ÉTIENNE DELASSUS

Sur les systèmes articulés gauches II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 119-152

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__119_0>

SUR LES SYSTÈMES ARTICULÉS GAUCHES,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

DEUXIÈME PARTIE [1].

I.

Chaînes articulées ouvertes.

1. Considérons une chaîne simple articulée constituée par les corps

$$s_0,\quad s_1,\ \ldots,$$

dont le premier est fixé.

Le corps s_i pouvant jouer librement sur l'articulation A_i prend, par rapport à s_{i-1}, un mouvement relatif à un paramètre ε_i et les différents paramètres ε fournis par les articulations successives sont absolument arbitraires. Les six paramètres a_1, a_2, ..., a_6, qui définissent la position d'un membre quelconque s_i de la chaîne, sont des fonctions des

(1) *Voir* la première Partie *Annales de l'École Normale*, 1900.

paramètres arbitraires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$.

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_6 = f_6(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i). \end{cases}$$

En général, si $i \geqq 6$, les a seront arbitraires, et si $i < 6$ il y aura entre eux exactement $6 - i$ relations distinctes résultant de l'élimination de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i$ entre les équations (1), de sorte que la position de s_i dépendra de i paramètres. C'est le cas banal.

Mais il peut arriver que les i paramètres ε n'entrent pas d'une façon distincte dans les formules (1), c'est-à-dire qu'en éliminant moins de i d'entre eux, les autres s'éliminent d'eux-mêmes et qu'on soit par conséquent conduit à plus de $6 - i$ relations entre les a. Le corps dépendra alors de moins de i paramètres, et pour qu'il en soit ainsi il faudra qu'il existe certaines relations entre les constantes qui définissent la chaîne jusqu'au corps s_i.

Je me propose de former ces équations ou, plus exactement, de résoudre le problème suivant :

Étant donnée une chaîne simple ouverte, déterminer le nombre de paramètres dont dépend effectivement le mouvement d'un quelconque de ses membres.

2. Cette recherche se relie intimement aux études faites dans la première Partie de ce Mémoire au moyen des remarques suivantes :

Désignons d'une façon générale par p_i le nombre de paramètres dont dépend s_i. Considérons s_{i+1} et ne donnons à ce corps aucun mouvement relatif par rapport à s_i, c'est-à-dire laissons invariable le paramètre ε_{i+1} ; s_{i+1} est invariablement lié à s_i, donc dépend *effectivement*, dans ces conditions, de p_i paramètres. Si alors nous laissons variable ε_{i+1}, nous ne diminuerons certainement pas le nombre de paramètres dont dépend s_{i+1} et nous l'augmenterons en général d'une unité, de sorte que

En général, on aura (pour $p_i < 6$)

$$p_{i+1} = p_i + 1;$$

et il pourra arriver que l'on ait

$$p_{i+1} = p_i.$$

Ces deux cas sont les seuls possibles.

Si c'est le second qui se présente, nous dirons qu'il y a *réduction d'ordre p_i sur l'articulation* A_{i+1} qui sépare les deux corps dépendant du même nombre p_i de paramètres. Supposons qu'il y ait, dans la chaîne, plusieurs réductions du même ordre p_i; les corps s_i et s_{i+1} dépendent tous deux de p_i paramètres et il peut arriver qu'il en soit de même pour $s_{i+2}, \ldots, s_k$; si à ce moment la réduction cesse, c'est que l'on a

$$p_k = p_i, \qquad p_{k+1} = p_i + 1,$$

et comme le nombre p_j ne va jamais en décroissant quand on fait croître j, les corps à partir de s_{k+1} dépendront tous de plus de p_i paramètres, de sorte qu'il ne pourra plus se produire de réduction d'ordre p_i. Nous ne considérerons pas comme distinctes des réductions consécutives d'un même ordre p_i; leur ensemble constituera *une réduction multiple d'ordre p_i*. Ainsi :

Dans une chaîne simple ouverte, le nombre des réductions simples ou multiples d'ordre p_i et distinctes ne peut être que 0 *ou* 1.

Considérons deux corps consécutifs s_j, s_{j+1} dépendant tous deux de p_i paramètres. s_j peut jouer librement sur l'articulation A_j et dépend de p_i paramètres; donc A_j ne dépend que de $p_i - 1$ paramètres; en raisonnant de même sur s_{j+1} et A_{j+1}, on trouve le même résultat pour A_{j+1}, de sorte que le corps s_j à p_i paramètres possède deux articulations simples *non équivalentes* et ne dépendant que de $p_i - 1$ paramètres. Si donc nous convenons de dire qu'*un membre de la chaîne a un mouvement spécial,* si son mouvement est spécial, simple ou complexe, relativement aux deux articulations qu'il possède dans cette chaîne, nous pouvons énoncer la propriété fondamentale suivante :

S'il y a réduction sur l'articulation A_{j+1}, *le membre* s_j *a un mouvement spécial.*

Mais les mouvements spéciaux trouvés dans la première Partie étant au moins à deux paramètres, il en résulte immédiatement ce corollaire :

Il n'y a jamais de réduction d'ordre 1, *autrement dit le corps* S_1 *dépend toujours de un paramètre et le corps* S_2 *de deux paramètres.*

Nous devons y ajouter le corollaire suivant, encore plus évident, mais que nous utiliserons souvent.

S'il y a réduction sur l'articulation A_{j+1}, *on peut, sans changer la nature du mouvement de* S_{j+1} *et des membres suivants, supprimer l'articulation* A_{j+1}.

Les réductions multiples se ramènent aux réductions simples de la façon suivante : considérons un corps S ayant un mouvement spécial Σ_α^β simple ou complexe; nous avons trouvé que, dans ce corps à p paramètres, il y avait une infinité d'articulations simples ne dépendant que de $p-1$ paramètres. Désignons cet ensemble d'articulations par $\mathcal{A}_\alpha^\beta$; il suffit d'examiner les sept mouvements spéciaux du Tableau I (première Partie) pour constater immédiatement que cet ensemble reste invariable comme position lorsqu'on le fait mouvoir d'un mouvement d'ensemble et avec une amplitude quelconque autour d'une quelconque des articulations qui le composent.

Convenons alors de dire qu'un nombre limité d'articulations présente la disposition $\mathcal{A}_\alpha^\beta$ si elles appartiennent toutes à un ensemble $\mathcal{A}_\alpha^\beta$ et supposons qu'une chaîne

$$S_j, \quad S_{j+1}, \quad \ldots, \quad S_k$$

soit telle que, pour une forme déterminée, ses articulations

$$A_j, \quad A_{j+1}, \quad \ldots, \quad A_k, \quad A_{k+1}$$

présentent la disposition $\mathcal{A}_\alpha^\beta$; il résultera des remarques précédentes qu'en déformant cette chaîne d'une façon quelconque les articulations présenteront toujours cette disposition.

Considérons alors une réduction multiple portant sur les articulations

$$A_{j+1}, \quad \ldots, \quad A_k.$$

Le corps S_j aura un mouvement spécial Σ_α^β relativement à ses deux articulations A_j et A_{j+1}, qui appartiennent ainsi à l'ensemble $\mathcal{A}_\alpha^\beta$. Considérons alors un système de valeurs fixes

$$\varepsilon_{j+1}^0, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k^0;$$

pour les paramètres relatifs aux articulations $A_{j+1}, \ldots, A_k$; il résulte immédiatement d'un corollaire énoncé précédemment qu'on ne change pas la nature des mouvements des membres $s_{j+1}, \ldots, s_k$ en donnant aux ε ces valeurs fixes. Les corps s continueront à dépendre de p_i paramètres, et les articulations $A_{j+1}, \ldots, A_k$ à dépendre seulement de $p_i - 1$ paramètres. Mais, dans ces conditions, $s_j, s_{j+1}, \ldots, s_k$ constituent un seul corps solide dépendant de p_i paramètres, et $A_{j+1}, \ldots, A_k$ sont des articulations simples tracées dans s_j; comme s_j a un mouvement spécial Σ_α^β, qu'il dépend de p_i paramètres et que toutes ces articulations ne dépendent que de $p_i - 1$ paramètres, elles font partie de l'ensemble $\mathcal{A}_\alpha^\beta$ et, en vertu d'une remarque précédente, cette disposition se conservera quand on rendra leur variabilité aux paramètres $\varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_k$.

La réciproque est évidente, car, en donnant aux ε les valeurs fixes précédentes, chacun des corps $s_{j+1}, \ldots, s_k$, étant invariablement lié à s_j, possède le mouvement spécial Σ_α^β pour ses deux articulations, et ce mouvement reste le même quand on rend leur variabilité aux ε.

Nous pouvons alors énoncer la propriété suivante :

Pour qu'il y ait réduction multiple portant sur les articulations

$$A_{j+1}, \quad \ldots, \quad A_k,$$

il faut et il suffit :

1° *Que le membre s_j possède un mouvement spécial Σ_α^β;*

2° *Que les articulations*

$$A_j, \quad A_{j+1}, \quad \ldots, \quad A_k$$

présentent la disposition correspondante $\mathcal{A}_\alpha^\beta$.

Comme les dispositions $\mathcal{A}_\alpha^\beta$ ne sont qu'au nombre de sept et qu'elles sont parfaitement connues par le Tableau I de la première Partie de ce Mémoire, nous pouvons dire que le problème de la réduction multiple sur les articulations $A_{j+1}, \ldots, A_k$ sera complètement résolu lorsque nous saurons reconnaître la réduction simple sur l'articulation A_{j+1} et résumer ainsi ce paragraphe :

L'étude des réductions dans les chaînes articulées ouvertes se ramène à la recherche des membres qui ont des mouvements spéciaux.

