ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NIELS NIELSEN

Recherches sur les séries de fonctions cylindriques dues à C. Neumann et W. Kapteyn

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 39-75
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__39_0>

RECHERCHES

SUR LES

SÉRIES DE FONCTIONS CYLINDRIQUES

DUES A MM. C. NEUMANN ET W. KAPTEYN,

PAR M. NIELS NIELSEN.

Il est bien connu que la résolution célèbre, due à Bessel ([1]), de l'équation de Kepler donnera la formule remarquable ([2])

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{J}^n(nx),$$

valable pour les valeurs *réelles* de x dont le module est plus petit que 1. Or, cette équation intéressante qui présente le premier exemple d'un développement en série de fonctions cylindriques différente des séries de Fourier ([3]), de M. Schlömilch ([4]) et de M. C. Neumann ([5]) semble être restée inaperçue jusqu'à la recherche profonde de M. W. Kapteyn à Utrecht.

Dans son intéressant Mémoire ([6]), *Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel,* M. Kapteyn détermine le champ de convergence du

---

([1]) *Abhandlungen aus der Berliner Academie aus dem Jahre* 1824 (publié en 1826). *Voir* aussi les deux nouveaux Livres sur les fonctions cylindriques : GRAY et MATTHEWS, *Treatise on Bessel functions,* Londres, 1895. — GRAF et GUBLER, *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen,* Berne, 1898-1900.

([2]) TODHUNTER, *Treatise,* p. 342, Londres, 1875.

([3]) *Théorie analytique de la chaleur,* chap. VI. Paris, 1826.

([4]) *Theorie der Bessel'schen Functionen,* Leipzig, 1867; *Leipziger-Berichte,* 1869, ou bien *Mathematische Annalen,* t. III, 1871.

([5]) *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* t. II, 1857.

([6]) *Annales de l'École Normale,* 3e série, t. X, 1893.

développement (α) pour les valeurs imaginaires de x et en outre il démontre qu'une fonction holomorphe aux environs de zéro peut être développée en série de la forme

$$(\beta) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \mathfrak{J}^n(nx),$$

série qui rappelle formellement en quelque sorte et aux séries de M. Schlömilch et aux séries de première espèce de M. Neumann sans être identique à aucune de ces deux catégories de développements selon les fonctions cylindriques.

La première partie du Mémoire que voici est destinée à généraliser le théorème susdit de M. Kapteyn et à déterminer d'une manière plus détaillée le champ de convergence absolue de la série ainsi obtenue :

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \mathfrak{J}^{\nu+n}[(\nu+n)x],$$

série kapteynienne de première espèce, où ν désigne une quantité finie qui ne doit pas être égale à un négatif entier, mais étant du reste complètement arbitraire. En outre, j'introduis une série de la forme

$$(\delta) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \mathfrak{J}^{\mu+n}[(\mu+\nu+2n)x]\mathfrak{J}^{\nu+n}[(\mu+\nu+2n)x],$$

série qui semble avoir été inconnue jusqu'ici et pour laquelle je propose la désignation *série kapteynienne de deuxième espèce*.

Les démonstrations que j'ai données dans la théorie des séries (γ), (δ) sont entièrement différentes de celles que M. Kapteyn a appliquées. Or notre méthode nous permet de déduire facilement des relations remarquables entre les développements d'une fonction en séries *kapteyniennes* et en séries *neumanniennes* de première et de deuxième espèce, savoir les séries de la forme

$$(\varepsilon) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \mathfrak{J}^{\nu+n}(x),$$

$$(\zeta) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \mathfrak{J}^{\mu+n}(x)\mathfrak{J}^{\nu+n}(x).$$

Ces relations nouvelles nous fourniront un moyen très simple pour déduire les développements en séries *kapteyniennes* d'un grand nombre de fonctions pour lesquelles les séries *neumanniennes* sont connues.

La seconde partie de ce Mémoire est destinée à montrer comment il sera possible de déduire immédiatement les séries (δ) et (ζ) pour lesquelles $\mu + \nu = 0$ ou $\mu + \nu = 1$, à l'aide des séries obtenues de (γ) et de (ε) en y posant $\nu = 0$.

