ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. W. LINDEBERG

Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = fu$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 127-142
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__127_0>

SUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION

$\Delta u = fu$,

PAR M. J.-W. LINDEBERG.

Étant données une région S du plan et une fonction f de x et y, on peut se proposer de trouver une intégrale U de l'équation

$$(a) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = fu,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

Elle est finie et continue dans S, le contour compris, et admet des dérivées partielles des deux premiers ordres finies et continues dans S;

La dérivée $\frac{dU}{dn}$, prise sur le contour s de S dans le sens de la normale intérieure, prend des valeurs données d'avance.

C'est ce problème dont nous allons maintenant nous occuper, mais nous ne le traiterons pas dans toute sa généralité; dans tout ce qui suit, la fonction f sera supposée positive et non nulle dans S et sur s. L'aire S sera, d'ailleurs, simplement connexe et satisfera aux conditions pour qu'on sache résoudre à son égard le problème de Dirichlet.

Comme la méthode dont nous ferons usage repose sur la possibilité d'intégrer l'équation

$$(b) \qquad \Delta u = fu + \omega,$$

où ω désigne une fonction de x et y, les valeurs de l'intégrale étant données sur s, nous commencerons par rappeler la méthode de M. Picard pour la résolution de ce problème, et nous passerons ensuite au principal objet de cette Note [1].

1. Soit μ une fonction de x et y, et désignons par V la fonction satisfaisant aux conditions [2]

$$\Delta V = \mu \text{ dans } S; \qquad V = 0 \text{ sur } s;$$

on sait que la fonction V est donnée par la formule

$$V(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_S \mu(x', y')\,\mathcal{G}(x, y; x', y')\,dx'\,dy',$$

où $\mathcal{G}(x, y; x', y')$ désigne la fonction de Green relative à l'aire S et au point x, y. Nous allons chercher une limite supérieure de $|V|$.

A cet effet, désignons par ω_s la plus grande corde de s, et faisons le changement de variables suivant :

$$x = \omega_s \xi; \qquad y = \omega_s \eta.$$

Le contour s se changera en un contour s', limitant une aire S égale à $\frac{S}{\omega_s^2}$, et V et μ seront transformés en deux fonctions V' et μ', telles que

$$\Delta V' = \omega_s^2 \mu' \text{ dans } S'; \qquad V' = 0 \text{ sur } s'.$$

D'ailleurs, la plus grande corde de s' sera égale à 1.

En désignant par r la distance du point ξ, η au point ξ', η', et par $\mathcal{G}(\xi, \eta; \xi', \eta')$ la fonction de Green relative à l'aire S' et au point ξ, η, on aura alors

$$\mathcal{G}(\xi, \eta; \xi', \eta') \leqq \log\frac{1}{r}.$$

---

(1) Les résultats qui seront exposés ont été indiqués dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (5 juin 1900), et nous les avons développés d'une manière complète dans une Thèse présentée récemment à la Faculté des Sciences de l'Université de Helsingfors.

(2) Quand nous dirons dans la suite qu'une fonction satisfait à une certaine équation différentielle, il sera toujours sous-entendu qu'elle est finie et continue dans S, le contour compris, et qu'elle admet des dérivées partielles des deux premiers ordres finies et continues dans S.

et, par suite,

$$\int\int_{S'} \mathcal{G}(\xi, \eta; \xi', \eta')\, d\xi'\, d\eta' < \int\int_{S'} \log\frac{1}{r}\, d\xi'\, d\eta'.$$

Mais, si $\mathfrak{S}$ désigne le cercle de rayon $\sqrt{\frac{S'}{\pi}}$ ayant le point ξ, η pour centre, il vient évidemment

$$\int\int_{S'} \log\frac{1}{r}\, d\xi'\, d\eta' \leqq \int\int_{\mathfrak{S}} \log\frac{1}{r}\, d\xi'\, d\eta' < 2\sqrt{\pi S'}.$$

On a donc

$$\int\int_{S'} \mathcal{G}(\xi, \eta; \xi', \eta')\, d\xi'\, d\eta' < 2\sqrt{\pi S'},$$

d'où

$$|V| < \Phi_s m \sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

m étant le maximum de $|\mu|$.

