HENRI PADÉ

Recherches nouvelles sur la distribution des fractions approchées d'une fonction

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 153-189

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__153_0>

RECHERCHES NOUVELLES

SUR LA

DISTRIBUTION DES FRACTIONS RATIONNELLES

APPROCHÉES D'UNE FONCTION,

PAR M. HENRI PADÉ.

Ce nouveau Mémoire est la suite naturelle de celui qui a paru, il y a quelque temps déjà, dans ces mêmes *Annales* (3ᵉ série, t. XVI, 1899, p. 395-426), sous le titre de *Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques*. Il ne suppose pas, néanmoins, pour être lu, la connaissance de ce premier Mémoire.

Il contient, particulièrement, le développement d'une Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 15 janvier 1900.

Il se divise en trois Parties.

Dans la première, je reprends d'abord et j'approfondis, en me plaçant au point de vue le plus général, la notion de *fraction rationnelle approchée*. J'obtiens des caractères concernant l'ordre de l'approximation donnée par cette fraction et la somme des degrés de ses termes qui permettent de reconnaître, de la façon la plus simple, les différents couples de nombres entiers positifs ou nuls auxquels elle correspond. La détermination de ces couples était demeurée, dans ma Thèse de Doctorat, où j'ai exposé pour la première fois toute cette théorie (*Annales*, 3ᵉ série, t. IX, 1892), une des parties les plus arides; l'usage que je faisais, à cet égard, d'une solution spéciale d'un système d'équations linéaires, dite *solution principale*, pouvait justement paraître, bien que m'ayant conduit au résultat, assez artificiel et fort détourné, en même temps que des plus pénibles. Je crois avoir amené ici la démonstration à un tel degré de simplicité, et l'avoir conduite par une voie si naturelle qu'il me semble difficile de désirer en ce point un plus grand progrès.

L'exposition de cette première Partie est d'ailleurs faite sous une forme qui permette la généralisation immédiate; pour cela, il m'a suffi de considérer, au lieu d'une seule série, deux séries qui interviennent seulement par leur rapport. Cette généralisation présente, d'ailleurs, certaines difficultés que, jusqu'ici, je n'ai pu vaincre.

J'ai enfin calculé un exemple numérique étendu où se rencontrent de nombreuses fractions rationnelles approchées anormales.

Dans la deuxième Partie, j'étudie les lois de récurrence qui lient les termes des fractions rationnelles approchées, et la formation des fractions continues holoïdes qui en découle immédiatement. La forme synthétique que j'adopte donne à l'exposition une très grande simplicité, mais ne conduit pas aussi loin que l'analyse plus pénible par laquelle j'ai traité la même question dans ma Thèse de Doctorat. En particulier, je n'établis pas ici les lois de récurrence qui conduisent à la méthode des polynomes associés de M. Hermite.

Cette Partie se termine par des exemples de fractions continues holoïdes tirés des résultats numériques obtenus dans la première Partie.

Enfin, la troisième Partie a pour objet l'étude des rapports qui existent entre la théorie des fractions continues holoïdes et la théorie classique du développement en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes de la variable, développement que j'appelle, pour abréger, le développement en fraction continue *canonique* de la série.

Ces rapports, qu'au surplus il fallait une fois fixer définitivement, s'aperçoivent très aisément dans le cas de fractions rationnelles approchées toutes normales. Des détails de discussion m'ont néanmoins obligé à donner quelque développement à leur examen. Ces développements préparent d'ailleurs la démonstration du théorème nouveau qui donne l'interprétation de la présence, dans un développement canonique, d'un quotient incomplet de degré supérieur à l'unité.

Cette élévation de degré correspond à l'existence d'une fraction rationnelle approchée anormale et est liée d'une façon remarquable à la loi de distribution, dans le plan, des fractions rationnelles approchées.

Cette étude m'a conduit à examiner incidemment comment la fraction continue qui a été l'objet des belles recherches de Stieltjes se rattache à la théorie des fractions continues holoïdes, et à indiquer l'interprétation que prennent, quand on se place à ce point de vue, les résultats qu'il a obtenus relativement à la convergence et à la divergence de cette fraction. J'ai donné cette interprétation dans une Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 15 avril 1901.

Je termine, enfin, par quelques réflexions sur la question de la généralisation des fractions continues algébriques et sur les conséquences que pourraient avoir, dans la *Théorie des nombres*, les résultats obtenus.

Lille, le 30 avril 1901.

I. — Existence et distribution des fractions rationnelles approchées.

1. Considérons deux séries entières en x

$$(1)\qquad \begin{cases} S_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \\ S_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \end{cases}$$

dont les termes indépendants de x, c'est-à-dire a_0 et b_0, soient différents de zéro.

Soient μ_1 et μ_2 deux nombres entiers, positifs ou nuls.

Il existe un système de polynomes, X_1, X_2, *non identiquement nuls, de degrés au plus égaux respectivement à* μ_1 *et* μ_2, *tels que, dans l'expression*

$$S_1 X_1 + S_2 X_2,$$

ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, *tous les termes, jusqu'à celui, inclusivement, de degré* $\mu_1 + \mu_2$, *disparaissent.*

Si l'on regarde, en effet, comme indéterminés les $\mu_1 + \mu_2 + 2$ coefficients des polynomes X_1 et X_2, la condition qui leur est imposée s'exprime par $\mu_1 + \mu_2 + 1$ équations linéaires et homogènes par rapport à ces coefficients. Un tel système d'équations admet toujours une solution où toutes les inconnues n'obtiennent pas la valeur zéro et se trouvent déterminées à un facteur constant commun près.

2. Les polynomes X_1 et X_2 étant ainsi déterminés, on aura

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1} S, \tag{2}$$

S désignant une série entière en x, qui peut être, dans certains cas, nulle identiquement.

Il résulte de cette relation que *ni l'un ni l'autre* des deux polynomes X_1, X_2 ne peut être identiquement nul.

Si X_2, par exemple, était identiquement nul, il s'ensuivrait que X_1 devrait être divisible par

$$x^{\mu_1+\mu_2+1};$$

or ceci ne peut avoir lieu, puisque le degré de X_1 ne dépasse pas μ_1 sans que X_1 soit lui-même identiquement nul; et, par leur définition même, les deux polynomes ne sont pas simultanément identiquement nuls.

3. Soit maintenant X'_1, X'_2 un système quelconque de polynomes satisfaisant aux mêmes conditions que le système X_1, X_2, en sorte que l'on ait cette seconde relation, analogue à la relation (2),

$$S_1 X'_1 + S_2 X'_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1} S',$$

où S' désigne une nouvelle série entière en x.

De ces deux relations on déduit

$$S_1(X_1 X'_2 - X_2 X'_1) = x^{\mu_1+\mu_2+1}(S X'_2 - S' X_2);$$

et, puisque S_1 a un terme constant différent de zéro, on en conclut que le polynome $X_1 X'_2 - X_2 X'_1$, de degré au plus égal à $\mu_1 + \mu_2$, devant être divisible par $x^{\mu_1+\mu_2+1}$, est identiquement nul.

Si donc on désigne par Y_1 et Y_2 les quotients des deux polynomes X_1

et X_2 par leur plus grand commun diviseur, on voit que tout système de deux polynomes satisfaisant aux mêmes conditions que le système X_1, X_2 sera formé par les produits obtenus en multipliant les deux polynomes premiers entre eux, Y_1, Y_2, par un même polynome. Ce multiplicateur peut être différent d'un système à l'autre.

4. Nous dirons du système de polynomes Y_1, Y_2, déterminés à un facteur constant commun près, qu'il correspond au couple de nombres (μ_1, μ_2), ou au point du plan dont les coordonnées rectilignes rectangulaires sont

$$x = \mu_1, \qquad y = \mu_2.$$

Ce point lui-même pourra recevoir le nom de *point représentatif* du système de polynomes considéré.

Ainsi donc :

A chaque point (μ_1, μ_2) *du plan, de coordonnées entières, positives ou nulles, correspond un système unique de polynomes* Y_1, Y_2, *déterminés à un facteur constant commun près.*

Dès que l'on connaît deux polynomes X_1, X_2, *de degrés au plus égaux respectivement à* μ_1 *et* μ_2, *qui fassent disparaître, dans l'expression* $S_1 X_1 + S_2 X_2$, *tous les termes, jusqu'à celui, inclusivement, de degré* $\mu_1 + \mu_2$, *il suffit de les diviser par leur plus grand commun diviseur pour obtenir le système de polynomes* Y_1, Y_2.

5. Par exemple, si les séries (1) sont celles qui représentent e^{ax} et e^{bx}, on a, en posant

$$F(z) = (z-a)^{\mu_2}(z-b)^{\mu_1},$$

les expressions suivantes des polynomes Y_1, Y_2 :

$$Y_1 = F^{(\mu_1+\mu_2+1)}(a) - F^{(\mu_1+\mu_2-1)}(a)x + \ldots + (-1)^{\mu_1} F^{(\mu_2)}(a) x^{\mu_1},$$
$$-Y_2 = F^{(\mu_1+\mu_2+1)}(b) - F^{(\mu_1+\mu_2-1)}(b)x + \ldots + (-1)^{\mu_2} F^{(\mu_1)}(b) x^{\mu_2}.$$

Je renverrai, pour leur démonstration, à mon *Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XV, p. 400).

