^3} M\left(\frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{L^2}{2\pi} \omega \geq 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 M\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \geq \omega$$

et, de plus, comme cela résulte de l'équation (7) du n° 6,

$$(19) \quad \frac{L^4}{(2\pi)^3} M\left(\frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{L^2}{2\pi} \omega \geq \frac{L^2}{2\pi} - 2F,$$

les signes d'égalité dans (18) et (19) n'ayant lieu que dans le cas du cercle.

L'inégalité (18) permet de compléter le théorème énoncé à la fin du n° 3.

Si la courbe considérée est convexe, on aura  $\omega = 1$ . Par conséquent,

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 M\left(\frac{1}{\rho^2}\right) > 1 \quad \text{ou} \quad M\left(\frac{1}{\rho^2}\right) > \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$$

si nous faisons abstraction du cas où la courbe est un cercle. Il y a donc parmi les rayons de courbure un au moins de ces rayons  $\rho'$

tel que

$$\frac{1}{\rho'} > \frac{2\pi}{L} \quad \text{ou} \quad 2\pi\rho' < L;$$

d'où cette conclusion :

*Parmi les cercles de courbure d'une courbe convexe fermée, qui n'est pas elle-même un cercle, il y en a toujours au moins un dont la circonférence est plus petite que le périmètre L de la courbe.*

On remarquera que, pour la démonstration du théorème précédent, nous avons dû faire les hypothèses suivantes : les coordonnées d'un point variable de la courbe admettent par rapport à l'arc s des dérivées premières continues et des dérivées secondes bornées et intégrables.

8. En terminant, je vais donner quelques indications sur l'extension des recherches précédentes aux surfaces.

Considérons une surface fermée qui divise l'espace en deux parties, l'une extérieure, l'autre intérieure à la surface. Supposons qu'il y ait un point, et un seul, sur la surface où la normale extérieure a une direction donnée arbitrairement. Si nous désignons par  $\xi, \eta, \zeta$  les cosinus directeurs de la normale extérieure au point P de la surface, le point P', dont les coordonnées rectangulaires sont  $(\xi, \eta, \zeta)$ , prendra sur la sphère

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

chaque position une seule fois, si nous donnons au point P toutes les positions possibles sur la surface primitive. Toute fonction du point P variable sur la surface peut être considérée comme fonction du point P' correspondant variable sur la sphère. Mais une fonction du point variable sur la sphère peut être développée en série de fonctions sphériques. L'emploi des développements de cette sorte est évidemment l'analogie de l'emploi des séries de Fourier dans les recherches des nos 2-5.

Considérons en particulier le développement de la distance p de l'origine au plan tangent à la surface en P. Nous aurons

$$(1) \quad p = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_k + \dots,$$

où  $X_k$  désigne une fonction sphérique d'ordre  $k$ , c'est-à-dire une fonction entière et homogène d'ordre  $k$  de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , qui satisfait à l'équation

$$\Delta X_k = \frac{\partial^2 X_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X_k}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 X_k}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Soient  $x, y, z$  les coordonnées du point P. En différentiant l'équation

$$\xi x + \eta y + \zeta z = p$$

par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  et en tenant compte de l'identité

$$\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0,$$

on trouve, après un calcul facile,

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{\partial p}{\partial \xi} - \xi \lambda, \\ y = \frac{\partial p}{\partial \eta} - \eta \lambda, \\ z = \frac{\partial p}{\partial \zeta} - \zeta \lambda, \end{cases}$$

$\lambda$  étant défini par l'équation

$$(3) \quad \lambda = \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial p}{\partial \zeta} - p.$$

En introduisant le développement (1) on obtient

$$(4) \quad \lambda = -X_0 + X_2 + 2X_3 + \dots + (k-1)X_k + \dots,$$

et, par conséquent,

$$(5) \quad \begin{cases} x = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial X_k}{\partial \xi} - (k-1)\xi X_k \right], \\ y = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial X_k}{\partial \eta} - (k-1)\eta X_k \right], \\ z = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial X_k}{\partial \zeta} - (k-1)\zeta X_k \right]. \end{cases}$$

Pour exprimer les rayons de courbure  $\rho_1, \rho_2$  à l'aide du développe-

ment (1), nous partons des équations différentielles des lignes de courbure

$$dx = \rho d\xi, \quad dy = \rho d\eta, \quad dz = \rho d\zeta$$

ou, d'après (2).