Cette inégalité va nous permettre d'établir en toute rigueur l'existence d'une intégrale de l'équation (b), prenant sur s des valeurs Φ_s données.

En effet, soit v la fonction harmonique qui prend sur s les valeurs Φ_s, et désignons par $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ les fonctions satisfaisant aux conditions

$$\begin{array}{lll}
\Delta w_1 = fv + \omega & \text{dans } S; & w_1 = 0 \text{ sur } s, \\
\Delta w_2 = fw_1 & \text{dans } S; & w_2 = 0 \text{ sur } s, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots, \\
\Delta w_n = fw_{n-1} & \text{dans } S; & w_n = 0 \text{ sur } s, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Si, g désignant le maximum de f, on a

$$S < \frac{\pi}{g^2\, \Phi_s^2},$$

la série

$$w = \Sigma w_n$$

sera uniformément convergente, et l'on aura

$$\Delta w = fw + fv + \omega \text{ dans } S; \qquad w = 0 \text{ sur } s.$$

Dans ce cas, la somme $w + v$ sera donc la fonction cherchée. Si, au contraire, $S \geqq \frac{\pi}{g^2 \omega_s^2}$, il sera toujours possible de construire à l'intérieur de S des courbes fermées $s_1, s_2, \ldots, s_n$, de telle sorte que la courbe s_i contienne dans son intérieur toutes les courbes d'indice inférieur, et que l'aire S_1 limitée par s_2, ainsi que les aires $S_2, S_3, \ldots, S_n$, limitées respectivement par s_1 et s_3, s_2 et s_4, $\ldots$, s_{n-1} et s, soient plus petites que $\frac{\pi}{g^2 \omega_s^2}$. Comme on pourra alors résoudre notre problème pour ces aires, la méthode alternée de M. Schwarz permettra de passer, pour la solution, successivement aux aires limitées par $s_3, s_4, \ldots$, et l'on arrivera ainsi à la solution du problème pour l'aire S.

L'existence de l'intégrale cherchée se trouve donc établie dans tous les cas.

Il faut remarquer, enfin, que la méthode suivie suppose que les fonctions f et ω, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, soient finies et continues dans S. Dans ce qui suit, nous supposerons ces conditions remplies même sur s, et, quant à l'aire S, ce sera un cercle ayant l'origine pour centre.

Cela posé, nous allons établir quelques théorèmes préliminaires relatifs aux intégrales des équations (a) et (b).

2. Soit U une intégrale de l'équation (b), et supposons, en désignant par $\mathcal{R}$ le rayon du cercle S et par ρ et φ les coordonnées polaires d'un point du plan, que la fonction périphérique $U(\mathcal{R}, \varphi) = \Phi$ admette par rapport à φ des dérivées des deux premiers ordres finies et continues; nous allons montrer que *les dérivées* $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial U}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}$ *restent finies et continues dans* S, *le contour compris* (abstraction faite du centre de S qui est évidemment un point singulier pour les dérivées de U par rapport à ρ).

Soit d'abord V la fonction harmonique qui prend sur s les valeurs Φ, et posons

$$\frac{\Phi(\varphi + \delta\varphi) - \Phi(\varphi)}{\delta\varphi} = \Phi_\delta, \qquad \frac{V(\rho, \varphi + \delta\varphi) - V(\rho, \varphi)}{\delta\varphi} = V_\delta,$$

