E. CARTAN

L'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 241-311

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__241_0>

SUR

L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES,

PAR M. E. CARTAN.

Le problème de l'existence des intégrales d'un système donné de s équations aux différentielles totales à r variables, lorsque ce système n'est pas complètement intégrable, n'a guère fait l'objet de recherches un peu étendues que depuis le Mémoire de M. Biermann *Ueber n simultane Differentialgleichungen der Form* $\Sigma X_\mu dx_\mu = 0$ publié en 1885 dans le Tome XXX du *Schlöm. Zeitschrift.* Encore ne se proposait-il que de rechercher le nombre maximum de variables indépendantes qu'il faut prendre pour qu'il existe une famille de multiplicités intégrales remplissant tout l'espace. Il a trouvé ainsi que ce nombre maximum, *lorsque les coefficients sont quelconques,* est égal au quotient à une unité près par défaut du nombre total r des variables par le nombre s des équations augmenté de 1; de plus, le reste de cette division indique le nombre de fonctions des variables indépendantes que l'on peut prendre arbitrairement sans que le problème cesse d'être possible. On n'a guère fait depuis que présenter la démonstration des mêmes résultats sous une autre forme sans arriver jamais d'ailleurs à une rigueur parfaite, et il ne s'est à peu près rien fait sur le cas où les coefficients du système différentiel ne sont pas quelconques.

On peut arriver à des résultats précis et généraux en prenant en considération les covariants bilinéaires des premiers membres des équations du système donné, dont l'introduction par Frobenius et M. Darboux s'est montrée si féconde dans la théorie d'une seule équation de Pfaff. En somme, en se bornant à considérer les équations données, on exprime, pour employer un langage géométrique, que chaque tangente en un point donné A à une multiplicité intégrale M passant par ce point est contenue dans une certaine multiplicité plane (P) à $r-s$ dimensions associée à ce point. Mais si l'on introduit les covariants bilinéaires, on trouve que non seulement toute multiplicité plane (T) à 1, 2, ... dimensions, tangente à une multiplicité intégrale, est contenue dans (P), mais, en outre, que deux droites quelconques de cette multiplicité plane (T) satisfont à certaines relations bilinéaires par rapport à leurs paramètres directeurs. Ou encore, si l'on représente une droite issue de A par un point d'un espace R à $r-1$ dimensions, *l'image d'une tangente à* M *est assujettie à être dans une multiplicité plane* (H) *de* R, *mais, en outre, la droite qui joint les images de deux tangentes à la même multiplicité intégrale* M *est assujettie à appartenir à un certain nombre de complexes linéaires associés à* A.

En somme, on fait correspondre à chaque point A de l'espace non seulement une multiplicité plane (II), mais encore un ensemble de complexes linéaires dans cette multiplicité plane. Il est clair que la nature de ces complexes linéaires doit influer sur l'existence et le degré d'indétermination des multiplicités intégrales.

En appelant élément E_p l'ensemble d'un point A et d'une multiplicité à p dimensions passant par ce point et en convenant de dire que E_p est *intégral* toutes les fois que son image dans R est située entièrement dans (II) et, en outre, ne contient que des droites appartenant aux complexes linéaires correspondant à A, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une multiplicité soit intégrale est que tous ses éléments soient intégraux.

Si l'on cherche alors à faire passer par une multiplicité intégrale connue à $m-1$ dimensions une multiplicité intégrale à m dimensions, on trouve que cela est possible toutes les fois que par un élément intégral quelconque E_{m-1} il passe un élément intégral E_m. La solution est donnée par un système de M^{me} de Kowalewsky, et elle est unique si par un E_{m-1} arbitraire, il passe un seul E_m.

Cela étant, on est conduit à définir un entier n de la manière suivante :

Par un point arbitraire A, il passe au moins un élément intégral E_1 ;

Par un élément intégral E_1 arbitraire, il passe au moins un élément intégral E_2, etc.;

Par un élément intégral E_{n-1} arbitraire, il passe au moins un élément intégral E_n;

Enfin, par un élément intégral arbitraire E_n, il ne passe aucun élément intégral E_{n+1}.

L'entier n ainsi défini peut s'appeler le *genre* du système.

On peut tirer de là des conclusions précises sur l'existence des intégrales du système donné. Pour cela supposons d'une manière générale que les éléments intégraux E_{i+1} qui passent par un élément intégral E_i arbitraire dépendent de r_{i+1} paramètres (si l'élément est unique, nous conviendrons de donner à r_{i+1} la valeur zéro). Alors voici un système de conditions géométriques qui déterminent complètement l'intégrale à n dimensions :

Étant donnés un point arbitraire μ_0, une multiplicité arbitraire μ_{r-r_1} passant par ce point, une multiplicité arbitraire μ_{r-r_2} passant par μ_{r-r_1}, etc., une multiplicité arbitraire μ_{r-r_n} passant par $\mu_{r-r_{n-1}}$, il existe une multiplicité intégrale M_n, et une seule, passant par μ_0, ayant en commun avec μ_{r-r_1} une multiplicité à 1 dimension, ..., avec μ_{r-r_i} une multiplicité à i dimensions et contenue dans μ_{r-r_n}.

En traduisant analytiquement cet énoncé et en le particularisant de manière à pouvoir obtenir toutes les multiplicités intégrales une fois, et une fois seulement, on démontre que l'intégrale générale à n dimensions est déterminée, et d'une manière unique, par un système de

s_n	fonctions arbitraires	de n	arguments,
s_{n-1}	»	$n-1$	»
.....	.....	.....	.....
s_1	»	1	»

et

s constantes arbitraires,

en posant

$$\begin{aligned} s_n &= r_n, \\ s_{n-1} &= r_{n-1} - r_n - 1, \\ &\dots\dots\dots, \\ s_1 &= r_1 - r_2 - 1, \\ s &= r - r_1 - 1. \end{aligned}$$

Ces entiers s sont d'ailleurs tous positifs et *ils vont en croissant, ou du moins ne vont pas en décroissant de s_n à s.*

D'ailleurs, on peut donner du mot *arbitraire* qui se trouve dans ces énoncés une définition précise.

On voit donc le rôle important joué par ces entiers s et la manière simple dont ils dépendent de la multiplicité plane (II) et du système de complexes linéaires dont il a été parlé plus haut.

En particulier, si les coefficients des équations données ne sont soumis à aucune particularisation, ce qui est le cas étudié par M. Biermann, le genre n est le quotient à une unité près de r par $s+1$, et si l'on désigne le reste par σ, on a

$$s_n = \sigma, \qquad s_{n-1} = s_{n-2} = \ldots = s_1 = s,$$

de sorte que l'intégrale générale dépend de σ fonctions arbitraires de n arguments, de s fonctions arbitraires de $n-1$ arguments, etc., de s constantes arbitraires. C'est, avec évidemment beaucoup plus de précision, le résultat trouvé par M. Biermann.

Les systèmes différentiels pour lesquels l'entier s_n est nul jouissent de propriétés plus particulièrement intéressantes; on peut les appeler *systèmes de première espèce.*

D'une manière générale, l'intégration peut se simplifier si plusieurs des nombres s sont nuls. Si s_ν est celui de ces nombres nuls qui a le plus petit indice, on a alors

$$s_\nu = s_{\nu+1} = \ldots = s_n = 0.$$

Pour ces systèmes, par un élément intégral arbitraire $E_{\nu-1}$ il passe un élément intégral E_n, et un seul. De même, il suffit de se donner les multiplicités μ_0, μ_{r-r_1}, ..., $\mu_{r-r_{\nu-1}}$, dont il a été parlé plus haut, pour *déterminer* l'intégrale M_n et *la recherche de cette intégrale peut se ramener à celle d'un système de genre* ν. Il suffit de faire passer par $\mu_{r-r_{\nu-1}}$ une multiplicité arbitraire mais déterminée $\mu_{r-r_\nu-1}$, et par celle-ci une famille de multiplicités μ_{r-r_ν} dépendant de $r_\nu = n-\nu$ paramètres et remplissant tout l'espace. A chacune d'elles correspond une multiplicité intégrale M_ν; le lieu de ces multiplicités M_ν, lorsque l'on fait varier les $n-\nu$ paramètres dont elles dépendent, est la multiplicité M_n cherchée. En définitive, on est ramené à un système à $r-r_\nu$ variables de genre ν, mais dont les coefficients dépendent de $n-\nu$ constantes arbitraires. Dans le cas où ν est égal à 1, c'est la méthode de Lie-Mayer pour l'intégration des systèmes complètement intégrables. On peut appeler ν le *genre vrai* du système.

Dans un autre ordre d'idées, il y a un cas où l'intégration peut encore se simplifier, c'est celui où il passe par chaque point A un élément *caractéristique*. On appelle ainsi un élément intégral E_p, tel que tout autre élément formé de E_p et d'un élément linéaire intégral soit aussi intégral, ou, comme on peut dire, où E_p est associé à un élément linéaire intégral quelconque. On peut démontrer alors que le système d'équations aux différentielles totales qui définit les éléments caractéristiques est *complètement intégrable*. Autrement dit, il existe une famille de multiplicités à p dimensions admettant en chacun de leurs points l'élément caractéristique E_p correspondant; ces multiplicités, qu'on appelle *caractéristiques*, dépendent de $r-p$ paramètres, et il en passe une, et une seule, par chaque point arbitraire de l'espace. Pour les systèmes différentiels de genre n où il existe des éléments caractéristiques E_p, toute multiplicité intégrale M_n non singulière est engendrée par des multiplicités caractéristiques dépendant de $n-p$ paramètres, et si deux multiplicités intégrales M_n et M'_n ont un point commun, elles ont en commun la multiplicité caractéristique issue de ce point.

Enfin si l'on prend pour nouvelles variables les $r-p$ paramètres dont dépendent les caractéristiques et p autres fonctions quelconques, le système peut être mis sous une forme telle qu'il ne contienne plus que les $r-p$ premières variables. D'ailleurs, la recherche de ces $r-p$ variables, autrement dit l'intégration du système différentiel caractéristique peut, en général, être simplifiée en tenant compte des propriétés des complexes linéaires associés au système donné.

En particulier, si l'on a un système de genre n de première espèce pour lequel s_1 soit égal à 1, ce qui est le cas d'une seule équation, il y a toujours des multiplicités caractéristiques à $n-\nu+1$ dimensions, ν désignant le genre vrai du système. Une fois ces caractéristiques trouvées par des opérations dont l'ordre décroît à chaque fois de deux unités, on n'a qu'à intégrer un système à $r-n+\nu-1$ variables et de genre $\nu-1$.

Il existe également des théorèmes assez simples dans le cas où s_1 est égal à 2, mais l'étude de ces théorèmes rentrerait dans la théorie de la *classification* des systèmes aux différentielles totales.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer les liens entre toute cette théorie et la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Je me contenterai d'indiquer la concordance quant à la forme entre les résultats trouvés pour le degré d'indétermination de l'intégrale générale d'un système de Pfaff et ceux trouvés par M. Delassus [1] pour le degré d'indétermination de l'intégrale générale d'un système en involution d'équations aux dérivées partielles. Mais alors que M. Delassus met le système sous une forme particulière, en différentiant d'ailleurs complètement les variables dépendantes des fonctions inconnues, ici l'on ne fait aucune différence entre les deux espèces de variables, et l'origine même des nombres $s, s_1, \ldots, s_n$ montre leur invariance vis-à-vis de tout changement de variables dépendantes ou indépendantes.

Les deux premiers paragraphes de ce Mémoire introduisent les éléments intégraux, avec les complexes linéaires dont il a déjà été parlé. Le § III traite du problème qui consiste à faire passer par une multiplicité intégrale M_m une multiplicité M_{m+1}. Les §§ IV et V donnent quelques théorèmes, pour ainsi dire arithmétiques, sur le genre n et les nombres r_i et s_i. Le § VI contient l'exposé du problème de Cauchy et du degré d'indétermination de l'intégrale générale d'un système de genre n. Le § VII est consacré aux systèmes de première espèce et à la méthode de Lie-Mayer généralisée. Enfin le § VIII s'occupe des systèmes qui admettent des caractéristiques au sens donné plus haut à ce mot et donne quelques indications sur la recherche de ces caractéristiques.

Ces recherches peuvent être étendues dans bien des directions, et le problème de la *classification* des systèmes différentiels peut déjà, comme on le voit, être abordé par un premier problème préliminaire qui serait la *recherche des systèmes de complexes linéaires de genre* n. Une autre question très importante serait l'étude des multiplicités inté-

---

(1) *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* [*Ann. de l'Éc. Norm.* (3), t. XIII, p. 421-467].

grales *singulières;* il n'est pas difficile de les définir, mais ce qui serait intéressant, ce serait l'étude des nouveaux systèmes différentiels qui les définissent. Quant au premier problème de la classification, on peut sans trop de difficultés démontrer un certain nombre de résultats intéressants, mais sur lesquels je ne veux pas insister.

I.

Considérons un système d'équations aux différentielles totales à r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$,

$$(1)\quad \begin{cases} \omega \equiv a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_r\,dx_r = 0, \\ \varpi \equiv b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2 + \ldots + b_r\,dx_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \chi \equiv l_1\,dx_1 + l_2\,dx_2 + \ldots + l_r\,dx_r = 0, \end{cases}$$

les coefficients $a, b, \ldots, l$ étant des fonctions des variables x. On peut regarder un certain nombre n des variables x comme indépendantes et les $r-n$ autres comme des fonctions de celles-là; alors le système (1), établissant des relations linéaires entre les différentielles totales des $r-n$ fonctions et des n variables indépendantes, équivaut en somme à un système d'équations aux dérivées partielles (linéaires) auquel doivent satisfaire ces $r-n$ fonctions ([1]). En employant un langage géométrique, on peut dire que les équations qui définissent les $r-n$ variables dépendantes en fonctions des n indépendantes représentent une *multiplicité à n dimensions* M_n dans l'espace à r dimensions, et le système (1) peut être regardé comme établissant des conditions auxquelles doivent satisfaire les différentielles des coordonnées $x_1, \ldots, x_r$ d'un point de la multiplicité dans un déplacement quelconque sur cette multiplicité. Mais, si l'on remarque que ces différentielles (ou leurs rapports qui interviennent seuls) ne sont autres que les *para-*

([1]) On sait, d'ailleurs, que tout système d'équations aux dérivées partielles peut se ramener à un système d'équations aux différentielles totales, en regardant au besoin certaines des dérivées partielles des fonctions inconnues comme de nouvelles variables dépendantes.

mètres directeurs de la *tangente* à la multiplicité dans le déplacement considéré, on peut dire que le système (1) exprime que *les tangentes en un point quelconque de l'espace à une multiplicité* M_n *qui passe par ce point satisfont à certaines conditions qui ne dépendent que du point considéré*, et la forme des équations (1) montre que ces tangentes sont assujetties à être dans une certaine multiplicité plane [1] déterminée par le point.

Intégrer le système (1), où l'on suppose le nombre des variables indépendantes égal à n, c'est donc résoudre le problème suivant :

A chaque point de l'espace on fait correspondre une multiplicité plane [2] *passant par ce point; déterminer une multiplicité à* n *dimensions* M_n, *telle qu'en chacun de ses points toutes les tangentes à cette multiplicité soient situées dans la multiplicité plane correspondante à ce point.*

Toute multiplicité M_n satisfaisant à cette condition sera dite multiplicité *intégrale*. La condition, ainsi énoncée, à laquelle satisfont les multiplicités intégrales, est *indépendante* de la dimension n de ces multiplicités.

Appelons *élément linéaire* l'ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point; convenons, en outre, de dire que l'ensemble d'un point d'une multiplicité et d'une tangente en ce point à la multiplicité constitue un élément linéaire de cette multiplicité; appelons enfin *élément linéaire intégral* tout élément linéaire satisfaisant aux équations (1) (où $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$ seraient regardés comme les paramètres directeurs de la droite de l'élément); nous pourrons alors énoncer la proposition suivante :

Pour qu'une multiplicité soit intégrale, il faut et il suffit que tous ses éléments linéaires soient intégraux.

---

(1) Une multiplicité plane est, comme on sait, définie par des équations linéaires; une droite est une multiplicité plane à *une* dimension.

(2) La dimension de cette multiplicite plane est naturellement la même pour tous les points de l'espace; elle est égale à la différence entre r et le nombre des équations (1).

II.

En même temps que les éléments linéaires, nous allons considérer ce que nous appellerons *éléments à* 2, 3, ... *dimensions*. D'une manière générale, nous désignerons par *élément à p dimensions l'ensemble d'un point et d'une multiplicité plane à p dimensions passant par ce point* et nous affecterons à un tel élément le symbole général E_p; nous dirons que l'élément E_p contient l'élément E_q $(p > q)$, si les deux éléments ont même point et si la multiplicité plane du premier contient tout entière la multiplicité plane du second. En particulier, un élément linéaire sera désigné par le symbole E_1.

Nous appellerons *éléments* E_p *d'une multiplicité* M les éléments à p dimensions tels que tous les éléments linéaires qui y sont contenus appartiennent à M, ou plus brièvement les éléments formés d'éléments linéaires de M. Si la multiplicité M est à n dimensions, elle admet des éléments à 2, 3, ..., n dimensions, mais n'en admet pas à $n+1$; elle admet en chaque point un seul élément à n dimensions, qui est le lieu des éléments linéaires qui contiennent ce point.

Tout élément E_p d'une multiplicité *intégrale* jouit évidemment de la propriété de ne contenir que des éléments linéaires *intégraux; mais il satisfait aussi à d'autres conditions qui peuvent être établies indépendamment de toute multiplicité intégrale particulière.*

Pour arriver à ces conditions, imaginons que les coordonnées d'un point d'une multiplicité intégrale M_n soient exprimées au moyen de n paramètres u, v, ..., et considérons sur cette multiplicité les deux déplacements obtenus, le premier en ne faisant varier que le paramètre u à l'exclusion des autres, le second en ne faisant varier que le paramètre v. Désignons par les symboles d et δ les différentielles relatives à ces deux déplacements. Nous aurons évidemment, d'après (1),

$$\omega_d \equiv a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \ldots + a_r\, dx_r = 0,$$
$$\omega_\delta \equiv a_1\, \delta x_1 + a_2\, \delta x_2 + \ldots + a_r\, \delta x_r = 0,$$

et par suite

$$\omega' \equiv \delta\omega_d - d\omega_\delta = 0.$$

En formant cette expression et remarquant que les symboles d et δ

sont *échangeables* ($d\delta = \delta d$), enfin en procédant de même pour toutes les équations du système (1), on arrive au système suivant :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega' \equiv \sum_{i,k}\left(\dfrac{\partial a_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial a_k}{\partial x_i}\right)(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \chi' \equiv \sum_{i,k}\left(\dfrac{\partial l_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial l_k}{\partial x_i}\right)(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i) = 0. \end{array}\right.$$

Ce système (2) *est vérifié par tout couple quelconque de deux déplacements sur la multiplicité intégrale,* ou encore par l'ensemble d'un point quelconque de la multiplicité et de deux tangentes quelconques en ce point, d'une manière générale *par deux éléments linéaires intégraux issus d'un même point et appartenant à une même multiplicité intégrale.*

Appelons élément *intégral* à 2, 3, ... dimensions un élément *formé d'éléments linéaires intégraux et tel, de plus, que deux quelconques d'entre eux satisfassent au système* (2) ; nous avons alors la proposition suivante :

Tous les éléments à 1, 2, 3, ... *dimensions d'une multiplicité intégrale quelconque sont des éléments intégraux, et réciproquement.*

Pour simplifier le langage, nous conviendrons de dire que deux éléments linéaires intégraux issus d'un même point et satisfaisant au système (2) sont *associés* [1]. Alors un élément *intégral* à 2, 3, ... dimensions est *un élément formé d'éléments linéaires intégraux associés deux à deux.* D'après la forme bilinéaire des équations (2), pour qu'un élément E_p soit intégral, il *suffit* que p éléments linéaires indépendants [2] de E_p soient intégraux et associés deux à deux. (D'ailleurs tout élément E_p peut être défini par p éléments linéaires indépendants issus d'un même point.)