Plus généralement, si les séries (1) sont celles qui représentent

$(1+x)^{m_1}$ et $(1+x)^{m_2}$, on a, en désignant par $G(\alpha, \beta, \gamma, x)$ le polynome de degré $|\alpha|$, formé par les $|\alpha|+1$ premiers termes de la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss, quand α est un entier négatif ou nul,

$$Y_1 = G(-\mu_1, m_1 - m_2 - \mu_2, -\mu_1 - \mu_2, -x),$$
$$-Y_2 = G(-\mu_2, m_2 - m_1 - \mu_1, -\mu_1 - \mu_2, -x).$$

Ces formules se déduisent aisément de celles dont j'ai donné la démonstration dans une Note *Sur l'expression générale de la fraction rationnelle approchée de* $(1+x)^m$, présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 25 mars 1901. Elles comprennent, comme cas particuliers, celles relatives au cas précédent de deux exponentielles et comportent des conséquences étendues sur lesquelles je reviendrai dans une autre circonstance.

6. Les propriétés, que je veux établir, des polynomes Y_1 et Y_2 exigent un examen plus approfondi des circonstances qui se présentent quand on divise les deux membres de la relation (2), savoir :

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1} S,$$

par le plus grand commun diviseur des polynomes X_1 et X_2.

Soit Δ ce plus grand commun diviseur; supposons-le ordonné suivant les puissances ascendantes de x, et soient ω et Ω les degrés du premier et du dernier terme, en sorte que l'on a

$$0 \leqq \omega \leqq \Omega.$$

En divisant X_1 et X_2 par Δ, leurs degrés se trouvent diminués chacun de Ω. Si donc l'on désigne par ν_1 et ν_2 les degrés des quotients Y_1 et Y_2, on a

$$\nu_1 \leqq \mu_1 - \Omega, \qquad \nu_2 \leqq \mu_2 - \Omega.$$

Dans le second membre, l'exposant $\mu_1 + \mu_2 + 1$ de x est diminué de ω, et S se trouve remplacé par une nouvelle série Σ.

On obtient ainsi

$$S_1 Y_1 + S_2 Y_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1-\omega} \Sigma,$$

et l'on voit que le nombre $\mu_1 + \mu_2 + 1 - \omega$ est supérieur non seulement à $\nu_1 + \nu_2$, somme des degrés des polynomes Y_1, Y_2, mais même aux nombres $\nu_1 + \mu_2$ et $\nu_2 + \mu_1$. C'est une remarque très importante pour la suite.

Observons maintenant que, si la série Σ n'est pas identiquement nulle, elle peut contenir en facteur une certaine puissance de x. Nous ferons rentrer cette puissance dans le facteur $x^{\mu_1+\mu_2+1-\omega}$ qui précède; et alors, en désignant par λ un nombre entier, positif ou nul, et par R une série entière *où le terme indépendant de x est différent de zéro,* on aura la relation *fondamentale*

$$(3) \qquad S_1 Y_1 + S_2 Y_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1} R,$$

avec les inégalités

$$\nu_1 + \nu_2 \leqq \begin{matrix} \nu_1 + \mu_2 \\ \nu_2 + \mu_1 \end{matrix} < \nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1.$$

Si la série Σ était identiquement nulle, il en serait de même de R; les relations précédentes subsisteraient encore, et l'on pourrait même y regarder λ comme représentant un nombre entier positif aussi grand que l'on veut.

En tenant compte de cette dernière remarque, on voit que le nombre

$$\nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1$$

est le degré du terme de moindre degré dans l'expression $S_1 Y_1 + S_2 Y_2$, ordonnée suivant les puissances ascendantes de x; c'est ce que nous appellerons l'*ordre de l'approximation au point* (μ_1, μ_2) ou *correspondante au couple* Y_1, Y_2 de polynomes.

7. Voici dès lors une première propriété des polynomes Y_1, Y_2 :

Deux polynomes, Z_1, Z_2, premiers entre eux, et de degrés au plus égaux respectivement à μ_1 et μ_2, ne peuvent faire disparaître, dans l'expression $S_1 Z_1 + S_2 Z_2$, tous les termes, jusqu'à celui, inclusivement, de degré $\nu_1 + \nu_2 + \lambda$, sans être les produits de Y_1 et Y_2 par une même quantité constante.

Dans cette hypothèse, en effet, on a

$$S_1 Z_1 + S_2 Z_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1} R',$$

R' désignant une série entière en x; éliminons S_2 entre cette relation et la relation fondamentale (3), il vient

$$S_1(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}(RZ_2 - R'Y_2).$$

Le polynome $Y_1Z_2 - Y_2Z_1$, étant de degré au plus égal au plus grand des deux nombres $\nu_1 + \mu_2$, $\nu_2 + \mu_1$, et devant être divisible par une puissance de x dont l'exposant $\nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1$ est supérieur à ce degré, est identiquement nul; et la proposition énoncée en découle évidemment.

8. Les deux polynomes Y_1 et Y_2 étant premiers entre eux, l'un d'eux au moins renferme un terme indépendant de x différent de zéro. Mais il résulte alors, de la relation (3), que le second polynome doit aussi présenter nécessairement le même caractère. Divisons les deux membres de cette relation (3) par le produit S_2Y_1 qui ne s'annule pas pour $x = 0$; on obtient celle-ci

$$\frac{S_1}{S_2} - \left(-\frac{Y_2}{Y_1}\right) = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}\frac{R}{S_2Y_1}.$$

Le développement en série procédant suivant les puissances ascendantes de x, de la fraction rationnelle irréductible

$$-\frac{Y_2}{Y_1}$$

coïncide donc avec celui de la fonction $\frac{S_1}{S_2}$ jusqu'au terme, inclusivement, de degré $\nu_1 + \nu_2 + \lambda$. Il n'y a, d'après ce qui précède, aucune autre fraction rationnelle irréductible, dont les termes soient au plus de degrés μ_1 et μ_2, qui donne une approximation aussi grande de la fonction $\frac{S_1}{S_2}$ dans le voisinage de la valeur $x = 0$. C'est cette fraction $-\frac{Y_2}{Y_1}$ que j'appelle la *fraction rationnelle approchée*, au point (μ_1, μ_2), de la fonction $\frac{S_1}{S_2}(x)$.

9. La seconde propriété que je vais établir du système de poly-

nomes Y_1, Y_2, se rapporte à la distribution, dans le plan, des points auxquels il correspond.

Reprenons, à cet effet, la relation fondamentale

$$S_1 Y_1 + S_2 Y_2 = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1} R$$

et considérons, en premier lieu, le cas particulier où la série R serait identiquement nulle. Je vais faire voir qu'alors *le système de polynomes* Y_1, Y_2 *correspond à tous les points du plan dont les coordonnées sont supérieures ou égales respectivement aux nombres* ν_1, ν_2; *il ne correspond, en outre, qu'à ces seuls points.*

Soient, en effet, μ_1, μ_2 les coordonnées d'un tel point. Les polynomes Y_1 et Y_2 ont leurs degrés au plus égaux respectivement à ces nombres. D'un autre côté, l'ordre de l'approximation qu'ils donnent peut être, en vertu de la remarque faite dans le n° 5, regardée comme infinie. Donc, ces polynomes correspondent bien au point μ_1, μ_2. D'ailleurs, ils ne peuvent correspondre évidemment à aucun autre point, puisque les coordonnées μ_1, μ_2 de tout point auquel ils correspondent doivent être au moins égales respectivement à leurs degrés ν_1, ν_2.

10. Examinons maintenant le cas général, où R n'est pas identiquement nul.

Désignons par h et k deux nombres entiers satisfaisant aux inégalités

$$0 \leqq h \leqq k \leqq \lambda.$$

De la relation fondamentale se déduit immédiatement celle-ci :

$$S_1 . x^h Y_1 + S_2 . x^h Y_2 = x^{(\nu_1+h)+(\nu_2+k)+(\lambda-k)+1} R,$$

et si l'on désigne par X_1 et X_2 les deux polynomes $x^h Y_1$, $x^h Y_2$, par μ_1 et μ_2 les nombres $\nu_1 + h$, $\nu_2 + k$ égaux au moins, respectivement, aux degrés des polynomes X_1, X_2, on voit que l'on aura

$$(4) \qquad S_1 X_1 + S_2 X_2 = x^{\mu_1+\mu_2+1} R',$$

où R′ désigne la série $x^{\lambda-k}$R. Ceci montre que les quotients des polynomes X_1 et X_2, par leur plus grand commun diviseur, c'est-à-dire Y_1

et Y_2, correspondent au point (μ_1, μ_2), c'est-à-dire $(\nu_1 + h, \nu_2 + k)$.