$\delta\varphi$ désignant un accroissement fini de φ. La fonction V_δ sera évidemment harmonique et prendra sur s les valeurs Φ_δ. Si alors V′ est la fonction harmonique qui prend sur s les valeurs $\frac{d\Phi}{d\varphi}$, on pourra, après avoir fixé un nombre positif ε, choisir η assez petit pour que

$$\left|\frac{d\Phi}{d\varphi} - \Phi_\delta\right| < \varepsilon$$

et, par suite,

$$|V' - V_\delta| < \varepsilon$$

pour $\delta\varphi < \eta$. Mais, en faisant η suffisamment petit, on trouve en un point intérieur $\mathcal{A}$, outre ces inégalités

$$\left|V_\delta - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right| < \varepsilon,$$

d'où

$$\left|V' - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right| < 2\varepsilon.$$

Comme $\mathcal{A}$ est un point quelconque de S, et que ε peut être choisi aussi petit que l'on veut, il en résulte que l'on a identiquement

$$V' = \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

La dérivée $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ est donc finie et continue dans S, le contour compris. Par un raisonnement analogue, on établit qu'il en est de même de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$.

Pour voir comment se comportent les dérivées $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}$, écrivons l'équation à laquelle satisfait V sous la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

et intégrons; il vient

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}(\rho, \varphi) = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}(\rho_0, \varphi) + \frac{1}{\rho}\int_{\rho_0}^{\rho} \rho \mathcal{F}\, d\rho,$$

en posant $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \mathcal{F}$ et en désignant par ρ_0 une valeur de ρ inférieure à $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{F}$ reste finie et continue entre s et la circonférence $\rho = \rho_0$, les limites comprises, on voit que les dérivées en question tendent vers des limites finies et continues quand ρ tend vers $\mathcal{R}$, et qu'elles sont, par suite, finies et continues dans S, le contour compris. Ceci établi, la démonstration du théorème que nous avons en vue est immédiate. Posons, en effet,

$$U = V + W;$$

il vient

$$\Delta W = f W + f V + \omega \text{ dans } S, \qquad W = 0 \text{ sur } s$$

et, par suite,

$$W = -\frac{1}{2\pi}\int\int_S \{ f W + f V + \omega \} \mathcal{G}(x, y;\, x', y')\, dx'\, dy'.$$

De cette formule on conclut sans peine, en se reportant à un Mémoire récent de M. Picard ([1]), que les dérivées partielles des deux premiers ordres de W sont finies et continues dans S, le contour compris. Comme il en est de même, d'après ce que nous venons de voir, des dérivées des deux premiers ordres de V, excepté peut-être la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi}$, sur laquelle le calcul précédent ne nous apprend rien, notre théorème se trouve donc démontré.

Si, en particulier, f et ω admettent des dérivées partielles des trois premiers ordres finies et continues dans S, le contour compris, on peut étudier directement la fonction U par la méthode que nous venons d'employer pour V, et l'on trouve ainsi que la dérivée $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ est identique à la fonction U′ satisfaisant aux conditions

$$\Delta U' = f U' + U \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \text{ dans } S, \qquad U' = \frac{d\Phi}{d\varphi} \text{ sur } s.$$

Ce résultat nous sera utile plus loin.

3. Nous passerons maintenant à l'étude de la fonction U_1, définie par les conditions

$$\Delta U_1 = f U_1 \text{ dans } S, \qquad U_1 = 1 \text{ sur } s.$$

Comme U_1 est inférieur à 1 dans S, on voit d'abord que la dérivée $\frac{dU}{dn}$ ne peut devenir positive en aucun point de s. Je dis qu'elle ne peut

---

([1]) PICARD, *Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé* (*Journal de Mathématiques*; 1900).

même pas prendre la valeur zéro. En effet, si elle s'annulait en un point de s, on aurait en ce point

$$\frac{\partial U_1}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho^2} \leqq 0, \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad U_1 = 1,$$

ce qui est impossible, puisque, à cause du théorème du numéro précédent, la relation

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \varphi^2} = f U_1$$

doit encore avoir lieu sur s, et que la fonction f est supposée positive et non nulle dans S et sur s. Donc, *la dérivée* $\frac{dU_1}{dn}$ *est négative en tout point de* s. Comme elle est d'ailleurs continue, *son module admet un minimum* k *différent de zéro*.

Nous allons tirer immédiatement quelques conséquences importantes de ces propositions.