Les expressions ω', ϖ', ..., χ', premiers membres des équations (2),

---

(1) Deux éléments linéaires associés à un troisième ne sont pas nécessairement associés entre eux.

(2) On dit que p éléments linéaires sont *indépendants* lorsqu'ils n'appartiennent pas à un même élément à $p-1$ dimensions.

s'appellent les *covariants bilinéaires* (¹) des expressions de Pfaff ω, $\varpi, \ldots, \chi$. D'après la manière même dont ils sont obtenus et conformément à leur nom, on voit que ce sont des covariants relativement à un changement de variables quelconque.

On peut donner du système (2) une interprétation géométrique. Considérons les différents éléments linéaires intégraux issus d'un point donné A de l'espace et projetons-les sur une multiplicité plane à $r-1$ dimensions (P) ne passant pas par A, le point de vue étant le point A lui-même; alors chaque élément est défini par la *trace* de sa droite sur la multiplicité plane de projection, c'est-à-dire par un point de cette multiplicité (P); et avec nos notations, les quantités $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$ sont les coordonnées homogènes de ce point dans (P). Dire que l'élément linéaire est intégral, c'est dire que les coordonnées de sa projection satisfont aux équations (1), c'est-à-dire sont contenues dans une certaine multiplicité plane (Q) située dans (P). Si nous prenons maintenant deux éléments linéaires intégraux associés et leurs projections sur (P), les quantités $dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i$ sont précisément les coordonnées plückeriennes de la droite qui joint ces deux projections. La première des équations (2) exprime une relation linéaire et homogène entre ces coordonnées, c'est-à-dire exprime que cette droite appartient à un certain complexe linéaire, et il en est de même des autres équations (2).

En résumé, *dire que deux éléments linéaires issus d'un même point* A *sont intégraux et associés, c'est dire qu'en projetant du point* A *ces éléments sur une multiplicité plane* (P) *à $r-1$ dimensions, la droite qui joint les traces des deux éléments est tout entière située dans une certaine multiplicité plane* (Q) *et, de plus, appartient simultanément à un certain nombre de complexes linéaires.*

Et, par suite, *dire qu'un élément* E_p *issu de* A *est intégral, c'est dire que la multiplicité plane, trace de cet élément sur* (P), *est située tout entière sur* (Q) *et, en outre, que chacune des droites de cette multiplicité appartient à un certain nombre de complexes linéaires.*

(¹) Leur introduction dans le problème de Pfaff est due à Frobenius [*Ueber das Pfaff'sche Problem*, *J. de Crelle*, t. LXXXII; 1877) et à M. Darboux [*Sur le problème de Pfaff* (*Bull. Sc. Math.*, 2ᵉ série, t. VI; 1882)].

En somme, à chaque point A le système donné fait correspondre, dans une multiplicité plane à $\sigma - 1$ dimensions arbitrairement choisie (P) ne passant pas par A, une multiplicité plane (Q) et un ensemble de complexes linéaires, dans cette multiplicité (Q).

Si l'on fait un changement de variables, les éléments issus d'un point A sont liés homographiquement aux éléments correspondants issus du point correspondant A' et *l'ensemble des complexes linéaires correspondant à* A *subit aussi une simple transformation homographique* [1].

Il résulte déjà de cette remarque bien simple la conséquence importante que, si deux systèmes d'équations aux différentielles totales (au même nombre de variables) ne font pas correspondre aux points de l'espace des multiplicités planes (Q) et des ensembles de complexes linéaires réductibles l'un à l'autre par une transformation homographique, il est impossible de réduire l'un à l'autre les deux systèmes donnés par un changement de variables. D'une manière plus précise, si l'on désigne par $y_1, y_2, \ldots, y_r$ les variables du second système aux différentielles totales et que nous désignions par (1)' et (2)' les systèmes analogues à (1) et (2), on cherchera à exprimer qu'on peut passer du système [(1).(2)] au système [(1)'.(2)'] par une transformation linéaire portant sur $dx_1, \ldots, dx_r$ aussi bien que sur $\delta x_1, \ldots, \delta x_r$.

Trois cas pourront se présenter. Ou bien cela ne sera possible pour aucun système de valeurs des x et des y, et alors aucun changement de variables ne peut transformer l'un dans l'autre les deux systèmes donnés; ou bien cela sera possible à condition que certaines relations finies entre les x et les y soient vérifiées, et alors tout changement de variables effectuant la transformation cherchée, *si elle est possible,* devra respecter ces relations; ou bien enfin cela sera possible quelles que soient les valeurs des x et des y, et alors on ne peut plus rien dire sur le changement de variables, *s'il est possible.*

Enfin on aperçoit, sans qu'il soit besoin d'insister, que la classification des systèmes d'équations aux différentielles totales exige la classi-

---

[1] Il est évident que, si l'on change simplement la multiplicité plane de projection, on obtient deux systèmes de complexes équivalents par une transformation homographique, puisqu'ils sont la *projection* l'un de l'autre. Si l'on remplace les équations (1) par d'autres formant un système équivalent, il est évident également que ni (Q) ni l'ensemble des complexes linéaires dans (Q) ne sont changés.

fication préalable de tous les systèmes de complexes linéaires, en ne regardant pas comme distincts deux systèmes de complexes réductibles l'un à l'autre par une transformation homographique, c'est-à-dire, en d'autres termes, la recherche de tous les *types* de systèmes de complexes linéaires.

Pour appliquer ce qui précède à un exemple, considérons le système

$$(3)\qquad \begin{cases} \omega \equiv dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \varpi \equiv dp - u\,dq - a\,dx - b\,dy = 0, \end{cases}$$

où les variables sont x, y, z, p, q, u et où a et b désignent deux fonctions données de ces six variables. L'intégration de ce système, considéré comme à deux variables indépendantes x et y, revient à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre admettant un système de caractéristiques du premier ordre, et, avec les notations habituelles, cette équation s'obtient en éliminant u entre les deux relations

$$r - us - a = 0,$$
$$s - ut - b = 0.$$

Ici la multiplicité plane (Q) est à trois dimensions, car les coordonnées homogènes de l'un de ses points sont définies lorsqu'on se donne dx, dy, dq, du. Nous pouvons donc assimiler (Q) à l'espace ordinaire. Il y a ici *deux* complexes linéaires. Or, dans l'espace, un système de deux complexes linéaires est toujours, par une transformation homographique, réductible à l'un des trois suivants :

$$(\alpha)\qquad p_{12} = p_{34} = 0,$$
$$(\beta)\qquad p_{12} = p_{13} + p_{24} = 0,$$
$$(\gamma)\qquad p_{12} = p_{13} = 0,$$

les p_{ik} étant les coordonnées plückeriennes de la droite. Le cas (α) donne l'ensemble des droites qui rencontrent deux droites fixes non situées dans un même plan. Le cas (β) donne l'ensemble des tangentes à une quadrique fixe aux différents points d'une génératrice fixe de cette quadrique. Enfin le cas (γ) donne l'ensemble des droites situées dans un plan fixe et en même temps l'ensemble des droites issues d'un point fixe de ce plan.

A chacun de ces cas correspond un type d'équations du second ordre de la forme indiquée. Au cas (α) correspondent les équations dont les deux systèmes de caractéristiques du second ordre sont distincts. Au cas (β) correspondent les équations à caractéristiques confondues, obtenues en exprimant que l'équation

$$r + 2us + u^2 t + 2\varphi(u, x, y, z, p, q) = 0$$

admet en u une racine double, la fonction φ étant *quelconque*. Enfin au cas (γ) correspondent celles de ces dernières équations pour lesquelles la fonction φ satisfait à une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, et qui ont fait l'objet des recherches de M. Goursat; leur intérêt provient de ce qu'on peut les intégrer par des systèmes d'équations différentielles ordinaires, comme nous le verrons au paragraphe VIII.

III.

Ces notions préliminaires étant bien posées, nous allons nous occuper de ce que l'on peut appeler le *premier problème de Cauchy*. Le problème que nous désignons ainsi est le suivant :

Étant donnée une multiplicité intégrale à p dimensions M_p *d'un système d'équations aux différentielles totales, faire passer par* M_p *une multiplicité intégrale à* $p+1$ *dimensions* M_{p+1}.

Une remarque évidente, c'est que, si le problème est possible, par tout élément E_p de M_p il passe au moins un élément *intégral* E_{p+1}, à savoir un élément E_{p+1} de M_{p+1}. On arrive donc immédiatement à une première condition nécessaire.

Pour que le problème de Cauchy soit possible, il faut que par chaque élément E_p *de la multiplicité intégrale donnée* M_p *il passe au moins un élément intégral* E_{p+1}.

Sans rechercher si cette condition est suffisante, ce qui n'est d'ailleurs pas, nous allons nous borner à un cas particulier, mais qui présente néanmoins une grande généralité. *Nous supposerons, dans ce qui suit, le système donné tel que par tout élément intégral* E_p *de l'espace il passe au moins un élément intégral* E_{p+1}. Autrement dit, la propriété qui appartient aux éléments E_p de M_p, nous la supposons appartenir à tous les éléments intégraux E_p de l'espace.

Avec cette hypothèse, *le problème de Cauchy est toujours possible*. Mais avant d'aborder la démonstration de cette proposition, il nous sera utile de présenter quelques remarques géométriques sur les éléments intégraux E_{p+1} qui contiennent un élément intégral donné E_p. Si l'on définit l'élément E_p au moyen de p éléments linéaires indépendants $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}$, on pourra définir un élément E_{p+1} contenant E_p au moyen d'un nouvel élément linéaire ε indépendant des p premiers. Nous aurons les éléments E_{p+1} cherchés en exprimant que ε est un élément linéaire *intégral* et qu'il est *associé* à chacun des éléments linéaires $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}$. Il résulte de là que *le lieu des éléments intégraux* E_{p+1} *qui contiennent un élément intégral* E_p *est un élément plan* (non nécessairement intégral), car, si ε et ε' fournissent deux solutions distinctes E_{p+1} et E'_{p+1}, les $p+2$ éléments linéaires $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}, \varepsilon, \varepsilon'$ déterminent un élément E_{p+2} et tout élément linéaire de E_{p+2} est intégral et associé à $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}$; autrement dit, tous les éléments E_{p+1} contenus dans E_{p+2} et contenant E_p sont intégraux.

Analytiquement, les éléments E_{p+1} qui contiennent E_p dépendent de $r-p$ paramètres homogènes (¹); les équations qui expriment que E_{p+1} est intégral sont *linéaires* par rapport à ces paramètres.

Supposons que, pour un élément *arbitraire* E_p, ces équations se réduisent à $r-p-s-1$ indépendantes, s étant nul ou positif, alors par chaque élément intégral arbitraire E_p il passera au moins un élément intégral E_{p+1}; il en passera un, et un seul, si s est nul, et il en passera une infinité dépendant de s constantes arbitraires si s est positif. Nous dirons dans les deux cas qu'il en passe ∞^s. Le lieu de tous ces éléments est un élément E_{p+s+1}.

Il se peut que pour un élément intégral particulier E_p il y ait encore une plus grande indétermination; nous dirons alors que l'élément intégral E_p est *singulier*. Une multiplicité intégrale M_p, dont tous les

---

(¹) Par exemple, si les équations de E_p sont

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_{r-p} = 0,$$

où les P sont des formes linéaires en $dx_1, \ldots, dx_r$, les équations de E_{p+1} sont

$$\frac{P_1}{\lambda_1} = \frac{P_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{P_{r-p}}{\lambda_{r-p}}.$$

éléments E_p seraient singuliers, sera dite multiplicité intégrale *singulière*.

Arrivons maintenant à la résolution du problème de Cauchy. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Étant donnée une multiplicité intégrale non singulière M_p, *il passe toujours par cette multiplicité au moins une multiplicité intégrale* M_{p+1} ; *il en passe une, et une seule, si chaque élément intégral non singulier* E_p *appartient à un élément intégral* E_{p+1} *et à un seul; il en passe une infinité dépendant de s fonctions arbitraires de* $p+1$ *arguments si chaque élément intégral non singulier* E_p *appartient à* ∞^s *éléments intégraux* E_{p+1}.

Pour préciser, prenons un élément particulier non singulier de M_p, soit E_p^0. Soient $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0)$ les coordonnées du point d'où est issu cet élément. Nous supposons la multiplicité M_p *analytique*, c'est-à-dire qu'au voisinage du point (x_i^0), $r-p$ des coordonnées x, soit $x_{p+1}, \ldots, x_r$, s'expriment en fonctions holomorphes de $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_p - x_p^0$. Alors les $r-p$ équations de l'élément E_p^0 peuvent être résolues par rapport à $dx_{p+1}, \ldots, dx_r$. Prenons un élément intégral particulier E_{p+1}^0 passant par E_p^0; les $r-p-1$ équations linéaires qui le définissent pourront être résolues par rapport à $r-p-1$ des différentielles $dx_{p+1}, \ldots, dx_r$, soit $dx_{p+2}, dx_{p+3}, \ldots, dx_r$. Si une multiplicité intégrale M_{p+1} admet l'élément E_{p+1}^0, cela signifie que $x_{p+2}, \ldots, x_r$ s'exprimeront en fonctions holomorphes de $x_1, \ldots, x_{p+1}$ au voisinage du point considéré. Pour la commodité de ce qui va suivre, nous allons changer de notations en conservant $x_1, x_2, \ldots, x_p$, remplaçant x_{p+1} par x et les autres variables $x_{p+2}, \ldots, x_r$ par $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(m = r-p-1)$.

Avec ces notations les équations de la multiplicité M_p sont

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \varphi\ (x_1, x_2, \ldots, x_p), \\ z_1 = \varphi_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_p), \end{cases}$$

et la multiplicité cherchée M_{p+1} peut être définie en se donnant $z_1, z_2, \ldots, z_m$ fonctions holomorphes de $x, x_1, \ldots, x_p$ au voisinage de $x_0, x_1^0, \ldots, x_p^0$.

Enfin nous allons faire un changement de variables en conservant les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $z_1, \ldots, z_m$ et en prenant pour nouvelle variable x la quantité $x - \varphi$, ce qui ne change évidemment rien aux conventions précédemment faites. Cela revient, dans les formules (4), à supposer $\varphi \equiv 0$ et $x^0 = 0$.

Pour terminer l'énoncé de ces conventions préliminaires, nous supposerons les coefficients $a, b, \ldots, l$ du système (1) holomorphes au voisinage de $(x^0, x_1^0, \ldots, z_m^0)$.

La multiplicité cherchée M_{p+1} est définie par m fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_m$ des $p+1$ variables, $x, x_1, \ldots, x_p$ holomorphes au voisinage de $(0, x_1^0, \ldots, x_p^0)$ et assujetties à se réduire, pour $x = 0$, aux m fonctions données à l'avance $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Les équations qui déterminent ces fonctions se déduisent des équations (1) en remplaçant $dz_1, \ldots, dz_m$ par leurs valeurs et identifiant; mais *nous allons substituer au système ainsi obtenu un autre système contenant un plus grand nombre d'équations et qui exprimera tout simplement que les éléments E_{p+1} de la multiplicité M_{p+1} sont intégraux.*

Pour cela remarquons que chaque élément E_{p+1} de M_{p+1} peut être défini par $p+1$ éléments linéaires indépendants, à savoir ceux qu'on obtient en faisant varier seulement l'une des variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_p$. Ces $p+1$ éléments, que nous appellerons $\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}$, sont définis par

$$(\varepsilon) \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dx_1}{0} = \ldots = \frac{dx_p}{0} = \frac{dz_1}{\frac{\partial z_1}{\partial x}} = \ldots = \frac{dz_m}{\frac{\partial z_m}{\partial x}},$$

$$(\varepsilon^{(1)}) \qquad \frac{dx}{0} = \frac{dx_1}{1} = \ldots = \frac{dx_p}{0} = \frac{dz_1}{\frac{\partial z_1}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dz_m}{\frac{\partial z_m}{\partial x_1}},$$

$$(\varepsilon^{(p)}) \qquad \frac{dx}{0} = \frac{dx_1}{0} = \ldots = \frac{dx_p}{1} = \frac{dz_1}{\frac{\partial z_1}{\partial x_p}} = \ldots = \frac{dz_m}{\frac{\partial z_m}{\partial x_p}}.$$

Nous partagerons en deux groupes les équations qui expriment que E_{p+1} est intégral; dans le premier groupe nous exprimerons que l'élément E_p défini par $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}$ est intégral; dans le second groupe nous exprimerons que ε est intégral et associé avec $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}$.

Si l'une des équations du système est

$$\omega \equiv a\,dx + a_1\,dx_1 + \ldots + a_p\,dx_p + b_1\,dz_1 + \ldots + b_m\,dz_m = 0,$$

nous poserons

$$\Omega \equiv a + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + b_m \frac{\partial z_m}{\partial x},$$

$$\Omega_i \equiv a_i + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \ldots + b_m \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Avec ces notations les équations du premier groupe sont, comme il est facile de le voir,

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_i = 0, \qquad \dfrac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial \Omega_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

et celles du second groupe sont, par exemple,

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = 0, \qquad \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_i} - \dfrac{\partial \Omega_i}{\partial x} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

les lignes de points se rapportant aux autres équations $\varpi = 0, \ldots, \chi = 0$ du système donné. Le symbole $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ se rapporte à une dérivation par rapport à x_i, en regardant $z_1, z_2, \ldots, z_m$ comme des fonctions de x_i.

Les équations (I) ne contiennent pas $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial z_m}{\partial x}$; celles du second groupe sont *linéaires* par rapport à ces quantités; on peut d'ailleurs les modifier en tenant compte des équations (I).

Tenons compte maintenant des hypothèses faites. Dès que l'élément E_p défini par $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}$ est intégral, les équations auxquelles doit satisfaire φ pour que E_{p+1} soit intégral sont compatibles. Cela signifie que, *dès que les équations sont vérifiées, les équations* (II), *considérées comme équations, linéaires en* $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial z_m}{\partial x}$, *sont algébriquement compatibles;* d'une manière plus précise, elles se réduisent à $m - s$ équations linéairement indépendantes. En particulier il en est ainsi, par hypothèse, pour le système de valeurs $(0, x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Nous supposerons, pour fixer les idées, que ces $m-s$ équations sont, pour les valeurs initiales, résolubles par rapport à

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{\partial z_{m-s}}{\partial x},$$

soit

$$(\mathrm{II}') \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} \quad = \Phi_1\left(x, x_i, z_k, \dfrac{\partial z_k}{\partial x_j}, \dfrac{\partial z_{m-s+1}}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial z_m}{\partial x}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial z_{m-s}}{\partial x} = \Phi_{m-s}\left(x, x_i, z_k, \ldots, \dfrac{\partial z_m}{\partial x}\right), \end{array}\right.$$

les Φ étant holomorphes au voisinage des valeurs initiales de leurs arguments $\left(\text{et linéaires par rapport à } \dfrac{\partial z_{m-s+1}}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial z_m}{\partial x}\right)$.