Dans son Mémoire susdit M. Kapteyn déduit, par une méthode fort ingénieuse, le champ de convergence d'une série *neumannienne* de seconde espèce à l'aide de celui d'une série de première espèce. Le point essentiel de la démonstration de M. Kapteyn est une remarquable formule intégrale qui unit les coefficients des développements de la fonction $\frac{1}{y-x}$ en séries des deux catégories indiquées. Or, j'ai possédé depuis quelque temps la formule inverse de celle de M. Kapteyn, et l'identité obtenue en combinant ces deux formules m'a suggéré l'idée fondamentale de la démonstration. Du reste, une telle méthode nous conduira à quelques autres formules remarquables contenant les fonctions cylindriques et qui sont nouvelles, je le crois.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Séries kapteyniennes de première espèce.

1. Supposons tout d'abord qu'il soit possible de développer la puissance $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ en série de la forme,

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha^\nu_{2n} J^{\nu+2n}[(\nu+2n)x],$$

et supposons en outre qu'il soit possible de transformer une telle série sous forme d'une série de puissances dont le cercle de convergence a son centre à l'origine; nous aurons, en substituant pour chacune des fonctions cylindriques la série bien connue, savoir

$$\mathfrak{I}^{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)},$$

ces équations pour déterminer les coefficients α_n^{ν}

$$(\beta) \qquad 1 = \frac{\nu^{\nu}}{0!\,\Gamma(\nu+1)}\,\alpha_0^{\nu},$$

et généralement, n étant un positif entier,

$$(\beta') \qquad 0 = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p(\nu+2p)^{\nu+2n}}{(n-p)!\,\Gamma(\nu+n+p+1)}\,\alpha_{2p}^{\nu},$$

équations qui nous donneront pour les premiers de nos coefficients ces expressions

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0^{\nu} &= \frac{\nu^2}{0!}\,\frac{\Gamma(\nu)}{\nu^{\nu+1}}, \\ \alpha_2^{\nu} &= \frac{\nu^2}{1!}\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{(\nu+2)^{\nu+1}}, \\ \alpha_4^{\nu} &= \frac{\nu^2}{2!}\,\frac{\Gamma(\nu+2)}{(\nu+4)^{\nu+1}}, \end{aligned} \right.$$

résultats qui nous conduiront à poser généralement

$$(1a) \qquad \alpha_{2n}^{\nu} = \frac{\nu^2}{n!}\,\frac{\Gamma(\nu+n)}{(\nu+2n)^{\nu+1}}.$$

Pour démontrer rigoureusement cette formule générale, appliquons la conclusion ordinaire de $n-1$ à n, de sorte qu'il s'agit de démontrer la formule

$$(\gamma) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p\Gamma(\nu+p)(\nu+2p)^{2n-1}}{\Gamma(\nu+n+p+1)}\binom{n}{p} = 0,$$

pourvu que l'on sache que les formules analogues mais contenant des nombres plus petits que n sont vraies. Pour effectuer une telle démonstration désignons par X^n le premier membre de (γ), nous aurons après un calcul direct

$$4nX_{n-1}^{n-1} = \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\Gamma(\nu+p)\,4(n-p)(\nu+n+p)}{\Gamma(\nu+n+p+1)} (\nu+2p)^{2n-3} = 0,$$

d'où, en ajoutant cette équation à (γ),

$$X_n^n = (\nu+2n)^2 X_n^{n-1},$$

ou bien, après une application répétée de cette même réduction,

$$X_n^n = (\nu+2n)^{2n-2} X_n^1.$$

Or, nous avons

$$X_n^1 = \nu \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\Gamma(\nu+p)}{\Gamma(\nu+n+p+1)} - 2n \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{\Gamma(\nu+p+1)}{\Gamma(\nu+n+p+2)},$$

ce qui montre, en vertu des éléments du calcul des différences finies, que X_n^1 doit être égal à zéro et, par conséquent, qu'il en sera de même pour X_n^n, et voilà la démonstration de la formule générale (1_a).

Il est évident que notre démonstration des formules (1) suppose nécessairement que ν ne soit pas égal à 0 ou à un négatif entier. Dans le premier cas, nous obtiendrons

$$\alpha_0^0 = 1, \qquad \alpha_{2n}^0 = 0, \qquad n > 0,$$

tandis que dans le second cas, les équations (β), (β') ne déterminent pas les coefficients α_{2n}^ν.

