W. ANISSIMOFF

Sur la théorie des courbes géodésiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 371-395
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__371_0>

SUR LA

THÉORIE DES COURBES GÉODÉSIQUES,

PAR M. W. ANISSIMOFF.

1. On peut rechercher les courbes géodésiques des surfaces par la méthode qui est exposée d'une manière si claire et si instructive dans un Ouvrage capital de M. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, Liv. V, Chap. V, et t. III, Liv. VI, Chap. I, II, IV).

On y procède comme il suit. L'élément linéaire de la surface étant donné par l'expression

$$ds^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2, \tag{1}$$

on forme l'équation différentielle du premier ordre aux dérivées partielles

$$\Delta\theta = \frac{\mathcal{G}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2\mathcal{F}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \mathcal{E}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = 1. \tag{2}$$

On cherche ensuite pour l'équation (2) une solution quelconque $\theta(u, v, \alpha)$, renfermant une constante arbitraire α différente de la constante additive, qui entre toujours dans l'expression de la fonction θ. Pour l'équation des lignes géodésiques de la surface (1), son intégrale générale sera donnée par la formule

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \beta, \tag{3}$$

avec deux constantes arbitraires distinctes α et β. De même, si pour l'équation des lignes géodésiques de la surface (1)

$$(4)\qquad \begin{aligned} 2(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F})v'' = &+\left(\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v}+\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}-2\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}\right)\\ &+\left(3\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v}+\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}-2\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}-2\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial u}\right)v'\\ &-\left(3\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial u}+\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v}-2\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v}-2\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v}\right)v'^2\\ &-\left(\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial u}+\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v}-2\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v}\right)v'^3, \end{aligned}$$

où nous avons désigné $v'=\frac{dv}{du}$, $v''=\frac{d^2v}{du^2}$, nous connaissons une de ses intégrales premières

$$(5)\qquad v'=f(u,v,\alpha),$$

l'intégrale générale, d'après un théorème de Jacobi, sera donnée par la quadrature

$$(6)\qquad \int\frac{(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)\frac{\partial v'}{\partial\alpha}}{\sqrt{(\mathcal{E}+2\mathcal{F}v'+\mathcal{G}v'^2)^3}}(dv-v'\,du)=\beta.$$

Comme on le voit, tout est conduit à la détermination de la fonction θ en (3) ou bien aussi à la recherche de l'intégrale première (5), dont la connaissance nous donne aussi l'expression de la fonction demandée θ. Mais la solution de ces deux problèmes pour *une surface donnée* nous reste inconnue. C'est pour cela qu'on marche sur une voie détournée, n'en considérant que d'hypothèses particulières. On choisit préalablement des liaisons

$$(7)\qquad \Delta_1\theta=\Delta_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial u},\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)=\alpha,$$

et l'on détermine les surfaces admettant de telles liaisons. Pour achever la solution du problème, on calcule $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$ au moyen de (2) et (7) et l'on détermine ensuite θ par la quadrature $\theta=\int\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}du+\frac{\partial\theta}{\partial v}dv\right)$; l'intégrale générale des géodésiques se trouvera par la formule (3).

Ou bien, vu les relations

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{\mathcal{E}+\mathcal{F}v'}{\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}v'+\mathcal{G}v'^2}},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{\mathcal{F}+\mathcal{G}v'}{\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}v'+\mathcal{G}v'^2}},$$

on se sert du théorème de Jacobi, en appliquant la formule (6). Pour les fonctions auxiliaires $\Delta_1\theta$, en (7), on choisit des fonctions homogènes par rapport à $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$ et, en premier lieu, des fonctions algébriques rationnelles, entières et fractionnaires. Beaucoup de géomètres éminents ont travaillé dans la direction indiquée; nous ne citons que Bour, M. Bonnet, M. Maurice Lévy, M. Darboux, M. Kœnigs, et nous ont donné des résultats fort importants et très intéressants.

Mais examinons les choses un peu plus attentivement. Toute la question est transportée au choix de la forme de la fonction auxiliaire $\Delta_1\theta$, qui n'est liée qu'à la manière même d'intégrer l'équation (4) des géodésiques et pas aux autres propriétés essentielles de cette équation. C'est ainsi que la manière d'intégrer l'équation (4) et peut-être la possibilité de conduire tous les calculs jusqu'au bout, jouent, dans la résolution du problème, un rôle prépondérant. Or, si l'on agit ainsi, il peut se faire, et il se fait effectivement, que les surfaces, tout à fait différentes par rapport aux propriétés essentielles de leurs géodésiques, se réunissent dans une même catégorie au point de vue de la fonction auxiliaire $\Delta_1\theta$ employée pour l'intégration. Et, au contraire, les surfaces, organiquement liées les unes aux autres par la communauté de leurs propriétés géodésiques, peuvent entrer dans des catégories différentes.

Je propose, dans le présent article, d'autres fondements pour la recherche des lignes géodésiques et je regarde cette question à un point de vue un peu différent. C'est ce point de vue sur les questions, liées à l'intégration des équations différentielles, qui était indiqué dans une lettre, adressée à feu M. Hermite (*Matém. Sbornik,* t. XXI, p. 62, Moscou), dont tout le monde mathématique déplore la perte récente, à propos du problème concernant la forme des intégrales des équations différentielles à coefficients périodiques.

Les propriétés essentielles des lignes géodésiques dépendent principalement de la manière dont la constante arbitraire α entre dans l'expression (5) de l'intégrale première. D'autre part, dans l'équation (4), différentielle des géodésiques, v'' a toujours la forme caractéristique

$$(8) \qquad v'' = P + Q v' + R v'^2 + S v'^3,$$

d'un polynome du troisième degré par rapport à v', P, Q, R, S étant des fonctions de u et v seulement, et cette *forme* de l'équation (8) est un *invariant*, comme on s'en assure aisément par le calcul direct, pour toutes les transformations possibles $u = \varphi(u_1, v_1)$, $v = \psi(u_1, v_1)$. Le problème des géodésiques se réduit donc à la résolution des deux questions suivantes :

1° *Rechercher de quelle manière la constante arbitraire* α *doit entrer dans l'expression de l'intégrale première* (5) *de l'équation générale* (8).