3. *Image sphérique d'une chaîne ouverte.* — Dans chacun des corps $S_0, S_1, \ldots$, traçons un trièdre; nous obtiendrons une suite $T_0, T_1, \ldots$ à laquelle nous ferons correspondre des trièdres $t_0, t_1, \ldots$ ayant une origine fixe et tels que le trièdre t_i soit constamment parallèle au trièdre T_i. Supposons que deux corps S_i et S_{i+1} soient reliés par une glissière; le mouvement relatif de T_{i+1} par rapport à T_i étant une translation, l'orientation du trièdre T_{i+1} par rapport au trièdre T_i restera invariable; il en sera de même pour t_{i+1} par rapport à t_i, et comme ces deux derniers trièdres ont même origine, le trièdre t_{i+1} n'aura aucun mouvement relatif par rapport à t_i, ces deux trièdres seront invariablement liés l'un à l'autre. Supposons au contraire que S_i et S_{i+1} soient reliés par une vis ou un rotoïde; l'axe de cette articulation fera des angles invariables avec les arêtes des trièdres T_i et T_{i+1} dont la parallèle à cet axe menée par O sera invariablement liée aussi bien au trièdre t_i qu'au trièdre t_{i+1}, le mouvement relatif de ces deux trièdres sera le même que s'ils étaient reliés par un rotoïde ayant cette parallèle pour axe.

A la chaîne $S_0, S_1, S_2, \ldots$ nous ferons correspondre une chaîne $s_0, s_1, s_2, \ldots$, dont tous les corps sont reliés les uns aux autres par des rotoïdes concourants.

Le rotoïde a_i n'existe pas si A_i est une glissière; si A_j et A_k sont deux vis ou rotoïdes séparés par des glissières, leur angle reste constant et c'est aussi celui des deux rotoïdes concourants A_j et A_k. C'est cette nouvelle chaîne qui sera appelée l'*image sphérique;* elle sera très commode pour déterminer les nombres de paramètres dont dépendent des directions de droites attachées à un corps S_i; nous considérons, dans le corps s_i de l'image sphérique, la droite d menée par le point fixe parallèlement à la droite D de S_i; le nombre de paramètres dont dépendra d dans la déformation arbitraire de la chaîne sphérique sera précisément le nombre de paramètres dont dépend la direction de D dans la déformation de la chaîne primitive.

4. *Réduction du second ordre.* — Une telle réduction a lieu sur l'articulation A_3 et le membre s_2 doit avoir un mouvement spécial du second ordre, c'est-à-dire, soit Σ_2^1, soit Σ_2^2.

1° *Réduction* Σ_2^1. — Le corps s_2 doit avoir une droite Δ fixe et les articulations A_2 et A_3 doivent avoir la disposition Σ_2^1 relativement à cette droite. A_2 étant une glissière parallèle à Δ ou une vis ayant Δ pour axe, la droite Δ peut être considérée comme une droite invariablement liée à s_1, et elle ne peut rester fixe que si A_1 est aussi une glissière parallèle à Δ ou une vis ayant Δ pour axe.

On peut dire que A_1, A_2, A_3 doivent être des vis de pas fini ou infini et ayant un même axe.

2° *Réduction* Σ_2^2. — Ce mouvement de s_2 étant un mouvement dans lequel l'orientation de s_2 reste fixe, le corps s_2 de l'image sphérique doit être fixe, ce qui exige que les articulations a_1, a_2 n'existent pas, autrement dit que A_1 et A_2 soient des glissières. En outre, le plan P, parallèle au deux glissières A_2, A_3, doit être fixe. Ce plan est entraîné avec s_2 et, si l'on ne fait pas jouer l'articulation A_2, il est entraîné par le glissement sur A_1 et il ne peut rester fixe dans ces conditions que si A_1 lui est parallèle.

On voit ainsi que la réduction Σ_2^2 est caractérisée par ce fait que A_1, A_2, A_3 sont trois glissières parallèles à un même plan.

5. *Réduction du troisième ordre sans réduction du second ordre.* — Cette réduction a lieu sur A_4, et s_3 doit avoir un mouvement spécial du troisième ordre simple ou complexe et nous avons les cinq genres Σ_3^1, Σ_3^2, Σ_3^3, Σ_2^1, Σ_2^2.

1° *Réduction* Σ_3^1. — A_3 et A_4 sont des vis de pas h parallèles à une direction Δ ou des glissières perpendiculaires à Δ et cette droite Δ a une direction fixe; il en résulte immédiatement, par la considération de l'image sphérique, que A_1, A_2 doivent être des vis parallèles à cette direction Δ ou des glissières.

Cela ne suffit pas. Soit φ l'angle dont tourne s_3 autour de Δ et λ sa translation le long de Δ; pendant la déformation de la chaîne, on doit toujours avoir

$$\frac{\lambda}{\varphi} = \frac{h}{2\pi}, \tag{1}$$

la constante h pouvant être nulle si l'on est dans le cas particulier σ_3^1, mais ne pouvant pas être infinie. Supposons alors que, parmi A_1, A_2, il y ait une glissière G; déformons la chaîne en ne faisant jouer que cette seule articulation, φ restera constamment nul et λ prendra des valeurs arbitraires, ce qui est incompatible avec la condition (1) à moins que G ne soit perpendiculaire à Δ, car λ restera alors constamment nul, comme φ. Supposons ensuite que, parmi A_1, A_2, il y ait une vis V de pas h'; elle est parallèle à Δ, de sorte qu'en ne faisant jouer que cette seule articulation, λ et φ vérifieront la relation

$$\frac{\lambda}{\varphi} = \frac{h'}{2\pi},$$

qui, comparée à (1), donne

$$h' = h.$$

Ainsi, pour que s_3 ait un mouvement Σ_3^1 relatif à la direction Δ et au pas h, il faut que A_1, A_2, A_3 soient des vis de pas h parallèles à Δ ou des glissières perpendiculaires à Δ. On vérifie immédiatement que ces conditions sont suffisantes quand on tient compte de l'hypothèse essentielle qu'il n'y a pas de réduction d'ordre deux.

2° *Réduction* Σ_3^2. — A_3 et A_4 sont deux rotoïdes dont les axes concourent en un point O; ce point est fixe dans s_2 et il doit être fixe dans l'espace. On voit immédiatement, sans même qu'il soit nécessaire de recourir aux mouvements mixtes pour le genou, que A_1 et A_2 doivent être des rotoïdes dont les axes passent aussi en O.

Ainsi A_1, A_2, A_3 et A_4 doivent être des rotoïdes dont les axes sont concourants.

3° *Réduction* Σ_2^3. — A_3 et A_4 sont des glissières, s_3 doit avoir une orientation invariable, s_3 doit être fixe, donc a_1, a_2 et a_3 n'existent pas, autrement dit, A_1 et A_2 sont aussi des glissières. Ainsi A_1, A_2, A_3, A_4 doivent être des glissières, et l'on reconnaît que cela suffit.

4° *Réduction* Σ_2^1. — Il y a dans s_3 une droite Δ qui ne doit dépendre que d'un paramètre, et A_3 et A_4 sont des vis de pas fini ou infini ayant Δ pour axe. La droite Δ est fixe dans s_2, de sorte que ce corps doit avoir un mouvement mixte pour son articulation A_2 et la droite Δ. Il y a alors deux cas possibles.

En premier lieu, l'articulation A_2 est portée par la droite Δ, alors A_2, A_3 et A_4 ont la disposition trouvée dans le cas de la réduction Σ_2^1 du second ordre, le mouvement relatif de s_3 par rapport à s_1 est le mouvement spécial Σ_2^1, de sorte que le mouvement absolu de s_3 est bien un mouvement spécial complexe formé avec Σ_2^1. C'est un cas évident *a priori*, et qui se ramène à une réduction du second ordre en immobilisant le corps s_1.

En second lieu, s_2 a un mouvement spécial pour A_2 et une articulation convenablement choisie et portée sur Δ; si ce mouvement est Σ_2^1, son axe Δ' doit être parallèle à Δ, les articulations A_1, A_2 sont portées par Δ', et A_2 n'est pas une glissière, sans quoi l'on pourrait la considérer comme portée par Δ et l'on retomberait sur le cas précédent. Si le mouvement spécial de s_2 est Σ_2^2, qui admet toutes les glissières perpendiculaires à une même direction Δ', cette direction Δ' est forcément perpendiculaire à Δ.

La réduction Σ_2^1 d'ordre 3 se présente ainsi dans trois cas :

Si la chaîne commençant à s_1 présente une réduction Σ_2^1 d'ordre 2;

Si $A_3 A_4$ présentant la disposition Σ_2^1 pour une droite Δ, A_1 et A_2 sont portées par une même droite Δ' parallèle à Δ ou sont deux glissières perpendiculaires à une même droite Δ' perpendiculaire à Δ.

5° *Réduction* Σ_2^2. — Le mouvement simple Σ_2^2 est caractérisé par ce fait qu'un plan P du corps est fixe, ainsi que l'orientation autour de la perpendiculaire à ce plan. Dans un mouvement complexe d'ordre 3 formé avec Σ_2^2, le plan et l'orientation dépendront d'un même paramètre, de façon qu'une fois le plan fixé l'orientation demeure invariable.

A_3 et A_4 étant des glissières parallèles à P, ce plan est fixe dans s_2 et, quand on fixe P, le corps s_2 doit posséder un mouvement dépendant d'un seul paramètre et réduit à une translation, sans quoi le mouvement de s_3, dans lequel P reste fixe, dépendrait de plus de deux paramètres et l'on aurait la réduction σ_3^1.

Si le corps s_2 de l'image sphérique est fixe, s_2 possède une infinité de translations parallèles à un même plan, et, parmi elles, il y en a au moins une parallèle à P, de sorte qu'on a bien la réduction cherchée.

Si s_2 dépend de deux paramètres, s_2 ne possède aucune translation et l'on ne peut pas avoir la réduction Σ_2^2. Enfin, supposons que s_2 dépende d'un seul paramètre; il y aura, parmi A_1, A_2, une seule glissière ou bien A_1 et A_2 seront deux vis parallèles.

Dans le premier cas, c'est le mouvement le long de la glissière qui donne l'unique translation de s_2; si cette glissière est A_2, on aura le mouvement cherché de s_2 et, par suite, de s_3 en fixant ε_1, de sorte que l'on aura la réduction Σ_2^2 par rapport à s_1. Si la glissière est A_1, elle devra toujours être parallèle à P, ce qui ne peut arriver que si elle est parallèle à A_2, vis qui est elle-même parallèle à P, ou, si elle est perpendiculaire à A_2, qui est elle-même perpendiculaire à P.