2. Démontrons maintenant que la série infinie

$$(\alpha) \qquad \frac{\nu^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!\,(\nu+2n)^{\nu+1}} J^{\nu+2n}[(\nu+2n)x]$$

est absolument convergente pour les valeurs de x dont les valeurs absolues ne surpassent pas une certaine limite. Appliquons à cet égard l'inégalité

$$|\mathfrak{J}^{\omega}(\xi)| < \frac{\left|\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\omega}\right|}{|\Gamma(\omega+1)|} e^{\left|\frac{\xi^2}{4\omega}\right|}$$

qui est une conséquence immédiate de la définition de $\mathfrak{J}^{\omega}(\xi)$, pourvu que la partie réelle de ω, $\Re(\omega)$ soit suffisamment grande, nous aurons pour le terme général u_n, figurant sous le signe Σ de (α), cette autre inégalité

$$|u_n| < \frac{|\nu+2n|^{2n-1} e^{\left|\frac{\nu x^2}{4}\right|}}{n!\,|\nu+n|\,|\nu+n+1|\ldots|\nu+2n|} \left(\left|\frac{x}{2}\right| e^{\left|\frac{x^2}{4}\right|}\right)^{2n},$$

de sorte que la formule de Stirling

$$S! = \sqrt{2\pi}(1+\varepsilon_S)e^{-S}S^{S+\frac{1}{2}},$$

où S désigne un positif entier très grand destiné à croître au delà de toute limite, tandis que ε_S tend vers zéro avec $\frac{1}{S}$, donnera finalement

$$|u_n| < \frac{k}{\sqrt{n^3}} \left(\left|\frac{x}{2}\right| e^{1+\left|\frac{x^2}{4}\right|}\right)^{2n},$$

k désignant une quantité finie; c'est-à-dire que la série proposée est convergente comme une série de puissances, pourvu que $|x| < \Omega(1)$, où $\Omega(1)$ désigne la racine positive de cette équation transcendante

$$\frac{x}{2} e^{1+\frac{x^2}{4}} = 1, \tag{2}$$

ou bien, d'après M. Kapteyn [1],

$$\Omega(1) = 0{,}659\ldots.$$

Comme corollaire du résultat précédent, nous avons que la somme

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{|\Gamma(\nu+n)|\left|\left(\frac{\nu+2n}{2}x\right)^{\nu+2n+2p}\right|}{n!\,p!\,|(\nu+2n)^{\nu+1}|\,|\Gamma(\nu+2n+p)|}$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 120.

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, pourvu que $|x| < \Omega(1)$, résultat qui nous sera très utile bientôt.

Cela posé, écrivons notre série (α) sous forme d'une série à double entrée dont les lignes horizontales sont formées par les séries de puissances obtenues pour chacune des fonctions cylindriques ordonnées de manière que les termes contenant la même puissance de x forment les séries verticales de la série à double entrée. Or nous venons de démontrer que les séries formées des lignes horizontales sont toutes absolument convergentes, pourvu que $|x| < \Omega(1)$. Quant aux séries verticales, elles possèdent, en vertu de (γ) au n° 1, la somme zéro, à l'exception de la première dont la somme est 1, ce qui montre que nous avons démontré cette proposition fondamentale :

En désignant par ν une quantité finie qui ne doit pas être égale à un négatif entier, mais étant du reste complètement arbitraire, nous aurons ce développement en série kapteynienne de première espèce :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \nu^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!(\nu+2n)^{\nu+1}} \mathcal{J}^{\nu+2n}[(\nu+2n)x], \tag{3}$$

valable pourvu que $|x| < \Omega(1)$.

Dans le cas $\nu = 0$ la formule (3) se réduira à l'identité $1 = 1$.

Généralement, un développement de la forme (3) est toujours possible et ne peut être effectué que d'une seule façon, pourvu que ν ne soit pas égal à un négatif entier.

3. Supposons particulièrement ν égal à un positif entier et tenons compte des deux formules

$$(\alpha) \qquad \frac{2^{2p-1}\Gamma(n+2p)}{\Gamma(n+1)} = (2n+2p)[(2n+2p)^2-2^2]\ldots[(2n+2p)^2-(2p-2)^2],$$

$$(\alpha') \qquad \frac{2^{2p}\Gamma(n+2p+1)}{\Gamma(n+1)} = [(2n+2p+1)^2-1^2][(2n+2p+1)^2-3^2]\ldots[(2n+2p+1)^2-(2p-1)^2],$$

notre développement général (3) montrera, par la conclusion ordinaire de p à $p+1$, que la somme de la série infinie

$$(\beta) \qquad S_p^{\varepsilon} = \sum^{n=\infty} \frac{\mathcal{J}^{2n+\varepsilon}[(2n+\varepsilon)x]}{(2n+\varepsilon)^{2p}},$$