En supposant que la question posée est résolue, il ne reste, pour la solution complète du problème des géodésiques, que :

2° *Rechercher de quelle manière les coefficients de l'intégrale trouvée* (5) *doivent dépendre de* u *et de* v *dans le cas où l'équation générale* (8) *se confond à l'équation* (4) *des géodésiques d'une surface donnée.*

C'est la voie nouvelle, esquissée aux grands traits, qu'on peut suivre dans la résolution du problème des géodésiques. Dans le cas où la solution de deux questions posées ne réussit pas, les questions étant prises dans toute leur généralité, on peut se contenter de la considération des cas particuliers. Mais c'est toujours la forme de l'intégrale (5) par rapport à la constante arbitraire α, qui doit être placée au premier plan.

Je n'ai pas encore de résultats bien nouveaux, se rattachant à l'ordre d'idées indiqué, et je me contente en ce moment de présenter la solution directe du problème de M. Bonnet, qui se trouve aussi, déduite par des procédés différents, dans l'Ouvrage cité de M. Darboux [1]. C'est le cas des surfaces à l'intégrale première des géodésiques de la forme

$$(9) \qquad v' = \frac{A + B\alpha}{C + D\alpha}.$$

---

[1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 66-73, Paris, 1894.

Néanmoins, notre solution de ce problème ancien n'est pas sans intérêt assez important, car elle nous donne des conclusions nouvelles et bien inattendues dans une question, qui paraissait déjà pleinement épuisée.

Le n° 2 du présent travail contient la réduction du problème à l'intégration d'une équation d'Euler-Laplace aux dérivées partielles du deuxième ordre. Cette intégration, étant accomplie dans les n^{os} 3, 4, 6 en tous les cas possibles, nous donne toutes les surfaces cherchées aussi bien que les intégrales générales de leurs géodésiques. Le n° 7 est consacré à l'étude des propriétés essentielles des géodésiques sur les surfaces trouvées.

Enfin, le n° 5 renferme les considérations générales relatives à l'intégrale première des lignes géodésiques d'une surface quelconque en coordonnées symétriques, d'où il découle une *classification nouvelle* de toutes les surfaces réelles en deux classes.

Une surface réelle est dite de la *première classe*, quand une intégrale première de ses géodésiques en coordonnées symétriques (imaginaires) ne nous donne que l'intégrale première en coordonnées quelconques réelles. L'*intégrale générale* des géodésiques sur une telle surface s'obtient *au moyen des quadratures*.

Si, au contraire, une intégrale première en coordonnées symétriques nous donne deux intégrales premières distinctes (indépendantes) en coordonnées réelles, nous aurons une surface de la *deuxième classe*. L'intégrale générale de ses géodésiques s'obtient *sans aucune quadrature*.

La classification précédente et les considérations qui s'y rattachent font un complément essentiel au beau théorème de Jacobi, relatif aux lignes géodésiques. Leur application (des considérations) au cas particulier des surfaces, qui admettent, en coordonnées symétriques, pour ses lignes géodésiques une intégrale première de la forme (9), nous indique le vrai sens d'une singularité, qui a frappé M. Darboux, mais qui est restée chez lui sans explication.

2. Tout d'abord marquons, que l'une des formes les plus simples de l'intégrale première de l'équation générale (8) est la forme (9). En effet, la différentiation de (9) et l'élimination de α nous donnent

l'équation du type (8) avec des coefficients

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
P &= \frac{A\frac{\partial B}{\partial u} - B\frac{\partial A}{\partial u}}{\Delta},\\
Q &= \frac{\left(A\frac{\partial B}{\partial v} - B\frac{\partial A}{\partial v}\right) + \left(B\frac{\partial C}{\partial u} - C\frac{\partial B}{\partial u}\right) + \left(D\frac{\partial A}{\partial u} - A\frac{\partial D}{\partial u}\right)}{\Delta},\\
R &= \frac{\left(B\frac{\partial C}{\partial v} - C\frac{\partial B}{\partial v}\right) + \left(D\frac{\partial A}{\partial v} - A\frac{\partial D}{\partial v}\right) + \left(C\frac{\partial D}{\partial u} - D\frac{\partial C}{\partial u}\right)}{\Delta},\\
S &= \frac{C\frac{\partial D}{\partial v} - D\frac{\partial C}{\partial v}}{\Delta}.
\end{aligned}
\right.
\qquad \Delta = AD - BC.
$$

Recherchons les surfaces admettant pour ses géodésiques une intégrale première de la forme (9); c'est le problème, auquel nous donnons le nom de M. Bonnet. Pour le résoudre il faudrait identifier les coefficients (10) aux coefficients correspondants de l'équation (4) et discuter ensuite le système ainsi obtenu de quatre équations. Mais cela serait une voie très longue et très pénible. On simplifie beaucoup la solution du problème, si l'on passe aux coordonnées symétriques. Car, $x = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$, $y = \varphi(u, v) - i\psi(u, v)$ étant les formules de transformation, il s'ensuit *nécessairement*

$$
(11)\qquad y' = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - i\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - i\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)v'}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + i\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)v'} = \frac{A_1 + B_1\alpha}{C_1 + D_1\alpha},
$$

A_1, B_1, C_1, D_1 ne renfermant que x et y, de sorte qu'en coordonnées symétriques nous aurons une intégrale (11) de la même forme, que l'intégrale proposée (9). Mais *la réciproque n'est pas vraie*, et comme nous le verrons plus tard, l'intégrale première (11) en coordonnées symétriques ne nous donne pas toujours l'intégrale (9) de la même forme en coordonnées réelles. Quoi qu'il en soit, la résolution du problème se trouve réduite à la recherche des surfaces qui possèdent, en coordonnées symétriques, une au moins l'intégrale (11) et à la discussion des solutions obtenues sur cette voie.