Dans le second cas, nous voyons que la translation obtenue par les mouvements autour de A_1 et A_2 se compose d'une translation ϖ' ayant la direction commune de A_1 et A_2 et ne s'annulant que si A_1 et A_2 ont même pas, puis d'une translation ϖ'', perpendiculaire au plan A_1A_2 et ne s'annulant que si A_1 et A_2 ont même axe. La translation totale ϖ, dont la position ne dépend que de ε_1, doit rester parallèle à P quelle que soit la valeur de ε_2. Si P est perpendiculaire à A_2, ϖ doit être aussi perpendiculaire à A_2, ce qui exige que ϖ' soit nul, c'est-à-dire que A_1 et A_2 aient même pas. Si P n'est pas perpendiculaire à A_2, il ne peut rester parallèle à une direction fixe ϖ que s'il est parallèle à A_2 et si ϖ'' est nulle, c'est-à-dire si A_1 et A_2 forment un verrou.

En résumé, il y a réduction Σ_2^2 d'ordre 3 :

S'il y a réduction Σ_2^2 par rapport à s_1;

Si le corps s_2 de l'image sphérique est fixe;

Si A_1, étant une glissière, A_2 est une vis perpendiculaire aux trois glissières A_1, A_3, A_4;

Si A_1, A_2 constituent un verrou parallèle au plan des deux glissières A_3, A_4.

Il est inutile de faire figurer le cas où A_1 et A_2 sont deux vis de même pas, perpendiculaires à P, car on obtient manifestement de cette façon la réduction Σ_3^1.

6. *Réduction du quatrième ordre sans réductions antérieures.* — La réduction a lieu sur A_5. C'est le corps s_4 qui doit avoir un mouvement spécial et nous avons ici six cas.

1° *Réduction* Σ_4^1. — Il y a dans s_4 une direction Δ qui doit être fixe et A_4 est une vis parallèle à Δ ou une glissière; la droite correspondante du corps s_4 de l'image sphérique doit être fixe, ce qui exige que les articulations a_1, a_2, a_3, a_4 qui existent soient des rotoïdes ayant même axe ou, en revenant à la chaîne primitive, que les vis et rotoïdes que l'on rencontre dans la suite A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 aient leurs axes parallèles.

2° *Réduction* Σ_3^1. — Soit Δ la direction des vis du mouvement Σ_3^1. Si l'on forme un mouvement complexe dans lequel la direction Δ reste constante, on tombe sur le mouvement Σ_4^1 que nous venons d'étudier.

La direction Δ doit dépendre d'un paramètre, et l'on voit immédiatement, en raisonnant sur l'image sphérique, que la suite A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 doit se décomposer en deux parties telles que les vis qui sont dans la première aient leurs axes parallèles à une même direction Δ' et que les vis qui sont dans la seconde aient leurs axes parallèles à Δ, les directions Δ et Δ' n'étant pas parallèles pour exclure le cas Σ_4^1. Nous supposerons qu'on fasse rentrer dans le second groupe les glissières qui suivent la dernière vis parallèle à Δ'.

Dans toute déformation telle que Δ conserve une direction constante, la translation et la rotation relatives à Δ doivent vérifier la relation

$$\frac{\lambda}{\varphi} = \frac{h}{2\pi}.$$

Nous en concluons, comme dans la réduction analogue pour l'ordre 3, que toute glissière doit être perpendiculaire à Δ; si elle appartient au second groupe, il est évident que, si elle lui est perpendiculaire dans une position, il en sera toujours ainsi pendant toute la déformation; mais si la glissière appartient au premier groupe, elle est séparée de Δ par une vis de direction Δ' qui, lorsqu'on laisse immobiles la glissière et les articulations qui la précèdent, fait décrire à la direction Δ un cône de révolution d'axe Δ'; pour que toutes les génératrices soient perpendiculaires à la glissière, il faut que ce cône devienne un plan perpendiculaire à Δ' et que cet axe Δ' soit lui-même parallèle à la glissière, de sorte que, s'il y a des glissières dans le premier groupe, elles doivent être parallèles à Δ', et Δ et Δ' doivent être rectangulaires.

Étudions maintenant les vis et supposons que le premier groupe en comprenne plusieurs; soient V_i et V_j deux quelconques d'entre elles et étudions le mouvement de la chaîne, lorsqu'on solidifie toutes les articulations autres que V_i et V_j. Soient ε_i et ε_j les angles de rotation autour des axes de V_i et V_j, h_i et h_j leurs pas. Partons de la position initiale et donnons à ces deux paramètres des valeurs quelconques $\varepsilon_i \varepsilon_j$; le corps s_4 prendra une position déterminée et Δ une direction déterminée. A partir de cette position, donnons à ε_i et ε_j des accroissements η_i, η_j; le corps s_4 et la direction Δ vont subir une rotation parallèle à Δ' et égale à

$$\eta_i + \eta_j.$$

Assujettissons ces deux accroissements à vérifier la relation

$$(1) \qquad \eta_i + \eta_j = 0,$$

de façon que l'orientation de s et la direction Δ restent fixes; dans ces conditions, la direction Δ' sera une fonction de $\varepsilon_i + \varepsilon_j$.

Pour évaluer la translation, prenons un point M de s_4 sur l'axe de V_j. Ce point subit une translation ϖ parallèle à Δ' et égale à

$$\frac{1}{2\pi}(h_i\eta_i + h_j\eta_j)$$

et, en plus, une translation ϖ'' perpendiculaire à Δ' produite par la rotation η_i dans la vis V_i. Nous obtenons ainsi une translation totale ϖ de s_4 dont les projections sur des axes fixes sont des fonctions de ε_i et η_i, car η_j est fonction de η_i donnée par (1), et cette translation doit être perpendiculaire à Δ', dont la direction est fonction de $\varepsilon_i + \varepsilon_j$. Ceci doit être vrai quelles que soient les valeurs de ε_i, ε_j et η_i, et comme la direction Δ' dépend effectivement de ε_j à cause du non-parallélisme de Δ et Δ', la translation ϖ doit être perpendiculaire à toutes les directions Δ', ce qui ne peut arriver que si ϖ a une direction fixe et si Δ' décrit un plan perpendiculaire à cette direction.

Supposons que la distance des axes de V_i et V_j ne soit pas nulle;

la translation ϖ'' ne sera pas nulle; en donnant à η_i une valeur fixe et laissant variable ε_i, les deux composantes ϖ' et ϖ'' ne feront que subir la rotation ε_i; leur résultante ϖ, qui n'est pas parallèle à Δ', parce que ϖ'' n'est pas nulle, subira aussi cette rotation et, par suite, ne conservera pas une direction constante. Il nous faut donc supposer que V_i et V_j ont même axe et que Δ et Δ' sont rectangulaires.

Un raisonnement déjà fait dans la réduction analogue d'ordre 3 montre que toutes les vis du second groupe doivent avoir même pas h.

Le seul cas où Δ et Δ' ne sont pas forcément rectangulaires est celui où le premier groupe ne comprend qu'une vis sans aucune glissière; A_1 est alors une vis, et comme c'est en fixant le paramètre ε_1 que Δ' conserve une direction constante, on voit que c'est le cas où il y a réduction d'ordre 3, quand on commence par s_1.

Dans les autres cas, les articulations du premier groupe sont celles d'un verrou et, pour qu'il n'y ait pas réduction Σ_2^1 d'ordre 2, il faut que ce premier groupe comprenne au plus deux termes; mais alors, en remplaçant ce verrou par une vis suivie d'une glissière, cette glissière sera perpendiculaire à Δ et, en solidifiant la vis, Δ conservera une direction invariable, de sorte qu'on retombera sur le premier cas.

En résumé, il y aura réduction Σ_3^1 d'ordre 4, s'il y a réduction Σ_3^1 d'ordre 3 dans la chaîne commençant à s_1 ou si les deux premières articulations constituent un verrou tel qu'en le remplaçant par une vis suivie d'une glissière on retombe sur le cas précédent.

3° *Réduction* Σ_3^2. — A_4 et A_5 sont deux rotoïdes dont les axes concourent en un point O qui est fixe dans s_3 et ne doit dépendre que d'un seul paramètre; s_3 doit avoir un mouvement mixte de seconde espèce pour A_3 et le point O. Il faut que A_3 soit un rotoïde passant par O, qui est aussi fixe dans s_2, et que s_2 ait un mouvement mixte de première espèce pour A_2 et O. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que A_2 soit aussi un rotoïde passant par O, ce qui nous conduit à la réduction Σ_3^2 d'ordre 3 à partir de s_1, ou que s_2 ait un mouvement spécial pour A_2 et un rotoïde passant par O. Ce mouvement ne peut être que Σ_2^1 ou Σ_2^2; le second est impossible, car il ne contient pas de rotoïde; il faut donc que s_2 ait un mouvement de verrou autour d'une droite Δ et que O se trouve sur cette droite.

Il y a donc réduction Σ_3^2 d'ordre 4, si A_2, A_3, A_4, A_5 sont des rotoïdes dont les axes sont concourants ou si, A_1 et A_2 étant portées par une même droite Δ, A_3, A_4, A_5 sont des rotoïdes dont les axes concourent avec Δ.

4° *Réduction* Σ_3^2. — L'orientation de S_4 ne doit dépendre que d'un paramètre; il en est de même de s_4, ce qui montre que les vis qui figurent dans la suite A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 doivent avoir leurs axes parallèles à une même direction, et l'on retombe sur Σ_4^1.

5° *Réduction* Σ_2^1. — A_4 et A_5 sont portées par une même droite Δ qui appartient à s_3 et ne doit dépendre que de deux paramètres. s_3 doit avoir un mouvement mixte pour A_3 et Δ.

Si A_3 est aussi portée par Δ, nous avons le mouvement spécial Σ_2^1 par rapport à s_2.

Si s_3 a un mouvement spécial pour A_3 et une articulation portée par Δ, cette droite ne dépend encore que de deux paramètres. Soit A'_4 cette articulation indéterminée portée par Δ et considérons la chaîne

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A'_4;$$

comme nous savons reconnaître les réductions du troisième ordre, nous saurons voir si l'on peut déterminer le pas de A'_4 pour que s_3 ait un mouvement spécial.

Enfin Δ ne dépendra encore que de deux paramètres si sa direction reste constante, mais ce cas n'est pas à considérer, car le mouvement complexe Σ_2^1 ainsi obtenu est Σ_4^1 déjà étudié.