où p désigne un positif entier, tandis que ε est égal à 1 ou à 2, doit être un polynome entier de x. En effet, appliquant les formules (α), on aura la série infinie obtenue de (3) représentée sous forme d'une fonction linéaire des séries obtenues de

$$S_p^\varepsilon, \quad S_{p-1}^\varepsilon, \quad \ldots, \quad S_1^\varepsilon$$

en y supprimant les premiers termes. Or les formules (α) montrent que l'adjonction de ces termes supprimés n'a aucune influence sur la fonction linéaire susdite. Après avoir trouvé la forme de la fonction représentée par la somme S_p^ε, on déterminera aisément les coefficients inconnus du polynome en ordonnant selon des puissances ascendantes de x le second membre de (β), ce qui donnera la formule cherchée

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{J^{2n+\varepsilon}[(2n+\varepsilon)x]}{(2n+\varepsilon)^{2p}} = \sum_{r=0}^{r=p-1} b_{2r+\varepsilon}^{2p+\varepsilon}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\varepsilon},$$

où l'on a posé

$$(5) \qquad b_{2r+\varepsilon}^{2p+\varepsilon} = \frac{1}{(2r+\varepsilon)!}\sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^s \binom{2r+\varepsilon}{s}}{(2r-2s+\varepsilon)^{2p-2r+\varepsilon}}, \qquad p > r \geqq 0,$$

de sorte que les nombres b pour lesquels $r \geqq p$ s'évanouissent.

La formule (4) est analogue aux formules démontrées pour les séries *neumaniennes* de première espèce par M. Schlömilch (¹) et à celles que j'ai déduites pour les séries *neumaniennes* de seconde espèce (²). Du reste, la diversité essentielle entre la série *kapteynienne* (4) et les séries *neumaniennes* correspondantes, savoir que l'exposant de la puissance de l'indice multipliant la fonction cylindrique doit être négatif ici, saute aux yeux. Les séries *kapteyniennes* pour lesquelles cet exposant n'est pas négatif ne présentent jamais un polynome entier de x, comme la formule (α) dans l'Introduction le montre clairement.

4. Regardons maintenant la série de puissances

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{F}(x) = a_0 + a_1\left(\frac{x}{2}\right) + a_2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{x}{2}\right)^n + \ldots$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 141.

(²) *Mathematische Annalen*, t. LII, p. 584; 1899.

dont le cercle de convergence a son rayon égal à ρ. Exprimons ensuite chaque terme de second membre de (α) à l'aide des formules obtenues de (3) en y posant $\nu+1$, $\nu+2$, ... au lieu de ν, et écrivons le résultat sous forme d'une série à double entrée, dont les lignes horizontales sont formées par la série obtenue pour une puissance de x, ordonnées de manière que les termes de ces lignes horizontales contenant la même fonction cylindrique forment les lignes verticales de notre série à double entrée.

Cela posé, il est évident que les séries simples formées des lignes horizontales sont toutes absolument convergentes, pourvu que l'on ait à la fois

$$|x| < \Omega(1), \quad |x| < \rho,$$

tandis que la somme d'une série verticale sera

$$(\beta) \qquad S_n = \frac{\mathfrak{J}^{\nu+n}[(\nu+n)x]}{(\nu+n)^{\nu+1}} \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(\nu+n-2p)^2\,\Gamma(\nu+n-2p)}{p!\,(\nu+2n)^{n-2p}}\, a_{n-2p},$$

série pour laquelle il s'agit de démontrer la convergence absolue. Pour cela, il suffit de regarder n pair, le cas n impair se traitant, en effet, de la même manière. Posons

$$S_{2n} = \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!\,(\nu+2n)^{\nu+1}}\, \mathfrak{J}^{\nu+2n}[(\nu+2n)x] \sum_{p=0}^{p=n} (\nu+2p)^2\, u_{2p}\, a_{2p},$$

nous aurons

$$u_{2p} = \frac{(\nu+n)(\nu+n+1)\ldots(\nu+n+p-1)\,n(n-1)\ldots(n-p+1)}{(\nu+2n)^{2p}}.$$

Posons encore

$$v_p = \frac{u_{p+2}}{u_{2p}} = \frac{(\nu+n+p)(n-p)}{(\nu+2n)^2},$$

nous aurons, pour les valeurs très grandes mais finies de n, $|v_p|$ égal à $\frac{1}{4}$ à peu près; en outre, je dis que nous aurons, pour les valeurs finies mais suffisamment grandes de p, cette inégalité

$$|v_p| > |v_{p+1}|,$$

qui se démontrera aisément à l'aide de cette autre inégalité

$$(\gamma)\qquad \left|1-\frac{1}{\nu+n+p+1}\right|>1-\frac{1}{n-p},$$

évidente, pourvu que p soit suffisamment grand, car on aura toujours

$$\Re\left(\frac{1}{\nu+n+p+1}\right)<\frac{1}{n-p},$$

de sorte que la partie réelle du premier membre de (γ) est plus grande que celle du second membre.