Or les points $(\nu_1 + h, \nu_2 + k)$, où h et k prennent toutes les valeurs entières de o à λ, sont ceux qui appartiennent au carré dont les côtés ont pour équations

$$x = \nu_1, \qquad x = \nu_1 + \lambda, \qquad y = \nu_2, \qquad y = \nu_2 + \lambda.$$

Donc, *le système de polynomes* Y_1, Y_2 *correspond à tous les points du carré formé par les parallèles aux axes menées par les deux points* (ν_1, ν_2) *et* $(\nu_1 + \lambda, \nu_2 + \lambda)$.

De plus, *les mêmes polynomes ne peuvent correspondre à aucun autre point.* Si, en effet, ils correspondent au point (μ_1, μ_2), c'est que l'on a une relation telle que (4), X_1 et X_2 désignant les produits, de degrés au plus égaux à μ_1, μ_2, de Y_1 et Y_2 par un même polynome Z. Or, si nous multiplions par Z les deux membres de (3), nous obtenons

$$S_1.Y_1Z + S_2.Y_2Z = x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}Z.R;$$

et comme le second membre doit être divisible par $x^{\mu_1+\mu_2+1}$, et que, dans R, le terme indépendant de x est différent de zéro, il faut que le degré du terme de Z qui a le moindre degré, et, par suite, *a fortiori*, le degré même de Z, soient au moins égaux à

$$\mu_1 + \mu_2 + 1 - (\nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1),$$

ou encore

$$(\mu_1 - \nu_1) + (\mu_2 - \nu_2) - \lambda.$$

Si l'un des deux nombres $\mu_1 - \nu_1$, $\mu_2 - \nu_2$ était plus grand que λ, si, par exemple, on avait

$$\mu_2 - \nu_2 - \lambda > 0,$$

alors le degré de Z serait supérieur à $\mu_1 - \nu_1$ et le produit Y_1Z, c'est-à-dire X_1, serait de degré supérieur à $\nu_1 + (\mu_1 - \nu_1)$, c'est-à-dire μ_1, ce qui n'est pas. Donc, on a nécessairement, à la fois,

$$\mu_1 \leqq \nu_1 + \lambda, \qquad \mu_2 \leqq \nu_2 + \lambda;$$

comme, d'un autre côté, μ_1 et μ_2 sont au moins égaux respectivement à ν_1 et ν_2, on voit que le point (μ_1, μ_2) ne peut être, comme nous voulions le démontrer, que l'un des points du carré précédemment obtenu.

11. La figure ci-après donne plusieurs exemples de cette loi de distribution; elle se rapporte au cas où S_1 et S_2 sont les deux polynomes

$$S_1 = 1 + x - 2x^3 + x^5 + x^6,$$
$$S_2 = 1 - 2x^3 + x^4 + x^6.$$

Tous les points du plan dont les coordonnées ne dépassent pas 7 y sont représentés. Chacun des carrés figurés contient les points représentatifs qui correspondent à un même système de polynomes.

Je donne aussi les expressions explicites de ces différents systèmes de polynomes; ils sont écrits sous la forme de fractions rationnelles approchées, $-\frac{Y_2}{Y_1}$, comme je l'ai expliqué antérieurement (n° 8), qui se rapportent alors à l'unique fonction

$$y(x) = \frac{S_1}{S_2}(x) = \frac{1 + x - 2x^3 + x^5 + x^6}{1 - 2x^3 + x^4 + x^6}.$$

Celles de ces fractions rationnelles approchées qui donnent une approximation de même ordre, N, ont été groupées ensemble. Chacune d'elles est représentée, pour une raison qui apparaîtra bientôt, par les coordonnées des points représentatifs qui sont sur la diagonale, parallèle à la droite $x + y = 0$, du carré correspondant. Par exemple, la fraction qui correspond aux points du carré de la figure formé par les parallèles aux axes menées par les points $(0,1)$ et $(2,3)$ est représentée par les notations $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$; l'ordre de l'approximation qu'elle donne est, d'ailleurs, égal à 4.

Exemple de distribution des fractions rationnelles approchées d'une fonction.

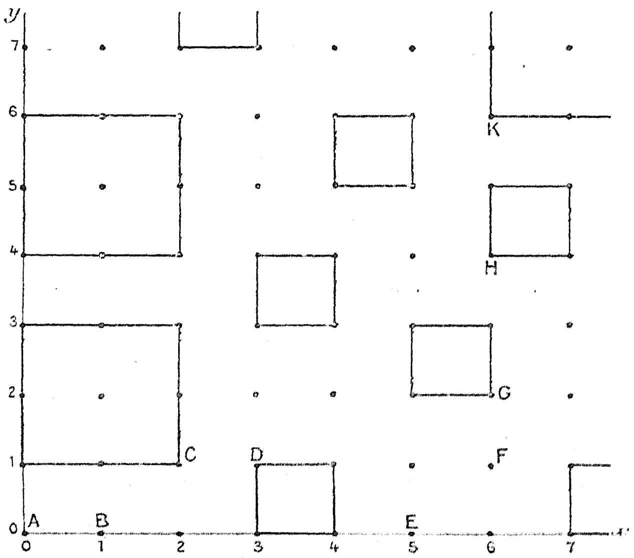
$$y = \frac{1 + x - 2x^3 + x^5 + x^6}{1 - 2x^3 + x^4 + x^6}.$$

$N = 1, \qquad (0,0) = 1.$

$N = 2, \qquad (1,0) = \frac{1}{1 - x}.$

$$N = 3, \qquad (2,0) = \frac{1}{1 - x + x^2}.$$

$$N = 4, \qquad (2,1) = (1,2) = (0,3) = 1 + x.$$



$$N = 5, \qquad (4,0) = (3,1) = \frac{1}{1 - x + x^2 - x^3}.$$

$$N = 6, \qquad (5,0) = \frac{1}{1 - x + x^2 - x^3 + x^5},$$

$$(3,2) = \frac{1 + x + x^2}{1 + x^2 - x^3}.$$

$$N = 7, \qquad (6,0) = \frac{1}{1 - x + x^2 - x^3 + x^5 - 2x^6},$$

$$(5,1) = \frac{1 + 2x}{1 + x - x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5},$$

$$(4,2) = \frac{1 + 2x + x^2}{1 + x - x^4},$$

$$(2,4) = (1,5) = (0,6) = 1 + x + x^4.$$

$$N=8, \qquad (6,1)=\frac{1+x}{1-x^4+x^5-x^6},$$

$$(4,3)=(3,4)=\frac{1+x-x^3}{1-x^3},$$

$$(0,7)=1+x+x^4+x^7.$$

$$N=9, \qquad (8,0)=(7,1)=\frac{1}{1-x+x^2-x^3+x^5-2x^6+2x^7},$$

$$(6,2)=(5,3)=\frac{1+2x+2x^2}{1+x+x^2-x^3-x^5},$$

$$(3,5)=\frac{1+2x+x^2-x^3+x^5}{1+x-x^3},$$

$$(1,7)=\frac{1+2x+x^2+x^4+x^5+x^7}{1+x}.$$

$$N=10, \qquad (7,2)=\frac{2+3x+3x^2}{2+x+2x^2-2x^3-x^5+3x^6+3x^7},$$

$$(5,4)=\frac{1+x+x^2+x^4}{1+x^2-x^3+x^4-x^5},$$

$$(3,6)=\frac{1+2x+2x^2+x^5+x^6}{1+x+x^2-x^3}.$$

$$N=11, \qquad (7,3)=\frac{2-3x^2-6x^3}{2-2x-x^2-5x^3+3x^4-x^5+2x^6+x^7},$$

$$(5,5)=(4,6)=\frac{1+x-x^3+x^4+x^5}{1-x^3+x^4},$$

$$(3,7)=(2,8)=\frac{1+2x+2x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}{1+x+x^2}.$$

$$N=12, \qquad (7,4)=(6,5)=\frac{1-x^2-2x^3+x^4}{1-x-2x^3+2x^4-x^5+x^6},$$

$$(4,7)=\frac{1-2x^2-3x^3+x^4+x^5-x^6-x^7}{1-x-x^2-2x^3+2x^4}.$$

$$N=13, \qquad (5,7)=\frac{1+x-x^2-3x^3+2x^5-x^7}{1-x^2-2x^3+x^4+x^5}.$$

II. — Formules de récurrence et fractions continues holoïdes.

12. Nous n'avons étudié jusqu'ici que les propriétés d'un système Y_1, Y_2 de polynomes considéré isolément. Nous allons rechercher maintenant les rapports qu'ont entre eux les différents systèmes qui correspondent à un même couple de séries S_1, S_2.

Voici d'abord quelques définitions.

Pour que le système Y_1, Y_2 ne corresponde qu'à un seul point du plan, il faut et il suffit que $\lambda = 0$; le système ne correspond alors qu'au point (ν_1, ν_2), et l'ordre de l'approximation en ce point est $\nu_1 + \nu_2 + 1$. Un tel système est dit *normal*.