6° *Réduction* Σ_2^2. — Le plan P situé dans s_4 et parallèle aux deux glissières A_4, A_5 est fixe dans s_3 et, quand on fixe P, s_3 doit posséder un mouvement à un seul paramètre réduit à une translation. Si ce mouvement avait plus d'un paramètre, on aurait en réalité une réduction σ_3^1.

Le corps s_3 de l'image sphérique ne peut alors dépendre que de un ou deux paramètres, sinon s_3 posséderait 0 ou une infinité de translations parallèles à P. Soit q ce nombre de paramètres.

Si $q = 1$, s_3 possède une simple infinité de translations parallèles à un même plan parmi lesquelles il y en a toujours une parallèle au plan P.

Si $q = 2$, s_3 possède une seule translation, parmi A_1, A_2, A_3, il y a une glissière et deux vis non parallèles, ou trois vis dont deux sont parallèles. Dans le premier cas, la glissière A_i doit être parallèle à P, ce qui exige que ce soit A_3 (réduction Σ_2^2 relative à s_2) ou que ce soit A_2, et comme c'est la variation de ε_2 qui donnera la translation de s_3, la propriété de s_3 subsistera quand on laissera fixe ε_1, de sorte que l'on aura une réduction Σ_2^2 par rapport à S_1. Cette glissière ne peut être A_1, car A_2, A_3 étant des vis non parallèles, la direction de P dépendrait de deux paramètres, et ce plan ne pourrait rester parallèle à la direction fixe A_1.

Dans le second cas, où A_1, A_2, A_3 sont des vis, elles n'ont que deux directions distinctes; si les deux qui sont parallèles sont A_2 et A_3, c'est en établissant une certaine relation entre ε_2 et ε_3 qu'on a le mouvement de translation de s_3, de sorte que la réduction Σ_2^2 aura lieu par rapport à s_1. Si, en dernier lieu, les deux vis A_1, A_2 sont parallèles, on voit immédiatement que la translation produite par la combinaison des mouvements autour de A_1 et A_2 se compose d'une translation ϖ' parallèle à leur direction commune et ne s'annulant que si les deux pas sont égaux, puis d'une translation ϖ'' perpendiculaire au plan A_1A_2 et ne s'annulant que si A_1 et A_2 ont même axe. Cette translation totale ϖ ne dépend que de ε_1 et doit être parallèle à P, quels que soient ε_2, ε_3. En fixant s_1, le plan P doit rester parallèle à la direction fixe ϖ; la direction de P ne doit, dans ces conditions, dépendre que d'un seul paramètre, et, comme A_2 et A_3 sont deux vis non parallèles, ceci ne peut arriver que si P est perpendiculaire à A_3, qui doit rester elle-même perpendiculaire à ϖ par la variation de ε_2; A_3 doit donc être perpendiculaire à A_2 et la composante ϖ'' doit être nulle, ce qui montre que A_1 et A_2 forment un verrou.

En résumé, il y a réduction Σ_2^2 d'ordre 4 :

S'il y a réduction Σ_2^2 sur A_3 par rapport à un des membres précédents;

Si le corps s_3 de l'image sphérique dépend d'un paramètre;

Si, A_1, A_2 étant deux vis formant un verrou, A_3 est une vis perpendiculaire à ce verrou et au plan des deux glissières A_4, A_5.

7. *Réduction du cinquième ordre sans réductions antérieures.* — Une telle réduction se fait sur A_6 et c'est s_5 qui doit avoir un mouvement spécial pour A_5 et A_6.

1° *Réduction* Σ_4^1. — Une direction Δ de s_5 doit dépendre d'un seul paramètre. La considération de l'image sphérique montre immédiatement que la suite des articulations $A_1, A_2, \ldots, A_5, A_6$ doit se partager en deux groupes consécutifs tels que, dans chacun d'eux, toutes les vis aient même direction, et cela suffit.

2° *Réduction* Σ_3^1. — L'axe Δ du mouvement Σ_3^1 de s_5 sera supposé avoir une direction dépendant effectivement de deux paramètres, sans quoi le mouvement de s_5 se réduirait à un mouvement complexe formé avec Σ_4^1.

Partons de A_5 et suivons les articulations dans le sens des indices décroissants jusqu'au moment où nous rencontrerons une vis qui ne sera plus parallèle à l'axe Δ du mouvement Σ_3^1 de s_5. Soit γ_Δ le groupe ainsi formé. La vis à laquelle nous nous sommes arrêté avait une direction Δ'; continuons à suivre nos articulations jusqu'au moment où nous trouverons une vis non parallèle à Δ'; nous aurons le groupe $\gamma_{\Delta'}$ et ainsi de suite.

On aura ainsi une suite de groupes qui, remis dans leur ordre naturel, seront

$$\ldots, \quad \gamma_{\Delta'''}, \quad \gamma_{\Delta''}, \quad \gamma_{\Delta'}, \quad \gamma_{\Delta}.$$

γ_Δ comprend au moins une articulation A_5 et de plus le nombre des groupes est au moins égal à trois, sans quoi la direction de Δ ne dépendrait pas de deux paramètres distincts.

Les raisonnements faits pour les réductions Σ_3^1 d'ordre 3 ou 4 montrent que :

Dans le groupe γ_Δ, toutes les vis ont même pas h et les glissières sont perpendiculaires à Δ.

$\gamma_{\Delta'}$ est constitué uniquement par une vis ou constitue un verrou perpendiculaire à Δ. Ce groupe contient d'ailleurs au plus deux articulations, sans quoi la chaîne commençant au membre intermédiaire entre $\gamma_{\Delta''}$ et $\gamma_{\Delta'}$ aurait une réduction Σ_2^1 d'ordre 2, de sorte que la chaîne totale présenterait une réduction Σ_2^1, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous supposerons qu'on a remplacé ce verrou par une vis suivie d'une glissière, laquelle, étant perpendiculaire à Δ, rentre dans γ_Δ, et l'on est ramené alors au premier cas, où $\gamma_{\Delta'}$ est constitué uniquement par une vis.

Les groupes précédents $\gamma_{\Delta''}$, $\gamma_{\Delta'''}$, ... doivent être constitués chacun uniquement par une vis ou former des verrous tous perpendiculaires à Δ, ce qui est impossible, car ils sont séparés de Δ par Δ'.

Ainsi, il y a le groupe γ_Δ, et les articulations qui précèdent ce groupe sont des vis telles que deux vis consécutives ne soient jamais parallèles.

Si γ_Δ possède trois termes, on est forcément dans le cas où la chaîne commençant à s_2 possède la réduction Σ_3^1 d'ordre 3, ce que nous savons reconnaître.

Nous allons commencer par examiner le cas où γ_Δ ne possède qu'un terme.

Pour étudier la question, nous allons recourir à des calculs dans le genre de ceux qui ont été développés dans la première Partie à propos des mouvements mixtes pour le verrou.

Supposons qu'on fixe la direction de Δ et qu'on donne, dans ces conditions, une déformation infiniment petite à la chaîne; le mouvement instantané de s_4 sera hélicoïdal et parallèle à Δ; comme A_5 est une vis de pas h parallèle à Δ ou une glissière perpendiculaire à Δ, le mouvement relatif de s_5 par rapport à s_4 sera encore hélicoïdal parallèle à Δ et aura h pour pas; le mouvement résultant est encore hélicoïdal parallèle à Δ et son pas doit être h, ce qui exige que le mouvement de s_4 ait h pour pas. Ainsi, la direction Δ est fixe dans s_4 et, quand on l'assujettit à être fixe dans l'espace, tout mouvement helicoïdal instantané de s_4 doit avoir h pour pas.

Imaginons un trièdre mobile attaché à s_3 et dont l'axe des z soit l'axe de A_4. Soient $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{X}_2$, ..., $\mathcal{X}_3$, ..., $\mathcal{N}_3$ les coordonnées relatives des mouvements paramétriques de s_3 et o, o, r, o, o, t les coordonnées du mouvement autour de la vis A_4. Tout mouvement instantané de s_4 sera de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \Sigma\lambda\mathcal{X}, & \Sigma\lambda\mathcal{Y}, & \mu r + \Sigma\lambda\mathcal{Z}. \\ \Sigma\lambda\mathcal{L}, & \Sigma\lambda\mathcal{M}, & \mu t + \Sigma\lambda\mathcal{N}. \end{cases}$$

Soit ω l'angle de Δ avec Oz. Sans changer nos mouvements paramétriques, la direction Δ peut prendre toutes les directions faisant l'angle ω avec Oz, et, comme tout mouvement hélicoïdal de s_4 parallèle à Δ doit avoir h pour pas, nous voyons que, si nous cherchons, parmi les mouvements (1), ceux dont l'axe fait ω avec Oz, ils devront avoir tous h pour pas.