Désignons par A le plus grand des modules $\left|\frac{a_{2p}}{2^{2p}}\right|$, nous verrons, en vertu des formules appliquées au n° 2, que

$$|S_{2n}|<n\mathrm{A}|\nu+2n|^2\left(\left|\frac{x}{2}\right|e^{1+\left|\frac{x^2}{4}\right|}\right)^{2n},$$

ce qui montre que la série verticale S_n est absolument convergente, pourvu que $|x|$ soit plus petit que $\Omega(1)$ et $\Omega(\rho)$, $\Omega(\rho)$ désignant la racine positive de cette équation transcendante

$$\frac{\alpha}{2}e^{1+\frac{\alpha^2}{4}}=\rho,$$

et nous avons démontré ce théorème général :

Une série de puissances

$$\mathfrak{F}(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}a_n\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

dont le rayon de convergence est égal à ρ, peut être développée en série kapteynienne de première espèce sous cette forme

$$(6)\qquad \mathfrak{F}(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{b_n^{\nu}}{(\nu+n)^{\nu+1}}\,\mathfrak{J}^{\nu+n}[(\nu+n)x],$$

où l'on a posé

$$(7)\qquad b_n^{\nu}=\sum_{p=0}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(\nu+n-2p)^2\Gamma(\nu+n-p)}{p!\,(\nu+n)^{n-2p}}\,a_{n-2p}.$$

Le développement susdit est absolument convergent, pourvu que $|x|$

soit plus petit que les deux nombres positifs $\Omega(1)$ et $\Omega(\rho)$; ν désigne une quantité finie non égale à un négatif entier. Dans le cas $\nu = 0$ le premier terme de (6) *se réduira à a_0. Le développement* (6) *est toujours possible et ne peut être effectué que d'une seule façon.*

M. Kapteyn a démontré son théorème dans le cas particulier $\nu = 0$, cependant il ne regarde que les séries de puissances dont le rayon de convergence est égal à l'unité au moins.

Remarquons qu'une série *neumannienne* (de première ou de seconde espèce) est convergente, absolument ou non, où la série de puissances qu'elle représente l'est, et *vice versa*. La démonstration rigoureuse de cette proposition n'est pas encore publiée, d'après ce que je sais; or elle peut être effectuée sans peine. Au contraire, le champ de convergence absolue d'une série *kapteynienne* semble être généralement différent du cercle de convergence de la série de puissances qu'elle représente. En outre, il peut arriver que la série susdite soit convergente, non absolument, à l'extérieur du cercle que nous venons de déterminer.

Regardons, par exemple, la série

$$\frac{1}{1-x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{I}^n(nx),$$

mentionnée dans l'Introduction, et dont M. Kapteyn [1] a déterminé le champ de convergence qui ne coïncide pas avec le cercle de rayon $\Omega(1) = 0{,}659\ldots$.

Or, un approfondissement complet de cette question semble offrir des difficultés assez considérables, qui nous conduiraient en tous cas beaucoup trop loin ici; je reviendrai peut-être à ce sujet dans une autre occasion.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 103.

II. — Séries kapteyniennes de seconde espèce.

5. Quant aux séries *kapteyniennes* de seconde espèce, décidons tout d'abord ce que nous avons à entendre par une telle série. Appliquant la règle de Cauchy pour la multiplication de deux séries infinies, on verra sur-le-champ que le produit $\mathfrak{J}^{\mu}(\alpha x)\mathfrak{J}^{\nu}(\beta x)$ peut être écrit sous forme d'une série de puissances multipliée par $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}$. Or les coefficients de cette série ne peuvent être réduits à des quantités monomes que dans le cas où $\alpha=\beta$, ce qui donnera, en effet,

$$(\alpha)\qquad \mathfrak{J}^{\mu}(\alpha x)\mathfrak{J}^{\nu}(\alpha x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\binom{\mu+\nu+2n}{n}}{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{\mu+\nu+2n},$$

formule que M. Graf (¹) attribue à M. Schönholzer (²) et cela à juste titre, d'après ce que je sais.