Soit U une intégrale de l'équation (a) admettant des dérivées $\frac{dU}{dn}$ finies et continues, et désignons par Φ le maximum des valeurs de U sur s. Les valeurs de U seront partout inférieures ou égales à celles de ΦU_1 et l'on aura, par suite, en tout point de s où U atteint la valeur Φ,

$$\frac{dU}{dn} \leqq \Phi \frac{dU_1}{dn}.$$

Comme $\frac{dU_1}{dn}$ est partout négatif, il en résulte que, si Φ est positif, $\frac{dU}{dn}$ sera négatif en un point du moins de s. De même, si le minimum de U sur s est négatif, il y aura nécessairement un point sur s où $\frac{dU}{dn}$ devient positif. Réciproquement, *si* $\frac{dU}{dn}$ *est positif ou nul,* U *ne devient jamais positif et, si* $\frac{dU}{dn}$ *est négatif ou nul,* U *ne devient jamais négatif.*

Cela étant, désignons par q le maximum de $\left|\frac{dU}{dn}\right|$; comme on a évidemment

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{q}{k}U_1 - U\right) \leqq 0, \qquad \frac{d}{dn}\left(\frac{q}{k}U_1 + U\right) \leqq 0,$$

le théorème que nous venons de démontrer nous donne

$$\frac{q}{k}U_1 - U \geqq 0, \qquad \frac{q}{k}U_1 + U \geqq 0,$$

d'où

$$|U| < \frac{q}{k},$$

puisque U_1 est égal à ou plus petit que 1. Donc, *le module de* U *est au plus égal au maximum de* $\left|\frac{dU}{dn}\right|$ *divisé par la constante* k.

En reprenant encore l'étude de la fonction U_1, choisissons deux constantes positives α et η telles qu'on ait

$$\alpha < k; \quad \frac{K\eta}{2} < k - \alpha,$$

K désignant le maximum de $\left|\frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho^2}\right|$.

La formule de Taylor nous donne

$$U_1(\mathcal{R} - \partial n, \varphi) - U_1(\mathcal{R}, \varphi) = -\frac{\partial U_1}{\partial \rho}(\mathcal{R}, \varphi)\,\partial n + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho^2}(\rho', \varphi)\frac{\partial n^2}{2},$$

∂n désignant la différence $\mathcal{R} - \rho$ et ρ' étant compris entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R} - \delta n$. Si $\partial n < \eta$, on a évidemment

$$\left| -\frac{\partial U_1}{\partial \rho}(\mathcal{R}, \varphi) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho^2}(\rho', \varphi)\frac{\partial n}{2}\right| > \alpha,$$

ce qui entraîne

$$|U_1(\mathcal{R} - \partial n, \varphi) - U_1(\mathcal{R}, \varphi)| > \alpha\,\partial n$$

et, par suite,

$$|U_1(\mathcal{R} - \partial n, \varphi)| < 1 - \alpha\,\partial n.$$

Soit maintenant φ_0 une valeur de φ pour laquelle $|U(\mathcal{R}, \varphi)|$ atteint son maximum $\mathfrak{M}$. Comme on a, quels que soient ρ et φ,

$$|U(\rho, \varphi)| \leqq \mathfrak{M}\,U_1$$

et, en particulier, pour $\rho = \mathcal{R}$, $\varphi = \varphi_0$,

$$|U(\rho, \varphi)| = \mathfrak{M}\,U_1,$$

les inégalités précédentes nous donnent

$$|\,U(\mathcal{R} - \partial n, \varphi_0) - U(\mathcal{R}, \varphi_0)\,| > \mathfrak{M}\,\alpha\,\partial n$$

et

$$|\,U(\mathcal{R} - \partial n, \varphi)\,| < \mathfrak{M}\,(1 - \alpha\,\partial n),$$

pour $\partial n < \eta$. Ces inégalités sont fondamentales pour la suite.