Cela étant, au lieu de conserver l'ensemble des équations (I) et (II), nous ne conserverons que les équations (II'), en nous rappelant toutefois que les équations (I) et (II') entraînent algébriquement les équations (II).

Nous allons maintenant chercher à déterminer une solution des équations (II') satisfaisant aux conditions suivantes : $z_1, \ldots, z_m$ sont des fonctions holomorphes de $x, x_1, \ldots, x_p$ au voisinage de $(0, x_1^0, \ldots, x_p^0)$ et se réduisant, pour $x=0$, aux m fonctions données $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ de $x_1, \ldots, x_p$.

Or le système (II') est un système de M^me de Kowalewski ; d'après les travaux faits sur ces systèmes, il existe une solution, et une seule, holomorphe au voisinage de $(0, x_1^0, \ldots, x_p^0)$, telle que $z_{m-s+1}, \ldots, z_m$ soient des fonctions (holomorphes) arbitrairement données et que $z_1, \ldots z_s$ se réduisent pour $x=0$ à s fonctions données de $x_1, \ldots, x_p$.

Cela étant, on prendra donc

$$z_{m-s+1} = f_{m-s+1}(x, x_1, \ldots, x_p),$$
$$z_m = f_m(x, x_1, \ldots, x_p),$$

les s fonctions f étant assujetties à la seule condition de se réduire, pour $x=0$, aux s fonctions données $\varphi_{m-s+1}, \ldots, \varphi_m$. Ces s fonctions étant choisies, le système (II') *admettra une solution, et une seule, satisfaisant aux conditions énoncées.*

On voit de plus qu'on pourra toujours s'arranger de manière que pour $x = 0$, $x_i = x_i^0$, les s quantités $\frac{\partial z_{m-s+1}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x}$ prennent des valeurs arbitrairement fixées, c'est-à-dire *pour que la multiplicité* M_{p+1} *ainsi déterminée admette à volonté un des éléments intégraux* E_{p+1} *passant par* E_p^0.

Le problème primitif n'est maintenant pas encore résolu, car, s'il est clair que les multiplicités intégrales cherchées ne peuvent être trouvées que parmi les multiplicités que nous venons de déterminer grâce aux théorèmes de M^{me} de Kowalewsky, il n'en résulte pas que ces multiplicités soient vraiment *intégrales*. Autrement dit, il nous reste encore à prouver que ces multiplicités satisfont aux équations (I) et (II). Pour cela *nous allons démontrer que, si une multiplicité* M_{p+1} *déterminée comme il a été dit satisfait aux équations* (I) et (II) *pour une certaine valeur de* x, *elle y satisfait aussi pour la valeur infiniment voisine* $x + \delta x$.

Si cela est démontré, comme pour $x = 0$, les équations (I) expriment que la multiplicité M_p, à laquelle se réduit M_{p+1}, est intégrale, ce qui n'est autre chose que l'hypothèse, et que les équations (II') sont supposées vérifiées par la multiplicité M_{p+1}, par suite, enfin les équations (II); il en résultera que les équations (I) et (II) seront vérifiées pour toute valeur de x.

Or, supposons que pour une certaine valeur de x les équations (I) et (II) soient vérifiées. On a alors, en particulier, pour cette valeur de x,

$$\Omega = 0, \qquad \Omega_i = 0, \qquad \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0.$$

Mais si Ω est nul, il en est de même de sa dérivée $\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$ prise par rapport à la variable x_i *indépendante de* x. Donc $\frac{\partial \Omega_i}{\partial x}$ est nul pour la valeur considérée de x. Or, dire que Ω_i et $\frac{\partial \Omega_i}{\partial x}$ s'annulent pour la valeur x, c'est dire que Ω_i s'annule pour la valeur infiniment voisine $x + \delta x$. Il en est de même, pour $x + \delta x$, de $\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j}$ et des quantités analogues. Donc, *pour* $x + \delta x$, *les équations* (I) *sont vérifiées*. Il en est de même par hypothèse des équations (II'), et, comme conséquence algébrique, des équations (II) qui sont équivalentes à (II') en tenant compte de (I). Donc *pour* $x + \delta x$, *toutes les équations* (I) *sont vérifiées*.

Le théorème est donc démontré. Nous lui donnerons le nom de *Théorème de Cauchy*, par analogie avec un théorème bien connu dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et qui n'en est qu'un cas particulier.

Si nous nous reportons, comme application, au système (3), nous voyons que chaque élément linéaire intégral issu d'un point donné d'ailleurs arbitraire peut être représenté par un point de l'espace ordinaire et qu'un élément intégral E_2 est alors représenté par une droite qui, dans le cas général, est assujettie à rencontrer deux droites fixes non situées dans le même plan. Il résulte de là d'une manière évidente que par tout élément intégral il passe un, et un seul, élément intégral à deux dimensions (par un point de l'espace ordinaire il passe une, et une seule, droite rencontrant deux droites fixes). Donc par toute multiplicité intégrale non singulière M_1 il passe une, et une seule, multiplicité intégrale M_2. Les éléments linéaires singuliers sont ici ceux qui sont représentés par les différents points des deux droites fixes. Les multiplicités intégrales M_1 singulières se partagent donc en deux séries distinctes; ce ne sont autre chose que ce qu'on appelle les *caractéristiques* dans la théorie des équations du second ordre.

Revenons au cas général. Une multiplicité intégrale M_1 du système (3) s'obtiendra, par exemple, en prenant pour x, y, z, p, q cinq fonctions d'un même paramètre variable assujetties à vérifier l'équation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

et en déterminant u par l'équation

$$p' - uq' - ax' - by' = 0.$$

On obtient ainsi, en langage géométrique, dans l'espace (x, y, z), l'ensemble d'une courbe et d'une développable circonscrite à cette courbe, et le théorème de Cauchy montre que *l'équation aux dérivées partielles du second ordre équivalente au système* (3) *admet toujours dans l'espace* (x, y, z) *une surface intégrale, et une seule, passant par une courbe arbitrairement donnée et inscrite le long de cette courbe à une développable arbitrairement donnée*.

IV.

Le théorème de Cauchy met en évidence l'importance de la propriété du système (1), d'après laquelle chaque élément intégral E_p appartient au moins à un élément intégral E_{p+1}. Cela légitime la définition suivante :

Nous disons qu'un système d'équations aux différentielles totales est de GENRE *n si les éléments intégraux par rapport à ce système satisfont aux conditions suivantes :*

Par un point arbitraire il passe au moins un élément intégral E_1 ; *par un élément intégral* E_1 *arbitraire il passe au moins un élément intégral* E_2, *etc.* ;

Par un élément intégral E_{n-1} *arbitraire il passe au moins un élément intégral* E_n ;

Enfin, par un élément intégral E_n *arbitraire il ne passe pas d'élément intégral* E_{n+1}.

D'une manière plus précise, nous supposerons qu'il passe

par un point arbitraire........	∞^{r_1}	éléments	intégraux	E_1,
par un E_1 intégral arbitraire...	∞^{r_2}	»	»	E_2,
par un E_{n-1} » » ...	∞^{r_n}	»	»	E_n,

les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$ pouvant être nuls en partie, et nous continuerons à désigner par r le nombre des variables, ce qui revient à dire qu'il y a ∞^r points.

Nous dirons aussi quelquefois que le système, *considéré comme étant à $i \leqq n$ variables indépendantes*, est *en involution*.

Un système de genre *zéro* entraînerait nécessairement

$$dx_1 = dx_2 = \ldots dx_r = 0;$$

on peut laisser de tels systèmes de côté.

D'après ce qui précède et d'après le théorème de Cauchy, on aperçoit immédiatement les propriétés suivantes d'un système de genre n :

Un système de genre n admet toujours au moins une multiplicité intégrale M_1 *passant par un point arbitraire, une multiplicité intégrale* M_2

passant par une multiplicité intégrale M_1 *arbitraire, etc., une multiplicité intégrale* M_n *passant par une multiplicité intégrale* M_{n-1} *arbitraire.*

Convenons de dire qu'un élément intégral E_n est *singulier* s'il appartient à au moins un élément intégral E_{n+1} ; qu'un élément intégral E_{n-1} est singulier s'il appartient à plus de ∞^{r_n} éléments intégraux E_n, ou si les ∞^{r_n} éléments intégraux auxquels il appartient sont tous singuliers, etc., enfin qu'un point est singulier s'il appartient à plus de ∞^{r_1} éléments intégraux E_1, ou si les ∞^{r_1} éléments linéaires intégraux qui en sont issus sont tous singuliers.

Les conditions auxquelles doit satisfaire un élément intégral singulier étant des conditions d'*égalité*, on voit nettement qu'on peut toujours, et d'une infinité de manières, trouver une suite d'éléments intégraux

$$E_0, \quad E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n,$$

où E_0 désigne un point, tel que chaque élément de la suite appartienne au suivant et où aucun d'eux ne soit singulier. Alors on pourra affirmer l'existence d'une multiplicité intégrale M_1 passant par le point E_0 et admettant l'élément E_1, d'une multiplicité intégrale M_2 passant par M_1 et admettant l'élément E_2, ..., d'une multiplicité intégrale M_n passant par M_{n-1} et admettant l'élément E_n ; *mais, en revanche, on peut affirmer que par* M_n *il ne passe aucune multiplicité intégrale* M_{n+1}, puisque l'élément E_n n'appartient à aucun élément intégral E_{n+1}.

Donc, *un système de genre* n *n'admet pas de multiplicité intégrale* M_{n+1} *passant par une multiplicité intégrale ordinaire.*

Ces propositions mettent en évidence l'importance du *genre* d'un système d'équations aux différentielles totales.

V.

Les nombres $r, r_1, r_2, \ldots, r_n$ jouent un grand rôle dans l'étude de l'indétermination de la multiplicité intégrale à n dimensions la plus générale. Aussi, avant d'aborder cette étude, allons-nous démontrer quelques propriétés remarquables de ces nombres.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Dans la suite

$$r, \quad r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n,$$

chaque nombre est supérieur au suivant d'au moins une unité.

En effet, d'abord les éléments linéaires issus d'un point dans l'espace dépendant de $r - 1$ paramètres. Or, tous ces éléments linéaires ne sont pas nécessairement intégraux; donc

$$r - 1 \geqq r_1.$$

Prenons, d'une manière générale, un élément intégral non singulier E_{p-1}. Cet élément appartient, par hypothèse, à ∞^{r_p} éléments intégraux E_p, dont l'un au moins n'est pas singulier. Chacun d'eux peut être défini par un élément linéaire (intégral) indépendant de E_{p-1}, ce qui nous donne $r_p + 1$ éléments linéaires

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_p}$$

indépendants entre eux et indépendants de E_{p-1}; et nous pouvons supposer, par exemple, que l'élément intégal (E_{p-1}, ε) n'est pas singulier. Cet élément appartient, à son tour, à $\infty^{r_{p+1}}$ éléments intégraux E_{p+1}, dont chacun peut être défini au moyen d'un élément linéaire indépendant de (E_{p-1}, ε), mais qui dépend nécessairement de $E_{p-1}, \varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_p}$. Il est donc nécessaire qu'on puisse trouver $r_{p+1} + 1$ tels éléments indépendants. Donc on a

$$r_p \geqq r_{p+1} + 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte de là que chacun des nombres

$$r, \quad r_1 + 1, \quad r_2 + 2, \quad \ldots, \quad r_i + i, \quad \ldots, \quad r_{n-1} + n - 1, \quad r_n + n$$

est au moins égal à n, puisque ces nombres ne vont pas en augmentant et que le dernier est au moins égal à n.

Voici maintenant une seconde proposition :

Par tout élément intégral non singulier E_{p-1} *il passe* $\infty^{r_p + r_{p+1} - 1}$ *éléments intégraux* E_{p+1} $(p \leqq n - 1)$.

En effet, prenons un élément intégral non singulier E_{p-1}. Soient

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_p},$$

r_p+1 éléments linéaires indépendants entre eux et indépendants de E_{p-1} et définissant r_p+1 éléments intégraux E_p indépendants. Supposons, pour fixer les idées, que l'élément (E_{p-1}, ε_1), que nous désignerons par E_p^0, ne soit pas singulier. Supposons enfin que l'un des éléments intégraux E_{p+1} qui passent par E_p^0 soit $(E_{p-1}, \varepsilon, \varepsilon_1)$, ce qui est toujours permis; soit E_{p+1}^0 cet élément. Tout élément intégral E_{p+1} passant par E_{p-1} s'obtiendra en ajoutant à E_{p-1} deux éléments linéaires ε', ε'' dépendants de ε, ε_1, ..., ε_{r_p}; en général, il existera un seul élément combinaison linéaire de ε', ε'' et dépendant de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_p})$ (car il en est ainsi pour l'élément particulier E_{p+1}^0). Nous voyons donc que tout élément intégral E_{p+1} passant par E_{p-1} peut être obtenu, et d'une seule manière, en prenant un élément linéaire ε' dépendant de ε_1, ε_2, ..., ε_{r_p} et en faisant passer par l'élément E_p ainsi obtenu un élément E_{p+1} de la manière la plus générale. Or, ε' dépend de r_p-1 paramètres; donc il en est de même de E_p; de plus, par E_p passent exactement $\infty^{r_{p+1}}$ éléments intégraux E_{p+1} (car pour le cas particulier E_p^0 élément non singulier, il en est ainsi); donc, finalement, E_{p+1} dépend de

$$r_p-1+r_{p+1}$$

paramètres.

La démonstration subsiste même pour $p=1$.

Nous allons démontrer de la même manière que si $p \leqq n-2$, *par un élément intégral non singulier* E_{p-1} *il passe* $\infty^{r_p-2+r_{p+1}-1+r_{p+2}}$ *éléments intégraux* E_{p+2}.

Conservons toujours nos mêmes notations. Désignons par E_p^0 un élément intégral non singulier passant par E_{p-1}, soit (E_{p-1}, ε_2), par E_{p+1}^0 un élément intégral non singulier passant par E_p^0, soit $(E_{p-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, et enfin par E_{p+2}^0 un élément intégral passant par E_{p+1}^0, soit $(E_{p-1}, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Alors tout élément intégral E_{p+2} peut, *et d'une seule manière*, être obtenu en adjoignant à E_{p-1} un élément linéaire ε' dépendant de $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{r_p})$ et en faisant passer par l'élément intégral E_p ainsi déterminé un élément intégral E_{p+2} : l'élément intégral particulier E_{p+1}^0 contient, en effet, un seul élément intégral E_p satisfaisant à cette condition, à savoir E_p^0. Or, l'élément ε' dépend de r_p-2 paramètres; il en est donc ainsi de E_p; de plus, par E_p, qui n'est pas singulier (puisque, en particulier, E_p^0 ne l'est pas), il passe $\infty^{r_{p+1}+r_{p+2}-1}$ éléments intégraux E_{p+2}. Donc le nombre des paramètres dont dépend E_{p+2} est bien égal à

$$(r_p - 2) + (r_{p+1} - 1) + r_{p+2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit comment le théorème se généralise de proche en proche. D'une manière générale, *si $p \leqq n - i$, par un élément intégral non singulier E_{p-1} il passe des éléments intégraux E_{p+i} dépendant de*

$$(r_p - i) + (r_{p+1} - \overline{i-1}) + \ldots + (r_{p+i-1} - 1) + r_{p+i} = r_p + \ldots + r_{p+i} - \frac{i(i+1)}{2}$$

constantes arbitraires.

Bien entendu, le lieu de tous ces éléments n'est pas, en général, un élément plan, sauf si i est nul.

En particulier, par un point non singulier de l'espace il passe une infinité d'éléments intégraux E_n dépendant de

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n - \frac{n(n-1)}{2}$$

constantes arbitraires. Si $n = r$, alors $r_1 = n - 1, \ldots, r_n = 0$, et il y a un seul élément intégral E_n.

Enfin, voici un dernier théorème très important sur la suite des nombres r :

Dans la suite des entiers positifs ou nuls

$$r - r_1 - 1, \quad r_1 - r_2 - 1, \quad \ldots, \quad r_{n-1} - r_n - 1,$$

chaque nombre est au moins égal au suivant.

Le fait que les nombres considérés sont positifs ou nuls résulte du premier théorème démontré sur la suite

$$r, \quad r_1, \quad \ldots, \quad r_n.$$

Pour démontrer le théorème énoncé, considérons un élément intégral E_{p-1} non singulier. Il est possible de faire passer par E_{p-1} un élément intégral E_p^0 non singulier, par celui-ci un élément intégral E_{p+1}^0 non singulier, et enfin par ce dernier un élément intégral E_{p+2}^0. (Nous supposons $p \leqq n - 2$.) Soient ε, ε_1, ε_2 trois éléments linéaires indépendants de E_{p-1} et définissant E_{p+2}^0. Ces trois éléments sont donc intégraux, associés à E_{p-1} et associés entre eux. Or, il existe $r_p + 1$ éléments linéaires intégraux indépendants associés à E_{p-1}; nous pouvons donc les désigner par

$$\varepsilon,\quad \varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_{r_p}.$$

Cherchons tous les éléments intégraux E_{p+2} qui contiennent E_{p-1}. Chacun d'eux contiendra au moins un élément linéaire ε'' se déduisant linéairement de

$$\varepsilon_2,\quad \varepsilon_3,\quad \ldots,\quad \varepsilon_{r_p},$$

et, en général, il en contiendra un seul (comme E^0_{p+2}); de même il contiendra un, et en général un seul élément linéaire ε' se déduisant linéairement de

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_3,\quad \ldots,\quad \varepsilon_{r_p},$$

et enfin un et un seul ε''' se déduisant linéairement de

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_{r_p}.$$

On voit donc que, en général, une élément E_{p+2} cherché sera *défini* par les trois éléments linéaires ε', ε'', ε'''. Chacun d'eux dépend de $r_p - 2$ paramètres, ce qui fait en tout

$$3(r_p - 2)$$

paramètres. Pour que l'élément soit intégral, il faut et il suffit que ces trois éléments soient associés deux à deux. Or, un élément arbitraire ε, déduit linéairement de ε, ε_1, ..., ε_{r_p}, est associé à $r_{p+1} + 1$ autres éléments indépendants de la même forme; autrement dit, pour exprimer qu'un élément arbitraire, déduit linéairement de ε, ..., ε_{r_p} et dépendant par suite de r_p paramètres, est associé à un élément particulier de la même forme, il faut que ces r_p paramètres satisfassent à $r_p - r_{p+1} - 1$ relations. En revenant à nos trois éléments ε', ε'', ε''', nous voyons donc que, pour exprimer que deux d'entre eux sont associés, il faut *au plus* $r_p - r_{p+1}$ relations entre leurs paramètres, ce qui donne en tout *au plus*

$$3(r_p - r_{p+1} - 1)$$

relations. Comme il y a

$$3(r_p - 2)$$

paramètres, on voit que *les éléments intégraux* E_{p+2} *qui passent par un* *élément intégral non singulier* E_{p-1} *dépendent* AU MOINS *de*

$$3(r_p - 2) - 3(r_p - r_{p+1} - 1) = 3r_{p+1} - 3$$

paramètres.