Autrement dit, l'équation

$$(2)\qquad \frac{\Sigma\lambda\mathfrak{X}.\Sigma\lambda\mathfrak{L}+\Sigma\lambda\mathfrak{Y}.\Sigma\lambda\mathfrak{M}+(\mu r+\Sigma\lambda\mathfrak{Z})(\mu t+\Sigma\lambda\mathfrak{N})}{(\Sigma\lambda\mathfrak{X})^2+(\Sigma\lambda\mathfrak{Y})^2+(\mu r+\Sigma\lambda\mathfrak{Z})^2}=h$$

devra être une conséquence algébrique de

$$(3)\qquad \frac{(\Sigma\lambda\mathfrak{X})^2+(\Sigma\lambda\mathfrak{Y})^2}{(\mu r+\Sigma\lambda\mathfrak{Z})^2}=\operatorname{tang}^2\omega.$$

Les équations (2) et (3), mises sous forme entière, sont toutes deux du second degré; les coefficients de (1) doivent être proportionnels à ceux de (2). En écrivant cette proportionnalité pour les coefficients des termes en μ^2, $\mu\lambda_1$, $\mu\lambda_2$, $\mu\lambda_3$, on obtient immédiatement les équations

$$\frac{rt-hr^2}{-r^2\operatorname{tang}^2\omega}=\frac{r\mathfrak{N}_i+t\mathfrak{Z}_i-2hr\mathfrak{Z}_i}{-2r\mathfrak{Z}_i\operatorname{tang}^2\omega}\qquad (i=1,2,3)$$

qui, en vertu de ce que r et ω ne sont pas nuls, se réduisent à

$$(4)\qquad r\mathfrak{N}_i-t\mathfrak{Z}_i=0\qquad (i=1,2,3).$$

En utilisant alors les relations différentielles entre les mouvements paramétriques, comme nous l'avons fait pour le dernier cas des mouvements mixtes du verrou, nous déduirons des équations (4) les nouvelles équations

$$(5)\qquad \begin{cases} \Delta(\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{L})=0, & \Delta(\mathfrak{X},\mathfrak{L},\mathfrak{M})=0,\\ \Delta(\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{M})=0, & \Delta(\mathfrak{Y},\mathfrak{L},\mathfrak{M})=0\end{cases}$$

qui, par une discussion facile, montrent l'existence d'un mouvement instantané du trièdre qui se réduit à un mouvement hélicoïdal sur Oz, mouvement qui, en vertu de (4), aurait encore $\frac{t}{r}$ pour pas et ne serait pas distinct du mouvement autour de A_4, ce qui est impossible, car s_4 ne dépendrait que de trois paramètres. Ce raisonnement n'est en défaut que si tous les $\mathfrak{X}$ et les $\mathfrak{Y}$ sont nuls, ce qui exprime que tout mouvement hélicoïdal instantané de s_4 est parallèle à Oz et ne peut jamais laisser invariable la direction Δ, à moins que d'être une translation. Il est d'ailleurs inutile d'aller plus loin, car, la direction de A_4 étant fixe, la direction de Δ ne dépend plus que d'un paramètre, et c'est le cas déjà écarté.

Nous avons supposé que les mouvements de s_4, laissant invariable la direction de Δ, étaient hélicoïdaux; nous allons supposer maintenant que ce sont des mouvements de translation. Nous devons avoir une double infinité de translations, et chacune d'elles, ne dépendant que de la position de s_3, doit être perpendiculaire à toutes les directions que prend Δ en tournant autour de A_3; ceci exige d'abord que l'on ait $\omega = \frac{\pi}{2}$, puis que toutes ces translations soient parallèles à A_3.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les quatre équations homogènes

$$\Sigma\lambda\mathcal{X} = 0, \qquad \Sigma\lambda\mathcal{L} = 0,$$
$$\Sigma\lambda\mathcal{Y} = 0, \qquad \Sigma\lambda\mathcal{M} = 0$$

se réduisent à une seule. Si alors on y ajoute l'équation

$$\Sigma\lambda(r\mathcal{N} - t\mathcal{Z}) = 0,$$

ce système déterminera certainement un mouvement qui ne serait autre que le mouvement de vis autour de A_4, de sorte que s_4 ne dépendrait que de trois paramètres.

Nous en concluons que l'hypothèse de γ_Δ ayant un seul terme A_5 est inadmissible.

Supposons que γ_Δ ait deux termes; nous allons recommencer sur A_3 le raisonnement fait sur A_4.

Si, pour abréger, nous posons

$$\begin{aligned}
H_1 &= \mathcal{L}_1\mathcal{X}_1 + \mathcal{M}_1\mathcal{Y}_1 + \mathcal{N}_1\mathcal{Z}_1, \qquad K_1 = \mathcal{X}_1^2 + \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Z}_1^2,\\
H_2 &= \mathcal{L}_2\mathcal{X}_2 + \mathcal{M}_2\mathcal{Y}_2 + \mathcal{N}_2\mathcal{Z}_2, \qquad K_2 = \mathcal{X}_1^2 + \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Z}_1^2,\\
H &= \mathcal{L}_1\mathcal{X}_2 + \mathcal{M}_1\mathcal{Y}_2 + \mathcal{N}_1\mathcal{Z}_2 + \mathcal{L}_2\mathcal{X}_1 + \mathcal{M}_2\mathcal{Y}_1 + \mathcal{N}_2\mathcal{Z}_1,\\
K &= (\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2)^2 + (\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)^2 + (\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2)^2,\\
K' &= \frac{K - K_1 - K_2}{2} = \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2,
\end{aligned}$$

quantités qui sont des *invariants pour une transformation d'axes rec-*

tangulaires et

$$\rho = h(1+\cot^2\omega) - \frac{t}{r}\cot^2\omega,$$

$$\sigma = \left(h - \frac{t}{r}\right)(1+\cot^2\omega),$$

l'identification des équations (2) et (3) nous donnera

$$r\mathfrak{M}_1 - t\mathfrak{F}_1 = 0, \tag{6}$$

$$r\mathfrak{M}_2 - t\mathfrak{F}_2 = 0, \tag{7}$$

$$H_1 - \rho K_1 + \sigma\mathfrak{F}_1^2 = 0, \tag{8}$$

$$H_2 - \rho K_2 + \sigma\mathfrak{F}_2^2 = 0, \tag{9}$$

$$H - 2\rho K' + 2\sigma\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = 0. \tag{10}$$

La position de s_2 dépend des deux paramètres ε_1, ε_2 relatifs aux articulations A_1 et A_2. Soient r_1, t_1, r_2, t_2 les rotations et translations relatives à ces deux mouvements; on aura, par suite des propriétés des invariants

$$H_1 = t_1 r_1 \qquad H_2 = t_2 r_2,$$

$$K_1 = r_1^2 \qquad K_2 = r_2^2,$$

de sorte que ces quatre quantités seront indépendantes de ε_1 et ε_2.

L'équation (8) montre que, si σ n'est pas nul, $\mathfrak{F}_1$ doit être indépendant de ε_1 et ε_2. $\mathfrak{F}_1$ est la projection sur l'axe de A_3 de la rotation r_1 relative à A_1. Cette rotation n'est pas nulle, puisque A_1 est une vis, sa grandeur et sa direction sont fixes, de sorte que l'axe de A_3 devrait faire un angle constant avec une direction fixe; sa direction ne dépendrait alors que d'un paramètre, ce qui est incompatible avec les hypothèses que A_1, A_2, A_3 sont des vis et qu'elles ne sont pas parallèles deux à deux.

Le résultat $\sigma = 0$ auquel on est conduit donne

$$\frac{t}{r} = h, \qquad \rho = h,$$

et alors les équations (8) et (9) montrent immédiatement que A_1 et A_2 ont aussi h pour pas.

Considérons alors un mouvement quelconque du membre s_2. En désignant par $\mathcal{H}$ son automoment, par $\mathcal{R}$ sa rotation, on aura

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= (\lambda_1 \mathcal{X}_1 + \lambda_2 \mathcal{X}_2)(\lambda_1 \mathcal{L}_1 + \lambda_2 \mathcal{L}_2) + \ldots = \lambda_1^2 \mathrm{H}_1 + \lambda_2^2 \mathrm{H}_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mathrm{H}, \\
\mathcal{R}^2 &= (\lambda_1 \mathcal{X}_1 + \lambda_2 \mathcal{X}_2)^2 \qquad\qquad\qquad\quad + \ldots = \lambda_1^2 \mathrm{K}_1 + \lambda_2^2 \mathrm{K}_2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \mathrm{K}'.
\end{aligned}$$

En tenant compte de (8), (9), (10), on obtient immédiatement

$$\mathcal{H} - h\mathcal{R}^2 = 0,$$

de sorte que ce mouvement a encore h pour pas, et cela exige, d'après un lemme démontré et utilisé pour la recherche des mouvements spéciaux, que les vis A_1 et A_2 aient leurs axes concourants.

Arrivons maintenant à l'équation (r) mise sous la forme

$$\mathcal{M}_2 = h\mathfrak{L}_2.$$

On a, en prenant des moments et des projections sur A_3,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_2 &= \text{projection de } r_2, \\
\mathcal{M}_2 &= \text{projection de } t_2 + \text{moment de } r_2.
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation et remarquant que r_2 et t_2 ayant même direction le rapport de leurs projections est aussi h, il vient

$$\text{moment de } r_2 = 0.$$

Comme r_2 n'est pas nul et que A_2 et A_3 ne sont pas parallèles, nous voyons que ces deux vis doivent être concourantes.

On démontrerait, par un raisonnement analogue fait sur l'équation (6), que les vis A_1 et A_3 doivent aussi être concourantes.

Ainsi A_1, A_2, A_3 sont trois vis de même pas h et dont les axes doivent être concourants deux à deux. Ils ne peuvent pas rester dans un même plan, car, laissant fixe le paramètre ε_1 et faisant varier ε_2, A_3, qui est distinct de A_2, sortirait forcément du plan dans lequel se trouvaient primitivement les trois axes. Ils ne peuvent pas non plus former un trièdre; en effet, soit O_3 le point de rencontre des axes de A_1 et A_2, O_1 celui des axes de A_2 et A_3, ces deux points seraient toujours en coïncidence. Or, si on laisse ε_1 fixe, O_3 restera fixe sur l'axe de A_2, qui lui-même restera fixe; en faisant varier ε_2, O_1 se déplacerait sur cet axe, donc ne resterait pas en coïncidence avec O_3.

Il n'y aurait d'exception que si h était nul.

Il reste à étudier le cas des mouvements de translation. Comme dans le cas de A_4, nous verrons que s_3 doit posséder une translation parallèle à A_3 et que Δ doit être perpendiculaire à Δ'.

Pour que s_3 possède cette translation, il faut et il suffit que s_2 possède un mouvement ayant même axe que A_3, de sorte qu'il faut pouvoir toujours composer r_1 et r_2 de façon à obtenir une résultante parallèle à A_3, ce qui exige que les axes de A_1, A_2, A_3 soient constamment parallèles à un même plan. On voit immédiatement, au moyen de l'image sphérique, que ce fait est incompatible avec nos hypothèses sur la nature et la disposition de A_1, A_2, A_3.

L'étude un peu longue qui précède donne les résultats suivants :

Pour reconnaître une réduction Σ_3^1 d'ordre 5. On forme les groupes

$$\gamma_\Delta,\quad \gamma_{\Delta'},\quad \gamma_{\Delta''},\quad \ldots,$$

qui doivent être au nombre minimum de 3.