La surface étant rapportée aux coordonnées symétriques, l'élément linéaire (1) se transforme en

$$ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy, \tag{12}$$

l'équation différentielle (4) de ses géodésiques prend la forme

$$y'' = \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} y' - \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} y'^2, \tag{13}$$

et son intégrale générale, d'après la formule (6), se représente par la quadrature

$$\int \sqrt{\frac{\lambda}{y'}}\, \frac{\partial \log y'}{\partial \alpha}(dy - y'\, dx) = \beta, \tag{14}$$

y' étant prise de (11). Identifions les coefficients (10), en y posant $u = x$, $v = y$, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$, $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1$ $\mathrm{C} = \mathrm{C}_1$, $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1$ aux coefficients correspondants de (13). Il s'en viendra le système de quatre équations, dont les deux nous donneront

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}_1 \psi(y), \qquad \mathrm{C}_1 = \mathrm{D}_1 \varphi(x);$$

les autres deux, si l'on y fait $\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{D}_1} = \mu(x, y)$, s'écriront comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \log \mu}{\partial x} - \frac{\varphi'(x) - \mu\psi'(y)}{\varphi(x) - \psi(y)} = + \frac{\partial \log \lambda}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \log \mu}{\partial y} + \frac{\varphi'(x) - \mu\psi'(y)}{\mu[\varphi(x) - \psi(y)]} = - \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

de sorte que l'intégrale (11) deviendra

$$y' = \mu \frac{\alpha + \psi(y)}{\alpha + \varphi(x)}. \tag{16}$$

Or, les équations (15) nous donnent une relation évidente

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} - \mu \frac{\partial \log \lambda}{\partial y},$$

qui, après les réductions faciles, devient

$$\frac{\partial(\sqrt{\lambda\mu})}{\partial y} = \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)}{\partial x}.$$

Il s'ensuit d'ici, que

$$\sqrt{\lambda\mu} = \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \qquad \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

ainsi que

$$\lambda = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \qquad \mu = \frac{\frac{\partial\zeta}{\partial x}}{\frac{\partial\zeta}{\partial y}}, \tag{17}$$

la fonction ζ vérifiant une équation différentielle aux dérivées partielles du deuxième ordre

$$[\varphi(x) - \psi(y)]\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\psi'(y)}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\varphi'(x)}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0. \tag{18}$$

C'est ainsi que nous obtenons, comme M. Darboux, les surfaces

$$ds^2 = 4\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\,dx\,dy, \tag{19}$$

ayant pour l'intégrale première de leurs géodésiques

$$y' = \frac{\frac{\partial\zeta}{\partial x}}{\frac{\partial\zeta}{\partial y}}\,\frac{\alpha+\psi}{\alpha+\varphi}, \tag{20}$$

et, en vertu de la formule (14), pour l'intégrale générale

$$\int \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{(\alpha+\varphi)(\alpha+\psi)}}\left(\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial y}}{\alpha+\psi}\,dy - \frac{\frac{\partial\zeta}{\partial x}}{\alpha+\varphi}\,dx\right) = \beta. \tag{21}$$

La forme de l'expression (12) de l'élément linéaire ne change pas par toutes les transformations $x = \varphi(x_1)$, $y = \psi(y_1)$. Il faut et il suffit donc, pour avoir la solution complète du problème de Bonnet, de discuter trois cas différents :

$$\varphi(x) = \text{const.}, \qquad \psi(y) = \text{const.}, \tag{1}$$
$$\varphi(x) = \text{const.}, \qquad \psi(y) = y, \tag{2}$$
$$\varphi(x) = x, \qquad \psi(y) = y, \tag{3}$$

que nous traiterons successivement.

3. L'hypothèse $\varphi(x) = \text{const.}$, $\psi(y) = \text{const.}$ est la plus simple. L'équation (18) devient

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

d'où il suit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \mathrm{X}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mathrm{Y}.$$

On parvient aux surfaces

$$ds^2 = 4\mathrm{XY}\, dx\, dy,$$

pour lesquelles l'intégrale première et l'intégrale générale de leurs géodésiques sont données par les formules

$$y' = \alpha \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}, \qquad \int (\mathrm{Y}\, dy - \alpha \mathrm{X}\, dx) = \beta.$$

Passons par les formules $x = u + iv$, $y = u - iv$ aux coordonnées réelles isothermes, et soient

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = f(u + iv) = \mathrm{M} + i\mathrm{N}, \\ \mathrm{Y} = f(u - iv) = \mathrm{M} - i\mathrm{N}, \end{cases}$$

M et N étant des nombres réels. Nous aurons *toutes les surfaces réelles*, correspondantes à l'hypothèse considérée

$$(23) \qquad ds^2 = 4(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)(du^2 + dv^2),$$

avec l'intégrale première de leurs géodésiques

$$(24) \qquad v' = \frac{\mathrm{M} - \mathrm{N}\alpha}{\mathrm{N} + \mathrm{M}\alpha},$$

qui est de la *forme* (9). Quant à l'intégrale générale, la formule (21) nous donnera

$$(25) \qquad \alpha \int (\mathrm{N}\, du + \mathrm{M}\, dv) + \beta \int (\mathrm{M}\, du - \mathrm{N}\, dv) = 1,$$

les signes de quadratures se rapportant aux différentielles totales, car on a, des formules (22),

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} = -\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}.$$

Nous ne nous arrêtons pas à la discussion plus détaillée des surfaces obtenues.

4. Dans l'hypothèse $\varphi(x) = \text{const.} = b$, $\psi(y) = y$ nous aurons à intégrer l'équation transformée (18)

$$(b-y)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0,$$

qui nous donne, pour λ et μ,

$$\lambda = \frac{X'(X+Y)}{2(b-y)^2}, \qquad \mu = \frac{2X'(b-y)^2}{X+Y}.$$

Prenons dans ces formules, ainsi que dans les formules (12) et (16), pour les coordonnées nouvelles x et y, les expressions X et $\frac{1}{b-y}$. Nous aurons les surfaces avec l'élément linéaire

$$ds^2 = 2(x+Y)\,dx\,dy, \tag{26}$$

dont les géodésiques sont définies par l'intégrale première

$$y' = \frac{2(y+\alpha)}{x+Y}. \tag{27}$$

Les surfaces (26), comme l'a montré M. Darboux [1], ne sont pas réelles, que si l'on a

$$Y = y, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

et, à propos de ces surfaces, il écrit (*loc. cit.*, t. III, p. 33) :

« Remarquons-le, d'ailleurs, alors même que l'élément linéaire défini par la formule (21) appartient à une surface réelle, la valeur correspondante (23) de la solution θ demeure imaginaire.... »

Mais, en se contentant de cette remarque, l'illustre géomètre met hors de vue une propriété bien remarquable de l'intégrale première (27)

---

(1) G. Darboux, *loc. cit.*, t. III, p. 32. M. Darboux considère l'élément linéaire sous la forme $ds^2 = 4(xY' + Y_1)\,dx\,dy$, d'où on parvient aisément à la forme (26), en prenant Y pour y.

en coordonnées symétriques des lignes géodésiques tracées sur les surfaces considérées.