Or, d'après un précédent théorème, ce nombre de paramètres est égal à

$$r_p + r_{p+1} + r_{p+2} - 3;$$

on a donc

$$r_p + r_{p+1} + r_{p+2} - 3 \geqq 3r_{p+1} - 3,$$

c'est-à-dire

$$r_p - r_{p+1} \geqq r_{p+1} - r_{p+2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration s'applique même si p est égal à 1.

On peut compléter ce théorème par la remarque suivante :

Si n est le genre du système, on a

$$r_{n-1} - r_n - 1 \geqq r_n.$$

En effet, soit E_{n-2} un élément intégral non singulier; désignons par (E_{n-2}, ε) ou E^0_{n-1} un élément intégral non singulier passant par E_{n-2} et par $(E_{n-2}, \varepsilon, \varepsilon_1)$, ou E^0_n un élément intégral non singulier passant par E^0_{n-1}. On peut trouver $r_{n-1} + 1$ éléments linéaires intégraux indépendants associés à E_{n-2}, et comme ε et ε_1 sont déjà deux d'entre eux, on peut les désigner par

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_{n-1}}.$$

Par E^0_{n-1} passent exactement ∞^{r_n} éléments intégraux E_n; nous pouvons donc supposer qu'ils se déduisent tous de

$$(E_{n-2}, \varepsilon, \varepsilon_1), \quad (E_{n-2}, \varepsilon, \varepsilon_2), \quad \ldots, \quad (E_{n-2}, \varepsilon, \varepsilon_{r_n+1}).$$

Prenons maintenant l'élément intégral (E_{n-2}, ε_1); il appartient aussi à ∞^{r_n} (au moins) éléments intégraux E_n; on peut les obtenir chacun au moyen d'un élément linéaire déduit de

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_{n-1}},$$

et associé à ε_1. Or, si nous prenons d'abord ceux qui se déduisent de

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_n+1},$$

il n'y a que ε, sinon, s'il y avait, par exemple, ε_2, l'élément

$$(E_{n-2}, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

serait intégral, ce qui est contraire à l'hypothèse, puisqu'il passe par l'élément *non singulier* E_n^0; donc il existe au moins r_n éléments linéaires indépendants pouvant être déduits de

$$\varepsilon_{r_n+2}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_{n-1}};$$

on a donc nécessairement

$$r_{n-1} - r_n - 1 \geqq r_n \quad (^1). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte de ces différents théorèmes la suite d'inégalités

$$(5) \qquad r - r_1 - 1 \geqq r_1 - r_2 - 1 \geqq \ldots \geqq r_{n-1} - r_n - 1 \geqq r_n.$$

Les nombres de cette suite jouent un très grand rôle. Nous les désignerons par

$$s, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n,$$

en posant

$$(6) \qquad \begin{cases} s \phantom{{}_{n-1}} = r \phantom{{}_{n-1}} - r_1 - 1, \\ s_1 \phantom{{}_{n-1}} = r_1 \phantom{{}_{n-1}} - r_2 - 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{n-1} = r_{n-1} - r_n - 1, \\ s_n \phantom{{}_{n-1}} = r_n. \end{cases}$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où il y a dans la suite des s un terme nul. Supposons que $s_\nu (\nu < n)$ soit le premier qui jouisse de cette propriété. Alors on aura nécessairement, d'après les inégalités (5),

$$s_\nu = s_{\nu+1} = \ldots = s_n = 0.$$

Les considérations suivantes permettent, d'une autre manière, de se rendre compte de ce résultat, et conduisent en même temps à des propriétés nouvelles et importantes de ces systèmes.

Considérons un élément intégral $E_{\nu-1}$ non singulier; soit $(E_{\nu-1}, \varepsilon)$ un élément intégral non singulier issu de $E_{\nu-1}$, ε désignant un élément

(1) La démonstration ne subsiste pas si $n = 1$. Mais le théorème ne cesse pas d'être vrai et il est inutile d'en donner la démonstration.

linéaire intégral indépendant de $E_{\nu-1}$ et associé avec $E_{\nu-1}$. Par cet élément $(E_{\nu-1}, \varepsilon)$ passent $\infty^{r_{\nu+1}}$ éléments intégraux à $\nu+1$ dimensions, c'est-à-dire, comme d'après $s_\nu = 0$, $r_{\nu+1}$ est égal à $r_\nu - 1$, on peut trouver r_ν, et r_ν seulement, éléments linéaires intégraux indépendants entre eux, indépendants de $(E_{\nu-1}, \varepsilon)$ et associés à $E_{\nu-1}$ et ε; soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_\nu}.$$

Or on ne peut pas trouver plus de $r_\nu + 1$ éléments linéaires intégraux indépendants entre eux, indépendants de $E_{\nu-1}$ et associés à $E_{\nu-1}$. Donc *tout élément linéaire intégral associé à* $E_{\nu-1}$ *se déduit linéairement de*

$$E_{\nu-1}, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_\nu}.$$

Il résulte de là que deux quelconques des éléments ε sont associés, par exemple, ε_1 et ε_2; car l'élément intégral $(E_{\nu-1}, \varepsilon_1)$ appartenant à au moins $\infty^{r_\nu+1} = \infty^{r_{\nu-1}}$ éléments intégraux à $\nu+1$ dimensions, est associé à *au moins* r_ν éléments linéaires intégraux indépendants entre eux et indépendants de $(E_{\nu-1}, \varepsilon_1)$, et, comme il y en a *au plus* r_ν qui jouissent de cette propriété, à savoir

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_\nu},$$

on voit qu'en particulier $(E_{\nu-1}, \varepsilon_1)$ est associé à ε_2. On voit de plus que l'élément $(E_{\nu-1}, \varepsilon_1)$ appartient *exactement* à $\infty^{r_{\nu+1}}$ éléments intégraux à $\nu+1$ dimensions.

Prenons maintenant un élément intégral à $\nu+1$ dimensions passant par $E_{\nu-1}$, soit $(E_{\nu-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$; on verrait, comme tout à l'heure, qu'il appartient *exactement* à $\infty^{r_\nu-2}$ éléments intégraux à $\nu+2$ dimensions; on a donc

$$r_{\nu+2} = r_\nu - 2;$$

et ainsi de suite : un élément à $\nu - 1 + r_\nu$ dimensions passant par $E_{\nu-1}$, soit $(E_{\nu-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r_\nu})$, appartient exactement à *un* $= \infty^{r_\nu - r_\nu}$ élément intégral à ν dimensions, et enfin il passe par $E_{\nu-1}$ un et un seul élément intégral à $\nu + r_\nu$ dimensions, à savoir $(E_{\nu-1}, \varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_\nu})$, et par cet élément il ne passe aucun élément intégral à $\nu + r_\nu + 1$ dimensions. Il résulte enfin de là que tous les éléments intégraux qui passent par $E_{\nu-1}$ sont des éléments non singuliers.

En résumé, *si l'on a*

$$s_\nu = r_\nu - r_{\nu+1} - 1 = 0,$$

le genre du système est

$$n = \nu - r_\nu;$$

il passe par un élément intégral non singulier $E_{\nu-1}$ *un élément intégral* E_n *et un seul; le lieu des éléments intégraux passant par* $E_{\nu-1}$ *est l'élément* E_n; *de plus on a les égalités*

$$r_\nu = r_{\nu+1} + 1 = r_{\nu+2} + 2 = \ldots = n - \nu,$$

qui entraînent

$$s_\nu = s_{\nu+1} = \ldots = s_{n-1} = s_n = 0.$$

En particulier, si ν est égal à 1, deux éléments linéaires intégraux quelconques issus d'un point non singulier sont associés; un élément intégral est simplement un élément formé d'éléments linéaires intégraux.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons déterminer les nombres r, r_1, ..., r_n pour un système de h équations aux différentielles totales à r variables, *en supposant que les coefficients n'aient subi aucune particularisation.*

On aura d'abord manifestement

$$r_1 = r - (h+1);$$

supposons d'une manière générale que le genre n soit supérieur à p et que l'on connaisse r_p. Si E_{p-1} désigne alors un élément intégral arbitraire, tout élément linéaire intégral associé à E_{p-1} pourra être déduit linéairement de E_{p-1} et de $r_p + 1$ autres éléments linéaires

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_p}.$$

Cherchons combien il passe d'éléments intégraux E_{p+1} par l'élément intégral (E_{p-1}, ε); il faut pour cela adjoindre à ε un élément linéaire ε', pouvant se déduire de

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_p},$$

et associé à ε. Or cet élément ε' dépend de $r_p - 1$ paramètres, et il faut h équations pour exprimer que cet élément est associé à ε. On a donc, si $r_p - 1 \geqq h$,

$$r_{p+1} = r_p - 1 - h,$$

et si $r_p - 1 < h$, il n'y a pas d'élément intégral à $p + 1$ dimensions. On voit donc qu'*on passe d'un nombre r au suivant en retranchant* $h + 1$, et cela autant de fois que possible

$$\begin{aligned} r_1 &= r - (h+1), \\ r_2 &= r - 2(h+1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

par suite, le genre n est le quotient, à une unité près, de r par $h + 1$, et r_n est égal au reste k de la division,

$$r_n = r - n(h+1) = k.$$

Le genre d'un système dont les coefficients ne sont pas particularisés est donc égal au quotient, à une unité près, du nombre des variables par le nombre des équations plus un.

La suite des nombres s est ici

$$s = s_1 = \ldots = s_{n-1} = h, \qquad s_n = k.$$

En particulier, s'il y a une seule équation, le genre est la moitié du nombre des variables; il est n s'il y a $2n$ ou $2n + 1$ variables. Dans le premier cas, une multiplicité intégrale M_{n-1} appartient à une multiplicité intégrale M_n, et à une seule. C'est un résultat bien connu.

VI.

Nous allons maintenant chercher un système de conditions qui *détermine* toute multiplicité intégrale M_n assujettie à satisfaire à ces conditions, n désignant le *genre* du système d'équations aux différentielles totales (1).

Faisons d'abord la remarque évidente que tous les résultats démontrés jusqu'ici subsistent si l'on ajoute aux équations (1) un certain nombre d'équations *finies*

$$(1)' \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_h(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0. \end{cases}$$

Il suffit, en effet, d'ajouter aux équations (1) celles qu'on obtient en prenant les différentielles totales des équations (1)', et en ne considérant dans le nouveau système obtenu que les points de l'espace qui satisfont aux équations (1)' et qu'on désignera sous le nom de *points intégraux*.

Cherchons quelles variations subissent le genre et les entiers r_i lorsqu'on ajoute ainsi h équations finies *arbitraires*. On obtient, en somme, un nouveau système d'équations aux différentielles totales dont les multiplicités intégrales sont celles des multiplicités intégrales du système primitif qui sont assujetties à être contenues tout entières dans la multiplicité arbitraire μ représentée par les équations (1)'. Il est évident d'abord que le nombre r est réduit de h unités ; autrement dit il n'y a plus que ∞^{r-h} points à considérer; *nous supposerons que ces points ne sont pas tous singuliers* (par rapport au système primitif), sinon la multiplicité μ sera dite *non arbitraire*.

Prenons maintenant un point E_0 *non singulier* de μ. Il passe par ce point ∞^{r_1} éléments intégraux E_1, c'est-à-dire qu'on peut trouver r_1+1 éléments linéaires intégraux indépendants

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_1};$$

d'autre part, l'élément e_{r-h} lieu des éléments linéaires de μ contient aussi $r-h$ éléments linéaires indépendants. Si l'on a

$$r_1 + 1 + r - h \leqq r,$$

nous supposerons que e_{r-h} ne contient aucun élément linéaire intégral, ce qui est le cas général; alors le deuxième système est de genre zéro,

$$r' = r - h, \qquad r_1 - h < 0.$$

Si, au contraire,

$$r_1 + 1 + r - h > r,$$

e_{r-h} contient *au moins* $r_1 + 1 - h$ éléments linéaires intégraux; nous supposerons, ce qui est évidemment le cas général, que e_{r-h} en contient exactement r_1+1-h. On aura alors

$$r' = r - h, \qquad r'_1 = r_1 - h.$$

Nous supposerons, en outre, que les ∞^{r_1-h} éléments linéaires intégraux de e_{r-h} *ne sont pas tous singuliers*.

Soit alors ε un élément linéaire intégral non singulier de e_{r-h}. Par ε passent ∞^{r_2} éléments intégraux E_2 du système (1); c'est-à-dire qu'il existe r_2+1 éléments linéaires intégraux indépendants associés à ε, soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{r_2+1};$$

d'autre part, e_{r-h} contient, en dehors de ε, $r-h-1$ éléments linéaires indépendants. Si l'on a

$$(r_2+2)+(r-h-1) \leqq r,$$

c'est-à-dire

$$r_2 < h,$$

e_{r-h} ne contiendra pas, en général, d'élément intégral E_2; c'est ce que nous supposerons; dans ce cas, on a donc

$$r_2 < h, \qquad n' = 1, \qquad r' = r - h, \qquad r'_1 = r_1 - h.$$

Mais si $r_2 \geqq h$, e_{r-h} contient *au moins* r_2+1-h éléments linéaires intégraux indépendants, associés à ε; nous supposerons, ce qui est évidemment le cas général, que e_{r-h} en contient *exactement* r_2+1-h, c'est-à-dire que par ε il passe ∞^{r_2-h} éléments intégraux contenus dans e_{r-h}; nous supposerons de plus que l'un d'eux au moins n'est pas singulier. On aura alors

$$r' = r - h, \qquad r'_1 = r_1 - h, \qquad r'_2 = r_2 - h, \qquad n \geqq 2.$$

On voit comment on peut poursuivre et quelles sont les propriétés que l'on suppose à la multiplicité μ pour qu'on ait le droit de la qualifier d'*arbitraire*. *Dans ce cas, si r_m désigne le dernier nombre r supérieur ou égal à h, le genre devient égal à m et l'on a*

$$r' = r - h, \qquad r'_1 = r_1 - h, \qquad \ldots, \qquad r'_m = r_m - h.$$

Il est clair que les conditions auxquelles doit satisfaire une multiplicité μ pour n'être pas arbitraire sont des conditions d'*égalité*. En particulier, on peut trouver sur une multiplicité arbitraire un point E_0 non singulier, un élément intégral E_1^0 non singulier issu de E_0, un élément intégral non singulier E_2^0 issu de E_1^0, ..., un élément intégral non singulier E_m^0 issu de E_{m-1}^0. Mais par E_m^0 il ne doit passer aucun élément intégral E_{m+1} appartenant à la multiplicité et le nombre d'éléments intégraux E_i appartenant à μ qui passent par l'élément intégral E_{i-1}^0 $(i \leqq m)$ doit être exactement $\infty^{r_i - h}$.

Cela étant bien établi, nous allons considérer un point non singulier quelconque μ_0. Par ce point faisons passer une multiplicité arbitraire à $r - r_1$ dimensions μ_{r-r_1}; par μ_{r-r_1} une multiplicité arbitraire à $r - r_2$ dimensions μ_{r-r_2}, etc.; par $\mu_{r-r_{n-1}}$ une multiplicité arbitraire à $r - r_n$ dimensions μ_{r-r_n} [1]. A chacune de ces multiplicités correspond un certain système d'équations aux différentielles totales. Pour la multiplicité μ_{r-r_1}, on a $h = r_1$, de sorte que

$$n' = 1, \qquad r' = r - r_1, \qquad r'_1 = 0;$$

pour μ_{r-r_2}, on a $h = r_2$ et par suite

$$n'' = 2, \qquad r'' = r - r_2, \qquad r''_1 = r_1 - r_2, \qquad r''_2 = 0,$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que le système donné admet une multiplicité intégrale M_1, et une seule, passant par μ_0 et contenue dans μ_{r-r_1} (puisque le système qui donne les multiplicités intégrales contenues dans μ_{r-r_1} est de genre 1 et que r'_1 est nul); de plus cette multiplicité n'est pas singulière, car elle admet (*voir* la note) un élément linéaire non singulier.

---

(1) Cela est toujours possible; considérons, en effet, un élément intégral non singulier E_1^0 issu de E_0, un élément intégral non singulier (E_1^0, ε_1) ou E_2^0 contenant E_1^0, ..., un élément intégral non singulier $(E_{n-1}^0, \varepsilon_{n-1})$ ou E_n^0 contenant E_{n-1}^0. Désignons alors par e_{r-r_1} un élément formé de E_1^0 et de $(r - r_1 - 1)$ autres éléments linéaires non intégraux, par e_{r-r_2} un élément formé de e_{r-r_1}, de ε_1 et de $r_1 - r_2 - 1$ autres éléments linéaires non intégraux et non associés à E_1^0, ..., par e_{r-r_n} un élément formé de $e_{r-r_{n-1}}$, de ε_{n-1} et de $r_{n-1} - r_n - 1$ autres éléments linéaires non intégraux et non associés à E_{n-1}^0. Il suffit de prendre pour μ_{r-r_1} une multiplicité admettant l'élément e_{r-r_1}, pour μ_{r-r_2} une multiplicité admettant l'élément e_{r-r_2}, etc.

De même les multiplicités intégrales contenues dans μ_{r-r_2} étant données par un système de genre 2 avec $r'_2 = 0$, et M_1 étant une intégrale non singulière de ce système, il en résulte, d'après le théorème de Cauchy, qu'il existe une multiplicité intégrale M_2, et une seule, passant par M_1 et contenue dans μ_{r-r_2}; de plus cette multiplicité n'est pas singulière.

On peut continuer de proche en proche, jusqu'à une intégrale M_{n-1} contenue dans $\mu_{r-r_{n-1}}$. Alors il existe une intégrale M_n et une seule passant par M_{n-1} et contenue dans μ_{r-r_n}, et cette multiplicité n'est pas singulière. Donc, enfin, il n'existe aucune multiplicité intégrale M_{n+1} passant par M_n.

En résumé, en appliquant plusieurs fois le théorème de Cauchy, on arrive au résultat suivant :

Étant donnés :

un point arbitraire μ_0,
une multiplicité arbitraire μ_{r-r_1} *passant par* μ_0,
» μ_{r-r_2} » μ_{r-r_1},
. . . . ,
» μ_{r-r_n} » $\mu_{r-r_{n-1}}$,

il existe une multiplicité intégrale M_n, *et une seule, passant par* μ_0.

ayant en commun avec μ_{r-r_1} *une multiplicité* M_1,
» μ_{r-r_2} » M_2,
. . . . ,
» $\mu_{r-r_{n-1}}$ » M_{n-1}
et contenue tout entière dans μ_{r-r_n};

de plus par cette multiplicité M_n, *il ne passe aucune multiplicité intégrale* M_{n+1} (1).

Le problème qui consiste à trouver M_n d'après les conditions énoncées s'appellera le *problème de Cauchy*. L'*intégrale générale* sera l'ensemble des multiplicités intégrales M_n qui peuvent être obtenues par le procédé précédent.

---

(1) L'énoncé subsiste si le genre est *supérieur* à n; mais alors la dernière partie, d'après laquelle il ne passe aucune multiplicité intégrale M_{n+1} par M_n, doit être supprimée.