$\gamma_{\Delta'}$ contient un ou deux termes ; dans ce dernier cas, Δ' doit être perpendiculaire à Δ et ses articulations forment un verrou qu'on remplace par une vis suivie d'une glissière qui, étant perpendiculaire à Δ, rentre dans γ_Δ.

Cette transformation étant faite, il y a réduction Σ_3^1, si γ_Δ possède trois termes donnant la réduction Σ_3^1 d'ordre 3 par rapport à s_2. Il y a encore réduction, mais cette fois dans le cas particulier σ_3^1, si, γ_Δ ne possédant que deux termes satisfaisant à la condition $h = 0$, A_1, A_2, A_3 sont trois rotoïdes concourants.

3° *Réduction* Σ_3^2. — A_5 et A_6 doivent être deux rotoïdes concourants en O et ce point appartenant à s_4 ne doit dépendre que de deux paramètres ; s_4 doit donc posséder un mouvement mixte de seconde espèce pour A_4 et O.

En premier lieu, A_4 peut être un rotoïde dont l'axe passe par O et alors s_3 doit avoir un mouvement mixte de première espèce pour A_3 et O. Si A_3 est un rotoïde passant encore par O, on a bien réalisé toutes les conditions, mais c'est la réduction Σ_3^2 par rapport à s_2. Le membre s_3 a encore le mouvement mixte, si s_3 a un mouvement spécial pour A_3 et un rotoïde virtuel passant par O. Les seuls mouvements spéciaux d'ordre 3 possédant des rotoïdes sont σ_3^1, Σ_3^2 et Σ_2^1.

Pour avoir σ_3^1, il faudra qu'il existe une direction Δ telle que parmi A_1, A_2, A_3 on ne trouve que des rotoïdes parallèles à Δ et des glissières perpendiculaires à Δ.

Pour avoir Σ_3^2, il faudra que A_1, A_2, A_3 soient trois rotoïdes concourants.

Enfin, pour avoir le mouvement complexe Σ_2^1, il faudra que A_2 et A_3 constituent un verrou dont l'axe passe par O ou que, A_3 étant une vis passant par O, A_1 et A_2 forment un verrou parallèle à A_3 ou soient deux glissières dont le plan est parallèle à A_3.

Il y a encore mouvement mixte de s_3 dans un cas que nous n'avons pas encore eu à examiner. Si A_3 est une vis dont l'axe passe par O, son axe doit décrire un plan fixe; comme A_2 ne forme pas un verrou avec A_3, sans quoi l'on retomberait sur un cas précédent, l'axe de A_3 doit décrire un plan par la variation de ε_2, ce qui exige que A_2 soit une glissière ou un rotoïde perpendiculaire à A_3. Ce plan doit ensuite rester immobile par la variation de ε_1, ce qui exige que A_1 soit une glissière parallèle ou un rotoïde perpendiculaire. Si A_3 est une glissière, il faut qu'il existe une droite de s_3 passant par O et qui décrive un plan fixe; il suffit de recommencer le raisonnement précédent pour trouver la loi générale : A_1, A_2 sont des rotoïdes parallèles à une direction Δ ou glissières perpendiculaires à Δ; A_3 est une vis passant par O et perpendiculaire à Δ ou une glissière perpendiculaire à Δ. Il nous reste à examiner le cas du mouvement mixte de seconde espèce de s_4, dans lequel une droite passant par O reste dans un plan fixe. En raisonnant comme précédemment, on verrait que A_1, A_2, A_3, A_4 présenteraient la disposition qui donne la réduction σ_3^1 d'ordre 3, de sorte que s_4 ne dépendrait que de trois paramètres.

4° *Réduction* Σ_3^3. — L'orientation de s_5 ne doit dépendre que de deux paramètres, et A_5, A_6 doivent être des glissières. Au moyen de l'image sphérique, on voit immédiatement la règle suivante : si l'on parcourt la suite A_1, A_2, A_3, A_4 en faisant abstraction des glissières, on doit trouver deux groupes de vis consécutives, les vis de chacun d'eux étant parallèles à une même direction.

5° *Réduction* Σ_2^1. — Une droite Δ de s_4 doit dépendre de trois paramètres, et A_5, A_6 doivent appartenir à un verrou ayant Δ pour axe.

Le mouvement de s_4 devant être mixte pour A_4 et Δ, nous avons plusieurs cas possibles.

Ce mouvement mixte existe si A_4 est portée par Δ, c'est-à-dire si A_4 et A_5 forment un verrou.

Il existe si S_4 a un mouvement spécial pour A_4 et une articulation virtuelle A'_5 portée par Δ. Comme nous savons reconnaître les réductions d'ordre 4, nous saurons voir s'il peut en être ainsi.

Le cas où la direction de Δ ne dépendrait que d'un paramètre n'est pas à considérer, car on aurait en réalité une réduction Σ_4^1.

Enfin, il reste à étudier le cas où, A_4 étant un rotoïde et Δ une droite perpendiculaire à son axe et le rencontrant en O, le point O et le plan perpendiculaire en O à cet axe restent pôle et plan polaire dans un complexe linéaire non spécial (¹).

Pour cela, nous allons chercher si, pour un complexe linéaire Γ, on peut trouver une articulation simple V, telle qu'il existe un point M et son plan polaire P qui restent pôle et plan polaire dans Γ quand on leur fait subir le mouvement autour de V; ou encore s'il existe V et un point M tels que M ait le même plan polaire dans tous les complexes qu'on déduit de Γ en lui donnant des mouvements V d'amplitudes quelconques.

Considérons trois axes fixes $O_1x_1y_1z_1$ et trois axes mobiles $Oxyz$ entraînés par le mouvement V; O_1z_1 et Oz sont confondus avec l'axe de V et nous représenterons par r et t la rotation et la translation de ce mouvement hélicoïdal.

(¹) A ce propos, je rectifierai une erreur de démonstration qui s'est glissée dans le premier Mémoire (p. 481). L'étude du mouvement spécial relatif au complexe linéaire avait conduit à une correspondance univoque entre un point M et un plan P, et il fallait montrer que cette correspondance était celle du complexe linéaire. Les deux derniers alinéas doivent être rétablis comme il suit :

Prenons dans P_0 une seconde droite D' à laquelle correspondra une droite D passant par M et, par suite, située dans un même plan Q_0 avec Δ. Le plan P, relatif à un point quelconque N, sera déterminé par les deux droites issues de N et rencontrant l'une D et D', l'autre Δ et Δ'.

Mais D et Δ sont dans un plan Q_0; D' et Δ' sont dans un plan P_0; en plus Q_0 contient le point de rencontre M de D' et Δ', et P_0 contient le point de rencontre de D et Δ, car le plan P de ce point doit contenir D' et Δ' et, par suite, n'est autre que P_0. Les quatre droites ayant cette disposition, nous savons qu'il existe un complexe linéaire Γ admettant D, D' et Δ, Δ' comme couples de droites conjuguées, et la construction que nous venons de donner pour le plan P d'un point quelconque N coïncide avec celle du plan polaire de ce point dans le complexe Γ.

Soit

$$AX + BY + CZ + DL + EM + FN = 0,$$

le complexe Γ rapporté à $Oxyz$. Rapporté à $O_1x_1y_1z_1$, il sera

$$\begin{aligned} &X_1[\ \ (A - Et\lambda)\cos\lambda r + (B + Dt\lambda)\ \sin\lambda r] \\ &+ Y_1[-(A - Et\lambda)\ \sin\lambda r + (B + Dt\lambda)\cos\lambda r] \\ &+ Z_1C + L_1(D\cos\lambda r + E\sin\lambda r) + M_1(-D\sin\lambda r + E\cos\lambda r) + N_1F = 0, \end{aligned}$$

où λ est le paramètre du mouvement V. En formant alors l'équation du plan polaire du point fixe a, o, o et écrivant que ce plan est indépendant de λ, on trouve, par une discussion très facile et qu'il est inutile de reproduire, que l'on doit avoir

$$\begin{aligned} D = E = 0 \qquad &\text{si} \qquad r = 0, \\ A = B = D = E = 0 \qquad &\text{si} \qquad r \neq 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que les seules articulations V, possédant la propriété cherchée relativement au complexe, sont les glissières parallèles à l'axe central, et les vis ou rotoïdes ayant pour axe cet axe central. On peut dire que ces articulations sont celles qui appartiennent au verrou ayant pour axe l'axe central du complexe, et l'on voit immédiatement qu'elles possèdent effectivement la propriété considérée pour n'importe quel élément M, P constitué par un plan et son pôle.

Revenons maintenant à notre chaîne articulée. Le point M dépend par hypothèse de trois paramètres, de sorte qu'aucun des mouvements A_1, A_2, A_3 ne le laisse invariable; chacune de ces articulations devrait appartenir au verrou du complexe; A_1, A_2, A_3 formeraient donc un verrou et il y aurait sûrement réduction Σ_2^1 d'ordre 2, ce qui est contraire à nos hypothèses.

6° *Réduction* Σ_2^2. — A_5 et A_6 sont deux glissières parallèles à un même plan P attaché à s_4, et nous supposerons essentiellement que ce plan dépend de trois paramètres, sans quoi l'on aurait sûrement un mouvement complexe formé avec σ_3^1, mouvement déjà étudié.

Si l'on déforme la chaîne de façon que P reste fixe, s_4 doit avoir un mouvement se réduisant à une translation, ce mouvement dépendant d'ailleurs d'un seul paramètre, sans quoi P dépendrait effectivement de moins de trois paramètres.

Les mouvements infiniment petits de S_4 se réduisant à des translations sont obtenus quand le membre s_4 de l'image sphérique reste immobile; si donc s_4 dépend de q paramètres, s_4 admettra $4-q$ translations distinctes.

Si $q<2$, les translations distinctes dépendraient de plus de deux paramètres, il y en aurait toujours une infinité parallèles au plan P et s_4 aurait un mouvement à plus d'un paramètre dans lequel P resterait fixe, ce qui est écarté.

Si $q=2$, nous avons des translations dépendant d'un paramètre; la forme linéaire des équations donnant les translations instantanées de s_4 montrent qu'elles seront toutes parallèles à un même plan, de sorte qu'il y en aura au moins une parallèle au plan P, ou bien elles le seraient toutes, ce qui ramènerait au cas déjà écarté.