Si l'on pose, dans (26) et (27),

$$Y = y, \qquad x = u + iv, \qquad y = u - iv,$$

et $\alpha - i\beta$ à la place de α, on obtient une surface *réelle*

$$ds^2 = 4u(du^2 + dv^2), \tag{28}$$

dont les lignes géodésiques possèdent une intégrale première

$$\frac{1 - iv'}{1 + iv'} = \frac{(\alpha + u) - i(\beta + v)}{u}.$$

Cette intégrale en coordonnées symétriques, par la séparation des nombres réels des imaginaires, nous donne *deux intégrales distinctes* (indépendantes) en coordonnées réelles

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1 - v'^2}{1 + v'^2} &= \frac{\alpha + u}{u}, \\ \frac{2v'}{1 + v'^2} &= \frac{\beta + v}{u}, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

de l'équation différentielle du deuxième ordre

$$2uv'' + v' + v'^3 = 0$$

des lignes géodésiques, tracées sur la surface (28). L'*intégrale générale* s'obtiendra *sans aucune quadrature,* par l'élimination de v', et sera

$$\frac{(\alpha + u)^2 + (\beta + v)^2}{u^2} = 1. \tag{30}$$

Tout de même, en faisant dans (26) et (27),

$$Y = \frac{1}{\sqrt{y}}, \qquad x = u + iv, \qquad y = u - iv,$$

et en mettant $\alpha + i\beta$ à la place de α, nous trouvons une autre surface aussi *réelle*

$$ds^2 = 4(u^2 + v^2 + 1)(du^2 + dv^2), \tag{31}$$

pour laquelle l'équation (27) devient

$$\frac{1-iv'}{1+iv'}=\frac{(u^2-v^2+\alpha)-i(2uv-\beta)}{u^2+v^2+1}.$$

On reçoit d'ici, comme dans le cas précédent, *deux intégrales premières distinctes,* en coordonnées réelles,

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1-v'^2}{1+v'^2}&=\frac{u^2-v^2+\alpha}{u^2+v^2+1},\\ \frac{2v'}{1+v'^2}&=\frac{2uv-\beta}{u^2+v^2+1}\end{aligned}\right.$$

de l'équation différentielle du deuxième ordre

$$(u^2+v^2+1)\,v''+(uv'-v)\,(1+v'^2)=0$$

des lignes géodésiques sur la surface (31). L'*intégrale générale*

$$(33)\qquad (2u^2+1+\alpha)\,(2v^2+1-\alpha)=(2uv-b^2)$$

se déduira des équations (32) *sans aucune quadrature.*

Remarquons, d'ailleurs, qu'aucune des intégrales premières (29) et (32) n'est pas, par rapport à la constante arbitraire de la forme (9), qui était la base de nos recherches.

5. Le procédé indiqué, dont nous nous sommes servi pour la détermination des lignes géodésiques sur les surfaces (28) et (31), est, dans la théorie de ces lignes, d'une application tout à fait générale.

Considérons, en effet, une surface *réelle* avec l'élément linéaire (12), pour laquelle l'une des intégrales premières de ses lignes géodésiques est donnée par la formule

$$(34)\qquad y'=\mathcal{F}(x,y,\alpha).$$

Substituons $x=u+iv$, $y=u-iv$ et $\alpha+i\beta$ à la place de α, les coordonnées u, v et les constantes arbitraires α, β étant réelles; nous aurons de (34) une équation transformée

$$(35)\qquad \frac{1-iv'}{1+iv'}=\mathcal{F}(u+iv,\,u-iv,\,\alpha+i\beta)=\mathcal{F}_1+i\mathcal{F}_2,$$

$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant des fonctions réelles de u, v, α, β. Il existe toujours la relation des modules

$$\mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_2^2 = 1, \tag{36}$$

et l'équation (35), par la séparation des nombres réels et imaginaires, se décompose en deux suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1 - v'^2}{1 + v'^2} = \mathcal{F}_1, \\ &\frac{2v'}{1 + v'^2} = -\mathcal{F}_2. \end{aligned} \right. \tag{37}$$

Nous aurons à discuter deux hypothèses suivantes bien différentes.

La relation (36) *est vérifiée* par une liaison de la forme $\Phi(\alpha, \beta) = 0$. En ce cas les équations (37) ne sont pas au fond que les expressions distinctes d'*une même intégrale première*. La détermination de l'*intégrale générale* s'accomplit *au moyen de quadratures* par l'application du théorème de Jacobi. Les surfaces correspondantes, comme nous le proposons, seront dites de la *première classe*.

Si, au contraire, la relation (36) *n'est vérifiée* par aucune liaison de la forme $\Phi(\alpha, \beta) = 0$, la relation (36) elle-même sera l'intégrale générale de l'équation différentielle des lignes géodésiques sur la surface correspondante. En effet, dans ce cas, les équations (37) nous présentent *deux intégrales premières distinctes* et l'élimination de v' nous amène à l'équation (36). L'*intégrale générale* s'obtient par conséquent *sans aucune quadrature*. Nous donnerons aux surfaces correspondantes le nom de *surfaces de la deuxième classe*.

Appliquons cette classification nouvelle à nos surfaces déterminées dans les n^{os} 3 et 4.

Toutes les surfaces du n° 3 sont celles de la *première classe*. Comme on le voit aisément d'après la formule (25), les deux intégrales premières de leurs lignes géodésiques sont de la forme (9).

Quant aux surfaces (réelles) du n° 4, elles sont toutes les deux de la *deuxième classe*. Aucune des intégrales premières, comme nous le montrent les formules (29) et (32), n'est déjà de la forme (9).