Nous allons maintenant chercher à formuler le problème de Cauchy d'une *manière analytique*, ou plutôt, nous appuyant sur l'énoncé précédent de ce problème, nous allons déterminer l'intégrale générale M_n *par un ensemble de conditions analytiques qui mettent en évidence son degré d'indétermination*. Pour cela, nous partirons d'un point E_0 non singulier, nous désignerons par ε_1 un élément intégral non singulier issu de ce point, par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ un élément intégral non singulier E_2 passant par ε_1, ..., par (E_{n-1}, ε_n) un élément intégral non singulier E_n passant par E_{n-1}, de sorte que

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n$$

sont n éléments linéaires intégraux indépendants tous associés entre eux.

L'élément E_n peut être défini par un système (Σ) de $r-n$ équations linéaires indépendantes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$; nous supposerons les indices choisis de telle manière que ces équations soient résolubles par rapport à $dx_{n+1}, \ldots, dx_r$. L'élément E_{n-1} sera à son tour défini par le système (Σ) auquel il faudra ajouter une équation linéaire en dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$; supposons-la résoluble par rapport à dx_n, soit

$$(E_{n-1}) \qquad dx_n = \alpha_{n,1}\,dx_1 + \ldots + \alpha_{n,n-2}\,dx_{n-2} + \alpha_{n,n-1}\,dx_{n-1}.$$

De même, on aura E_{n-2} en ajoutant aux équations précédentes une équation linéaire en $dx_1, \ldots, dx_{n-1}$ résoluble, par exemple, par rapport à dx_{n-1}, soit

$$(E_{n-2}) \qquad dx_{n-1} = \alpha_{n-1,1}\,dx_1 + \ldots + \alpha_{n-1,n-2}\,dx_{n-2},$$

et ainsi de suite, jusqu'à l'élément E_1 que l'on obtiendra en ajoutant aux équations qui définissent E_2 une équation linéaire en dx_2, dx_1, résoluble, par exemple, par rapport à dx_2, soit

$$(E_1) \qquad dx_2 = \alpha_{2,1}\,dx_1.$$

Désignons maintenant par (P_0) la multiplicité plane lieu des éléments linéaires intégraux passant par le point E_0; elle contient évidemment E_n et elle est à (r_1+1) dimensions; elle est donc définie par $r - r_1 - 1 = s$ équations linéaires résolubles par rapport à s des différentielles $dx_{n+1}, \ldots, dx_r$; nous appellerons ces s différentielles

$$dz_1, \quad dz_2, \quad \ldots, \quad dz_s;$$

remarquons d'ailleurs que ces s équations ne sont autres que les équations données (1) elles-mêmes. Désignons maintenant par (P_1) la multiplicité plane lieu des éléments linéaires intégraux associés à E_1; elle est évidemment contenue dans (P_0) et contient E_n; d'ailleurs elle est à $r_2 + 2$ dimensions; elle est donc définie par $r - r_2 - 2 = s + s_1$ équations parmi lesquelles les s équations de (P_0); on l'obtient donc en ajoutant à ces s équations s_1 autres résolubles par rapport à s_1 des différentielles autres que $dz_1, \ldots, dz_s$; $dx_1, \ldots, dx_n$; soient en changeant les notations

$$dz_1^{(1)},\quad dz_2^{(1)},\quad \ldots,\quad dz_{s_1}^{(1)}$$

ces différentielles. De même la multiplicité plane (P_2) lieu des éléments linéaires intégraux associés à E_2 s'obtiendra en ajoutant aux $s + s_1$ équations de $(\mathrm{P}_1)\, s_2$ autres équations résolubles par rapport à

$$dz_1^{(2)},\quad dz_2^{(2)},\quad \ldots,\quad dz_{s_2}^{(2)},$$

les $z^{(2)}$ étant s_2 variables autres que $x_1, \ldots, x_n$, les z et les $z^{(1)}$. Et ainsi de suite; la multiplicité plane (P_{n-1}) lieu des éléments linéaires intégraux associés à E_{n-1} introduira s_{n-1} variables

$$z_1^{(n-1)},\quad \ldots,\quad z_{s_{n-1}}^{(n-1)},$$

et enfin, l'élément E_n sera défini en ajoutant aux équations qui définissent $(\mathrm{P}_{n-1})\; r - s - s_1 - \ldots - s_{n-1} = r_n = s_n$ équations nouvelles résolubles par rapport aux s_n variables autres que $x_1, \ldots, x_n$, les z, $z^{(1)}, \ldots, z^{(n-1)}$ et que nous appellerons

$$z_1^{(n)},\quad z_2^{(n)},\quad \ldots,\quad z_{s_n}^{(n)}.$$

Finalement nous pouvons résumer dans le Tableau suivant les équations qui définissent $(\mathrm{P}_0), (\mathrm{P}_1), \ldots, (\mathrm{P}_{n-1}), \mathrm{E}_n, \mathrm{E}_{n-1}, \ldots, \mathrm{E}_1$:

$$
{}_{n-2})\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{E}_{n-1})\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{E}_n)\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{P}_{n-1})\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{P}_1)\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{P}_0)\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.
\begin{array}{ll}
dz & = [dz^{(1)}, dz^{(2)}, \ldots, dz^{(n)}, dx],\\
dz^{(1)} & = [dz^{(2)}, \ldots, dz^{(n)}, dx],\\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,}\\
dz^{(n-1)} & = [dz^{(n)}, dx],\\
dz^{(n)} & = [dx],\\
dx_n & = \alpha_{n,1}\,dx_1 + \alpha_{n2}\,dx_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}\\
dx_{n-1} & = \alpha_{n-1,1}\,dx_1 + \ldots + \alpha_{n-1,n-2}\,dx_{n-2};\\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;}\\
dx_2 & = \alpha_{2,1}\,dx_1.
\end{array}
$$

La première ligne exprime que chacune des différentielles dz_1, dz_2, ..., dz_s s'exprime en combinaison linéaire des différentielles $dz_1^{(1)}$, ..., dx_n.

Ces conventions étant faites, nous ferons la transformation de coordonnées suivante; sans changer les variables z, $z^{(1)}$, ..., $z^{(n)}$, nous prendrons comme nouvelles variables

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x_1,\\
x'_2 &= x_2 - \alpha_{21} x_1,\\
x'_3 &= x_3 - \alpha_{31} x_1 - \alpha_{32} x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x'_n &= x_n - \alpha_{n1} x_1 - \alpha_{n2} x_2 - \ldots - \alpha_{n,n-1} x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Autrement dit nous supposerons les coefficients α_{ij} tous nuls.

Nous désignerons enfin (une fois cette transformation de coordonnées effectuée) par

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_n; \quad c_1, \quad \ldots, \quad c_s; \quad c_1^{(1)}, \quad \ldots, \quad c_{s_1}^{(1)}; \quad \ldots, \quad c_1^{(n)}, \quad \ldots, \quad c_{s_n}^{(n)}$$

les coordonnées du point E_0.

Remarquons en dernier lieu que toute multiplicité intégrale M_n admettant l'élément E_n peut être définie par $r - n$ équations résolubles par rapport aux z, $z^{(1)}$, ..., $z^{(n)}$ (d'après la forme même des équations de E_n); il en sera de même de toute multiplicité intégrale M_n admettant un élément suffisamment voisin de E_n. On peut donc prendre pour ces multiplicités, x_1, x_2, ..., x_n comme variables indépendantes.

Cela étant, pour être sûr d'obtenir des multiplicités μ_{r-r_1}, μ_{r-r_2}, ..., *arbitraires*, cherchons à faire passer par E_0 un élément e_{r-r_1} admettant un seul élément linéaire intégral E_1, c'est-à-dire *coupant l'élément* (P_0) *suivant* E_1; par e_{r-r_1} un élément e_{r-r_2} admettant un seul élément intégral à deux dimensions issu de E_1, soit E_2, c'est-à-dire *coupant l'élément* (P_1) *suivant* E_2; etc.; par $e_{r-r_{n-1}}$ un élément e_{r-r_n} admettant un seul élément intégral à n dimensions issu de E_{n-1}, soit E_n, c'est-à-dire *coupant l'élément* (P_{n-1}) *suivant* E_n. Toute multiplicité μ_{r-r_i} admettant l'élément e_{r-r_i} *ou un élément suffisamment voisin* satisfera évidemment aux conditions imposées aux multiplicités *arbitraires*. Or, il est bien facile de trouver des éléments e_{r-r_n}, $e_{r-r_{n-1}}$, ..., e_{r-r_1} jouissant des propriétés énoncées tout à l'heure. Il suffit de prendre pour e_{r-r_n} le système

$$dz^{(n)} = [dx],$$

pour $e_{r-r_{n-1}}$ le système obtenu en ajoutant aux équations précédentes les suivantes

$$\begin{aligned} dz^{(n-1)} &= [dz^{(n)}, dx], \\ dx_n &= 0, \end{aligned}$$

pour $e_{r-r_{n-2}}$ le système obtenu en ajoutant aux précédentes les équations

$$\begin{aligned} dz^{(n-2)} &= [dz^{(n-1)}, dz^{(n)}, dx], \\ dx_{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

et ainsi de suite; les crochets des seconds membres désignant les mêmes combinaisons linéaires que dans les équations qui définissent (P_0), (P_1), ..., (P_{n-1}), E_n.

Cela étant, nous sommes en droit de définir μ_{r-r_n} par les équations

$$(A_n) \qquad \begin{cases} z_1^{(n)} = \varphi_1^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{s_n}^{(n)} = \varphi_{s_n}^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n); \end{cases}$$

de définir $\mu_{r-r_{n-1}}$ par les équations précédentes et les suivantes :

$$(A_{n-1}) \qquad \begin{cases} z_1^{(n-1)} = \varphi_1^{(n-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{s_{n-1}}^{(n-1)} = \varphi_{s_{n-1}}^{(n-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \end{cases}$$

$$(B_n) \qquad x_n = a_n;$$

et ainsi de suite; μ_{r-r_1} par les équations déjà écrites et

$$(A_1) \qquad \begin{cases} z_1^{(1)} = \varphi_1^{(1)}(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{s_1}^{(1)} = \varphi_{s_1}^{(1)}(x_1), \end{cases}$$

$$(B_2) \qquad x_2 = a_2;$$

et enfin le point μ par toutes les équations déjà écrites et en outre

$$(A_0) \qquad \begin{cases} z_1 = \varphi_1, \\ z_2 = \varphi_2, \\ \ldots\ldots, \\ z_s = \varphi_s, \end{cases}$$

$$(B_1) \qquad x_1 = a_1.$$

Dans ces formules, *les quantités* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ *sont des constantes arbitraires suffisamment voisines de* $c_1, c_2, \ldots, c_s$. *Quant aux fonctions* $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)}$, *ce sont des fonctions arbitraires holomorphes au voisinage de*

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_n = a_n$$

et telles que pour ce système de valeurs ces fonctions et leurs dérivées partielles du premier ordre prennent des valeurs suffisamment voisines de certaines valeurs fixes.

Avec ces hypothèses il existera une multiplicité intégrale M_n et une seule passant par μ_0, ayant en commun avec μ_{r-r_1} une multiplicité à une dimension, avec μ_{r-r_2} une multiplicité à deux dimensions, etc., avec $\mu_{r-r_{n-1}}$ une multiplicité à $n-1$ dimensions, et enfin contenue tout entière dans μ_{r-r_n}. Cette multiplicité est d'autre part définie par

$$r - n = s_n + s_{n-1} + \ldots + s$$

fonctions $z^{(n)}, z^{(n-1)}, \ldots, z$ des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dire que M_n est contenue dans μ_{r-r_n}, c'est dire que les s_n premières fonctions $z_1^{(n)}, \ldots, z_{s_n}^{(n)}$ sont égales aux fonctions données $\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_{s_n}^{(n)}$. Si, d'autre part, M_n a en commun avec $\mu_{r-r_{n-1}}$ une multiplicité à $n-1$ dimensions, cette multiplicité ne peut être obtenue qu'en faisant $x_n = a_n$ dans les expressions des fonctions $z, z^{(1)}, \ldots$; il faut donc que pour $x_n = a_n$, les s_{n-1} fonctions $z_1^{(n-1)}, \ldots, z_{s_{n-1}}^{(n-1)}$ se réduisent aux fonctions données $\varphi_1^{(n-1)}, \ldots, \varphi_{s_{n-1}}^{(n-1)}$. Et ainsi de suite.

Il résulte de là que *dans les limites indiquées le système* (1), *considéré comme définissant* $z_1, \ldots, z_{s_n}^{(n)}$ *en fonction de* $x_1, \ldots, x_n$, *admet une solution et une seule pour laquelle les fonctions inconnues sont holomorphes au voisinage de* $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, *et telles que les* s_n *fonctions* $z^{(n)}$ *soient identiques*

$z_1^{(n)}$ *à la fonction arbitraire* $\varphi_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$,

. . . . ;

$z_{s_n}^{(n)}$ » $\varphi_{s_n}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$,

les s_{n-1} *fonctions* $z^{(n-1)}$ *se réduisant pour* $x_n = a_n$

$z_1^{(n-1)}$ *à la fonction arbitraire* $\varphi_1^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1})$,

. . . . ,

$z_{s_{n-1}}^{(n-1)}$ » $\varphi_{s_{n-1}}^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1})$, *et ainsi de suite, les s_1 fonctions $z^{(1)}$ se réduisant pour $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$,*

$$\begin{array}{lcr} z_1^{(1)} \text{ à la fonction arbitraire } & & \varphi_1^{(1)}(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & , \\ z_{s_1}^{(1)} & \text{»} & \varphi_{s_1}^{(1)}(x_1), \end{array}$$

et enfin les s fonctions z se réduisant pour $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$

$$\begin{array}{lcr} z_1 \text{ à la constante arbitraire } & & \varphi_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & , \\ z_s & \text{»} & \varphi_s. \end{array}$$

Il est bien clair, d'autre part, que *toute multiplicité intégrale M_n admettant un élément voisin de l'élément particulier E_n ou $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ précédemment défini, peut être obtenu par le procédé précédent, les fonctions et les constantes φ étant parfaitement déterminées, et d'une manière unique.*

On peut donc dire que *toute multiplicité intégrale M_n admettant un élément intégral à n dimensions suffisamment voisin d'un élément intégral donné non singulier, est complètement définie par un ensemble de*

$$\begin{array}{llcll} s_n & \textit{fonctions arbitraires de} & n & \textit{arguments} & x_1, x_2, \ldots, x_n, \\ s_{n-1} & \text{»} & n-1 & \text{»} & x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \\ \ldots & & & & , \\ s_1 & \text{»} & 1 & \text{»} & x_1, \\ s & \textit{constantes arbitraires,} & & & \end{array}$$

sous la seule condition que pour certaines valeurs données des variables indépendantes, les éléments arbitraires prennent des valeurs suffisamment voisines de certaines constantes fixes ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

C'est dans ce sens que l'on peut dire que l'intégrale générale M_n dépend de s constantes arbitraires, s_1 fonctions arbitraires d'un argument, etc., s_n fonctions arbitraires de n arguments.

On peut dire que *les nombres de la suite*

$$(S) \qquad s, s_1, s_2, \ldots, s_n$$

mesurent l'indétermination de l'intégrale générale M_n. L'origine géométrique de ces nombres montre que *la mesure de l'indétermination ne change pas si l'on effectue un changement quelconque de variables,* car cela revient à effectuer une simple transformation homographique sur les éléments intégraux issus d'un point; ce qui ne change évidemment rien aux valeurs des nombres r et par suite des nombres s.

Rappelons encore la propriété de la suite (S) exprimée par les inégalités

$$s \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_{n-1} \geqq s_n,$$

et enfin les valeurs des r au moyen des s :

$$\begin{aligned}
r_n &= s_n, \\
r_{n-1} &= s_n + s_{n-1} + 1, \\
r_{n-2} &= s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + 2, \\
r_1 &= s_n + s_{n-1} + \ldots + s_1 + n - 1, \\
r &= s_n + s_{n-1} + \ldots + s + n.
\end{aligned}$$

Comme cas particulier, si nous prenons un système de h équations aux différentielles totales à r variables avec des coefficients quelconques, nous avons vu que le genre n était égal au quotient à une unité près de r par $h+1$, et en désignant par k le reste, on a

$$s = s_1 = \ldots = s_{n-1} = h, \qquad s_n = k.$$

On a donc le théorème suivant :

L'intégrale générale M_n *d'un système de h équations aux différentielles totales à r variables dont les coefficients sont des fonctions arbitraires et où n désigne le quotient à une unité près de r par* $h+1$ *et k le reste, dépend de*

k fonctions	*arbitraires de*	n	*arguments,*
h	»	$n-1$	»
h	»	$n-2$	»
.....	.....	.....	.....,
h	»	1	»

et de h constantes arbitraires.

C'est, avec beaucoup plus de précision, le résultat trouvé par M. Biermann. *On peut ajouter qu'il n'y a pas en général d'intégrale à* $n+1$ *dimensions.*

Si h est égal à 1 et r pair, égal par conséquent à $2n$, il n'y a pas de fonction arbitraire de n arguments. Si r est impair et égal par conséquent à $2n+1$, il y a une fonction arbitraire de n arguments.

Revenons au cas général. Les résultats énoncés subsistent, *même si le genre est supérieur à* n, à condition de prendre pour s_n la valeur r_n et pour les autres s_i la valeur $r_i - r_{i+1} - 1$. *Il suffit que le système donné, considéré comme étant à* n *variables indépendantes, soit en involution.* Mais si le genre est supérieur à n, s_n peut être *supérieur* à s_{n-1}.

Les résultats précédents se simplifient si s_n est nul; alors l'intégrale générale ne dépend que de fonctions arbitraires de $n-1$ arguments au plus.

La recherche analytique de l'intégrale M_n revient à l'intégration de n systèmes successifs de M^me^ de Kowalewski. Le premier donne les s fonctions de x_1 auxquelles se réduisent $z_1, z_2, \ldots, z_s$ lorsqu'on fait

$$x_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n;$$

c'est un système d'équations différentielles ordinaires qu'on obtient en remplaçant dans les équations du système donné les $z^{(1)}$ par les $\varphi^{(1)}(x_1)$, les $z^{(2)}$ par les $\varphi^{(2)}(x_1, a_2)$, ..., les $z^{(n)}$ par les $\varphi^{(n)}(x_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Le second système de M^me^ de Kowalewski donne les $s + s_1$ fonctions de x_1, x_2 auxquelles se réduisent $z_1, \ldots, z_s, z_1^{(1)}, \ldots, z_{s_1}^{(1)}$ lorsqu'on fait

$$x_3 = a_3, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n,$$

ces fonctions se réduisant à des fonctions connues de x_1 pour $x_2 = a_2$. Et ainsi de suite; le dernier système donne les $s + s_1 + \ldots + s_{n-1}$ fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ auxquelles se réduisent $z_1, \ldots, z_{s_{n-1}}^{(n-1)}$ lorsqu'on fait

$$x_n = a_n,$$

ces fonctions se réduisant à des fonctions connues de $x_1, \ldots, x_{n-2}$ pour $x_{n-1} = a_{n-1}$.