Cela posé, la formule (α) et les résultats obtenus dans la seconde Partie de ce Mémoire nous conduiront à entendre par série *kapteynienne* de seconde espèce une série de la forme

$$(\beta)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha_n\mathfrak{J}^{\mu+n}[(\mu+\nu+2n)x]\,\mathfrak{J}^{\nu+n}[(\mu+\nu+2n)x].$$

Pour établir profondément une série de la forme (β) nous avons à traiter, par la méthode expliquée au n° 1, ce développement hypothétique

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha_n\mathfrak{J}^{\mu+n}[(\mu+\nu+2n)x]\,\mathfrak{J}^{\nu+n}[(\mu+\nu+2n)x],$$

ce qui donnera, pour la détermination des coefficients α_n, ce système d'équations linéaires

$$1=\alpha_0\frac{(\mu+\nu)^{\mu+\nu}}{\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1+\nu)},$$

(¹) GRAF et GUBLER, *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen*, fasc. II, p. 85; Berne, 1900.

(²) *Ueber die Auswertung bestimmter Integrale mit Hülfe von Veränderungen des Integrationsweges* (Programm der Kantonsschule), p. 13; Berne, 1877.

et, généralement, en supprimant les diviseurs communs $\Gamma(\mu+n+1)$, $\Gamma(\nu+n+1)$,

$$(\gamma)\qquad 0=\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{\mu+\nu+2n}{p}(\mu+\nu+2n-2p)^{\mu+\nu+2n}\alpha_{n-p}.$$

Or la résolution des premières de ces équations nous conduira à poser généralement

$$(\delta)\qquad \alpha_n=\frac{(\mu+\nu)\Gamma(1+\mu)\Gamma(1+\nu)}{n!\,\Gamma(\mu+\nu)}\,\frac{\Gamma(\mu+\nu+n)}{(\mu+\nu+2n)^{\mu+\nu+1}};$$

pour effectuer la conclusion de n à $n+1$, il faut, en vertu de (δ), démontrer cette formule

$$(\varepsilon)\qquad \sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{\mu+\nu+n-p-1}{n-p}\binom{\mu+\nu+2n}{p}(\mu+\nu+2n-2p)^{2n-1}=0.$$

Introduisons maintenant, au lieu des deux coefficients du binome, les fonctions Γ correspondantes, nous verrons sur-le-champ que *la formule* (ε) *n'est autre chose que* (δ) *au n° 1, démontrée pour les séries kapteyniennes de première espèce,* résultat qui est bien remarquable, ce me semble.

Suivant encore pas à pas la marche indiquée au n° 2, on verra que notre développement ainsi obtenu est absolument convergent, pourvu que $|x|<\frac{1}{2}\Omega(1)$, c'est-à-dire que nous avons démontré cette autre proposition :

En supposant qu'aucune des quantités $\mu+\nu$, μ, ν *ne soit égale à un négatif entier, nous aurons ce développement en série kapteynienne de seconde espèce*

$$(8)\qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}=(\mu+\nu)\Gamma(1+\mu)\Gamma(1+\nu)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\binom{\mu+\nu+n-1}{n}}{(\mu+\nu+2n)^{\mu+\nu+1}}\,\mathfrak{J}^{\mu+n}[(\mu+\nu+2n)x]\,\mathfrak{J}^{\nu+n}[(\mu+\nu+2n)x],$$

où la série au second membre est absolument convergente, pourvu que $|x|<\frac{1}{2}\Omega(1)$. *Dans le cas* $\mu+\nu=0$, *la formule se réduira à l'identité* $1=1$; *généralement le développement* (8) *est toujours possible et ne peut être effectué que d'une seule façon.*

La méthode expliquée au nº 3 donnera de même ces deux formules

$$(9)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{J}^{n+\mu}(2nx)\,\mathfrak{J}^{n-\mu}(2nx)}{(2n)^{2p}} = \sum_{r=1}^{r=p} \frac{(2r)!\,b_{2r}^{2p}}{\Gamma(r+1+\mu)\Gamma(r+1-\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r},$$

$$(9a)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{J}^{n+\mu}[(2n+1)x]\,\mathfrak{J}^{n+1-\mu}[(2n+1)x]}{(2n+1)^{2p}} = \sum_{r=0}^{r=p-1} \frac{(2r+1)!\,b_{2r+1}^{2p}}{\Gamma(r+1+\mu)\Gamma(r+2-\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1},$$

entièrement analogues à (4); b_r^{2p} désigne les nombres définis à l'aide de (5) au nº 3.