6. Enfin, considérons l'hypothèse dernière $\varphi(x) = x$, $\psi(y) = y$.

L'équation (18) à intégrer devient alors

$$(38)\qquad (x-y)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0;$$

l'intégrale générale de cette équation est donnée par Poisson, et nous l'écrirons sous la forme

$$(39)\quad \zeta=\int_0^1\frac{\varphi[x+(y-x)t]\,dt}{\sqrt{t(1-t)}}+\int_0^1\frac{\psi[x+(y-x)t]\log\left[t(1-t)\sqrt{(y-x)^2}\right]dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Pour la détermination des surfaces correspondantes, ainsi que de leurs lignes géodésiques, nous aurons les formules (19), (20), (21), où l'on doit poser $\varphi(x)=x$, $\psi(y)=y$.

Avant d'aborder et de discuter le cas général, où la fonction ζ se trouve déterminée par la formule (39), étudions quelques cas particuliers, assez simples, comme les suivants : $\mu=\mathfrak{F}(z)$ ou $\lambda=\mathfrak{F}(z)$, z étant $z=x-y$. Nous en recevrons de beaux exemples pour l'éclaircissement des considérations ultérieures, relatives au cas général de la formule (39).

Soit $\mu=\mathfrak{F}(z)$; l'équation correspondante

$$(40)\qquad \mu=\frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}}=\mathfrak{F}(z),\qquad z=x-y,$$

nous fait voir que la fonction ζ doit être de la forme

$$(41)\qquad \zeta=\psi(t),\qquad t=x+y+\varphi(z),$$

et, en portant cette valeur de ζ dans la formule (38), nous trouvons deux équations

$$\frac{\psi''(t)}{\psi'(t)}=\frac{\varphi''(z)+\dfrac{\varphi'(z)}{z}}{1-\varphi'^2(z)}=a,$$

pour la détermination de deux fonctions inconnues $\varphi(z)$ et $\psi(t)$. Dans ces dernières formules a est une constante quelconque. La fonction $\psi(t)$ se détermine sans difficulté

$$\psi'(t)=b\,e^{at};$$

quant à la fonction $\varphi(z)$, sa détermination exige l'intégration d'une équation de Riccati. Posons

$$\varphi'(z) = \frac{1}{a}\frac{f'(z)}{f(z)}, \qquad \varphi(z) = \frac{1}{a}\log[Cf(z)];$$

nous parvenons à l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre

$$f''(z) + \frac{1}{z}f'(z) - a^2 f(z) = 0. \tag{42}$$

Elle s'intègre aisément d'après la théorie de M. Fuchs, et son intégrale générale se représente par l'expression

$$f = C_1 f_1 + C_2 f_2, \tag{43}$$

où nous avons

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \sum_0^\infty m_k\left(\frac{a^2 z^2}{4}\right)^k, \qquad m_k = \frac{1}{1.2\ldots k}, \qquad m_0 = 1,\\ f_2 &= \frac{1}{2}f_1\log(c^2 z^2) + f_3,\\ f_3 &= \sum_0^\infty n_k\left(\frac{a^2 z^2}{4}\right)^k, \qquad n_k = -\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}}{(1.2\ldots k)^2}, \qquad n_0 = 0,\end{aligned}\right. \tag{44}$$

c étant une constante quelconque. Les séries f_1 et f_3 sont convergentes pour toutes les valeurs finies de z et ne contiennent que des puissances paires de z. On calcule sans peine

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \psi'(t)[1+\varphi'(z)] = C\frac{b}{a}e^{a(x+y)}[af(z)+f'(z)],$$
$$\frac{\partial\zeta}{\partial y} = \psi'(t)[1-\varphi'(z)] = C\frac{b}{a}e^{a(x+y)}[af(z)-f'(z)],$$

et l'on parvient à la surface

$$ds^2 = C_0 e^{2a(x+y)}(a^2 f^2 - f'^2)\,dx\,dy, \tag{45}$$

avec l'intégrale première des géodésiques

$$y' = \frac{af+f'}{af-f'}\,\frac{\alpha+y}{\alpha+x}. \tag{46}$$

Dans le cas particulier $a = 0$ les formules trouvées (45) et (46) ne sont plus applicables qu'en moyennant le passage à $\lim a = 0$. Du reste, ce cas peut être traité directement et nous obtenons une surface

$$(47) \qquad ds^2 = 4C^2\left(1 - \frac{b^2}{z^2}\right)dx\,dy,$$

avec l'intégrale première des géodésiques

$$(48) \qquad y' = \frac{z+b}{z-b}\,\frac{\alpha+y}{\alpha+x}.$$

L'hypothèse

$$(49) \qquad \lambda = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\,\frac{\partial\zeta}{\partial y} = \mathcal{F}(z), \qquad z = x - y,$$

parallèle à la discutée $\mu = \mathcal{F}(z)$, nous donne pour ζ

$$\zeta = C(x+y) + \varphi(z), \qquad \varphi'(z) = \frac{Cb}{z}.$$

Par conséquent nous aurons

$$\lambda = C^2\left(1 - \frac{b^2}{z^2}\right), \qquad \mu = \frac{z+b}{z-b},$$

c'est-à-dire les formules (47) et (48) précédentes. Discutons les formules (45) et (47), en cherchant des surfaces réelles correspondantes. Si l'on fait dans (45) la transformation $x = u + iv$, $y = u - iv$, $c^2 = -1$, les autres constantes C_0, C_1, C_2, a étant réelles, la fonction f donnera un nombre réel, tandis que sa dérivée sera purement imaginaire

$$af = M_1, \qquad f' = iN_1,$$

toutes les deux ne renfermant que la variable v. La formule (45) nous donnera une surface *réelle*

$$(50) \qquad ds^2 = C_0 e^{4au}(M_1^2 + N_1^2)(du^2 + dv^2),$$

appartenant au genre de celles que M. Maurice Lévy a nommées les *surfaces spirales*. D'après notre classification, c'est une surface de la *première classe*, car l'équation (46),

$$\frac{1 - iv'}{1 + iv'} = \frac{M_1 + iN_1}{M_1 - iN_1}\,\frac{(\alpha+u) - iv}{(\alpha+u) + iv},$$