Avant de terminer ces préliminaires, il nous faut encore indiquer un théorème relatif aux intégrales de l'équation (b). Soit W une telle intégrale qui s'annule sur s, et désignons par m le maximum de $|\omega|$.

Si W_0 satisfait aux conditions

$$\Delta W_0 = f W_0 + 1 \text{ dans S}, \qquad W_0 = 0 \text{ sur } s,$$

on aura les deux inégalités

$$|\,W\,| \leqq m\,\omega$$

et

$$|\,W(\mathcal{R} - \partial n, \varphi)\,| \leqq m\,\beta\,\partial n,$$

ω désignant le maximum de $|\,W_0\,|$ et β le maximum de $\left|\frac{\partial W_0}{\partial \rho}\right|$. La démonstration de cette proposition ne présente aucune difficulté et nous n'y insisterons pas.

4. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème que nous avons en vue, toujours en supposant que l'aire S est un cercle. Soit Φ_s une fonction définie en tout point de s; il s'agit de trouver une fonction U satisfaisant aux conditions

$$\Delta U = f U \text{ dans S}, \qquad \frac{dU}{dn} = \Phi_s \text{ sur } s.$$

Dans ce qui suit nous ferons les hypothèses suivantes :

La fonction f sera continue, positive et non nulle dans S et sur s et admettra des dérivées partielles des trois premiers ordres, finies et continues dans la même aire, le contour compris;

La fonction Φ_s sera finie et continue et admettra des dérivées des deux premiers ordres par rapport à φ, également finies et continues.

Je dis d'abord que *le problème comporte au plus une solution*.

Si, en effet, on pouvait obtenir deux solutions distinctes U_1 et U_2, la différence $U_0 = U_1 - U_2$ satisferait aux conditions

$$\Delta U_0 = f U_0 \text{ dans } S, \qquad \frac{dU_0}{dn} = 0 \text{ sur } s$$

et, comme elle ne pourrait par suite (n° 3), devenir ni positive ni négative, elle serait identiquement nulle, et les fonctions U_1 et U_2 ne seraient pas distinctes. Ainsi, l'hypothèse de deux solutions distinctes nous conduisant à une contradiction, notre proposition est démontrée.

Cela étant, soit ∂n_0 une valeur de ∂n inférieure à η (n° 3) et posons

$$\partial n_i = \frac{\partial n_0}{2^i}.$$

A chaque valeur entière et positive de i nous ferons correspondre une suite de fonctions [1]

$$U_i^1, \quad U_i^2, \quad \ldots, \quad U_i^n, \quad \ldots$$

définies par les conditions

$$\begin{array}{ll}
\Delta U_i^1 = f U_i^1 \text{ dans } S, & U_i^1 = -\Phi_s \partial n_i \qquad \text{sur } s, \\
\Delta U_i^2 = f U_i^2 \text{ dans } S, & U_i^2 = U_i^1(\mathfrak{R} - \partial n_i, \varphi) \quad \text{sur } s, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Delta U_i^n = f U_i^n \text{ dans } S, & U_i^n = U_i^{n-1}(\mathfrak{R} - \partial n_i, \varphi) \text{ sur } s, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Posons

$$\max. |\Phi_s| = \mathfrak{L};$$

il vient (n° 3)

$$|U_i^1| \leq \mathfrak{L}\, \partial n_i, \qquad |U_i^2| < (1 - \alpha\, \partial n_i)\, \mathfrak{L}\, \partial n_i, \qquad \ldots,$$
$$|U_i^n| < (1 - \alpha\, \partial n_i)^{n-1}\, \mathfrak{L}\, \partial n_i, \qquad \ldots.$$

Donc la série

$$U_i = \sum_n U_i^n$$

converge uniformément et représente, par suite, une intégrale de

(1) M. Le Roy se sert d'approximations analogues pour la résolution du problème de Fourier (*Comptes rendus*, 18 mars 1895).

l'équation (a). On a d'ailleurs

$$U_i(\mathcal{R} - \delta n_i, \varphi) - U_i(\mathcal{R}, \varphi) = \Phi_s \delta n_i$$

et

$$|U_i| < \frac{\mathcal{L}}{\alpha}.$$

Nous allons voir que la série $\Sigma(U_{i+1} - U_i)$ représente la solution de notre problème; mais, auparavant, il nous faut étudier les dérivées des fonctions U_i.