$$\begin{aligned} d \frac{\partial \rho}{\partial \xi} &= \xi d\lambda + (\rho + \lambda) d\xi, \\ d \frac{\partial \rho}{\partial \eta} &= \eta d\lambda + (\rho + \lambda) d\eta, \\ d \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} &= \zeta d\lambda + (\rho + \lambda) d\zeta. \end{aligned}$$

En désignant par les indices 1, 2, 3 une différentiation par rapport à  $\xi, \eta, \zeta$  respectivement et en faisant, pour abrégé,

$$\rho + \lambda = \iota,$$

nous pouvons écrire les équations précédentes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (\iota + \xi\lambda_1 - \rho_{11}) d\xi + (\xi\lambda_2 - \rho_{12}) d\eta + (\xi\lambda_3 - \rho_{13}) d\zeta &= 0, \\ (\eta\lambda_1 - \rho_{21}) d\xi + (\iota + \eta\lambda_2 - \rho_{22}) d\eta + (\eta\lambda_3 - \rho_{23}) d\zeta &= 0, \\ (\zeta\lambda_1 - \rho_{31}) d\xi + (\zeta\lambda_2 - \rho_{32}) d\eta + (\iota + \zeta\lambda_3 - \rho_{33}) d\zeta &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de  $d\xi, d\eta, d\zeta$  donne une équation du troisième degré en  $\iota$ , dont les trois racines sont

$$\iota = 0, \quad \iota = \rho_1 + \lambda, \quad \iota = \rho_2 + \lambda.$$

Le coefficient de  $\iota^2$  dans cette équation sera

$$-\rho_1 - \rho_2 - 2\lambda = \xi\lambda_1 + \eta\lambda_2 + \zeta\lambda_3,$$

parce que

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta^2} = 0,$$

d'après (1). Remplaçons  $\lambda$  par la série (4); nous obtenons le développement remarquable

$$(6) \quad \rho_1 + \rho_2 = 2X_0 - 4X_2 - 2.5X_3 - \dots - (k-1)(k+2)X_k - \dots$$

Le coefficient de  $\iota$  dans la même équation s'exprimant par

$$(\rho_1 + \lambda)(\rho_2 + \lambda),$$

nous trouvons, après un calcul facile,

$$(7) \quad \rho_1 \rho_2 = \lambda \mu + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - \frac{1}{2} (\rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + \rho_{33}^2 + 2\rho_{23}^2 + 2\rho_{31}^2 + 2\rho_{12}^2),$$



où  $\mu$  désigne la série

$$(8) \quad \mu = -X_0 + 3X_2 + 8X_3 + \dots + (k^2 - 1)X_k + \dots$$

Introduisons maintenant, outre le symbole,

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

l'autre

$$\Delta(u|\nu) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \nu}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \nu}{\partial \zeta}.$$

On aura évidemment

$$(7') \quad \rho_1 \rho_2 = \lambda \mu + \Delta(\lambda|\lambda) - \frac{1}{2} \left[ \Delta \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \middle| \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \Delta \left( \frac{\partial p}{\partial \eta} \middle| \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \Delta \left( \frac{\partial p}{\partial \zeta} \middle| \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \right].$$

Nous tirons une première conséquence intéressante de l'équation (6). Si la somme des rayons de courbure  $\rho_1 + \rho_2$  est donnée en fonction des cosinus directeurs  $\xi, \eta, \zeta$  de la normale, le développement de cette fonction suivant des fonctions sphériques nous fera connaître les fonctions  $X_k$  ( $k = 0, 2, 3, \dots$ ). Donc le développement (1) de la distance  $p$  sera déterminé au terme près  $X_1$ , qui est de la forme  $c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta$  et qui dépend évidemment du choix de l'origine des coordonnées. Mais, la distance  $p$  étant connue en fonction de  $\xi, \eta, \zeta$ , nous pouvons construire tous les plans tangents à la surface, et celle-ci sera donc déterminée comme enveloppe de ses plans tangents. Donc :

*La somme des rayons de courbure étant donnée pour chaque direction de la normale extérieure, la surface est parfaitement déterminée à une translation près (1).*

En particulier, la somme des rayons de courbure n'est constante que dans le cas où  $p = X_0 + X_1$ , c'est-à-dire dans le cas d'une sphère.