6. Appliquons encore une méthode analogue à celle du nº 4, nous aurons ce théorème général :

Une série de puissances $\Sigma a_{2n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$, *ne contenant que des puissances paires de* x, *peut être développée en série kapteynienne de seconde espèce comme suit :*

$$(10)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s \mathfrak{J}^{\mu+s}[(\mu+\nu+2s)x]\,\mathfrak{J}^{\nu+s}[(\mu+\nu+2s)x],$$

où l'on a posé

$$(11)\quad b_s = \sum_{p=0}^{p=s} \frac{(\mu+\nu+2p)\Gamma(p+1+\mu)\Gamma(p+1+\nu)}{(\mu+\nu+2s)^{\mu+\nu+2p+1}} \binom{\mu+\nu+s+p-1}{s-p} a_{2p}.$$

Le développement (10) *est toujours possible et ne peut être effectué que d'une seule façon, pourvu qu'aucune des quantités* $\mu+\nu$, μ, ν *ne soit égale à un négatif entier. Dans le cas particulier* $\mu+\nu=0$, *le premier terme du second membre de* (10) *se réduira à* a_0.

La série *kapteynienne* de seconde espèce ainsi obtenue est absolument convergente, pourvu que $|x|$ soit plus petit que $\frac{1}{2}\Omega(1)$ et $\frac{1}{2}\Omega(\rho)$, ρ désignant le rayon de convergence de la série de puissances donnée. Cependant, ce cercle ne coïncide pas généralement avec le champ de convergence (non absolue) de la série *kapteynienne* en question.

Pour développer en série kapteynienne de seconde espèce une série de *puissances impaires de x, il suffit de poser dans* (10) $\mu + 1$ *ou* $\nu + 1$ *au lieu de* μ *et* ν, *ou bien à la fois* $\mu + \frac{1}{2}$, $\nu + \frac{1}{2}$ *au lieu de* μ *et* ν, *et multiplier ensuite les deux membres par* $\frac{x}{2}$.

III. — Connexion intime entre les séries de MM. Neumann et Kapteyn.

7. Les formules (7), (11) pour le calcul des coefficients d'une série *kapteynienne* indique une connexion remarquable entre une telle série et une série *neumannienne* de la même espèce et représentant la même fonction. En effet, regardons tout d'abord les séries de première espèce, la fonction holomorphe aux environs de zéro

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

peut être développée en série *kapteynienne* comme suit :

$$(\alpha) \qquad f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{A}^{\nu,n}\left(\dfrac{\alpha}{\nu+n}\right)}{(\nu+n)^{\nu+1}} \mathfrak{J}^{\nu+n}[(\nu+n)x],$$

où l'on a posé

$$(\alpha') \qquad \mathfrak{A}^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(\nu+n-2p)^2 \Gamma(\nu+n-p)}{p!} a_{n-2p}\, \alpha^{n-2p},$$

tandis que nous aurons ce développement en série *neumannienne*

$$(\beta) \qquad f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+n) A^{\nu,n}(\alpha)\, \mathfrak{J}^{\nu+n}(x),$$

où l'on a posé

$$(\beta') \qquad A^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu+n-p)}{p!} a_{n-2p}\, \alpha^{n-2p}.$$

Posons $\nu = 0$, la formule tirée de (β) est due à M. C. Neumann [1],

---

(1) *Theorie der Bessel'schen Functionen*; Leipzig, 1867.

tandis que la formule générale a été démontrée, d'une manière peu élégante du reste, par M. Gegenbauer [1].

Quant aux séries de seconde espèce, nous aurons ces deux développements

$$(\gamma)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n}\left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{B}^{\mu,\nu,n}\left(\frac{\alpha}{\mu+\nu+2n}\right)}{(\mu+\nu+2n)^{\mu+\nu+1}} \mathfrak{J}^{\mu+n}[(\mu+\nu+2n)x]\mathfrak{J}^{\nu+n}[(\mu+\nu+2n)x],$$

$$(\delta)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n}\left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\mu+\nu+2n) B^{\mu,\nu,n}(\alpha)\mathfrak{J}^{\mu+n}(x)\mathfrak{J}^{\nu+n}(x),$$

où l'on a posé respectivement

$$(\gamma')\quad \mathfrak{B}^{\mu,\nu,n}(\alpha) = \sum_{p=0}^{p=n} (\mu+\nu+2p)\Gamma(\mu+p+1)\Gamma(\nu+p+1)\binom{\mu+\nu+n+p-1}{n-p} a_{2p}\, \alpha^{2p},$$

$$(\delta')\quad B^{\mu,\nu,n}(\alpha) = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{\Gamma(\mu+p+1)\Gamma(\nu+p+1)}{\mu+\nu+2p}\binom{\mu+\nu+n+p-1}{n-p} a_{2p}\, \alpha^{2p}.$$