5. L'égalité

$$U_i(\mathcal{R}, \varphi) = U_i(\mathcal{R} - \delta n_i, \varphi) - \Phi_s \delta n_i$$

nous montre d'abord que les dérivées $\frac{\partial U_i}{\partial \varphi}(\mathcal{R}, \varphi)$ et $\frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2}(\mathcal{R}, \varphi)$ sont finies et continues. En définissant les fonctions V'_i et W'_i par les conditions

$$\Delta V'_i = f V'_i \text{ dans S}, \qquad V'_i = \frac{\partial U_i}{\partial \varphi}(\mathcal{R}, \varphi) \text{ sur } s$$

et

$$\Delta W'_i = f W'_i + U_i \frac{\partial f}{\partial \varphi} \text{ dans S}, \qquad W'_i = 0 \text{ sur } s,$$

nous aurons donc (n° 2), à cause des hypothèses faites sur f,

$$\frac{\partial U_i}{\partial \varphi} = V'_i + W'_i.$$

Cela étant, posons

$$\max. \left| \frac{\partial U_i}{\partial \varphi}(\mathcal{R}, \varphi) \right| = \mathfrak{M}'_i, \qquad \max. \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right| = \mathfrak{F}',$$

et soit φ_0 une valeur de φ pour laquelle le module de $\frac{\partial U_i}{\partial \varphi}(\mathcal{R}, \varphi)$ atteint la valeur $\mathfrak{M}'_i$. Il vient (n^{os} 3 et 4)

$$|V'_i(\mathcal{R} - \delta n_i, \varphi_0) - V'_i(\mathcal{R}, \varphi_0)| > \mathfrak{M}'_i \alpha \delta n_i$$

et

$$|W'_i(\mathcal{R} - \delta n_i, \varphi_0)| < \frac{\mathcal{L} \mathfrak{F}' \beta}{\alpha} \delta n_i,$$

d'où

$$\left| \frac{\partial U_i}{\partial \varphi}(\mathcal{R} - \delta n_i, \varphi_0) - \frac{\partial U_i}{\partial \varphi}(\mathcal{R}, \varphi_0) \right| + \frac{\mathcal{L} \mathfrak{F}' \beta}{\alpha} \delta n_i > \mathfrak{M}'_i \alpha \delta n_i.$$

Mais

$$\frac{\partial U_i}{\partial \varphi}(\mathcal{R} - \delta n_i, \varphi) - \frac{\partial U_i}{\partial \varphi}(\mathcal{R}, \varphi) = \frac{d\Phi_s}{d\varphi}\delta n_i.$$

Si l'on désigne par $\mathcal{L}'$ le maximum de $\frac{d\Phi_s}{d\varphi}$, il vient donc

$$\mathcal{L}' + \frac{\mathcal{L}\mathfrak{N}'\beta}{\alpha} > \mathfrak{M}'_i\alpha$$

et, par suite,

$$\mathfrak{M}'_i < \frac{\mathcal{L}\mathfrak{N}'\beta}{\alpha^2} + \frac{\mathcal{L}'}{\alpha}.$$

Or, on a

$$|V'_i| \leqq \mathfrak{M}'_i$$

et (n° 3)

$$|W'_i| \leqq \frac{\Theta\mathcal{L}\mathfrak{N}}{\alpha}.$$

Le module de la dérivée $\frac{\partial U_i}{\partial \varphi}$ reste donc dans S inférieur à un nombre fixe, indépendant de i. Par un raisonnement analogue on démontre qu'il en est de même du module de la dérivée $\frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2}$.