Il reste à étudier le cas de $q=3$. s_4 ne possède alors qu'une seule translation. Elle est complètement déterminée par la position de s_3 et doit être perpendiculaire à toutes les positions que prend la normale Δ au plan P en subissant le mouvement A_4. Si A_4 est une glissière, c'est ce dernier mouvement qui donne l'unique translation de s_4, de sorte que A_4 doit être parallèle à P, et l'on tombe sur la réduction Σ_2^2 d'ordre 2 relative à s_3. Si A_4 est une vis ou un rotoïde et si P ne lui est pas perpendiculaire, la translation doit être parallèle à A_4 et A_4 doit être parallèle à P; si P est perpendiculaire à A_4, la translation doit aussi être perpendiculaire à A_4.

L'hypothèse $q=3$ ne se réalise que si, parmi A_1, A_2, A_3, A_4 il y a une glissière et trois vis de directions distinctes, ou si ces quatre articulations sont des vis dont les directions distinctes sont au moins au nombre de 3.

Dans le premier cas, la glissière est parmi A_1, A_2, A_3, et c'est elle qui donne l'unique translation. Il faut qu'elle reste toujours parallèle ou perpendiculaire à A_4. Pour avoir le parallélisme, il faut et il suffit que ce soit A_3, car, si elle était séparée de A_4 par une vis A_3, cela nécessiterait le parallélisme de A_3 et A_4 et l'on n'aurait plus $q=3$. Pour que la glissière soit toujours perpendiculaire à A_4, il faut que ce soit A_3 ou bien A_2, et, dans ce dernier cas, A_2 sera parallèle à A_3, qui sera perpendiculaire à A_4. On voit immédiatement que l'on obtient ainsi une réduction Σ_2^2 d'ordre 2 relativement à s_3, ou d'ordre 3 par rapport à s_2, ou d'ordre 4 par rapport à s_1.

Examinons maintenant le cas où A_1, A_2, A_3, A_4 sont toutes des vis, le nombre de leurs directions distinctes étant 3 ou 4. Supposons d'abord qu'il n'y ait que 3 directions distinctes : il y a deux de ces vis qui sont consécutives et parallèles, et il est bien évident que c'est en combinant les mouvements autour de ces deux vis que l'on obtient l'unique translation. Soient A_i, A_{i+1} ces deux vis, ε_i, ε_{i+1} les paramètres correspondants, h_i, h_{i+1} leurs pas, δ la distance de leurs axes et Δ' leur direction commune. La translation résultante se compose d'une translation ϖ' parallèle à Δ et proportionnelle à $h_{i+1} - h_i$, puis d'une translation ϖ'' perpendiculaire au plan A_i, A_{i+1} et proportionnelle à δ. La direction de cette translation totale est fixée quand on se donne la position de A_i et de A_{i+1} de sorte que son parallélisme ou son orthogonalité avec A_4 doit se conserver par les mouvements A_{i+1}, …, A_3.

Étudions le parallélisme de ϖ et A_4. Si $i < 3$, la direction de A_4 doit rester parallèle à ϖ en subissant le mouvement A_3, ce qui est impossible puisque A_3 et A_4 ne sont pas parallèles. Il faut $i = 3$; la direction de A_4 est donc Δ' et il faut que ϖ'' soit toujours nul, c'est-à-dire $\delta = 0$, ou encore que A_3 et A_4 forment un verrou parallèle à P. C'est la réduction Σ_2^2 d'ordre 3 par rapport à S_2.

Pour l'orthogonalité, la direction de A_4 devant rester perpendiculaire à ϖ par les rotations A_{i+1}, …, A_3, qui ne sont pas parallèles, il faut $i > 1$. Si $i = 3$, la direction de A_4 est celle de Δ, de sorte qu'il faut $\varpi' = 0$, c'est-à-dire que A_3 et A_4 aient même pas ; on tombe ainsi sur la réduction σ_3^1 d'ordre 3 par rapport à s_2. Si $i = 2$, la direction de A_4 doit décrire un plan et, par suite, être perpendiculaire à Δ', et en outre ϖ doit être parallèle à Δ', ce qui exige que ϖ'' soit nul, c'est-à-dire que A_2 et A_3 forment un verrou perpendiculaire à A_4, et l'on obtient une réduction Σ_2^2 d'ordre 4 par rapport à s_1.

Le seul cas qui nous reste à étudier maintenant est celui où A_1, A_2, A_3, A_4 sont quatre vis dont les directions sont distinctes. Étudions d'abord le cas du parallélisme de la translation de A_4. s_3 doit posséder un mouvement instantané qui, combiné avec le mouvement autour de A_4, donne une translation parallèle à A_4. Ce mouvement de s_3 est forcément hélicoïdal, de même axe que A_4, de sorte qu'il laisse immobile cet axe qui est une droite invariablement liée à s_3. Cette droite ne dépend que de deux paramètres et s_3 a un mouvement mixte pour A_3 et l'axe de A_4, et cette condition est suffisante.

Si nous remarquons que A_4 n'a pas même axe que A_3 et que la direction de l'axe de A_4 dépend effectivement de deux paramètres, nous voyons que la seule hypothèse admissible est que s_3 possède un mouvement spécial pour A_3 et une articulation virtuelle A'_4 ayant même axe que A_4. Ce mouvement spécial ne peut être ni Σ_3^1, car A_1, A_2, A_3 devraient être parallèles; ni Σ_3^3, car A_1, A_2, A_3 seraient des glissières; ni Σ_2^1, car A_3, A'_4 formeraient un verrou et, par suite, aussi A_3, A_4; ni enfin Σ_2^2, car A_3 et A_4 seraient des glissières. Le seul mouvement possible est Σ_3^2. Alors A_1, A_2, A_3 sont des rotoïdes concourants et A_4 est une vis dont l'axe est encore concourant au même point.

Dans le cas de l'orthogonalité de A_4 et de la translation, nous remarquerons que s_3 doit posséder un mouvement hélicoïdal de même pas que A_4 et parallèle à A_4 quelle que soit la position de A_4 par le mouvement A_3. Nous sommes ramenés à une question déjà étudiée à propos de la réduction Σ_3^1 d'ordre 5, et nous avons vu que A_1, A_2, A_3, A_4 doivent être des rotoïdes dont les trois premiers ont leurs axes concourants.

En résumé, il y a réduction Σ_2^2 d'ordre 5 :

S'il y a réduction Σ_2^2 sur A_6 par rapport à un des membres précédents;

Si, A_5 et A_6 étant deux glissières, le membre s_4 de l'image sphérique ne dépend que de deux paramètres;

Si A_1, A_2, A_3 constituent un genou de centre O, A_4 étant une vis dont l'axe passe par O et est parallèle au plan des deux glissières A_5, A_6.

Si, A_1, A_2, A_3 formant un genou de centre O, A_4 est un rotoïde perpendiculaire au plan des deux glissières A_5, A_6.

8. *Réductions simultanées.* — Supposons qu'il y ait réduction simultanée d'ordre p et d'ordre q $(q > p)$.

Soient

$$s_{i+1}, \quad \ldots, \quad s_j$$

les corps successifs qui dépendent de p paramètres, et

$$s_{h+1}, \quad \ldots, \quad s_k$$

ceux qui dépendent de q paramètres.

Nous savons qu'on ne change pas le mouvement de s_j et par suite celui de tous les membres qui le suivent en assujettissant les paramètres $\varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_j$ à rester fixes, c'est-à-dire en ne considérant plus $A_{i+1}, \ldots, A_j$ comme des articulations; la disposition des articulations $A_h, A_{h+1}, \ldots, A_k$ ne sera pas modifiée, ainsi que le mouvement de s_h, et comme c'est cela qui détermine la réduction d'ordre q, nous voyons que la réduction d'ordre q aura encore lieu sur les mêmes articulations et sera encore de même nature, même après la modification que nous avons apportée à la chaîne. La réciproque est évidemment vraie par le même raisonnement.

Si alors nous convenons de dire que $A_{i+1}, \ldots, A_j$ sont des articulations surabondantes introduites par la réduction d'ordre p, nous pourrons dire :

Une réduction d'ordre quelconque n'est modifiée en aucune façon par la suppression des articulations surabondantes introduites par les réductions antérieures.

Mais après la suppression des articulations surabondantes introduites par une réduction d'ordre p, la chaîne ne présente plus cette réduction, de sorte que :

Si l'on a soin de procéder par ordres croissants, la recherche générale des réductions se ramène toujours à la recherche des réductions sans réductions antérieures.

Grâce à cela, nous pouvons affirmer maintenant que nous savons reconnaître toutes les réductions qui existent dans une chaîne ouverte et, par suite, que nous savons résoudre complètement le problème posé au début de ce Mémoire :

Trouver le nombre des paramètres distincts dont dépend le mouvement d'un quelconque des membres d'une chaîne articulée ouverte.

Il est nécessaire, en outre, de faire remarquer la simplicité de la solution. Entre les constantes qui caractérisent la chaîne, il doit exister des relations correspondant aux différentes sortes de réductions. D'après ce que nous avons vu, ces relations prendront les formes simples exprimant certains des faits suivants :

1° Une articulation est une glissière;

2° Une articulation est un rotoïde;

3° Parallélisme de vis et glissières;

4° Orthogonalité de vis et glissières;

5° Égalité de pas de vis parallèles;

6° Coïncidence des axes de plusieurs vis;

7° Les axes de plusieurs articulations sont concourants.

8° Plusieurs glissières sont parallèles à un même plan.

Ainsi notre problème général se résout à la seule inspection de la nature et de la disposition des articulations sans qu'il soit nécessaire de recourir à aucun calcul de vérification.

Si les discussions développées dans ce Mémoire ne l'avaient déjà rendu trop long, nous pourrions simplifier la recherche des réductions simultanées en montrant que certaines d'entre elles sont incompatibles; il est bien visible, par exemple, que l'on ne peut avoir simultanément dans une chaîne une réduction Σ_2^1 d'ordre 2 et une réduction Σ_3^3 d'ordre 3. Il y a de nombreux cas analogues, mais leur étude nous entraînerait trop loin; nous la supprimerons sans qu'il en résulte un grand inconvénient, car les résultats qu'on obtiendrait ne sont pas indispensables pour la solution de notre problème général; ils serviraient seulement à simplifier cette solution en nous dispensant d'étudier certains cas.