Pour éclaircir tous les résultats précédents par un exemple bien simple, prenons le système formé de la seule équation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \tag{1}$$

où x, y, z, p, q sont cinq variables. Ici il y a une équation exprimant que deux éléments linéaires intégraux sont associés, c'est

$$dx\,\delta p - dp\,\delta x + dy\,\delta q - dq\,\delta y = 0. \tag{2}$$

Ici $r = 5$ et $r_1 = 3$; quant à r_2, les équations qui définissent les éléments linéaires intégraux associés à un élément linéaire intégral donné $(\delta x, \delta y, p\delta x + q\delta y, \delta p, \delta q)$ sont au nombre de deux indépendantes, à savoir

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$
$$\delta p\,dx + \delta q\,dy - \delta x\,dp - \delta y\,dq = 0;$$

par suite $r_2 = 1$. On a donc

$$s = 1, \qquad s_1 = 1, \qquad s_2 = 1.$$

Un point non singulier E_0 est par exemple

$$x = y = z = p = q = 0.$$

Un élément intégral E_2 passant par ce point est par exemple

$$(E_2) \qquad dz = dp = dq = 0,$$

et un élément intégral non singulier E_1 contenu dans E_2 est par exemple

$$(E_1) \qquad dz = dp = dq = dy = 0.$$

Ici l'élément (P_0) est donné par (1) où l'on fait $p = q = 0$,

$$(P_0) \qquad dz = 0,$$

l'élément (P_1) est donné, d'après (2), par

$$(P_1) \qquad dz = dp = 0.$$

Il existera donc une intégrale et une seule formée par trois fonctions z, p, q de x et de y, holomorphes au voisinage de $x = y = 0$ et telles que

q soit identique à $f(x, y)$,
p se réduise à $\varphi(x)$ pour $y = 0$
z se réduise à c pour $x = y = 0$;

où c est une constante assez petite, f et φ des fonctions arbitraires holomorphes au voisinage de $x = 0$, $y = 0$ et prenant pour $x = y = 0$, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, des valeurs assez petites.

Ici il y a deux systèmes de M^me^ de Kowalewski. Le premier donne la fonction z de x qui se réduit à c pour $x=0$, lorsque $p=\varphi(x)$ et $q=f(x, 0)$; elle est évidemment donnée par

$$\frac{dz}{dx}=p=\varphi(x),$$

d'où

$$z=c+\int_0^x \varphi(x)\,dx.$$

Le second système de M^me^ de Kowalewski donne les fonctions p et z de x, y qui se réduisent respectivement pour $y=0$ à $\varphi(x)$ et $c+\int_0^x \varphi(x)\,dx$ lorsqu'on fait $q=f(x,y)$. Ce système est [*voir* les formules (II) du paragraphe IV],

$$\frac{\partial z}{\partial y}-f(x, y)=0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

et donne

$$\begin{aligned} z&=c+\int_0^x \varphi(x)\,dx+\int_0^y f(x, y)\,dy,\\ p&=\varphi(x)+\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\,dy,\\ q&=f(x, y). \end{aligned}$$

Nous allons terminer ce paragraphe en donnant quelques définitions. Dans la suite

$$s, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n$$

qui mesure l'indétermination de l'intégrale générale M_n d'un système (1) de genre n, le premier nombre s n'est autre que le nombre des équations indépendantes en $dx_1, \ldots, dx_r$ de ce système (1), c'est-à-dire, en conservant les notations du § I, c'est le degré du mineur principal de la matrice

$$(\Delta) \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Le nombre suivant s_1 a reçu un nom particulier : on l'appelle le *caractère* (¹) du système. Remarquons que $s+s_1$ n'est autre que le nombre des équations indépendantes qui expriment qu'un élément linéaire $(dx_1, \ldots, dx_r)$ est intégral et associé à un élément linéaire intégral arbitraire $(\delta x_1, \ldots, \delta x_r)$. Or en posant

$$a_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}, \qquad \ldots, \qquad l_{ik} = \frac{\partial l_i}{\partial x_k} - \frac{\partial l_k}{\partial x_i},$$

ces équations sont

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \ldots + a_r\, dx_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_1\, dx_1 + l_2\, dx_2 + \ldots + l_r\, dx_r = 0, \end{array} \right.$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_i a_{1i}\, \delta x_i\, dx_1 + \ldots + \sum\limits_i a_{ri}\, \delta x_i\, dx_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sum\limits_i l_{1i}\, \delta x_i\, dx_1 + \ldots + \sum\limits_i l_{ri}\, \delta x_i\, dx_r = 0. \end{array} \right.$$

Si donc on considère la matrice

$$(\Delta_1) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_r \\ \sum a_{1i}\delta x_i & \sum a_{2i}\delta x_i & \ldots & \sum a_{ri}\delta x_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum l_{1i}\delta x_i & \sum l_{2i}\delta x_i & \ldots & \sum l_{ri}\delta x_i \end{array} \right\|$$

où $\delta x_1, \ldots, \delta x_r$ sont des arbitraires uniquement assujetties à vérifier les équations

$$\begin{array}{l} a_1\, \delta x_1 + \ldots + a_r\, \delta x_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_1\, \delta x_1 + \ldots + l_r\, \delta x_r = 0, \end{array}$$

(¹) Cette désignation est due, je crois, à M. H. von Weber, *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (*Leipz. Ber.*, p. 207-229; 1898).

le caractère s_1 du système est la différence entre le degré du mineur principal de la matrice (Δ_1) et le degré du mineur principal de la matrice (Δ).

On peut donner aux autres nombres s_2, s_3, ... les noms de 2^e, 3^e, ... *caractère* du système (1). Ils se calculent par des degrés de mineurs principaux comme s et s_1. Mais *au lieu de dire qu'un système de genre n a pour $n^{ième}$ caractère le nombre s_n, nous dirons que le système est de $(s_n + 1)^{ième}$ espèce.* Un système de première espèce est donc un système pour lequel $s_n = 0$; il jouit de la propriété que par une multiplicité intégrale M_{n-1} il passe une multiplicité intégrale M_n *et une seule.*

VII.

Nous allons, dans ce paragraphe, nous occuper des systèmes de première espèce pour lesquels le $(n-1)^{ième}$ caractère s_{n-1} est nul. Supposons d'une manière générale que s_ν soit le premier nombre nul de la suite

$$s, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n,$$

ν étant inférieur à n. Nous avons vu au § V quelques propriétés de ces systèmes que nous rappelons :

Par un élément intégral $E_{\nu-1}$ non singulier il passe un élément intégral E_n et un seul. Cet élément E_n est le lieu des éléments intégraux qui passent par $E_{\nu-1}$, et aucun de ces éléments n'est singulier.

On a de plus

$$r_n = 0, \qquad r_{n-1} = 1, \qquad r_{n-2} = 2, \qquad \ldots, \qquad r_\nu = n - \nu, \qquad r_{\nu-1} \leqq n - \nu - 2.$$

Comme corollaire à la propriété des éléments intégraux qui passent par un élément intégral non singulier $E_{\nu-1}$, nous allons démontrer le théorème suivant :

Par une multiplicité intégrale non singulière $M_{\nu-1}$ il passe une multiplicité intégrale M_n et une seule.

Pour le démontrer, faisons passer par $M_{\nu-1}$ une multiplicité arbitraire μ_{r-r_ν}, ce qui est toujours possible, la multiplicité intégrale $M_{\nu-1}$ n'étant pas singulière. Si, en particulier, $E_{\nu-1}$ est un élément intégral non singulier de $M_{\nu-1}$, la multiplicité μ_{r-r_ν} admettra un élément intégral E_ν et un seul passant par $E_{\nu-1}$. Cela étant, soit M_n une multiplicité intégrale quelconque passant par $M_{\nu-1}$; elle admet naturellement l'élément intégral *unique* E_n qui passe par $E_{\nu-1}$. D'autre part, la somme des dimensions de M_n et de μ_{r-r_ν} étant

$$r + n - r_\nu = r + \nu,$$

ces deux multiplicités ont en commun une multiplicité à *au moins* ν dimensions, et cette multiplicité est nécessairement intégrale; mais μ_{r-r_ν} n'admettant pas d'élément intégral à $\nu + 1$ dimensions passant par $E_{\nu-1}$, cette multiplicité intégrale commune à M_n et μ_{r-r_ν} est *exactement* à ν dimensions, soit M_ν.

Cela étant, nous savons que par une multiplicité intégrale non singulière $M_{\nu-1}$ il passe une multiplicité intégrale à ν dimensions *et une seule* assujettie à être contenue dans la multiplicité arbitraire μ_{r-r_ν} : *Donc la multiplicité* M_ν *est déterminée d'une manière unique lorsqu'on se donne* μ_{r-r_ν}. Autrement dit, *si par* $M_{\nu-1}$ *il passe deux multiplicités intégrales à n dimensions,* M_n *et* M'_n, *ces deux multiplicités coupent* μ_{r-r_ν} *suivant la même multiplicité* M_ν, *et cela quelle que soit* μ_{r-r_ν} *passant par* $M_{\nu-1}$.

Il résulte de là que les deux multiplicités M_n et M'_n sont identiques. Car si A est un point quelconque de la première, on peut toujours faire passer par A et $M_{\nu-1}$ une multiplicité μ_{r-r_ν}. A cette multiplicité correspond une multiplicité intégrale M_ν, située sur M_n, et passant ensuite par A; mais elle est aussi située sur M'_n; donc le point A appartient à M'_n, et les deux multiplités coïncident.

D'une manière plus précise et plus rigoureuse, faisons passer par $M_{\nu-1}$ une multiplicité $\mu_{r-r_\nu-1}$ arbitraire, c'est-à-dire n'admettant pas d'élément intégral passant par $E_{\nu-1}$ autre que $E_{\nu-1}$ lui-même, ce qui est toujours possible. Faisons alors passer par cette multiplicité $\mu_{r-r_\nu-1}$ déterminée une famille de multiplicités μ_{r-r_ν} dépendant de $r_\nu = n - \nu$ paramètres et *remplissant tout l'espace* (1). Ces multiplicités

(1) Si

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_{r_\nu+1} = 0$$

sont les équations de $\mu_{r-r_\nu-1}$, il suffit évidemment de prendre

$$f_1 - t_1 f_{r_\nu+1} = f_2 - t_2 f_{r_\nu+1} = \ldots = f_{r_\nu} - t_{r_\nu} f_{r_\nu+1} = 0.$$

sont toutes *arbitraires*, car elles ont évidemment un seul élément intégral E_ν passant par $E_{\nu-1}$, et nous savons que tout élément intégral passant par $E_{\nu-1}$ est non singulier. Chacune d'elles contient donc une multiplicité intégrale M_ν et une seule passant par $M_{\nu-1}$ et toutes ces multiplicités M_ν appartiennent à une multiplicité intégrale M_n quelconque passant par $M_{\nu-1}$. On peut ajouter que M_n *est le lieu de ces multiplicités* M_ν *lorsque les* $n-\nu$ *paramètres dont elles dépendent varient;* car chacune d'elles est contenue dans M_n, et, d'autre part, par un point quelconque de M_n il passe une des multiplicités μ_{r-r_ν} (qui remplissent tout l'espace) et, par suite, la multiplicité M_ν correspondante. Par suite M_n est déterminée d'une manière unique.

Nous résumerons de la manière suivante les résultats que nous venons d'obtenir :

Par une multiplicité intégrale non singulière $M_{\nu-1}$ *il passe une multiplicité intégrale* M_n *et une seule. Pour l'obtenir on fait passer par* $M_{\nu-1}$ *une multiplicité arbitraire* $\mu_{r-r_\nu-1}$ *et par cette dernière multiplicité une famille de multiplicités* μ_{r-r_ν} *dépendant de* $r_\nu = n-\nu$ *paramètres et remplissant tout l'espace. On détermine pour chacune de ces multiplicités* μ_{r-r_ν} *la multiplicité intégrale* M_ν *qui passe par* $M_{\nu-1}$ *et qui est contenue tout entière dans* μ_{r-r_ν}. *Le lieu géométrique de ces multiplicités* M_ν, *lorsqu'on fait varier les* $n-\nu$ *paramètres dont elles dépendent, est la multiplicité intégrale cherchée* M_n.

D'ailleurs, *cette multiplicité* M_ν *est intégrale d'un système d'équations aux différentielles totales à* $r-r_\nu$ *variables et de genre* ν; *seulement ses coefficients dépendent de* $n-\nu$ *paramètres.*

On déduit de là le théorème suivant qui se rapporte au problème de Cauchy proprement dit :

Soit un système d'équations aux différentielles totales de genre n *pour lequel le caractère* s_ν *est nul* ($\nu < n$). *Étant donnés alors un point arbitraire* μ_0, *une multiplicité arbitraire* μ_{r-r_1} *passant par ce point, etc., une multiplicité arbitraire* $\mu_{r-r_{\nu-1}}$ *passant par* $\mu_{r-r_{\nu-2}}$, *il existe une multiplicité intégrale* M_n, *et une seule, passant par* μ_0, *ayant en commun avec* μ_{r-r_1} *une multiplicité à* 1 *dimension, etc., avec* $\mu_{r-r_{\nu-1}}$ *une multiplicité à* $\nu-1$ *dimensions. Pour l'obtenir on fait passer par* $\mu_{r-r_{\nu-1}}$ *une multiplicité arbitraire* $\mu_{r-r_\nu-1}$ *et par cette dernière une famille de multiplicités*

μ_{r-r_ν} *dépendant de* $r_\nu = n - \nu$ *paramètres et remplissant tout l'espace. Chacune de ces multiplicités contient une multiplicité intégrale* M_ν *et une seule passant par* μ_0, *ayant en commun avec* μ_{r-r_1} *une multiplicité à* 1 *dimension, etc., avec* $\mu_{r-r_{\nu-1}}$ *une multiplicité à* $\nu - 1$ *dimensions. Le lieu géométrique de ces multiplicités* M_ν, *lorsqu'on fait varier les* $n - \nu$ *paramètres dont elles dépendent, est la multiplicité intégrale cherchée* M_n.

Il suffit, en effet, de remarquer que la multiplicité intégrale à $\nu - 1$ dimensions située sur $\mu_{r-r_{\nu-1}}$ est la même pour M_n et pour toutes les M_ν; il n'y a alors qu'à appliquer le théorème précédent à cette multiplicité intégrale à $\nu - 1$ dimensions.

Le dernier théorème montre que *le problème de Cauchy pour le système donné du genre n est ramené au problème de Cauchy pour un nouveau système de genre* ν; *mais les coefficients de ce nouveau système dépendent de* $n - \nu$ *paramètres*. Les nombres $s, s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ ont, d'ailleurs, les mêmes valeurs pour les deux systèmes.

Nous dirons que l'entier ν est le *genre vrai* du système.

Nous allons maintenant traduire analytiquement les résultats précédents. Gardons les notations du § VI; ici il se présente une simplification due à ce que $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_\nu$ sont nuls; par suite, il n'y a pas de variables $z^{(n)}, z^{(n-1)}, \ldots, z^{(\nu)}$.

La multiplicité $\mu_{r-r_{\nu-1}}$ est définie par

$$(A_{\nu-1}) \qquad \begin{cases} z_1^{(\nu-1)} = \varphi_1^{(\nu-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{s_{\nu-1}}^{(\nu-1)} = \varphi_{s_{\nu-1}}^{(\nu-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}), \end{cases}$$

$$(B_\nu) \qquad x_n = a_n, \qquad x_{n-1} = a_{n-1}, \qquad \ldots, \qquad x_\nu = a_\nu.$$

La multiplicité $\mu_{r-r_{\nu-2}}$ est définie par les équations précédentes, et, en outre,

$$(A_{\nu-2}) \qquad \begin{cases} z_1^{(\nu-2)} = \varphi_1^{(\nu-2)}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{s_{\nu-2}}^{(\nu-2)} = \varphi_{s_{\nu-2}}^{(\nu-2)}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-2}), \end{cases}$$

$$(B_{\nu-1}) \qquad x_{\nu-1} = a_{\nu-1};$$

et ainsi de suite, comme dans le cas général.

Nous pouvons maintenant prendre comme multiplicité $\mu_{r-r_{\nu-1}}$ celle qui est définie par les $n - \overset{\nu}{\cancel{r}} + 1 = r_\nu + 1$ équations (B_ν),

$$x_n = a_n, \qquad x_{n-1} = a_{n-1}, \qquad \ldots, \qquad x_\nu = a_\nu,$$

et pour multiplicités μ_{r-r_ν} celles qui sont définies par

$$(\mu_{r-r_\nu}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_{\nu+1} - a_{\nu+1} = t_1 \quad (x_\nu - a_\nu), \\ x_{\nu+2} - a_{\nu+2} = t_2 \quad (x_\nu - a_\nu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n \quad - a_n \quad = t_{n-\nu}\,(x_\nu - a_\nu). \end{array} \right.$$

Les résultats précédemment énoncés d'une manière géométrique peuvent maintenant s'exprimer de la manière suivante :

Le système donné admet une intégrale, et une seule, pour laquelle $z_1, \ldots, z^{(\nu-1)}_{s_{\nu-1}}$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ holomorphes au voisinage de

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n,$$

et se réduisent respectivement

$$\begin{array}{llll} z_1^{(\nu-1)} \text{ à la fonction arbitraire } & \varphi_1^{(\nu-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}) & \Big\} & \text{pour} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & x_\nu = a_\nu,\ x_{\nu+1} = a_{\nu+1},\ \ldots, \\ z^{(\nu-1)}_{s_{\nu-1}} \qquad\qquad » & \varphi^{(\nu-1)}_{s_{\nu-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}) & \Big\} & x_n = a_n, \\ z_1^{(\nu-2)} \qquad\qquad » & \varphi_1^{(\nu-2)}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-2}) & \Big\} & \text{pour} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & x_{\nu-1} = a_{\nu-1},\ \ldots, \\ z^{(\nu-2)}_{s_{\nu-2}} \qquad\qquad » & \varphi^{(\nu-2)}_{s_{\nu-2}}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-2}) & \Big\} & x_n = a_n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots, \\ z_1^{(1)} \qquad\qquad » & \varphi_1^{(1)}(x_1) & \Big\} & \text{pour} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ z^{(1)}_{s_1} \qquad\qquad » & \varphi^{(1)}_{s_1}(x_1) & \Big\} & x_2 = a_2,\ \ldots,\ x_n = a_n, \\ z_1 \text{ à la constante arbitraire } & \varphi_1 & \Big\} & \text{pour} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ z_s \qquad\qquad » & \varphi_s & \Big\} & x_1 = a_1,\ \ldots,\ x_n = a_n. \end{array}$$

Pour obtenir ces fonctions, on remplace dans les équations du système *différentiel donne*

$$\begin{array}{lll} x_{\nu+1} & par & a_{\nu+1}+ \quad t_1(x_\nu - a_\nu), \\ x_{\nu+2} & par & a_{\nu+2}+ \quad t_2(x_\nu - a_\nu), \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n & par & a_n + t_{n-\nu}(x_\nu - a_\nu), \end{array}$$

où l'on regarde les t comme des constantes. Le nouveau système obtenu admet alors une intégrale et une seule pour laquelle $z_1, \ldots, z^{(\nu-1)}_{s_{\nu-1}}$ *sont des fonctions de* $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ *holomorphes au voisinage de*

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad x_\nu = a_\nu,$$

et se réduisant respectivement

$$\begin{array}{llll} z_i^{(\nu-1)} & \grave{a} & \varphi_i^{(\nu-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}) & pour \quad x_\nu = a_\nu, \\ z_j^{(\nu-2)} & \grave{a} & \varphi_j^{(\nu-2)}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-2}) & pour \quad x_{\nu-1} = a_{\nu-1}, \ x_\nu = a_\nu, \\ \ldots & . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_k^{(1)} & \grave{a} & \varphi_k^{(1)}(x_1) & pour \quad x_2 = a_2, \ \ldots, \ x_\nu = a_\nu, \\ z_h & \grave{a} & \varphi_h & pour \quad x_1 = a_1, \ \ldots, \ x_\nu = a_\nu \end{array}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, s_{\nu-1}; \quad j = 1, 2, \ldots, s_{\nu-2}; \quad k = 1, 2, \ldots, s_1; \quad h = 1, 2, \ldots, s).$$

Si dans les fonctions ainsi trouvées on remplace les $n - \nu$ *paramètres t dont elles dépendent respectivement par*

$$t_1 = \frac{x_{\nu+1} - a_{\nu+1}}{x_\nu - a_\nu},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t_{n-\nu} = \frac{x_n - a_n}{x_\nu - a_\nu},$$

on obtient l'intégrale cherchée du système primitif.