nous fait voir que la relation (36) se vérifie identiquement pour toutes les valeurs réelles de α, et cette équation (46) ne nous donne qu'une intégrale première

$$v' = \frac{M_1 v - N_1(\alpha + u)}{M_1(\alpha + u) + N_1 v}, \tag{51}$$

qui est de la forme (9). L'intégrale générale, d'après la formule (21), est représentée par la quadrature

$$\int \frac{v e^{2au}}{\sqrt{[(\alpha + u)^2 + v^2]^3}} \left\{ \left[2avf + (\alpha + u)\frac{df}{dv} \right] du + \left[v\frac{df}{dv} - 2a(\alpha + u)f \right] dv \right\} = \beta, \tag{52}$$

où la fonction $f(v)$, en vertu de la formule (42), quand on y pose $z = x - y = 2iv$, vérifie l'équation

$$\frac{d^2 f}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{df}{dv} + 4a^2 f = 0.$$

La transformation $x = iu + v$, $y = iu - v$, si l'on remplace α par $i\alpha$, ne nous donne que la surface identique à la précédente (50).

Passons maintenant à la discussion de la formule (47). La transformation $x = u + iv$, $y = u - iv$ nous amène à une surface de la *première classe*

$$ds^2 = C^2\left(1 + \frac{b^2}{4v^2}\right)(du^2 + dv^2), \tag{53}$$

avec l'intégrale première pour ses géodésiques

$$vv' = \frac{b(\alpha + u) + 2v^2}{2(\alpha + u) - b}, \tag{54}$$

qui conserve la forme (9). L'intégrale générale se trouve sans peine

$$\frac{\sqrt{(\alpha + u)^2 + v^2}}{2(\alpha + u) - b} = \beta. \tag{55}$$

Mais, en faisant dans les mêmes formules (47) et (48) $x = iu + v$, $y = iu - v$ et en remplaçant α par $\alpha + i\beta$, on parvient à une surface de la *deuxième classe*

$$ds^2 = C^2\left(\frac{b^2}{4v^2} - 1\right)(du^2 + dv^2), \tag{56}$$

avec l'intégrale générale des géodésiques

$$\left(\frac{2v+b}{2v-b}\right)^2\frac{(\alpha-v)^2+(\beta+u)^2}{(\alpha+v)^2+(\beta+u)^2}=1, \tag{57}$$

car l'équation (48) se décompose en deux *intégrales premières distinctes*

$$\frac{b^2-4v^2}{b^2+4v^2v'^2}=1-\frac{2\alpha}{b},$$

$$\frac{vv'(b^2-4v^2)}{b^2+4v^2v'^2}+u=-\beta,$$

de l'équation différentielle du deuxième ordre

$$v''+\frac{b^2(1+v'^2)}{v(b^2-4v^2)}=0,$$

pour les lignes géodésiques tracées sur la surface (56). Il faut remarquer qu'ici, comme dans les autres cas, aucune des intégrales premières n'est de la forme (9).

Après avoir élucidé par des exemples particuliers les circonstances qui peuvent se présenter dans le cas actuel, passons à examiner les conséquences, qui se déduisent de la considération de la solution complète pour ζ, donnée par la formule générale (39).

Tout d'abord, notons que la fonction ζ ne change pas sa valeur, si l'on échange les arguments x et y l'un et l'autre. Il suffit, pour s'en convaincre, après avoir substitué x et y l'une à la place de l'autre, introduire la nouvelle variable d'intégration $t'=1-t$. Or de l'identité

$$\zeta(x,y)=\zeta(y,x) \tag{58}$$

il suit nécessairement qu'on obtiendra la valeur $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ de $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, en y échangeant les arguments x et y

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\int^{x=y,\,y=x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}. \tag{59}$$

On s'en assure aussi par le calcul direct, en prenant les dérivées $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ de ζ en (39) et en se servant ensuite de la transformation $t'=1-t$.

Les propriétés précédentes de la fonction ζ étant établies, voici une conclusion générale qui en découle.

Les coefficients de la fonction ζ étant des nombres réels, posons $x = u + iv$, $y = u - iv$, et soit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \mathrm{M} + i\mathrm{N},$$

où M et N sont des nombres réels; en vertu de la propriété (59) il y aura aussi

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mathrm{M} - i\mathrm{N}.$$

On obtient une surface *réelle de la première classe*

$$ds^2 = 4(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)(du^2 + dv^2), \tag{60}$$

car l'équation (20) ne nous donne qu'une intégrale première des lignes géodésiques sur notre surface

$$v' = \frac{\mathrm{M}v - \mathrm{N}(\alpha + u)}{\mathrm{M}(\alpha + u) + \mathrm{N}v}, \tag{61}$$

l'intégrale douée de la forme (9). L'intégrale générale, au moyen de la formule (21), s'exprimera par la quadrature

$$\int v \frac{[\mathrm{M}v - \mathrm{N}(\alpha + u)]\,du - [\mathrm{M}(\alpha + u) + \mathrm{N}v]\,dv}{\sqrt{[(\alpha + u)^2 + v^2]^3}} = \beta. \tag{62}$$

Mais la solution générale (39), comme nous l'avons déjà vu sur un exemple particulier de la surface (47), peut aussi nous donner des surfaces de la *deuxième classe*. Arrêtons-nous, en ce moment, sur des hypothèses assez générales. En prenant les variables nouvelles

$$x' = x + y,$$
$$y' = x - y,$$

supposons, que la fonction ζ soit développable dans une série ordonnée suivant des puissances entières de x' et y'; il en sera de même pour $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$. Distribuons tous les termes de $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ en deux groupes : l'un d'eux $\mathrm{M}(x', y')$ ne contient que des puissances *paires* de y', et l'autre $\mathrm{N}(x', y')$, des puissances *impaires* de y'. Si l'on échange x et y, la variable x' ne change ni de valeur ni de signe, tandis que l'autre y'

ne change que de signe. Il s'ensuit, en vertu de la relation existant entre $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ et $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$, que

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\zeta}{\partial x} &= \mathrm{M}(x', y') + \mathrm{N}(x', y'),\\ \frac{\partial\zeta}{\partial y} &= \mathrm{M}(x', y') - \mathrm{N}(x', y'). \end{aligned}\right.$$

La transformation $x = u + iv$, $y = u - iv$, quand on a $x' = 2u$, $y' = 2iv$, nous donne

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \mathrm{M} + i\mathrm{N}, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \mathrm{M} - i\mathrm{N};$$

c'est le cas déjà traité des surfaces de la *première classe*.