La constante  $X_0$  qui figure dans les développements (1), (4), (6) et (7) a une signification géométrique simple. En effet, d'après (6) on a

$$(9) \quad \int (\rho_1 + \rho_2) d\omega = 2X_0 \int d\omega = 8\pi X_0,$$

(1) Ce théorème a été trouvé aussi par M. Minkowski.

$d\omega$  désignant l'élément superficiel de la sphère  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ .  
D'un autre côté,

$$(10) \quad d\omega = \frac{d\sigma}{\rho_1 \rho_2},$$

$d\sigma$  étant l'élément superficiel de la surface primitive. Donc

$$(11) \quad 4\pi X_0 = \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) d\sigma;$$

c'est donc l'intégration de la courbure moyenne sur toute la surface qui donne  $4\pi X_0$ . Pour abrégé, nous désignerons par  $M$  la valeur de cette intégrale (1), de sorte que

$$(11') \quad X_0 = \frac{1}{4\pi} M.$$

Essayons maintenant d'exprimer l'aire  $O$  de la surface et le volume  $V$  qu'elle enferme à l'aide des fonctions sphériques  $X_k$  qui figurent dans le développement (1). On aura, d'après (10),

$$(12) \quad O = \int d\sigma = \int \rho_1 \rho_2 d\omega,$$

$$(13) \quad V = \frac{1}{3} \int p d\sigma = \frac{1}{3} \int p \rho_1 \rho_2 d\omega.$$

D'après (7'), l'aire  $O$  se décompose de la manière suivante :

$$(12') \quad O = \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3,$$

où

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1 = \sum_{k,h} (k-1)(h^2-1) \int X_k X_h d\omega = \sum_k (k-1)(k^2-1) \int X_k^2 d\omega, \\ \Sigma_2 = \sum_{k,h} (k-1)(h-1) \int \Delta(X_k | X_h) d\omega, \\ \Sigma_3 = \frac{1}{2} \sum_{k,h} \int \left[ \Delta \left( \frac{\partial X_k}{\partial \xi} \middle| \frac{\partial X_h}{\partial \xi} \right) + \Delta \left( \frac{\partial X_k}{\partial \eta} \middle| \frac{\partial X_h}{\partial \eta} \right) + \Delta \left( \frac{\partial X_k}{\partial \zeta} \middle| \frac{\partial X_h}{\partial \zeta} \right) \right] d\omega, \end{array} \right.$$

et nous aurons une décomposition analogue pour le volume  $V$ .

(1) Cette intégrale a été rencontrée par J. Steiner dans une recherche sur les surfaces parallèles (*Werke*, vol. II, p. 171). Elle joue un rôle important dans les recherches récentes de M. Minkowski sur les corps convexes (*loc. cit.*).

Les sommes  $\sum_2$  et  $\sum_3$  peuvent être simplifiées à l'aide du théorème de Green appliqué à la sphère  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ . Soient  $d\tau$  l'élément de volume à l'intérieur de cette sphère et  $u, v$  deux fonctions de  $\xi, \eta, \zeta$  admettant des dérivées premières et secondes continues à l'intérieur de la sphère et sur la sphère elle-même. On aura

$$(15) \quad \int u \left( \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) d\omega = \int [\Delta(u|v) + u\Delta(v)] d\tau.$$

En prenant  $v = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$  et en supposant  $u$  homogène de degré  $r$ , de manière que

$$\Delta(u|v) = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} = ru,$$

on obtient

$$(16) \quad \int u d\omega = (r+3) \int u d\tau.$$

Soit encore  $u$  homogène de degré  $r$  et remplaçons  $v$  par une fonction sphérique  $X_k$  de degré  $k$ . L'équation (15) donnera

$$k \int u X_k d\omega = \int \Delta(u|X_k) d\tau,$$

ou, d'après (16),

$$(17) \quad \int \Delta(u|X_k) d\omega = k(r+k+1) \int u X_k d\omega.$$

Si nous faisons  $u = X_h$ , où  $X_h$  désigne une fonction sphérique quelconque de degré  $h$ , l'équation (7) donne, puisque  $\Delta(X_h|X_k)$  est symétrique par rapport à  $X_k$  et  $X_h$ ,

$$\int \Delta(X_h|X_k) d\omega = k(h+k+1) \int X_h X_k d\omega = h(k+h+1) \int X_k X_h d\omega.$$

Donc

$$\int \Delta(X_k|X_k) d\omega = k(2k+1) \int X_k^2 d\omega,$$

tandis que les intégrales s'évanouissent si  $k$  diffère de  $h$ .