Ceci démontré, nous allons voir que, si $0 < \rho_0 < \mathcal{R}$, et si $\mathfrak{S}$ désigne l'aire comprise entre s et la circonférence $\rho = \rho_0$, *le module de* $\frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho^2}$ *reste dans* $\mathfrak{S}$ *inférieur à un nombre fixe* $\mathcal{G}$, *indépendant de* i.

Posons, en effet,

$$f U_i - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2} = \mathcal{F}_i$$

et intégrons les équations auxquelles satisfont les U_i; il vient

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho}\int_{\rho_0}^{\rho} \mathcal{F}_i \rho\, d\rho + \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial U_i}{\partial \rho}(\rho_0, \varphi)$$

et

$$U_i(\mathcal{R}, \varphi) - U_i(\rho_0, \varphi) = \int_{\rho_0}^{\mathcal{R}} \frac{d\rho}{\rho}\int_{\rho_0}^{\rho} \mathcal{F}_i \rho\, d\rho + \frac{\partial U_i}{\partial \rho}(\rho_0, \varphi)\rho_0 \log\frac{\mathcal{R}}{\rho_0}.$$

En observant que $\mathcal{F}_i$ reste dans $\mathfrak{S}$ inférieur à un nombre fixe, on en conclut sans peine qu'il en est de même de $\frac{\partial U_i}{\partial \rho}$, et, comme

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_i}{\partial \rho} = \mathcal{F}_i,$$

on voit que la proposition énoncée est vraie.

6. Nous pouvons maintenant montrer que la série

$$U = \sum (U_{i+1} - U_i)$$

satisfait aux conditions de notre problème. En effet, la formule de Taylor nous donne

$$U_i(\mathcal{R} - \partial n_i, \varphi) - U_i(\mathcal{R}, \varphi) = -\frac{\partial U_i}{\partial \rho}(\mathcal{R}, \varphi)\partial n_i + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho^2}(\rho_i', \varphi)\frac{\partial n_i^2}{2},$$

ρ_i' étant compris entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R} - \partial n_i$.

Comme

$$U_i(\mathcal{R} - \partial n_i, \varphi) - U_i(\mathcal{R}, \varphi) = \Phi_s \partial n_i,$$

on en conclut que

$$\left| \frac{dU_i}{dn} - \Phi_s \right| < \frac{\mathcal{G}\partial n_0}{2^{i+1}},$$

car on peut toujours supposer ∂n_0 assez petit pour que $\frac{\partial n_0}{2^i}$ soit inférieur à $\mathcal{R} - \rho_0$ pour toute valeur de i.

Il s'ensuit

$$\left| \frac{d}{dn}(U_{i+1} - U_i) \right| < \frac{\mathcal{G}\partial n_0}{2^i}$$

et, par suite (n° 3),

$$| U_{i+1} - U_i | < \frac{\mathcal{G}}{k}\frac{\partial n_0}{2^i}.$$

La série $\sum (U_{i+1} - U_i)$ est donc uniformément convergente et représente, par conséquent, une intégrale de l'équation (a).

Posons maintenant

$$U_{i+1} - U_i = V_i, \qquad \left| \frac{\partial V_i}{\partial \varphi} \right| = p_i, \qquad \frac{\mathcal{G}}{k}\frac{\partial n_0}{2^{i-2}} = \mathcal{K}_i$$

et désignons par Φ une limite supérieure du module de la dérivée $\frac{\partial^2 V_i}{\partial\varphi^2}$. On a évidemment

$$p_i(\rho, \varphi + \partial\varphi) > p_i(\rho, \varphi) - \Phi\partial\varphi$$

et, par suite,

$$|V_i(\rho, \varphi + \partial\varphi) - V_i(\rho, \varphi)| > p_i(\rho, \varphi)\,\partial\varphi - \frac{\Phi}{2}\partial\varphi^2;$$