Mais supposons, en outre, que nos groupes $\mathrm{M}(x', y')$ et $\mathrm{N}(x', y')$ ne contiennent, *tous les deux*, que des puissances de x' *paires* ou *impaires*. En se servant de la transformation

$$x = iu + v, \qquad y = iu - v,$$

nous aurons

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \mathrm{M} + \mathrm{N}, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \mathrm{M} - \mathrm{N}$$

dans le cas des puissances de x' paires, et

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = i(\mathrm{M} + \mathrm{N}), \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = i(\mathrm{M} - \mathrm{N})$$

dans le cas des puissances impaires. Dans les deux cas considérés nous parvenons à des surfaces *réelles de la deuxième classe*

$$(64)\qquad ds^2 = \pm 4(\mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2)(du^2 + dv)^2,$$

avec l'intégrale générale des lignes géodésiques

$$(65)\qquad \left(\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}}{\mathrm{M}-\mathrm{N}}\right)^2 \frac{(\alpha + u)^2 + (\beta - v)^2}{(\alpha + u)^2 + (\beta + v)^2} = 1,$$

et l'on s'assure aisément qu'aucune des intégrales premières correspondantes n'est de la forme (9).

7. Dans les numéros précédents nous avons déterminé toutes les surfaces qui, en coordonnées orthogonales et isothermes, admettent, pour leurs lignes géodésiques, au moins une intégrale première de la forme (9). Ce sont les surfaces (23) et (60), appartenant toutes à la *première classe*. Il se présente ici une question importante : y a-t-il d'autres surfaces qui, en coordonnées réelles quelconques, admettent une intégrale première de nature indiquée? Nous devons y répondre négativement. En effet, une intégrale première, en coordonnées réelles quelconques, étant de la forme (9)

$$v' = \frac{A + B\alpha}{C + D\alpha},$$

toutes les transformations réelles quelconques

$$u = \varphi(u_1, v_1), \qquad v = \psi(u_1, v_1)$$

ne nous donneront que

$$v'_1 = \frac{A_1 + B_1\alpha}{C_1 + D_1\alpha},$$

car, vu les formules de transformation, on a toujours

$$v' = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\psi}{\partial v_1} v'_1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_1} v'_1}.$$

Par conséquent, ayant trouvé, en coordonnées isothermes, toutes les surfaces à l'intégrale (9), nous sommes bien rassurés d'avoir obtenu toutes les solutions de la question posée.

La détermination des surfaces cherchées étant accomplie, examinons de plus près les propriétés de leurs lignes géodésiques.

Soient φ et ψ les angles d'une courbe quelconque aux lignes des coordonnées $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$; on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{v'\sqrt{EG - F^2}}{E + Fv'}, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{F + Gv'},$$

En appliquant ces formules aux lignes géodésiques tracées sur les surfaces (23) et (60), nous trouvons

$$\operatorname{tang}\varphi = v', \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{1}{v'}, \tag{66}$$

la quantité v' étant donnée successivement par les formules (24) et (61). Nommons L chacun des déterminants de ces deux expressions (24) et (61)

$$L = \begin{vmatrix} M & -N \\ N & M \end{vmatrix}, \qquad L = \begin{vmatrix} Mv - Nu & -N \\ Mu + Nv & M \end{vmatrix},$$

et étudions les variations de $\operatorname{tang}\varphi$ et $\operatorname{tang}\psi$ dans les domaines des points $P(u, v)$, où l'on a $L \neq 0$. Nous donnerons à de tels points le nom de points *ordinaires* de la surface. La surface étant définie par la formule (23), nous obtenons

$$\frac{\partial \operatorname{tang}\varphi}{\partial \alpha} = -\frac{M^2 + N^2}{(N + M\alpha)^2};$$

quand le paramètre α varie en croissant de $-\infty$ à $+\infty$, $\operatorname{tang}\varphi$ est la fonction décroissante de α, qui prend toutes valeurs possibles entre $-\infty$ et $+\infty$.

Pour la surface (60) on calcule

$$\frac{\partial \operatorname{tang}\varphi}{\partial \alpha} = -\frac{v(M^2 + N^2)}{[M(\alpha + u) + Nv]^2};$$

$\operatorname{tang}\varphi$ est une fonction décroissante ou croissante de α selon que l'on a $v \gtrless 0$. La courbe L_0, *courbe de limite,*

$$v = 0, \tag{67}$$

sépare les points de la surface, où $\operatorname{tang}\varphi$ croît de ces points où la même fonction devient une fonction décroissante.

Excluons les points de nos surfaces, où l'on a $M^2 + N^2 = 0$. Ce sont, s'il y a de tels points effectivement, les points *isolés* de nos surfaces, car l'élément linéaire (1) nous donnant $ds^2 = 0$, toutes les courbes passant par ces points ont la *longueur nulle*.

Cette exclusion étant faite, tous les points d'une surface (23) sont des points ordinaires qui appartiennent à *une* région fermée, finie ou non, avec le même signe de la variation de $\operatorname{tang}\varphi$. Au contraire, une surface quelconque (60) consiste, en général, en *deux* régions distinctes séparées l'une de l'autre par la courbe de limite L_0; les points de ces deux régions, étant tous ordinaires, sont caractérisés par les signes opposés de la variation de $\operatorname{tang}\varphi$.