Tout système qui correspond à plusieurs points du plan est dit, au contraire, *anormal*.

Considérons les droites (D) du plan qui ont pour équation générale $x + y = k$, où k désigne un entier positif ou nul. Elles contiennent tous les points du plan dont les coordonnées sont entières positives ou nulles. Nous donnons à chacune d'elles, pour numéro d'ordre, la valeur du nombre k correspondant. En tout point situé sur la droite k, auquel correspond un système normal, l'ordre de l'approximation est $k + 1$. Considérons, au contraire, un point situé sur la même droite, mais auquel corresponde un système anormal. Soient ν_1, ν_2 les degrés des polynomes de ce système, et $\nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1$ l'ordre de l'approximation. Cet ordre ne sera égal à $k + 1$ que si l'on a

$$k = \nu_1 + \nu_2 + \lambda,$$

c'est-à-dire que si la droite est la diagonale, dont l'équation est

$$x + y = \nu_1 + \nu_2 + \lambda,$$

du carré où se trouvent tous les points représentatifs du système anormal considéré. Selon que k sera plus grand ou plus petit que cette valeur $\nu_1 + \nu_2 + \lambda$, en d'autres termes, selon que la droite considérée sera, par rapport à l'origine, au delà ou en deçà de la diagonale du carré, le nombre $k + 1$ sera supérieur ou inférieur à l'ordre de l'approximation aux différents points de la droite qui correspondent au système anormal considéré.

Nous appellerons *points représentatifs principaux* d'un système ceux des points représentatifs du système qui sont sur la diagonale, parallèle à la droite $x+y=0$, du carré des points représentatifs; si un système est normal, son unique point représentatif est principal. Tous les points représentatifs principaux placés sur une même droite (D) quelconque correspondent à une même approximation, égale à $k+1$ pour la droite (D) dont le numéro est k. En raison de cette propriété, nous appellerons les droites (D) *droites d'égale approximation*.

Nous dirons qu'un système est *plus avancé* qu'un autre quand l'approximation qu'il donne est plus grande; ses points représentatifs principaux sont alors sur une droite d'égale approximation plus éloignée de l'origine; nous les dirons aussi *plus avancés* que les points représentatifs principaux de l'autre système.

Nous dirons de deux points représentatifs (μ_1, μ_2), (μ'_1, μ'_2) qu'ils sont *contigus*, lorsque la valeur numérique des différences $\mu'_1-\mu_1$, $\mu'_2-\mu_2$ ne surpasse pas l'unité; nous dirons enfin que deux systèmes sont *contigus* quand ils correspondent à des points représentatifs contigus.

13. Considérons deux systèmes Y_1, Y_2 et Y'_1, Y'_2. Soient ν_1 et ν_2 les degrés respectifs des polynomes du premier système, et $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$ l'ordre de l'approximation qui lui correspond; ν'_1, ν'_2 et $\nu'_1+\nu'_2+\lambda'+1$ les nombres analogues relatifs au second système. Supposons encore que ce second système soit plus avancé que le premier, en sorte qu'ils sont nécessairement distincts et que l'on a

$$\nu_1+\nu_2+\lambda+1<\nu'_1+\nu'_2+\lambda'+1.$$

Nous nous proposons d'évaluer les degrés du premier et du dernier terme du déterminant

$$\Delta=Y_1Y'_2-Y_2Y'_1,$$

supposé ordonné suivant les puissances ascendantes de x.

On a identiquement

$$S_1\Delta=S_1Y_1.Y'_2-S_1Y'_1.Y_2=Y'_2(S_1Y_1+S_2Y_2)-Y_2(S_1Y'_1+S_2Y'_2);$$

comme les parenthèses, dans le dernier membre, sont divisibles respectivement par $x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}$ et $x^{\nu'_1+\nu'_2+\lambda'+1}$, tandis que S_1, Y_2 et Y'_2 ont chacun un terme constant différent de zéro, on voit que le premier terme de Δ est de degré $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$.

Quant au dernier terme, son degré est au plus égal au plus grand des deux nombres

$$\nu_1+\nu'_2, \quad \nu_2+\nu'_1.$$

Maintenant, si l'on suppose les deux systèmes contigus, on a évidemment, soit

$$\nu'_1=\nu_1+\lambda+1, \qquad \nu'_2\leqq\nu_2+\lambda+1,$$

soit

$$\nu'_1\leqq\nu_1+\lambda+1, \qquad \nu'_2=\nu_2+\lambda+1.$$

Dans le premier cas, on a

$$\nu_1+\nu'_2\leqq\nu_1+\nu_2+\lambda+1, \qquad \nu_2+\nu'_1=\nu_1+\nu_2+\lambda+1$$

et, dans le second,

$$\nu_1+\nu'_2=\nu_1+\nu_2+\lambda+1, \qquad \nu_2+\nu'_1\leqq\nu_1+\nu_2+\lambda+1;$$

en sorte qu'alors Δ, qui n'est pas identiquement nul, se réduit nécessairement à un monome de degré $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$. Ainsi :

Si deux systèmes Y_1, Y_2 et Y'_1, Y'_2 sont contigus et inégalement avancés, le déterminant $\Delta=Y_1Y'_2-Y_2Y'_1$ se réduit à la forme

$$\Delta=h\,x^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1},$$

h désignant une constante différente de zéro, et $\nu_1+\nu_2+\lambda+1$ l'ordre de l'approximation donnée par le moins avancé des deux systèmes.

14. Considérons maintenant trois systèmes de polynomes

$$(5) \qquad Y_1\,Y_2;\quad Y'_1,\,Y'_2;\quad Y''_1,\,Y''_2,$$

dont chacun soit contigu au précédent et plus avancé que lui. Si l'on pose

$$\alpha Y_1+a\,Y'_1=Y''_1,$$
$$\alpha Y_2+a\,Y'_2=Y''_2,$$

et que l'on résolve par rapport à α et a, on obtient

$$\alpha = \frac{Y''_1 Y'_2 - Y''_2 Y'_1}{Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1}, \qquad a = \frac{Y_1 Y''_2 - Y_2 Y''_1}{Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1}.$$

Dans ces formules, le dénominateur n'est autre que le déterminant Δ que nous venons de voir être égal à $hx^{\nu_1+\nu_2+\lambda+1}$, $\nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1$ désignant l'ordre de l'approximation donnée par le système Y_1, Y_2.

Le numérateur de α est, au signe près, le déterminant analogue à Δ, mais relatif aux deux systèmes Y'_1, Y'_2 et Y''_1, Y''_2, en sorte qu'il est un monome, à coefficient différent de zéro, de degré $\nu'_1 + \nu'_2 + \lambda' + 1$, en désignant par là l'ordre de l'approximation donnée par le système Y'_1, Y'_2.

Donc α est un monome à coefficient différent de zéro, et dont l'exposant, également différent de zéro, est égal à la différence

$$\nu'_1 + \nu'_2 + \lambda' + 1 - (\nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1)$$

des ordres des approximations données par les deux premiers des systèmes (5).

Le numérateur de a est encore un déterminant Δ, mais qui n'est plus relatif à deux systèmes contigus et ne se réduit pas, par conséquent, nécessairement à un monome; le terme de moindre degré est de degré $\nu_1 + \nu_2 + \lambda + 1$. Donc a se réduit à un polynome ayant un terme constant différent de zéro.

On obtient ainsi cette proposition :

Si l'on représente par

$$Y_1, Y_2; \quad Y'_1, Y'_2; \quad Y'_1, Y''_2$$

trois systèmes de polynomes tels que chaque groupe soit contigu au précédent et plus avancé que lui, on a

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha Y_1 + a Y'_1 = Y''_1, \\ \alpha Y_2 + a Y'_2 = Y''_2, \end{cases}$$

où α désigne un monome à coefficient et exposant différents de zéro, dont le degré est égal à la différence des ordres des approximations données par les deux premiers systèmes, et a un polynome à terme constant différent de zéro.

15. On peut alors imaginer aisément une succession A, B, C, ..., H, K, L, ... de systèmes de polynomes tels que trois systèmes consécutifs quelconques satisfassent aux conditions imposées dans ce théorème; et, alors, les deux polynomes de chaque système, à partir du troisième, seront rattachés, par une suite de relations de la forme (6), aux polynomes des deux premiers systèmes A, B.

Remarquons que rien n'établit que les successions ainsi formées soient les seules qui donnent lieu à de telles relations de récurrence. Il en existe d'autres, en effet, dans certains cas très spéciaux; mais je n'entreprendrai pas ici leur discussion, et renverrai, pour ce qui les concerne, à la seconde partie de ma Thèse de doctorat *Sur la représentation approchée, etc.* (*Ann. sc. de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. IX, 1892).