On voit en somme que, *si l'intégrale générale* M_n *d'un système en involution (c'est-à-dire de genre supérieur ou égal à* n*) dépend de fonctions abitraires de* $\nu - 1$ *arguments, mais non de fonctions arbitraires de* ν *arguments, on peut ramener sa recherche à celle de l'intégrale* M_ν *d'un système de genre* ν, *par conséquent à un problème à* ν *variables indépendantes; mais les coefficients du nouveau système dépendent de* $n - \nu$ *paramètres.*

Il suffit, en effet, de remarquer que, M_n ne dépendant pas de fonctions arbitraires de n arguments, on a nécessairement $r_n = 0$ et, par suite, le genre du système est exactement n.

En particulier, si l'intégrale générale M_n d'un système en involution ne dépend que de *constantes arbitraires*, on a $\nu = 1$; le *caractère* s_1 du système est nul et le système est complètement intégrable. On ramène la recherche de son intégrale à celle d'un système de genre 1, c'est-à-dire d'un système d'équations différentielles ordinaires. *La méthode se réduit à celle de Lie-Mayer pour l'intégration des systèmes complètement intégrables.* Si les équations du système sont résolubles par rapport à $dz_1, dz_2, \ldots, dz_s$, les autres différentielles étant dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$, on remplace

$$\begin{array}{lll} x_2 & \text{par} & a_2 + t_1(x_1 - a_1), \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n & \text{par} & a_n + t_{n-1}(x_1 - a_1), \end{array}$$

et l'on cherche l'intégrale du nouveau système pour que $z_1, z_2, \ldots, z_s$ se réduisent pour $x_1 = a_1$ à des constantes arbitraires données φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_s$. On remplace ensuite dans les fonctions obtenues t_i par $\dfrac{x_{i+1} - a_{i+1}}{x_1 - a_1}$.

Comme exemple, nous prendrons le plus simple possible, de manière toutefois à ne pas avoir un système complètement intégrable; nous choisirons

$$\nu = 2, \qquad n = 3, \qquad s_1 = 1, \qquad s = 1.$$

Alors

$$r_3 = 0, \qquad r_2 = 1, \qquad r_1 = 3, \qquad r = 5.$$

L'équation suivante correspond à ce cas

$$x_4\,dx_1 - x_4 x_5\,dx_2 - (x_2 x_4 + x_3 + x_1 x_5)\,dx_3 = 0;$$

nous n'effectuerons pas la vérification et nous allons simplement appliquer la méthode de Lie-Mayer généralisée pour trouver l'intégrale générale de cette équation. On voit facilement que le point

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 1, \qquad x_5 = 0$$

n'est pas singulier, que l'élément linéaire E_1 issu de ce point

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0$$

est intégral; ici (P_0) a pour équation

$$(P_0) \qquad dx_1 = 0;$$

quant à (P_1), on trouve facilement

$$(P_1) \qquad dx_1 = dx_3 = 0$$

et l'on constate que cet élément E_3 est intégral; de plus, E_1 n'est pas singulier.

On peut donc prendre ici pour variables désignées dans la théorie générale par z, $z^{(1)}$, x_3, x_2, x_1 respectivement x_1, x_3, x_4, x_2, x_5.

Il y aura donc une intégrale, et une seule, telle que

x_3 se réduise à $f(x_5)$ pour $x_2 = 0$, $x_4 = 1$,
x_1 » c pour $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$.

Pour l'obtenir, il suffit de remplacer dans l'équation

$$x_4 - 1 \quad \text{par} \quad tx_2,$$

ce qui donne

$$(tx_2 + 1)\,dx_1 - (tx_2 + 1)x_5\,dx_2 - (tx_2^2 + x_2 + x_3 + x_1 x_5)\,dx_5 = 0.$$

Il faut d'abord chercher la fonction x_1 de x_5 qui se réduit à c pour $x_5 = 0$, lorsqu'on fait $x_3 = f(x_5)$, $x_2 = 0$. Cette fonction est donnée par

$$\frac{dx_1}{dx_5} = f(x_5) + x_1 x_5,$$

d'où l'on tire

$$x_1 = ce^{\frac{x_5^2}{2}} + e^{\frac{x_5^2}{2}} \int_0^{x_5} e^{-\frac{x_5^2}{2}} f(x_5)\,dx_5 = \varphi(x_5).$$

Il faut ensuite chercher les deux fonctions x_3 et x_1 de x_2, x_5 qui se réduisent à $f(x_5)$ et $\varphi(x_5)$ pour $x_2 = 0$. Elles sont données par

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = x_5,$$
$$1 = 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_3 + x_1 x_5}{tx_2 + 1}.$$

La dernière donne

$$x_3 + x_1 x_5 = (t x_2 + 1)\left[f(x_5) + c x_5 e^{\frac{x_5^2}{2}} + x_5 e^{\frac{x_5^2}{2}} \int_0^{x_5} e^{-\frac{x_5^2}{2}} f(x_5)\, dx_5\right],$$

puis la première

$$x_1 = x_2 x_5 + c e^{\frac{x_5^2}{2}} + e^{\frac{x_5^2}{2}} \int_0^{x_5} e^{-\frac{x_5^2}{2}} f(x_5)\, dx_5.$$

En remplaçant dans la première formule $t x_2 + 1$ par x_4, on obtient l'intégrale générale qui peut encore s'écrire

$$x_1 - x_2 x_5 = \mathrm{F}(x_5),$$
$$x_3 + x_1 x_5 = x_4 \mathrm{F}'(x_5),$$

en posant

$$\mathrm{F}(x_5) = c e^{\frac{x_5^2}{2}} + e^{\frac{x_5^2}{2}} \int_0^{x_5} e^{-\frac{x_5^2}{2}} f(x_5)\, dx_5.$$

VIII.

Nous allons, dans ce dernier paragraphe, nous occuper de certains systèmes pour lesquels le système de M$^{\text{me}}$ de Kowalewski déterminant la multiplicité intégrale M_{p+1} qui passe par une multiplicité intégrale donnée M_p présente certaines propriétés simples qui en rendent aisée l'intégration. Ce système, en conservant les notations du § III, est, en nous bornant au cas de $s_{p+1} = 0$, résolu par rapport à

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z_m}{\partial x},$$

les seconds membres dépendant des variables et des dérivées du premier ordre des fonctions inconnues z, par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ autres que x.

Si l'on résout le problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue, on est ramené précisément, par un changement de variables indépendantes, à un système de M$^{\text{me}}$ de Kowalewski, *mais où les seconds membres ne dépendent pas des dérivées* $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$. Alors on est ramené en somme à un système d'équations différentielles ordinaires.

Cherchons dans quels cas ce même fait se produira. En désignant comme nous l'avons fait au § III, par ε, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, ..., $\varepsilon^{(p)}$ les $p+1$ éléments linéaires

$$(\varepsilon) \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dx_1}{0} = \ldots = \frac{dx_p}{0} = \frac{dz_1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial x}} = \ldots = \frac{dz_m}{\dfrac{\partial z_m}{\partial x}},$$

$$[\varepsilon^{(1)}] \qquad \frac{dx}{0} = \frac{dx_1}{1} = \ldots = \frac{dx_p}{0} = \frac{dz_1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dz_m}{\dfrac{\partial z_m}{\partial x_1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$[\varepsilon^{(p)}] \qquad \frac{dx}{0} = \frac{dx_1}{0} = \ldots = \frac{dx_p}{1} = \frac{dz_1}{\dfrac{\partial z_1}{\partial x_p}} = \ldots = \frac{dz_m}{\dfrac{\partial z_m}{\partial x_p}},$$

les équations de M^me de Kowalewski expriment que l'élément ε *est intégral et associé à l'élément* $E_p\,[\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}]$, *sous la seule condition que cet élément* E_p *soit intégral.*

Cela étant, supposons que les équations de M^me de Kowalewski ne dépendent pas des $\dfrac{\partial z_i}{\partial x_k}$, c'est-à-dire en somme de $\varepsilon^{(1)}$, ..., $\varepsilon^{(p)}$. Alors les valeurs de $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}$, ..., $\dfrac{\partial z_m}{\partial x}$ qu'elles déterminent fournissent un élément linéaire intégral ε, uniquement dépendant du point d'où il est issu et *qui est associé à tous les éléments linéaires* E_p *passant par ce point;* car un élément E_p arbitraire peut toujours se déduire linéairement de ε et d'un élément de la forme $[\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p)}]$.

En somme, *il passe par chaque point de l'espace un élément linéaire intégral jouissant de la propriété d'être associé à un élément linéaire intégral quelconque issu du même point.*

Cet élément linéaire est nécessairement *singulier*, car il appartient à ∞^{r_1-1} éléments intégraux E_2 ; nous dirons qu'il est *caractéristique.*

En général, *un élément intégral* E_p *issu d'un point non singulier de l'espace est dit* caractéristique *s'il est associé à un élément linéaire intégral quelconque issu du même point.*

Tous les éléments linéaires contenus dans un élément caractéristique $E_h\,(h > 1)$ sont eux-mêmes caractéristiques et le lieu des éléments linéaires caractéristiques est nécessairement un élément plan caractéristique, qui est le plus grand élément caractéristique issu du point.

Pour obtenir analytiquement les éléments linéaires caractéristiques issus d'un point donné non singulier, désignons par

$$\delta x_1, \quad \delta x_2, \quad \ldots, \quad \delta x_r$$

les coordonnées d'un tel élément, et par

$$dx_1, \quad dx_2, \quad \ldots, \quad dx_r$$

les coordonnées d'un élément linéaire intégral variable issu du même point. On aura, pour déterminer les δx_i, les équations

$$\left\{\begin{array}{r} a_1\,\delta x_1 + \ldots + a_r\,\delta x_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_1\,\delta x_1 + \ldots + l_r\,\delta x_r = 0, \\ \Sigma a_{1i}\,dx_i\,\delta x_1 + \ldots + \Sigma a_{ri}\,dx_i\,\delta x_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma\, l_{1i}\,dx_i\,\delta x_1 + \ldots + \Sigma\, l_{ri}\,dx_i\,\delta x_r = 0, \end{array}\right.$$

où les notations sont les mêmes qu'au § I [1]. De plus, ces équations doivent avoir lieu quels que soient

$$dx_1, \quad dx_2, \quad \ldots, \quad dx_r,$$

sous la seule condition que ces quantités vérifient les équations (1) en nombre s,

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1\,dx_1 + \ldots + a_r\,dx_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_1\,dx_1 + \ldots + l_r\,dx_r = 0. \end{array}\right.$$

Par suite, l'équation en $dx_1, \ldots, dx_r$,

$$\Sigma a_{1i}\,\delta x_i\,dx_1 + \ldots + \Sigma a_{ri}\,\delta x_i\,dx_r = 0,$$

---

[1] On a posé simplement

$$a_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}, \qquad \ldots, \qquad l_{ik} = \frac{\partial l_i}{\partial x_k} - \frac{\partial l_k}{\partial x_i}.$$

doit être une conséquence des équations (1); autrement dit *tous les mineurs à $s+1$ colonnes de la matrice*

$$\text{(A)} \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r \\ \Sigma a_{1i}\,\delta x_i & \Sigma a_{2i}\,\delta x_i & \dots & \Sigma a_{ri}\,\delta x_i \end{Vmatrix}$$

doivent être nuls. Il en est de même si l'on remplace dans cette matrice la dernière ligne par les $s-1$ lignes analogues déduites des $s-1$ dernières équations (1), ce qui donne les matrices (B), ..., (L).

En définitive, *les équations qui déterminent les éléments linéaires caractéristiques sont de deux sortes : d'abord les s équations*

$$(1') \qquad \begin{cases} a_1\,\delta x_1 + \dots + a_r\,\delta x_r = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ l_1\,\delta x_1 + \dots + l_r\,\delta x_r = 0, \end{cases}$$

qui expriment que cet élément est intégral; ensuite les équations obtenues en annulant tous les mineurs à $s+1$ colonnes des s matrices (A), ..., (L),

$$\text{(A)} \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & \dots & a_r \\ \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ l_1 & \dots & l_r \\ \Sigma a_{1i}\,\delta x_i & \dots & \Sigma a_{ri}\,\delta x_i \end{Vmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\text{(L)} \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & \dots & a_r \\ \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ l_1 & \dots & l_r \\ \Sigma l_{1i}\,\delta x_i & \dots & \Sigma l_{ri}\,\delta x_i \end{Vmatrix}.$$

Si parmi ces équations il y en a moins de r indépendantes, il existe des éléments linéaires caractéristiques et ces équations déterminent leur lieu, c'est-à-dire le plus grand élément caractéristique issu du point.

Si le système donné est complètement intégrable, deux éléments linéaires intégraux quelconques sont associés et, par suite, les équations des éléments caractéristiques doivent se réduire aux équations (1'); les mineurs principaux des matrices (A), ..., (L) sont de degré s en tenant compte de (1').

Voici maintenant quelques propriétés fondamentales simples des éléments caractéristiques :

Étant donné un élément caractéristique E_p, *tout élément intégral* non singulier E_n *contient* E_p, sinon, en effet, le plus petit élément contenant E_n et E_p serait au moins à $n + 1$ dimensions et il serait nécessairement intégral puisque E_n et E_p sont associés; l'élément intégral E_n appartenant à un élément intégral E_{n+1} ~~ne~~ serait donc ~~pas~~ singulier. Bien entendu n désigne le genre du système donné.

Si par tout point non *singulier de l'espace il passe un élément caractéristique, le système différentiel donné est de première espèce.* Car soit ε un élément linéaire caractéristique, tout élément intégral non singulier E_n contenant ε, il existe certainement des éléments intégraux E_{n-1} qui ne contiennent pas ε, et naturellement, parmi ces éléments intégraux il y en a qui ne sont pas singuliers ([1]). Soit E_{n-1} l'un d'eux. Par E_{n-1} passent ∞^{r_n} éléments intégraux E_n et l'un d'eux au moins n'est pas singulier, c'est-à-dire contient ε; si r_n est au moins égal à 1, il y aurait au moins un élément intégral E_n autre que (E_{n-1}, ε), soit (E_{n-1}, ε'); mais alors l'élément $(E_{n-1}, \varepsilon, \varepsilon')$ serait intégral et l'élément non singulier (E_{n-1}, ε) appartiendrait à un autre élément intégral à $n + 1$ dimensions, ce qui est impossible. Il faut donc que r_n *soit nul*, c'est-à-dire que le système différentiel donné soit de première espèce. *Il n'y a donc que les systèmes de première espèce pour lesquels il puisse exister des éléments caractéristiques.*

On voit de la même manière que *s'il existe un élément intégral caractéristique* E_p, *le genre vrai du système est au plus* $n - p + 1$. Car il existe certainement un élément intégral E_{n-p} non singulier n'ayant aucun élément commun avec E_p; tout élément intégral non singulier E_n passant par E_{n-p} doit contenir E_p, il est donc déterminé d'une manière unique et l'on peut le désigner par (E_{n-p}, E_p). Si E_{n-p} appartenait à un autre élément intégral E_n, l'élément (E_n, E_p) serait intégral et

([1]) Sinon tout élément intégral non singulier E_{n-1} serait assujetti à une condition d'*égalité :* celle de contenir ε.

aurait au moins $n+1$ dimensions; il contiendrait d'autre part (E_{n-p}, E_p) qui serait par suite singulier. Donc E_{n-p} appartient à un seul élément intégral E_n. Par suite, enfin, le genre vrai du système est au plus $n-p+1$.

On peut ajouter que *s'il existe un élément intégral non singulier* E_{n-1} *contenant* E_p, *le genre vrai est au plus* $n-p$. Car il existe toujours un élément intégral E_{n-p-1} contenu dans E_{n-1} et n'ayant aucun élément commun avec E_p. Si un élément intégral à n dimensions passant par E_{n-p-1} contient E_p, il contient aussi E_{n-1} et, par suite, est complètement déterminé et unique, puisque l'élément intégral non singulier E_{n-1} appartient à un seul élément intégral à n dimensions E_n, qui lui-même n'est pas singulier. Si maintenant il passait par E_{n-p-1} un autre élément intégral E'_n, l'élément (E'_n, E_p) serait au moins à $n+1$ dimensions et intégral; d'autre part, il contiendrait (E_{n-p-1}, E_p), c'est-à-dire E_{n-1}, ce qui est impossible, car il ne passe par E_{n-1} aucun élément intégral à plus de n dimensions. Donc, par E_{n-p-1} passe un seul élément intégral à n dimensions; donc, enfin, le genre vrai du système est au plus $n-p$.

De ces propriétés découle la suivante qu'il suffira d'énoncer pour que la démonstration en paraisse évidente :

Si pour un système différentiel de genre n, il passe par chaque point non singulier de l'espace un élément caractéristique à p dimensions, toutes les multiplicités intégrales non singulières M_n qui passent par un point non singulier ont en commun un élément à p dimensions issu de ce point, et réciproquement.

Voyons maintenant quel parti on peut tirer de l'existence d'éléments caractéristiques pour la détermination de multiplicités intégrales non singulières à n dimensions.

Supposons d'abord qu'il existe un élément *linéaire* caractéristique. Alors cet élément linéaire fait correspondre à tout point arbitraire de l'espace une certaine droite D passant par ce point. Comme on le sait, il existe une famille de courbes (multiplicités à une dimension) telles qu'en chacun de leurs points elles soient tangentes à la droite D correspondant à ce point; ces courbes dépendent de $r-1$ paramètres et par chaque point non singulier de l'espace il en passe une et une seule, Nous les nommerons *courbes caractéristiques;* ce sont évidemment des courbes intégrales.

Cela étant, considérons une multiplicité intégrale non singulière M_n; en chacun de ses points non singuliers elle admet un élément intégral E_n non singulier qui, par suite, contient l'élément caractéristique ε issu de ce point; autrement dit, en chacun de ses points, la multiplicité M_n est tangente à la droite D correspondant à ce point. Sur M_n il existe donc une famille de courbes tangentes en chacun de leurs points à la droite D correspondante; ces courbes dépendent de $n-1$ paramètres et par chaque point non singulier de M_n il en passe une et une seule. Mais il est évident que ces courbes sont des *courbes caractéristiques;* donc, on arrive au résultat suivant :

Toute multiplicité intégrale non singulière M_n *est engendrée par une famille de courbes caractéristiques dépendant de* $n-1$ *paramètres; par chaque point non singulier de* M_n *il passe une de ces courbes et une seule. Si deux multiplicités intégrales non singulières* M_n *ont un point non singulier commun, elles ont en commun toute la courbe caractéristique issue de ce point.*

Il résulte de là qu'*étant donnée une multiplicité intégrale* M_{n-1} *non singulière et non engendrée par des courbes caractéristiques, on aura la multiplicité intégrale* M_n *qui passe par* M_{n-1} *en faisant passer par chaque point de* M_{n-1} *la courbe caractéristique issue de ce point.*

On a donc ainsi la solution du problème de Cauchy lorsque M_{n-1} n'est pas engendré par des courbes caractéristiques.