En chaque point P d'une surface (23) les lignes géodésiques sont bien déterminées par les valeurs du paramètre α, et quand ce paramètre varie de $-\infty$ à $+\infty$, les lignes géodésiques passant par P se déplacent autour de P, toujours au sens négatif, prenant toutes les directions possibles. Considérons les domaines de deux points $P_0(u_0, v_0)$ et $P_1(u_1, v_1)$. Supposons que ces domaines soient appliqués l'un sur l'autre de telle manière que, les points P_0, P_1 et les plans tangents correspondants étant confondus, les lignes des coordonnées $v = \text{const.}$ ont une même direction. L'équation $\operatorname{tang}\varphi_0 = \operatorname{tang}\varphi_1$ ou

$$\frac{M_0 - N_0\alpha}{N_0 + M_0\alpha} = \frac{M_1 - N_1\alpha}{N_1 + M_1\alpha},$$

après les réductions faciles, devient

$$(M_0 N_1 - M_1 N_0)(1 + \alpha^2) = 0,$$

et n'a pas, en général, des racines réelles, outre le cas

$$M_0 N_1 - M_1 N_0 = 0,$$

où elle se vérifie identiquement. Par conséquent, les tangentes aux géodésiques de deux domaines appliqués, correspondantes à une même valeur de α, ne se confondent jamais, excepté les points de la courbe

$$\frac{M}{N} = \text{const.}, \tag{68}$$

le long de laquelle toutes les tangentes, correspondantes à une même valeur de α, après l'application mentionnée, ont la même direction.

En passant aux surfaces (60), nous voyons tout de suite que dans le cas actuel le sens du mouvement des géodésiques peut être négatif ou positif selon le signe de v. L'équation $\operatorname{tang}\varphi_0 = \operatorname{tang}\varphi_1$ ou

$$\frac{(M_0 v_0 - N_0 u_0) + N_0\alpha}{(M_0 u_0 + N_0 v_0) + M_0\alpha} = \frac{(M_1 v_1 - N_1 u_1) - N_1\alpha}{(M_1 u_1 + N_1 v_1) + M_1\alpha},$$

qui est du second degré par rapport à α, a pour son discriminant l'expression

$$\Delta = 4 v_0 v_1 (M_0^2 + N_0^2)(M_1^2 + N_1^2) \\ - [(M_0 M_1 + N_0 N_1)(v_0 + v_1) + (M_0 N_1 - M_1 N_0)(u_0 - u_1)]^2.$$

Si les points donnés appartiennent à *deux régions différentes*, nous aurons $v_0 v_1 < 0$, $\Delta < 0$, et les domaines des points P_0 et P_1 étant appliqués, il y aura certainement deux tangentes distinctes confondues. Cela est bien évident, parce que sous la condition $v_0 v_1 < 0$ le mouvement des tangentes s'accomplit dans deux sens opposés.

Si, au contraire, les points P_0 et P_1 sont de la même région, quand on a $v_0 v_1 > 0$, il y aura deux ou zéro tangentes confondues; en particulier, il y aura deux tangentes communes toutes les fois que P_0 et P_1 appartiennent à la courbe définie par l'équation (68).

Comme points *singuliers* de nos surfaces (23) et (60), nous signalerons tous ceux où l'on a $L = 0$. Pour les surfaces (23) les points à $L = 0$ coïncident à des points, déjà exclus, où l'on a $M^2 + N^2 = 0$. Il ne nous reste qu'à étudier pour les surfaces (60) la marche de leurs lignes géodésiques le long de la courbe de limite L_0, en supposant toujours $v(M^2 + N^2) = 0$ pour $v = 0$, d'où il suit nécessairement, aussi pour $v = 0$, $Mv = 0$, $Nv = 0$. Les formules (66) nous donnent

$$\operatorname{tang}\varphi = v' = -\frac{N}{M}, \qquad \operatorname{tang}\psi = -\frac{M}{N}$$

pour toutes les valeurs de α, excepté la valeur $\alpha = -u$, quand les valeurs $\operatorname{tang}\varphi$ et $\operatorname{tang}\psi$ restent complètement indéterminées. Reprenons les hypothèses assez générales sur lesquelles sont basées les formules (63). Vu les conditions précédentes $Mv = 0$, $Nv = 0$, nous aurons, en général, $M \neq 0$, $N = 0$ pour $v = 0$, quel que soit u. On obtient ainsi pour les géodésiques le long de la courbe de limite L_0, sous les conditions indiquées,

$$\operatorname{tang}\varphi = 0, \qquad \operatorname{tang}\psi = \infty.$$

Il s'ensuit que toutes les lignes géodésiques, excepté peut-être l'une, partant d'un point quelconque de la courbe de limite L_0 lui sont tangentes.

Donc, dans le cas considéré, la courbe de limite L_0 jouit, par rapport aux lignes géodésiques des surfaces (60), de la même propriété que la droite à l'infini d'un plan par rapport à ses droites finies.

Et l'on aura l'affirmation de la conclusion précédente si l'on discute l'enveloppe des lignes géodésiques, issues d'un point quelconque ordinaire d'une surface (60). En effet, vu la formule (62), l'équation des géodésiques, partant d'un point $P_0(u_0, v_0)$, est représentée par l'intégrale

$$(69) \qquad \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} v \frac{[Mv - N(\alpha + u)]\,du - [M(\alpha + u) + Nv]\,dv}{\sqrt{[(\alpha + u)^2 + v^2]^3}} = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe cherchée, il faut, en partant de l'équation (69), lui joindre une équation qui en sera déduite par une différentiation par rapport à α; il viendra

$$(70) \qquad \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} v \frac{P\,du + Q\,dv}{\sqrt{[(\alpha + u)^2 + v^2]^3}} = 0,$$

où nous avons désigné

$$P = 2N(\alpha + u)^2 - 3Mv(\alpha + u) - Nv^2,$$
$$Q = 2M(\alpha + u)^2 + 3Nv(\alpha + u) - Mv^2.$$

L'enveloppe est donc représentée par le système des équations (69) et (70). Il est bien visible que, sous les conditions déjà mentionnées, la courbe de limite L_0 intervient comme l'élément commun de toutes ces enveloppes.

Quant à la surface (23), l'enveloppe des lignes géodésiques, partant d'un point $P_0(u_0, v_0)$, en vertu de la formule (24) de leur intégrale générale, sera donnée par le système des équations

$$(71) \qquad \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} (N\,du + M\,dv) = 0, \qquad \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} (M\,du - N\,dv) = 0.$$

L'enveloppe varie d'un point P_0 à l'autre, et ne contient, en général, que des points discrets, isolés.