16. Je n'approfondirai pas non plus davantage l'étude des degrés des éléments α et a des formules (6), dans les différents cas qui résultent de la considération des diverses positions relatives que peuvent avoir les trois systèmes de polynomes qui figurent dans ces formules. Cette étude conduit, en particulier, lorsque tous les systèmes de polynomes sont normaux, à la notion des successions qui donnent naissance aux algorithmes réguliers, c'est-à-dire des successions telles que les éléments α correspondants aient tous le même degré, ainsi que les éléments a. Je renverrai aussi, sur ce sujet, à ma Thèse de doctorat et à mon Mémoire *Sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle* (*Ann. sc. de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XVI, 1899).

17. Les formules (6) ont la forme de celles par lesquelles se calculent les réduites consécutives d'une fraction continue où les numérateurs et les dénominateurs partiels seraient désignés respectivement par les lettres α et a.

Imaginons donc que l'on ait formé une fraction continue dont les deux premières réduites, A, B, soient

$$-\frac{Y_2}{Y_1}, \quad -\frac{Y'_2}{Y'_1},$$

et dont les numérateurs et dénominateurs partiels suivants soient respectivement les quantités α et a des formules (6) qui se rapportent au calcul des systèmes successifs C, D, ..., H, K, L, ... de polynomes : les réduites de la fraction ainsi formée seront évidemment

$$-\frac{Y_2}{Y_1},\quad -\frac{Y'_2}{Y'_1},\quad -\frac{Y''_2}{Y''_1},\quad \ldots,$$

c'est-à-dire des fractions rationnelles approchées (n° 8) de la fonction $\frac{S_1}{S_2}(x)$.

Les numérateurs partiels de la fraction continue sont donc tous, abstraction faite des deux premiers, des monomes à coefficient et exposant différents de zéro ; les dénominateurs partiels sont, les deux premiers exceptés, des polynomes à terme constant différent de zéro ; enfin, les réduites sont toutes des fractions rationnelles approchées d'une même fonction. J'ai donné aux fractions continues de cette nature le nom de fractions continues *holoïdes* (*Sur les développements en fractions continues*, etc., n° 24).

En faisant usage de cette dénomination, nous énoncerons le théorème suivant :

Si l'on considère une succession de systèmes de polynomes

$$Y_1, Y_2;\quad Y'_1, Y'_2;\quad Y''_1, Y''_2;\quad \ldots$$

telle que chaque système soit contigu au précédent et plus avancé que lui, ces systèmes sont les couples de termes des réduites successives d'une fraction continue holoïde.

18. *Exemples.* — Reportons-nous au Tableau, donné dans le n° 11, des systèmes de polynomes approchés relatifs aux deux fonctions

$$S_1 = 1 + x - 2x^3 + x^5 + x^6,$$
$$S_2 = 1 - 2x^3 + x^4 + x^6.$$

Nous les avons précisément écrits sous la forme de fractions rationnelles approchées de la fonction unique $\frac{S_1}{S_2}(x)$.

1° Si l'on extrait de ce Tableau les diverses fractions que l'on rencontre en se déplaçant, à partir de l'origine, sur la diagonale $y=x$, on obtient les fractions suivantes :

$$1, \quad 1+x, \quad \frac{1+x-x^3}{1-x^3}, \quad \frac{1+x-x^3+x^4+x^5}{1-x^3+x^4}, \quad \frac{1+x-2x^3+x^5+x^6}{1-2x^3+x^4+x^6},$$

dont la dernière est la fonction $\frac{S_1}{S_2}(x)$ elle-même. Ces fractions sont les réduites successives de la fraction continue

$$1+\cfrac{x}{1-\cfrac{x^3}{1+\cfrac{x^4}{1-\cfrac{x^3}{1}}}}.$$

Les valeurs de l'ordre N de l'approximation donnée par ces fractions sont

$$1, \quad 4, \quad 8, \quad 11, \quad \infty;$$

si, négligeant le dernier terme de cette suite, on retranche chaque terme du suivant, on trouve les nombres

$$3, \quad 4, \quad 3,$$

qui sont bien les degrés des numérateurs partiels de la fraction continue à partir de celui qui intervient dans le calcul de la troisième réduite.

2° Considérons pareillement les fractions suivantes, extraites du même Tableau, où les points auxquels elles correspondent ont été désignés par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, K :

$$1, \quad \frac{1}{1-x}, \quad 1+x, \quad \frac{1}{1-x+x^2-x^3}, \quad \frac{1}{1-x+x^2-x^3+x^5},$$
$$\frac{1+x}{1-x^4+x^5-x^6}, \quad \frac{1+2x+2x^2}{1+x+x^2-x^3-x^5}, \quad \frac{1-x^2-2x^3+x^4}{1-x-2x^3+2x^4-x^5+x^6},$$
$$\frac{1+x-2x^3+x^5+x^6}{1-2x^3+x^4+x^6};$$

elles forment également une suite de fractions contiguës et de plus en plus avancées. Elles sont les réduites successives de la fraction continue holoïde que voici :

$$1+\cfrac{x}{1-x+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1-x+\cfrac{x}{1-x-x^2+\cfrac{2x}{1-x+\cfrac{x^2}{1+x-\cfrac{x}{2-3x+x^2+\cfrac{2x^3}{1+x+x^2}}}}}}}}.$$

Les valeurs successives du nombre N sont, dans ce cas,

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 8,\quad 9,\quad 12,\quad \infty,$$

qui, en ne tenant pas compte du dernier terme, donnent les différences successives

$$1,\quad 2,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 1,\quad 3;$$

ce sont les degrés des numérateurs partiels de la fraction continue à partir de celui qui concourt à la formation de la troisième réduite.

III. — Les fractions continues canoniques.

19. Une généralisation naturelle des opérations par lesquelles on convertit, en Arithmétique, un nombre quelconque en fraction continue conduit, comme on sait, à la transformation de toute série ordonnée suivant les puissances descendantes de la variable, en une fraction continue, unique et parfaitement déterminée, de la forme

$$p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\cfrac{1}{p_3+\dots}}},$$

où $p_1, p_2, p_3, \dots$ désignent des polynomes entiers, *du premier degré au moins,* et p_0 un polynome entier qui peut se réduire à une constante quelconque.

J'appellerai cette fraction continue la fraction continue *canonique* correspondante à la série donnée.

L'objet de cette troisième partie est l'étude des rapports qui existent entre la théorie des fractions rationnelles approchées et des fractions continues holoïdes correspondant à une même série, telle que nous l'avons exposée dans ce qui précède, et la théorie du développement d'une fonction en fraction continue canonique.

Étant donnée une série entière $\frac{S_1}{S_2}(x)$ que nous désignerons simplement par $u(x)$, savoir :

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots,$$

où c_0 est supposé différent de zéro, il lui correspond une infinité de fractions rationnelles approchées et de fractions continues holoïdes; et, dans ce qui précède, nous avons fait l'étude des relations qu'ont entre eux ces différents éléments.

Si, maintenant, nous faisons le changement de variable

$$x = \frac{1}{y},$$

la série $u(x)$ se transforme en une série procédant suivant les puissances descendantes de y

$$u\left(\frac{1}{y}\right) = c_0 + \frac{c_1}{y} + \frac{c_2}{y^2} + \frac{c_3}{y^3} + \ldots;$$

chaque fraction rationnelle approchée devient, en multipliant par une puissance convenable de y, une fraction irréductible à termes entiers en y; chaque fraction continue holoïde se change en une fraction continue dont les éléments peuvent être de même rendus entiers en y. Nous voulons rechercher dans quelles relations se tiennent ces quantités dépendantes de y, et dans quel rapport elles se trouvent avec la théorie des fractions continues canoniques.

20. J'examinerai d'abord le cas, très simple, où toutes les fractions rationnelles approchées de $u(x)$ sont normales.

Il y a deux fractions continues holoïdes qui ont pour réduites les fractions rationnelles approchées dont les points représentatifs sont placés sur la bissectrice de l'angle xOy des axes de coordonnées.

L'étude des degrés des éléments α et a, faite dans la seconde Partie, montre que l'une de ces fractions continues est de la forme

$$r_1 + \cfrac{r_2 x}{1 + s_2 x + \cfrac{r_3 x^2}{1 + s_3 x + \cfrac{r_4 x^2}{1 + s_4 x + \cfrac{r_5 x^2}{1 + s_5 x + \ldots}}}},$$

où $r_1, r_2, r_3, \ldots$ désignent des quantités constantes toutes différentes de zéro, et $s_2, s_3, s_4, \ldots$ des quantités constantes qui peuvent être égales à zéro.

Remplaçons x par $\frac{1}{y}$ dans cette fraction; il vient

$$r_1 + \cfrac{\frac{r_2}{y}}{1 + \frac{s_2}{y} + \cfrac{\frac{r_3}{y^2}}{1 + \frac{s_3}{y} + \cfrac{\frac{r_4}{y^2}}{1 + \frac{s_4}{y} + \ldots}}} = r_1 + \cfrac{r_2}{y + s_2 + \cfrac{r_3}{y + s_3 + \cfrac{r_4}{y + s_4 + \ldots}}}$$

Cette nouvelle fraction continue est canonique; je dis que c'est la fraction continue canonique de la série $u\left(\frac{1}{y}\right)$.