Nous allons maintenant démontrer ces résultats analytiquement, ce qui nous permettra de voir nettement à quoi se réduit le problème de l'intégration lorsqu'on connaît les courbes caractéristiques.

Dans le cas où nous nous sommes placé, les courbes caractéristiques sont données par un système de $r-1$ équations aux différentielles totales; ce sont les équations trouvées précédemment qui déterminent l'élément caractéristique issu de chaque point de l'espace. Soient

$$y_1 = C_1, \qquad y_2 = C_2, \qquad \ldots, \qquad y_{r-1} = C_{r-1}$$

$r-1$ intégrales premières indépendantes de ces équations; elles déterminent les courbes caractéristiques. Faisons un changement de variables en prenant pour nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ et une r^e quantité y_r indépendante des $r-1$ premières. Avec ces nouvelles variables, le système des éléments linéaires intégraux et des éléments linéaires associés n'est pas changé; par suite, le système d'équations aux différentielles totales qui détermine les éléments caractéristiques reste le même; c'est donc

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_{r-1} = 0.$$

Les équations du système transformé devront donc d'abord être vérifiées pour $dy_1 = \ldots = dy_{r-1} = 0$; par suite, on pourra mettre ce système sous la forme

$$(1)_1 \quad \begin{cases} dy_1 + b_{1,s+1}\, dy_{s+1} + \ldots + b_{1,r-1}\, dy_{r-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_s + b_{s,s+1}\, dy_{s+1} + \ldots + b_{s,r-1}\, dy_{r-1} = 0, \end{cases}$$

les b dépendant de $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Écrivons maintenant que l'élément intégral

$$\frac{dy_1}{0} = \ldots = \frac{dy_{r-1}}{0} = \frac{dy_r}{1}$$

est associé à tout autre élément intégral $(dy_1, \ldots, dy_r)$; on aura d'abord

$$\frac{\partial b_{1,s+1}}{\partial y_r} dy_{s+1} + \ldots + \frac{\partial b_{1,r-1}}{\partial y_r} dy_{r-1} = 0,$$

sous la seule condition que les dy satisfassent à $(1)_1$; c'est-à-dire, on aura

$$\frac{\partial b_{1,s+1}}{\partial y_r} = \ldots = \frac{\partial b_{1,r-1}}{\partial y_r} = 0;$$

autrement dit, enfin, *tous les coefficients b sont indépendants de y_r.*

Le système transformé peut donc se mettre sous une forme telle qu'il ne reste plus trace, soit dans les coefficients, soit dans les différentielles, que des $r-1$ variables

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{r-1}.$$

On voit donc bien que le nombre des variables est réduit d'une unité;

pour chercher les multiplicités M_n du système primitif, il suffira de chercher les multiplicités intégrales M_{n-1} du nouveau système. *Le genre de ce nouveau système est diminué d'une unité, mais le degré de l'indétermination n'a pas changé.* Seulement, le nouveau système peut n'être plus de première espèce.

Ainsi, *dès que l'on a intégré les équations différentielles des caractéristiques, on est ramené à un nouveau système différentiel avec une variable de moins, le genre ayant subi aussi une diminution d'une unité;* on a

$$s' = s, \qquad s'_1 = s_1, \qquad \ldots, \qquad s'_{n-1} = s_{n-1},$$
$$n' = n - 1,$$
$$r' = r - 1, \qquad r'_1 = r_1 - 1 \qquad \ldots, \qquad r'_{n-1} = r_{n-1} - 1.$$

Passons maintenant au cas où *il passe par chaque point de l'espace un élément caractéristique E_p à deux dimensions au moins.* Les équations linéaires en $dx_1, \ldots, dx_r$ qui déterminent E_p sont alors au nombre de $r-p$ indépendantes. On pourrait croire que ces équations ne déterminent pas en général un système différentiel complètement intégrable; mais *il n'en est rien.* Ce *système différentiel, que nous appellerons système différentiel* caractéristique, *est toujours complètement intégrable.*

Pour s'en rendre compte, il suffit de choisir dans chaque E_p un élément linéaire particulier ε, c'est-à-dire il suffit d'ajouter au système différentiel caractéristique $p-1$ équations linéaires quelconques, mais déterminées. On a ainsi un système de $r-1$ équations indépendantes, qui est, par suite, complètement intégrable et dont nous désignerons par

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{r-1}$$

un système de $r-1$ intégrales premières indépendantes. Par un changement de variables, les équations du système, comme nous l'avons vu tout à l'heure, ne dépendent plus que de $y_1, \ldots, y_{r-1}$. Le système différentiel caractéristique se change donc en un système de $r-p$ équations, *mais à $r-1$ variables.* On raisonne sur celui-ci comme sur le premier jusqu'à ce qu'on ait réduit les variables à n'être plus qu'au nombre de $r-p$, soit

Alors il est clair que le système différentiel caractéristique n'est autre que

$$dz_1 = dz_2 = \ldots = dz_{r-p} = 0.$$

Donc, *le système différentiel caractéristique est complètement intégrable et l'on peut, par un changement de variables, mettre le système donné sous une forme telle que ses coefficients et les différentielles ne dépendent plus que des $r-p$ intégrales premières du système caractéristique.*

On voit encore qu'*il existe une famille de multiplicités à p dimensions admettant en chacun de leurs points l'élément caractéristique* E_p; *on les appelle* multiplicités caractéristiques. *Elles dépendent de $r-p$ paramètres et, par chaque point non singulier de l'espace, il en passe une et une seule.*

Toute multiplicité intégrale non singulière M_n *est engendrée par une famille de multiplicités caractéristiques dépendant de $n-p$ paramètres. Il passe une et une seule de ces multiplicités par tout point non singulier de* M_n. *Si deux multiplicités intégrales non singulières à n dimensions ont en commun un point non singulier, elles ont en commun la multiplicité caractéristique issue de ce point.*

Si une multiplicité intégrale non singulière M_{n-p} n'a en commun, en chacun de ses points, aucune courbe avec la multiplicité caractéristique issue de ce point, pour avoir la multiplicité intégrale unique M_n qui passe par M_{n-p}, il suffit de faire passer par chaque point de M_{n-p} la multiplicité caractéristique issue de ce point.

Enfin, *la détermination générale de l'intégrale* M_n *revient à l'intégration d'un nouveau système différentiel dont le genre s'est abaissé de p unités, ainsi que le nombre des variables, mais qui a même degré d'indétermination que le système donné.*

Il suffit, pour voir ce dernier point, de se rappeler que le genre vrai du système donné est, au plus, $n-p+1$; par suite, que l'on a

$$s_n = s_{n-1} = \ldots = s_{n-p+1} = 0.$$

On a alors

$$n' = n - p,$$

$$s'_{n-p} = s_{n-p}, \qquad \ldots, \qquad s'_1 = s_1, \qquad s' = s;$$

$$r'_{n-p} = s_{n-p} = r_{n-p} - p, \qquad \ldots, \qquad r'_1 = r_1 - p, \qquad r' = r - p.$$

Mais il ne faut pas oublier que la réduction à ce nouveau système suppose la détermination préalable des multiplicités caractéristiques. La méthode de Lie-Mayer généralisée permet de ramener à un système de genre $n-p+1$ (au lieu de $n-p$) *sans intégration préalable;* mais ce système dépend du problème particulier de Cauchy que l'on veut résoudre.

Enfin, remarquons que si le nombre des variables du système différentiel donné peut être réduit de p unités par un changement de variables convenable, le système différentiel caractéristique est nécessairement formé, au plus, de $r-p$ équations indépendantes; on a donc le théorème suivant, énoncé pour la première fois sous une forme légèrement différente par M. von Weber [1], et qui n'est luimême qu'une généralisation d'un théorème dû à Frobenius pour les systèmes d'une seule équation :

Le nombre minimum de variables dont, par un changement de variables, on peut faire dépendre les coefficients et les différentielles d'un système donné est égal au nombre des équations linéairement indépendantes de son système différentiel caractéristique; l'intégration de ce système caractéristique fournit ces variables.

Enfin, pour terminer ce sujet, nous allons démontrer l'existence d'éléments caractéristiques *dans les systèmes différentiels de première espèce et de caractère égal à un.*

Prenons un système différentiel de genre n et pour lequel on ait $s_1 = 1$; alors les nombres $s_2, s_3, \ldots$ ne peuvent pas dépasser s_1, c'est-à-dire l'unité, et l'on aura, pour fixer les idées,

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{\nu-1} = 1, \qquad s_\nu = \ldots = s_n = 0;$$

ν est le genre vrai (qui peut être égal à n).

Cela étant, considérons un point non singulier E_0 et l'ensemble des éléments linéaires intégraux issus de ce point; ils forment un élément E_{r_1+1}; dans ce qui va suivre nous ne parlerons que d'éléments situés dans E_{r_1+1}, c'est-à-dire d'éléments formés d'éléments linéaires intégraux. (On a d'ailleurs $r_1 + 1 = n + \nu - 1$.)

Prenons un élément intégral E_n et un élément linéaire ε non contenu dans E_n; le lieu des éléments linéaires (intégraux) associés à ε est un

---

(1) *Loc. cit.*

élément à $r_1 + 1 - s_1 = r_1$ dimensions; cet élément coupe donc E_n suivant un élément H_{n-1} (à $n + r_1 - \overline{r_1 + 1} = n - 1$ dimensions); tous les éléments linéaires contenus dans H_{n-1} sont alors associés à E_n et à ε, c'est-à-dire à l'élément E_{n+1} : (E_n, ε).

Prenons maintenant un élément linéaire ε' non contenu dans E_{n+1}; le lieu des éléments linéaires associés à ε' est encore un élément à r_1 dimensions qui coupe H_{n-1} suivant un élément à $n - 2$ dimensions au moins H_{n-2} et tous les éléments linéaires de H_{n-2} sont associés à E_{n+1} et à ε', c'est-à-dire à l'élément E_{n+2} : (E_{n+1}, ε'). On peut continuer ainsi de proche en proche : on aura un élément H_{n-3} dont tous les éléments linéaires sont associés à un élément E_{n+3}, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, enfin, on arrive à un élément $H_{n-\nu+1}$ dont tous les éléments seront associés à un élément $E_{n+\nu-1}$, c'est-à-dire à E_{r_1+1}. Autrement dit, il existe un élément $H_{n-\nu+1}$ dont tous les éléments linéaires sont intégraux et associés à un élément linéaire intégral *quelconque*. Cet élément $H_{n-\nu+1}$ est donc *caractéristique*.

Il résulte de là que *le système différentiel donné de genre n, de genre vrai ν et de caractère 1 admet des multiplicités caractéristiques à $n - \nu + 1$ dimensions. Il se ramènera alors, après la détermination de ces caractéristiques, à un système de genre $\nu - 1$.*

Ce résultat s'applique à une seule équation de Pfaff (pourvu qu'elle soit de première espèce). On retrouve ainsi les multiplicités caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue.

En particulier, *si l'intégrale générale d'un système différentiel dépend d'une seule fonction arbitraire d'un seul argument (et de constantes arbitraires), l'intégration se ramène à celle du système caractéristique, complètement intégrable, et à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires* [1].

---

[1] M. Beudon a démontré ce résultat pour un système d'équations aux dérivées partielles à une fonction inconnue. Il s'est, dans une série de Notes et de Mémoires, occupé des équations aux dérivées partielles de cette nature qui admettent des multiplicités caractéristiques au sens donné à ce mot dans le texte. *Voir*, en particulier, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de constantes arbitraires* (*Annales de l'École Normale*, t. XIII, supplément, p. 3-51; 1896).

Si l'intégrale générale d'un système de première espèce dépend d'une fonction arbitraire de 1, 2, ..., $\nu - 1$ arguments (et de constantes arbitraires), $\nu - 1$ étant au moins égal à 2, on peut démontrer [1] que le système peut, sans intégration, se mettre sous la forme suivante : d'abord, un système de $s - 1$ équations complètement intégrables; ensuite, une $s^{\text{ième}}$ équation qui peut se mettre sous la forme

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_{\nu-1} dx_{\nu-1} = 0,$$

par l'intégration convenablement conduite du système différentiel caractéristique.

Le problème de l'intégration du système différentiel caractéristique n'est pas, en effet, un problème quelconque d'intégration d'un système complètement intégrable d'équations aux différentielles totales. Pour s'en rendre compte, imaginons qu'on ait trouvé une intégrale première y_1 et considérons dans l'espace la multiplicité $y_1 = C$, où C est une constante arbitraire.

Considérons alors, en un point arbitraire A de cette multiplicité, l'élément E_{r-1} : $dy_1 = 0$; l'élément caractéristique E_p issu de A est nécessairement contenu dans l'élément E_{r-1}; mais si l'on cherche les éléments linéaires intégraux de E_{r-1}, qui sont caractéristiques *par rapport aux seuls éléments de* E_{r-1}, on peut, dans certains cas, en trouver qui ne sont pas contenus dans E_p, de sorte qu'on obtient un élément caractéristique E_q contenant E_p $(q > p)$, mais qui n'est caractéristique qu'autant qu'on ne sort pas de l'élément E_{r-1}. Autrement dit, le système différentiel caractéristique, du système donné, où l'on ferait $y_1 = C$, $dy_1 = 0$, peut contenir plus d'une équation de moins que le système caractéristique primitif. On cherchera une intégrale première y_2 de ce nouveau système, et ainsi de suite; on arrivera à un certain nombre d'intégrales premières $y_1, y_2, \ldots, y_h$, de telle manière qu'en faisant $y_1 = C_1, \ldots, y_h = C_h$, le système différentiel obtenu ait toutes ses équations caractéristiques vérifiées.

Il est clair alors que les équations du système donné peuvent toutes se mettre sous la forme

$$\alpha_1 dy_1 + \ldots + \alpha_h dy_h = 0$$

(1) *Voir*, en particulier, von Weber, *loc. cit.*

et l'on conçoit que, par un choix convenable des s équations linéairement indépendantes qui définissent le système, ceux des coefficients α, qui sont indépendants entre eux et indépendants des y, définissent les intégrales différentes des y du système différentiel caractéristique.

C'est d'ailleurs ainsi que l'on procède pour une seule équation de Pfaff. Prenons, pour fixer les idées, une équation à quatre variables à coefficients quelconques. Si l'on représente un élément linéaire par un point d'un espace R_3 à trois dimensions, les éléments linéaires intégraux sont représentés par les points d'un certain plan (P) de cet espace, et les images de deux éléments linéaires intégraux associés sont tels que la droite qui les joint appartienne à un certain complexe linéaire. Or, dans l'espace ordinaire, les droites d'un complexe linéaire situées dans un plan (P) passent toutes par un point fixe A du plan. Le point A est donc l'image d'un élément linéaire caractéristique. Le système différentiel caractéristique admet donc trois intégrales premières indépendantes. On en cherchera une y_1, ce qui déterminera dans l'espace R_3 un plan (Q). Les éléments linéaires intégraux satisfaisant à $dy_1 = 0$ ont alors pour images, dans R_3, des points appartenant à la fois à (P) et à (Q), c'est-à-dire les points de la droite (D) d'intersection de ces deux plans. Mais, maintenant, *deux points quelconques de cette droite sont associés,* de sorte qu'on a un second système différentiel caractéristique formé d'une seule équation [l'équation de la droite (D) dans le plan (Q)]. Soit y_2 son intégrale première. Alors

$$dy_1 = dy_2 = 0$$

sont, si l'on veut, les équations de la droite (D); l'équation du plan (P), qui n'est autre chose que l'équation de Pfaff donnée, est alors de la forme

$$dy_2 - y_3\, dy_1 = 0,$$

et y_3 est la troisième intégrale première cherchée, car il est évident que le système caractéristique de l'équation mise sous sa nouvelle forme ne peut être que

$$dy_1 = dy_2 = dy_3 = 0.$$

Pour prendre un autre exemple, considérons le cas de deux équations à six variables. Le genre du système est, dans le cas général, égal à $2 = \frac{6}{2+1}$. On peut représenter un élément linéaire par un point dans un espace R_5 à cinq dimensions. Les images des éléments linéaires intégraux sont alors situées dans un espace R_3 à trois dimensions et, dans cet espace, les droites qui joignent deux points associés appartiennent à deux complexes linéaires. Nous avons vu, au § II, que trois cas pouvaient se présenter; prenons le dernier, celui où les droites du complexe sont les droites passant par un point fixe A de R_3 et, en outre, les droites situées dans un certain plan (P) passant par A. Il y a donc ici un élément linéaire caractéristique dont l'image est A.

Le système différentiel caractéristique admettra cinq intégrales premières indépendantes. On en cherchera d'abord une y_1; en remplaçant y_1 par C, on aura dans R_5 un espace R_4 qui coupera R_3 suivant le plan (Q); dans R_4, les images des éléments linéaires intégraux sont situées dans ce plan (Q), qui passe naturellement par A et, dans ce plan (Q), les droites joignant deux points associés sont les droites issues de A; il y a donc encore ici un seul élément linéaire caractéristique; le nouveau système caractéristique est formé de quatre équations qui définissent le point A dans R_4. Soit y_2 une intégrale première de ce nouveau système. Elle définit dans R_4 un espace R'_3 qui coupe (Q) suivant une droite (D) passant par A; mais alors tous les points de (D) sont associés entre eux. Le nouveau système caractéristique est donc formé des *deux* équations qui définissent (D) dans R'_3. Il n'y aura qu'à chercher deux intégrales premières indépendantes y_3 et y_4 de ce système.

On aura ainsi quatre intégrales à chercher, par des opérations respectivement d'ordre 5, 4, 2, 1.

En réalité, on peut encore simplifier cette intégration après la première opération et se borner à trois intégrales données par des opérations d'ordre 5, 3, 1. Mais, pour cela, il faut faire entrer en considération certaines équations covariantes, ce qui sort du cadre de ce Mémoire.

Il y a encore un cas où l'intégration se simplifie : c'est celui où l'intégrale première y_1 donne un espace R_4 contenant le plan (P), c'est-à-dire le cas *où les trois équations qui définissent* (P) *admettent une combinaison intégrable*. Dans ce cas, les images des éléments linéaires intégraux du nouveau système sont les points de (P) et *ces points sont tous associés entre eux;* le nouveau système caractéristique est formé par les *deux* équations qui définissent (P) dans R_4. En les intégrant, on aura deux intégrales premières y_2 et y_3, et les équations de (P) dans R_5 sont alors

$$dy_1 = dy_2 = dy_3 = 0.$$

L'espace R_2, lieu des images des éléments linéaires intégraux, passant par (P), les deux équations qui le définissent, c'est-à-dire les équations données, sont de la forme

$$dy_2 - y_4\, dy_1 = 0,$$
$$dy_3 - y_5\, dy_1 = 0;$$

y_4 et y_5 sont les deux intégrales premières autres que y_1, y_2, y_3. On a ici, par la même occasion, une *forme canonique* du système.

Les opérations à effectuer, dans ce cas particulier, sont d'ordre 3, 2, 1, car il suffit, en somme, d'intégrer les trois équations qui définissent le plan (P), ces trois équations se trouvant former un système complètement intégrable.