d'où, en posant $\partial\varphi = \frac{p_i}{\Phi}$,

$$p_i < \sqrt{\Phi\mathcal{H}_i}.$$

Cette inégalité nous montre que la série $\sum \frac{\partial}{\partial\varphi}(U_{i+1} - U_i)$ est uniformément convergente dans S, le contour compris. Par un raisonnement analogue, on établit que la série $\sum \frac{\partial}{\partial\rho}(U_{i+1} - U_i)$ est uniformément convergente dans $\mathfrak{S}$, les limites comprises, et l'on a, par suite, sur la circonférence s,

$$\frac{dU}{dn} = \sum \frac{d}{dn}(U_{i+1} - U_i).$$

Mais la série $\sum \frac{d}{dn}(U_{i+1} - U_i)$ a pour somme Φ_s. Donc, U satisfait aux conditions

$$\Delta U = f U \quad \text{dans S}, \qquad \frac{dU}{dn} = \Phi_s \quad \text{sur } s$$

et représente, par conséquent, l'intégrale cherchée. A cause de la convergence uniforme des séries $\sum \frac{\partial}{\partial\varphi}(U_{i+1} - U_i)$ et $\sum \frac{\partial}{\partial\rho}(U_{i+1} - U_i)$ dans $\mathfrak{S}$, les limites comprises, on est, d'ailleurs, assuré de la continuité des dérivées partielles du premier ordre de U par rapport à x et y dans S, le contour compris.

En observant que les résultats précédents s'étendent au moyen d'une représentation conforme à toute aire limitée par un contour régulièrement analytique, nous pouvons donc finalement énoncer le théorème suivant :

Soit S *une aire simplement connexe, limitée par un contour régulière-*

ment analytique s, et désignons par Φ_s *et* f *deux fonctions assujetties aux conditions suivantes :*

La fonction Φ_s, *définie sur s, est finie et continue, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres par rapport à l'arc s;*

La fonction f *est continue, positive et non nulle dans* S *et sur s, et possède des dérivées partielles des trois premiers ordres finies et continues dans* S, *le contour compris.*

Cela posé, on peut trouver une fonction U, *et une seule, de x et y, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans* S, *le contour compris, admettant des dérivées partielles du second ordre finies et continues dans* S, *et satisfaisant aux conditions*

$$\Delta U = fU \quad \text{dans } S, \qquad \frac{dU}{dn} = \Phi_s \quad \text{sur } s.$$

7. Multiplions maintenant la fonction f par une constante positive α et montrons, pour terminer, que si $\int_s \Phi_s\, ds \neq 0$, *l'intégrale* U *tend uniformément vers l'infini quand* α *tend vers zéro.*

Comme on a

$$\int_s \frac{dU}{dn}\, ds + \int\int_S \alpha f U\, dx\, dy = 0,$$

il est d'abord évident que les valeurs absolues de U ne restent pas partout inférieures à un nombre fixe et, comme c'est sur s que ces valeurs atteignent leur maximum, il en résulte que le maximum $\mathfrak{P}$ de

$$|U(\mathfrak{R}, \varphi)|$$

tend vers l'infini quand α tend vers zéro. Cela étant, soit V la fonction harmonique qui prend sur s les mêmes valeurs que U, et posons

$$U = V + W.$$

Si λ désigne une constante convenable, on a, d'après un théorème de M. Picard (*loc. cit.*),

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right| < \alpha\lambda\mathfrak{P}.$$

D'autre part, on peut trouver une constante positive μ telle que, si

$\mathfrak{M}$ désigne la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de V sur s, on ait

$$\left|\frac{dV}{dn}\right| > \mu\mathfrak{M}$$

aux points où V atteint ses valeurs maxima et minima. Comme

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dW}{dn} = \Phi_s,$$

il vient, par conséquent, en désignant par $\mathfrak{L}$ le maximum de Φ_s,

$$\mu\mathfrak{M} < \alpha\lambda\mathfrak{P} + \mathfrak{L},$$

ce qui montre que le rapport $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}$ décroît au-dessous de toute limite quand α tend vers zéro. On en conclut sans peine que le module de U tend uniformément vers l'infini, et le théorème énoncé se trouve ainsi établi.