Pour montrer l'ensemble des résultats obtenus sans toutefois introduire un nombre par trop considérable de cas, nous allons, dans les Tableaux qui suivent, donner tous les cas de réduction sans réductions antérieures lorsque la chaîne ne possède pas de glissières.

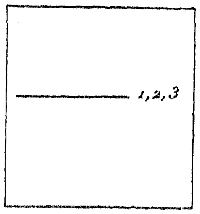
Nous emploierons des schémas qui se comprendront facilement sans qu'il soit nécessaire de donner des explications, et nous ne ferons figurer que la première articulation surabondante, car cela suffit pour indiquer la disposition de toutes les autres. Une articulation ne portant que son numéro d'ordre sera une vis de pas arbitraire. Plusieurs articulations réunies par une accolade surmontée de la lettre h sont des vis de même pas h, et si, au lieu de h, il y a o, cela indique que toutes ces articulations sont des rotoïdes.

Les réductions seront désignées par la notation R_i^j, i désignant l'ordre et j étant un indice servant à distinguer les différentes réductions d'un même ordre.

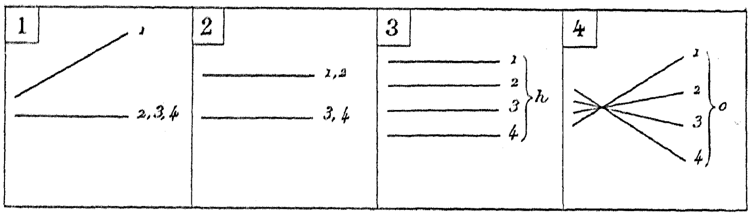
On obtient alors le Tableau :

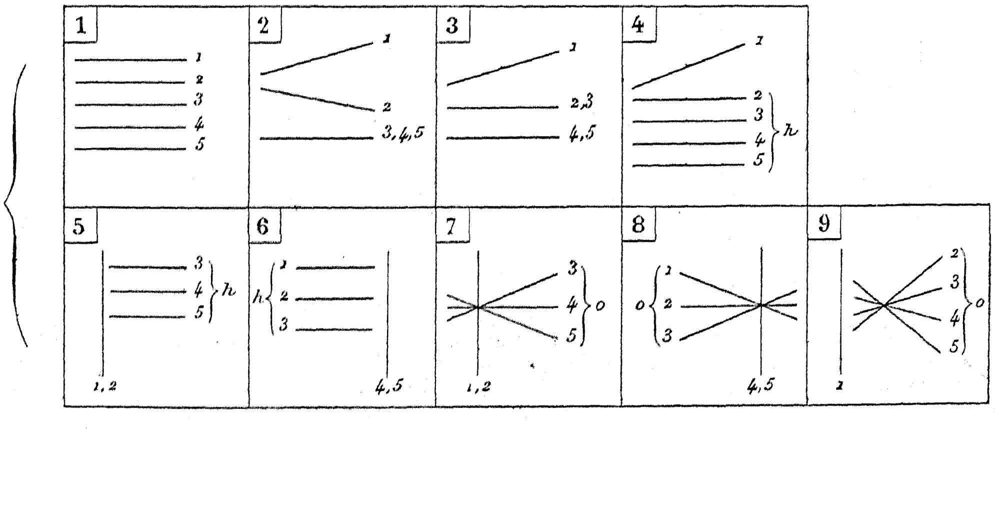
Réductions dans les systèmes sans glissières.

R_2

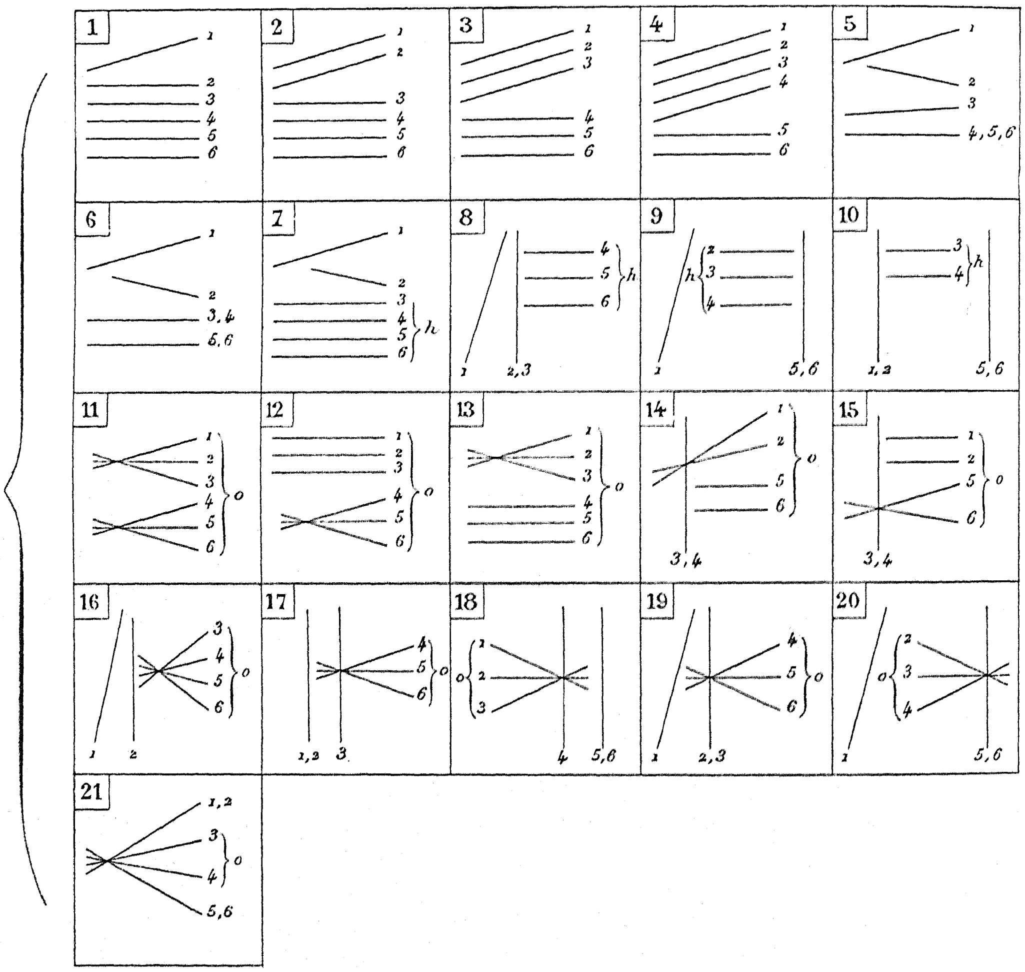


R_3





Réductions dans les systèmes sans glissières (suite).



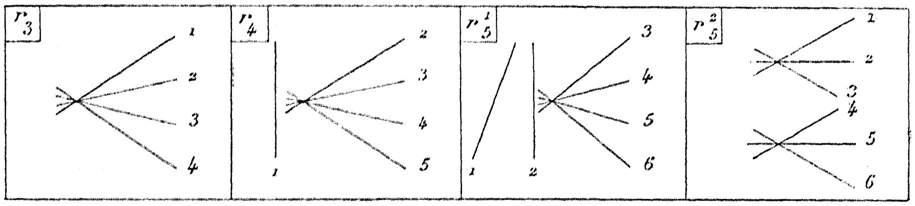
9. *Réduction dans les chaînes à rotoïdes.* — Les résultats précédents prennent une forme extrêmement simple dans le cas des chaînes dont toutes les articulations sont des rotoïdes, car deux rotoïdes consécutifs ne peuvent pas avoir même axe, et des rotoïdes sont des vis de même pas.

Il n'y a jamais de réduction d'ordre 2.

Les seules réductions d'ordre 3 qui sont possibles sont R_3^3 et R_3^4, mais R_3^3 peut être ici considéré comme cas particulier de R_3^4, le point de concours des axes étant rejeté à l'infini.

Parmi les réductions R_4, il suffit d'examiner R_4^1, R_4^4 et R_4^9, car les autres contiennent des verrous. R_4^1 est à rejeter, car il y aurait réduction R_3^3; il ne reste que R_4^4 et R_4^9, et ici, par la même remarque que précédemment, R_4^4 peut être considéré comme cas particulier de R_4^9.

Les seules réductions R_5 ne contenant aucun verrou sont R_5^1, R_5^2, R_5^3, R_5^4, R_5^7, R_5^{11}, R_5^{12}, R_5^{13}, R_5^{16}; R_5^1 n'est pas possible comme donnant R_4^1; R_5^4 n'est pas possible comme donnant R_3^3; R_5^2 sera un cas particulier de R_5^7, qui lui-même sera un cas particulier de R_5^{16}; R_5^3, R_5^{12} et R_5^{13} seront des cas particuliers de R_5^{11}, de sorte qu'en admettant que le point de concours de plusieurs rotoïdes puisse aller à l'infini, le Tableau des réductions des chaînes à rotoïdes prend la forme simple.



Dans le cas actuel, l'étude des réductions simultanées est très simple.

Supposons qu'il y ait réduction r_3, supprimons les articulations surabondantes introduites par cette réduction; la nouvelle chaîne aura ses trois premiers rotoïdes concourants et ne possédera plus de réduction d'ordre 3; elle ne peut posséder de réduction r_4, car les articulations 1, 2, 3, 4, 5 seraient concourantes, et l'on aurait encore r_3; elle peut posséder r_5^2, mais pas r_5^1, car si r_5^1 avait ses articulations 1, 2, 3 concourantes, on aurait en réalité un cas particulier de r_5^2.

Supposons maintenant qu'il y ait réduction r_4; dans la chaîne sans articulations surabondantes, les articulations 2, 3, 4 seraient concourantes; c'est incompatible avec r_5^1, car r_5^1 se trouvant dans ces conditions redonnerait r_4; c'est aussi incompatible avec r_5^2, car on retrouverait ainsi r_3. Nous voyons de cette façon que :

Une chaîne à rotoïdes ne peut posséder plus de deux réductions simultanées; ces réductions sont forcément r_3 et r_5^2.

Cette double réduction est représentée par le schéma suivant dans lequel les articulations surabondantes sont marquées en traits fins.