Ses réduites s'obtiennent, en effet, évidemment, en remplaçant x par $\frac{1}{y}$ dans celles de la fraction continue holoïde d'où elle provient. Considérons, alors, la réduite de cette dernière fraction correspondante au point (μ, μ) de la bissectrice, et désignons-la par $\frac{U(x)}{V(x)}$, en sorte que $U(x)$ et $V(x)$ désignent des polynomes entiers en x dont le degré est exactement égal à μ, et qui ont l'un et l'autre un terme constant différent de zéro. On a la relation

$$u(x) = \frac{U(x)}{V(x)} + A' x^{2\mu+1} + A'' x^{2\mu+2} + \ldots,$$

où A' est une quantité constante différente de zéro. Si nous y introduisons $\frac{1}{y}$ à la place de x, elle devient

$$u\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{U\left(\frac{1}{y}\right)}{V\left(\frac{1}{y}\right)} + \frac{A'}{y^{2\mu+1}} + \frac{A''}{y^{2\mu+2}} + \ldots.$$

Si l'on rend entiers les termes de la fraction

$$\frac{U\left(\frac{1}{y}\right)}{V\left(\frac{1}{y}\right)},$$

en les multipliant tous deux par y^μ, ils deviennent l'un et l'autre de degré μ; et, comme, d'après l'égalité précédente, la différence entre $u\left(\frac{1}{y}\right)$ et cette fraction est, par rapport à $\frac{1}{y}$, infiniment petite d'ordre $2\mu+1$, il en résulte que la fraction est bien l'une des réduites de la fraction continue canonique relative à la série $u\left(\frac{1}{y}\right)$.

21. Les fractions rationnelles approchées de $u(x)$ étant toujours supposées toutes normales, considérons encore l'une des fractions continues holoïdes dont les réduites sont les fractions rationnelles approchées qui ont leurs points représentatifs sur une parallèle à la bissectrice de l'angle xOy. Soit

$$y - x = \alpha$$

l'équation de cette parallèle, α désignant un entier quelconque que, pour fixer les idées, je supposerai d'abord positif.

La fraction dont il s'agit est de la forme suivante, comme on le reconnaît toujours en s'appuyant sur les considérations développées dans la seconde Partie

$$R_1(x) + \cfrac{r_2 x^{\alpha+1}}{1 + s_2 x + \cfrac{r_3 x^2}{1 + s_3 x + \cfrac{r_4 x^2}{1 + s_4 x + \cfrac{r_5 x^2}{1 + s_5 x + \ldots}}}}$$

$R_1(x)$ désignant un polynome entier en x de degré α, $r_2, r_3, r_4, \ldots$ des constantes toutes différentes de zéro, et $s_2, s_3, s_4, \ldots$ des constantes qui peuvent être nulles.

Remplaçons x par $\frac{1}{y}$; une transformation facile conduit à l'expression que voici :

$$y^{-\alpha}\left[y^\alpha R_1\left(\frac{1}{y}\right) + \cfrac{r_2}{y + s_2 + \cfrac{r_3}{y + s_3 + \cfrac{r_4}{y + s_4 + \ldots}}}\right].$$

La fraction continue placée entre crochets est une fraction continue canonique. On reconnaîtra aisément que c'est celle qui correspond à la série

$$y^\alpha u\left(\frac{1}{y}\right) = c_0 y^\alpha + c_1 y^{\alpha-1} + \ldots + c_{\alpha-1} y + c_\alpha + \frac{c_{\alpha+1}}{y} + \frac{c_{\alpha+2}}{y^2} + \ldots.$$

D'abord il est évident que les réduites de cette fraction se déduisent de celles de la fraction continue holoïde d'où elle provient, par le changement de x en $\frac{1}{y}$, suivi de la multiplication par le facteur y^α.

Considérons alors l'une des réduites de la fraction continue holoïde; soient (μ, ν) les coordonnées de son point représentatif, en sorte que

$$\nu - \mu = \alpha.$$

Si on la représente encore par $\frac{U(x)}{V(x)}$, le polynome $V(x)$ sera de degré μ et $U(x)$ de degré ν ou $\mu + \alpha$. On a, dans ce cas,

$$u(x) = \frac{U(x)}{V(x)} + A' x^{2\mu+\alpha+1} + A'' x^{2\mu+\alpha+2} + \ldots,$$

où la constante A' est différente de zéro, et l'on en conclut, en introduisant $\frac{1}{y}$ au lieu de x et multipliant par y^α,

$$y^\alpha u\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y^{\mu+\alpha} U\left(\frac{1}{y}\right)}{y^\mu V\left(\frac{1}{y}\right)} + \frac{A'}{y^{2\mu+1}} + \frac{A''}{y^{2\mu+2}} + \ldots.$$

Les termes de la première fraction du second membre étant entiers en y, et le degré du dénominateur étant égal à μ, on conclut encore de cette égalité que cette fraction est bien l'une des réduites de la fraction continue canonique correspondant à la série $y^\alpha u\left(\frac{1}{y}\right)$.

22. Nous avons supposé α positif, mais une démonstration toute semblable s'applique au cas où α serait négatif; il faut seulement, dans cette hypothèse, observer que la fraction continue holoïde qui se présente est de la forme

$$\cfrac{1}{R_1(x) + \cfrac{r_2 x^{-\alpha+1}}{1 + s_2 x + \cfrac{r_3 x^2}{1 + s_3 x + \cfrac{r_4 x^2}{1 + s_4 x + \ldots}}}},$$

où $R_1(x)$ est un polynome entier en x de degré égal à $-\alpha$, et où $r_2, r_3, \ldots, s_2, s_3, \ldots$ conservent la même signification que précédemment.

C'est toutefois ici le lieu de faire la remarque suivante.

L'introduction de $\frac{1}{y}$ à la place de x dans la fraction continue précédente conduit à l'expression

$$y^{-\alpha}\left[\cfrac{1}{y^{-\alpha} R_1\left(\frac{1}{y}\right) + \cfrac{r_2}{y + s_2 + \cfrac{r_3}{y + s_3 + \cfrac{r_4}{y + s_4 + \ldots}}}}\right].$$

Si l'on supposait, dans la fraction entre crochets, α non plus négatif, mais nul, cette fraction cesserait d'être une fraction continue canonique, le premier des quotients incomplets n'étant pas de degré au moins égal à 1 par rapport à la variable y. Cette circonstance n'empêche nullement le raisonnement fait précédemment de pouvoir être poursuivi, et il en résulte que les réduites de cette fraction continue non canonique sont les mêmes que les réduites de la fraction continue canonique relative à la série $u\left(\frac{1}{y}\right)$. Nous aurions d'ailleurs rencontré cette fraction non canonique dans le n° 20, si, au lieu de prendre, pour représenter les fractions rationnelles approchées de $u(x)$ dont il est question dans ce numéro, celle des deux fractions continues holoïdes correspondantes qui est de la forme

$$r_1 + \cfrac{r_2 x}{1 + s_2 x + \cfrac{r_3 x^2}{1 + s_3 x + \ldots}},$$

nous avions pris la seconde, qui est de la forme

$$\cfrac{r_1}{1 + \cfrac{r_2 x}{1 + s_2 x + \cfrac{r_3 x^2}{1 + s_3 x + \ldots}}}$$

Nous devrons, dans ce qui suit, tenir compte de cette remarque et regarder la transformée en y de la dernière fraction continue holoïde comme une seconde fraction continue canonique pour la série $u\left(\frac{1}{y}\right)$. Toute série ordonnée suivant les puissances descendantes de la variable, *qui commencera par un terme constant différent de zéro*, sera donc pour nous susceptible de *deux* développements en fractions continues canoniques.

23. En résumant les résultats obtenus jusqu'ici, et qui se rapportent au cas où toutes les fractions rationnelles approchées de $u(x)$ sont normales, on voit que :

Les fractions rationnelles approchées de $u(x)$ qui ont leurs points représentatifs sur une même parallèle, $y - x = \alpha$, à la bissectrice de l'angle $x\mathrm{O}y$, deviennent, quand on y remplace x par $\frac{1}{y}$ et que l'on multiplie par y^α, les réduites successives d'une fraction continue canonique.

Cette fraction continue canonique, qui s'obtient évidemment en appliquant les mêmes transformations à la fraction continue holoïde qui a pour réduites la succession considérée de fractions rationnelles, est celle qui correspond à la fonction

$$y^\alpha u\left(\frac{1}{y}\right).$$

Les fractions continues holoïdes dont il est ici question sont, *en général,* régulières, et constituent la troisième catégorie des fractions continues régulières (n° 16) correspondant à la fonction $u(x)$. Mais, qu'elles soient régulières ou non, *les quotients incomplets* p_1, p_3, ... *des fractions continues canoniques correspondantes sont toujours du premier degré.* La considération à laquelle nous allons passer maintenant d'un Tableau de fractions rationnelles approchées qui ne sont plus toutes normales, va nous amener au cas où cette circonstance ne se présente plus et en donner une interprétation intéressante.