D'après cela, les sommes  $\sum_2$  et  $\sum_3$  s'expriment de la manière

suivante :

$$\begin{aligned} \sum_2 &= \sum (k-1)^2 k(2k+1) \int X_k^2 d\omega, \\ \sum_3 &= \frac{1}{2} \sum (k-1)(2k-1) \int \left[ \left( \frac{\partial X_k}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial X_k}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial X_k}{\partial \zeta} \right)^2 \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2} \sum (k-1)(2k-1)k(2k+1) \int X_k^2 d\omega, \end{aligned}$$

et en substituant dans (12') on obtient finalement

$$\begin{aligned} (18) \quad 0 &= -\frac{1}{2} \sum_0^\infty (k-1)(k+2) \int X_k^2 d\omega \\ &= 4\pi X_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^\infty (k-1)(k+2) \int X_k^2 d\omega. \end{aligned}$$

C'est l'équation qui est l'analogue de l'équation (8) du n° 2. On en tire immédiatement cette conclusion que

$$(19) \quad M^2 \geq 4\pi O,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que dans le cas de la sphère (1).

Pour simplifier le développement du volume V, on doit s'appuyer sur une formule qui se déduit de (17) de la manière suivante. Remplaçons  $u$  par le produit  $X_h X_l$  de deux fonctions sphériques quelconques. Il vient

$$\int X_l \Delta(X_h | X_k) d\omega + \int X_h \Delta(X_l | X_k) d\omega = k(h+k+l+1) \int X_h X_k X_l d\omega.$$

En combinant cette équation avec les deux autres qui en résultent par la permutation des indices  $h, k, l$ , on trouve

$$(20) \quad \int X_l \Delta(X_h | X_k) d\omega = \frac{1}{2} (h+k-l)(h+k+l+1) \int X_h X_k X_l d\omega.$$

A l'aide de cette formule, qui subsiste pour trois fonctions sphé-

(1) Ce théorème a été donné pour la première fois par M. Minkowski (*loc. cit.*).

Le développement (18) s'obtient d'ailleurs immédiatement si l'on fait usage de la formule

$$0 = \int p(\rho_1 + \rho_2) d\omega,$$

due à M. Minkowski.

riques  $X_h, X_k, X_l$  quelconques, on obtient pour le volume  $V$  le développement suivant :

$$(21) \quad 24V = \sum_{h,k,l} C_{h,k,l} \int X_h X_k X_l d\omega \quad (h, k, l = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

le coefficient numérique  $C_{h,k,l}$  ayant la valeur

$$(22) \quad C_{h,k,l} = 8(k^2 - 1)(h - 1) + 4(k - 1)(h - 1)(h + k + l + 1)(h + k - l) \\ - (h + k + l - 1)(h + k + l + 1)(h + k - l)(h + k - l - 2).$$

Après avoir développé  $C_{h,k,l}$  en polynôme de  $h, k, l$ , il est évidemment permis de faire une permutation quelconque entre les indices  $h, k, l$  dans chaque terme de ce polynôme. Cela nous donne le moyen de varier l'expression du coefficient  $C_{h,k,l}$ . On aura, par exemple,

$$(21') \quad 24V = \sum_{h,k,l} C'_{h,k,l} \int X_h X_k X_l d\omega,$$

où

$$(22') \quad C'_{h,k,l} = 6h^2k^2 + 12h^2k + 6hk - 3k^4 - 6k^3 - 9k^2 - 6k + 8.$$

En ordonnant la série (21) suivant les puissances de la constante  $X_0$  on trouve encore :

$$(23) \quad 24V = 32\pi X_0^3 - 12X_0 \sum_2^{\infty} (k-1)(k+2) \int X_k^2 d\omega \\ + \sum_{h,k,l} C_{h,k,l} \int X_h X_k X_l d\omega,$$

les indices  $h, k, l$  ne parcourant que toutes les valeurs entières  $\geq 2$ .

Ces développements du volume  $V$  sont assez remarquables. Mais il paraît très difficile d'en déduire le théorème relatif aux surfaces et analogue à celui des isopérimètres, qui s'exprime par l'inégalité  $O^3 \geq 36\pi V^2$ . Même la démonstration, à l'aide des développements précédents, de l'inégalité plus simple  $O^2 \geq 3MV$ , donnée par M. Minkowski pour les corps convexes, présente des difficultés que je n'ai pas pu surmonter jusqu'à présent.