24. Supposons donc maintenant les fractions rationnelles approchées de $u(x)$ normales ou anormales, et soit $\frac{U(x)}{V(x)}$ l'une d'elles. Soient μ et ν les degrés de son dénominateur et de son numérateur, $\mu+\nu+\lambda+1$ l'ordre de l'approximation qui lui correspond; on a alors

$$u(x)=\frac{U(x)}{V(x)}+A'x^{\mu+\nu+\lambda+1}+A''x^{\mu+\nu+\lambda+2}+\ldots, \tag{7}$$

où A′ est une constante différente de zéro.

Cette fraction correspond à tous les points du carré dont les côtés, parallèles aux axes, passent par les points (μ, ν), $(\mu+\lambda, \nu+\lambda)$.

Soit h un nombre entier satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq h \leqq \lambda,$$

en sorte que $(\mu+h, \nu)$ soit l'un des points placés sur le côté $y=\nu$ du carré. Remplaçons, dans (7), x par $\frac{1}{y}$, puis multiplions les deux membres par $y^{\nu-(\mu+h)}$; on obtient

$$y^{\nu-(\mu+h)}u\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y^{\nu}U\left(\frac{1}{y}\right)}{y^{\mu+h}V\left(\frac{1}{y}\right)}+\frac{A'}{y^{2(\mu+h)+\lambda-h+1}}+\frac{A''}{y^{2(\mu+h)+\lambda-h+2}}+\ldots.$$

Le polynome entier en y, $y^{\mu+h}V\left(\frac{1}{y}\right)$, étant de degré $\mu+h$, et

$\lambda - h$ étant positif ou nul, cette égalité établit que la fraction

$$\frac{y^{\nu}\,\mathrm{U}\left(\frac{1}{y}\right)}{y^{\mu+h}\,\mathrm{V}\left(\frac{1}{y}\right)}$$

est l'une des réduites de la fraction continue canonique de la fonction

$$y^{\nu-(\mu+h)}\,u\left(\frac{1}{y}\right).$$

De plus, l'ordre de l'approximation donnée par cette réduite étant $2(\mu+h)+\lambda-h+1$, on en conclut, par les propriétés connues des fractions continues canoniques, que le degré du dénominateur de la réduite suivante sera $(\mu+h)+\lambda-h+1$ et, enfin, que le quotient incomplet correspondant à cette réduite sera de degré $\lambda-h+1$. Or, ce nombre $\lambda-h+1$ est précisément le nombre des points du carré, où figure $\frac{\mathrm{U}(x)}{\mathrm{V}(x)}$, qui se trouvent sur la droite $y-x=\nu-(\mu+h)$.

Si, au lieu de multiplier l'expression de $u\left(\frac{1}{y}\right)$ par $y^{\nu-(\mu+h)}$, on la multiplie par $y^{(\nu+h)-\mu}$, ce qui donne

$$y^{(\nu+h)-\mu}\,u\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y^{\nu+h}\,\mathrm{U}\left(\frac{1}{y}\right)}{y^{\mu}\,\mathrm{V}\left(\frac{1}{y}\right)}+\frac{\mathrm{A}'}{y^{2\mu+\lambda-h+1}}+\frac{\mathrm{A}''}{y^{2\mu+\lambda-h+2}}+\ldots,$$

le même raisonnement établira que la première fraction du second membre est une des réduites de la fraction continue canonique de la fonction $y^{(\nu+h)-\mu}u\left(\frac{1}{y}\right)$, et que le degré du quotient incomplet qui correspond à la réduite suivante est égal au nombre de points du carré, où figure $\frac{\mathrm{U}(x)}{\mathrm{V}(x)}$, qui se trouvent sur la droite

$$y-x=(\nu+h)-\mu.$$

Nous obtenons ainsi ce théorème général :

Si l'on considère la succession des fractions rationnelles approchées distinctes relatives à la série $u(x)$, dont les points représentatifs sont *placés sur la droite*

$$y - x = \alpha,$$

où α désigne un entier quelconque; ces fractions, qui sont les réduites d'une certaine fraction continue holoïde, seront reproduites par la succession des réduites de la fraction continue canonique de la série $y^{\alpha}.u\left(\frac{1}{y}\right)$, quand, après avoir multiplié celles-ci par $y^{-\alpha}$, on remplacera y par $\frac{1}{x}$.

En outre, si un quotient incomplet de cette fraction continue canonique n'est pas du premier degré, c'est que la réduite qui précède celle à laquelle correspond ce quotient reproduit une fraction rationnelle approchée anormale de $u(x)$; et le degré du quotient incomplet est le nombre même des points du carré, où figure cette fraction anormale, qui se trouvent sur la droite $y - x = \alpha$.

25. Pour donner quelques exemples de cette proposition, reprenons la fonction

$$u(x) = \frac{S_1}{S_2}(x) = \frac{1 + x - 2x^3 + x^5 + x^6}{1 - 2x^3 + x^4 + x^6},$$

qui nous a déjà servi dans les nos 11 et 18.

1° Nous avons formé, dans le n° 18, la fraction continue holoïde qui a pour réduites les fractions différentes que l'on trouve en se déplaçant, à partir de l'origine, sur la diagonale $y = x$.

Ces réduites s'obtiendront simplement en remplaçant y par $\frac{1}{x}$ dans la fraction continue canonique de la fonction $u\left(\frac{1}{y}\right)$, savoir :

$$1 + \cfrac{1}{y - \cfrac{1}{y^2 - \cfrac{1}{y^2 - \cfrac{1}{y}}}}.$$

Le troisième et le quatrième des quotients incomplets de cette fraction étant du second degré, la deuxième et la troisième des fractions rationnelles approchées de $u(x)$ que l'on considère seront anormales, et, pour chacune d'elles, deux points représentatifs seront sur la diagonale $y = x$, ce que l'on vérifie bien sur le Tableau du n° 11.

2° Considérons, maintenant, la fraction continue canonique de la fonction

$$y.u\left(\frac{1}{y}\right),$$

qui se forme aisément par la méthode du plus grand commun diviseur. Elle est

$$y+1+\cfrac{1}{y^3-1+\cfrac{1}{y-\cfrac{1}{y^2}}}.$$

Si l'on forme ses réduites, qu'on les multiplie par $\frac{1}{y}$, puis que l'on remplace y par $\frac{1}{x}$, on obtiendra celles des fractions rationnelles approchées de $u(x)$ qui sont sur la droite $y - x = 1$.

Les degrés, égaux à 3 et à 2, du second et du quatrième quotient incomplet de la fraction continue montrent que la première et la troisième de ces fractions rationnelles approchées sont anormales et donnent le nombre de fois que les points représentatifs de chacune d'elles figurent sur la droite $y - x = 1$.

3° Soit encore la fraction canonique de la fonction

$$y^{-1}.u\left(\frac{1}{y}\right).$$

Elle est

$$\cfrac{1}{y-1+\cfrac{1}{y+1+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{-y+\cfrac{1}{-y+\cfrac{1}{y-1+\cfrac{1}{y+1}}}}}}}.$$

Les réduites, multipliées par y, donneront, en remplaçant y par $\frac{1}{x}$, les fractions rationnelles approchées de $u(x)$ placées sur la droite $y - x = -1$. Bien que trois de ces fractions rationnelles approchées soient anormales, à savoir, la deuxième, la quatrième et la sixième, aucune d'elles ne se trouve signalée comme telle par la fraction continue canonique; ce qui tient à ce que la droite $y - x = -1$ passe chaque fois par un sommet du carré des points représentatifs de chacune de ces fractions anormales, et ne contient ainsi qu'un seul des points représentatifs relatifs à chacune d'elles.

26. On sait que la connaissance d'une réduite d'une fraction continue canonique entraîne celle de toutes les réduites précédentes, et, par suite, la connaissance des éléments de la fraction continue jusqu'au quotient incomplet, inclusivement, qui se rapporte à la réduite considérée.

Si donc on suppose qu'une réduite d'une telle fraction devienne, quand on la multiplie par une puissance convenable, $y^{-\alpha}$, de y et que l'on remplace ensuite y par $\frac{1}{x}$, l'une des fractions rationnelles approchées de $u(x)$, cette fraction continue canonique coïncidera nécessairement, jusqu'au quotient incomplet inclusivement, qui se rapporte à la réduite considérée, avec la fraction continue canonique de la fonction $y^\alpha u\left(\frac{1}{y}\right)$.

Une fraction continue canonique est donc impropre à fournir par ses réduites, en leur appliquant les transformations indiquées, toute succession de fractions rationnelles approchées de $u(x)$ autre que l'une de celles dont les points représentatifs sont sur une même parallèle à la bissectrice de l'angle xOy.

Et, inversement, les seules fractions continues holoïdes de $u(x)$ susceptibles d'être transformées, quand on remplace x par $\frac{1}{y}$, puis que l'on multiplie par une puissance convenable de y, en fraction continue canonique, sont celles qui se rapportent à ces mêmes successions de fractions rationnelles approchées.

Ainsi, par exemple, les fractions continues régulières de la première et de la deuxième catégorie qui, en supposant, pour fixer les idées, le point représentatif de la première réduite placé sur Oy et d'ordonnée égale à ν, sont de la forme

$$R_1(x) + \cfrac{r_2 x^{\nu+1}}{1 + \cfrac{r_3 x}{1 + \cfrac{r_4 x}{1 + \ldots}}}, \qquad R_1(x) + \cfrac{r_2 x^{\nu+1}}{1 + s_2 x + \cfrac{r_3 x}{1 + s_3 x + \cfrac{r_4 x}{1 + s_4 x + \ldots}}},$$

$R_1(x)$ désignant un polynome de degré ν et $r_2, r_3, \ldots$ des constantes $\neq 0$, donnent, quand on passe à y, les fractions continues non canoniques

$$y^\nu R_1\left(\frac{1}{y}\right) + \cfrac{r_2}{y + \cfrac{r_3}{1 + \cfrac{r_4}{y + \cfrac{r_5}{1 + \ldots}}}}, \qquad y^\nu R_1\left(\frac{1}{y}\right) + \cfrac{r_2}{y + s_2 + \cfrac{r_3 y}{y + s_3 + \cfrac{r_4 y}{y + s_4 + \ldots}}}.$$

27. Dans ses belles *Recherches sur les fractions continues* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1894 et 1895), Stieltjes prend pour point de départ une fraction continue de la forme

$$(\mathrm{F}) \qquad \cfrac{1}{a_1 y + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 y + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}}$$

On voit immédiatement, par ce qui précède, qu'une telle fraction correspondra à une fraction continue régulière de la première catégorie.

En y remplaçant y par $\frac{1}{x}$ et posant, pour n entier positif ou nul, $r_{n+1} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, avec $a_0 = 1$ elle devient le produit par x de la fraction

$$(\mathrm{A}) \qquad \cfrac{r_1}{1 + \cfrac{r_2 x}{1 + \cfrac{r_3 x}{1 + \ldots}}},$$

fraction continue holoïde régulière dont les réduites ont pour points représentatifs les points

$$(0,0),\quad (1,0)\quad (1,1),\quad (2,1),\quad (2,2),\quad \ldots.$$

Stieltjes établit que, les constantes a étant supposées positives, si la série Σa est divergente, la fraction (F) est convergente et définit une fonction analytique de z dans tout le plan, sauf pour les points de la partie négative de l'axe réel.

Si, au contraire, la série Σa est convergente, la fraction continue est divergente : la suite des réduites de rang pair est convergente, ainsi que celle des réduites de rang impair; chacune de ces suites tend vers une fonction méromorphe dans tout le plan; mais ces fonctions sont différentes l'une de l'autre.

Une distinction s'établit donc ici entre les réduites de rang pair et celles de rang impair. Or il est aisé de former les fractions continues holoïdes correspondantes à chacune de ces suites de réduites. Elles s'obtiennent immédiatement par l'application répétée de l'identité

$$\frac{\alpha}{1+\dfrac{\alpha'}{a'}} = \alpha - \frac{\alpha\alpha'}{\alpha'+a'}$$

à la fraction (A). On obtient ainsi les fractions continues holoïdes

$$\text{(B)}\qquad \cfrac{r_1}{1+\cfrac{r_2 x}{1+r_3 x-\cfrac{r_3 r_4 x^2}{1+(r_4+r_5)x-\cfrac{r_5 r_6 x^2}{1+(r_6+r_7)x-\ldots}}}},$$

$$\text{(C)}\qquad \cfrac{r_1}{1+r_2 x-\cfrac{r_2 r_3 x^2}{1+(r_3+r_4)x-\cfrac{r_4 r_5 x^2}{1+(r_5+r_6)x-\ldots}}},$$

dont la première a pour réduites les réduites de rang impair, et la seconde les réduites de rang pair de (A).

Ces fractions (B) et (C) sont de celles auxquelles correspondent des fractions continues canoniques; celle qui correspond à (B), à savoir

$$\cfrac{r_1}{1+\cfrac{r_2}{y+r_3-\cfrac{r_3 r_4}{y+r_4+r_5-\dots}}},$$

est une fraction continue *exceptionnelle* (n° 22) et peut être mise sous la forme canonique ordinaire

$$r_1-\cfrac{r_1 r_2}{y+r_2+r_3-\cfrac{r_3 r_4}{y+r_4+r_5-\dots}};$$

celle qui correspond à (C),

$$\cfrac{r_1}{y+r_2-\cfrac{r_2 r_3}{y+r_3+r_4-\cfrac{r_4 r_5}{y+r_5+r_6-\dots}}},$$

est signalée par Stieltjes lui-même au début de son Mémoire. Il faut remarquer que celle-ci a pour réduites les réduites de rang pair de la fraction initiale (F), tandis que les réduites de la précédente sont les réduites de rang impair de (F) multipliées par y.

Toutes les réduites de la fraction (A) peuvent faire partie d'un même système de fractions rationnelles approchées, et cette seule fraction continue holoïde détermine toutes les autres fractions rationnelles approchées du système, c'est-à-dire toutes les fractions qui correspondent aux points (μ, ν) autres que ceux auxquels se rapportent les réduites elles-mêmes de la fraction.

A ce point de vue, le Mémoire de Stieltjes apparaît donc comme la plus profonde tentative qui ait été faite jusqu'ici pour *obtenir la définition d'une fonction au moyen d'un système de fractions rationnelles approchées, défini* a priori *par l'une de ses fractions continues holoïdes,* et se rattache complètement aux vues que j'ai brièvement indiquées dans un Mémoire paru, en 1893, dans le Tome XVIII des *Acta mathematica,* et ayant pour titre : *Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles.*

Depuis ce Mémoire, des tentatives remarquables ont été faites dans d'autres directions pour arriver à une utilisation, dans le calcul, des séries divergentes; je demeure néanmoins dans la conviction qu'une nouvelle étude des méthodes de Stieltjes *faite en se plaçant au point de vue de la théorie des fractions continues holoïdes* reste encore la voie la meilleure à suivre pour parvenir au but désiré.

28. J'appellerai, en terminant, l'attention sur deux conséquences de notre étude des fractions continues canoniques.

Sans que j'insiste sur un sujet qui demanderait des développements étendus, je ferai remarquer que le rapprochement que nous venons de faire entre la théorie des fractions continues canoniques et celle des fractions holoïdes donne des indications indispensables pour aborder l'étude de la généralisation des fractions continues algébriques dans le cas de séries ordonnées suivant les puissances descendantes de la variable. Il montre que la simple analogie avec ce qui se passe dans le cas de séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable serait tout à fait trompeuse; et il rendrait, sans doute, compte des difficultés rencontrées, à ce point de vue, par M. Hermite dans son Mémoire *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2ᵉ série, t. XXI).

Enfin, lorsque l'on se reporte à l'origine du développement en fraction continue canonique d'une fonction, considéré comme une extension du développement d'un nombre en fraction continue arithmétique, on est naturellement conduit à se poser les questions suivantes :

Puisque l'on a reconnu que, pour épuiser le système des fractions rationnelles approchées de la série $u(x)$, il faut avoir recours aux fractions continues canoniques des fonctions $y^\alpha u\left(\frac{1}{y}\right)$, où α prend toutes les valeurs entières, n'y a-t-il pas dans la théorie des nombres quelque chose d'analogue? Ne faudrait-il pas, à chaque nombre jouant le rôle de la fonction $u\left(\frac{1}{y}\right)$, en adjoindre une infinité d'autres jouant le rôle des fonctions $y^\alpha u\left(\frac{1}{y}\right)$, et considérer l'ensemble des développements en fractions continues de tous ces nombres, pour créer, au moyen de leurs réduites, l'analogue du Tableau des fractions rationnelles approchées d'une fonction? L'existence, dans l'un de ces développements, d'un quotient incomplet supérieur à l'unité est-il l'indice de l'existence d'une fraction rationnelle approchée anormale, et une loi de distribution de ces fractions anormales existerait-elle, qui serait l'analogue de celle que nous avons obtenue dans la théorie des fractions rationnelles approchées d'une fonction? Questions probablement difficiles, mais dont la solution conduirait sans doute à des résultats du plus haut intérêt pour la théorie des nombres, et que j'indique d'autant plus volontiers que leur solution établirait le lien entre notre théorie des fractions rationnelles approchées d'une fonction et les belles et profondes recherches entreprises par MM. Hurwitz (*Mathematische Annalen*, t. XLIV, 1894) et Minkowski (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XIII, 1896; *Mathematische Annalen*, t. LIV, 1900) sur la représentation approchée d'un nombre au moyen de fractions rationnelles.