Les développements en séries de seconde espèce obtenus pour une série de puissances impaires de αx, peuvent être déduits de (γ), (δ) en y posant $\nu+1$ au lieu de ν et en multipliant ensuite par $\frac{\alpha x}{2}$, ce qui conduit à poser

$$(\varepsilon)\quad \mathfrak{B}^{\mu,\nu,2n+1}(\alpha) = \alpha\,\mathfrak{B}^{\mu,\nu+1,2n}(\alpha),$$

$$(\varepsilon')\quad B^{\mu,\nu,2n+1}(\alpha) = \alpha\, B^{\mu,\nu+1,2n}(\alpha).$$

Remarquons en passant que M. Neumann [2] ne regarde que ses séries de seconde espèce, pour lesquelles $\mu=\nu=0$ ou $\mu=0$, $\nu=1$; M. Gegenbauer [3] a étudié les séries qui correspondent à $\mu=\nu$, tandis que la formule générale peut être trouvée dans un Mémoire [4] que j'ai publié récemment.

---

(1) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LXXIV, Abth. II, p. 126; 1876.
(2) *Mathematische Annalen*, t. III; 1871. *Leipziger Berichte*, 1869.
(3) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LXXV, Abth. II, p. 219; 1877.
(4) *Mathematische Annalen*, t. LII, p. 234; 1899.

Or, les formules (α'), (β'), (γ') et (δ') montrent immédiatement que *les coefficients des séries neumanniennes et kapteyniennes obtenues pour la même fonction doivent satisfaire à cette équation différentielle linéaire du deuxième ordre*

$$\alpha^2 Y'' + (2\omega + 1)\alpha Y' + \omega^2 Y = \mathfrak{Y}, \tag{12}$$

où $\mathfrak{Y}$ *désigne* $\mathfrak{A}^{\nu,n}(\alpha)$ *ou* $\mathfrak{B}^{\mu,\nu,n}(\alpha)$; Y : $A^{\nu,n}(\alpha)$ *ou* $B^{\mu,\nu,n}(\alpha)$, *tandis que* ω *doit être égal à* ν *ou à* $\mu + \nu$ *respectivement. Les dérivées doivent être prises par rapport à* α.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut être exprimé aussi sous cette forme remarquable :

Supposons données les séries kapteyniennes (α) *ou* (γ), *la fonction*

$$\alpha^2 f''(\alpha x) + (2\omega + 1)\alpha f'(\alpha x) + \omega^2 f(\alpha x)$$

peut être développée en série neumannienne de la forme (β) *ou* (δ), *où les fonctions* $A^{\nu,n}(\alpha)$, $B^{\mu,\nu,n}(\alpha)$ *sont remplacées par* $\mathfrak{A}^{\nu,n}(\alpha)$ *ou par* $\mathfrak{B}^{\mu,\nu,n}(\alpha)$ *respectivement.*

8. Les résultats obtenus au n° 7 pour les séries de première espèce se présentent sous forme très élégante dans le cas particulier où l'on suppose que $f(x)$ soit une intégrale convenable de cette équation linéaire, non homogène

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = \frac{1}{x^2} g^\nu(x), \tag{α}$$

où

$$g^\nu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+n},$$

série qui doit être convergente pour des valeurs suffisamment petites de x.

Pourvu que $\nu \pm \mu$ ne soit pas égal à zéro ou à un négatif entier, il est évident que notre équation (α) possède comme intégrale particulière une fonction développable en série de la forme (β). Soit maintenant $f^\nu(x)$ une telle solution, on aura ces deux développements en séries *neumanniennes* de première espèce

$$(\gamma) \qquad g^{\nu}(\alpha x) = \alpha^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu + n)\, b^{\nu,n}(\alpha)\, \mathfrak{J}^{\nu+n}(x),$$

$$(\delta) \qquad f^{\nu}(\alpha x) = \alpha^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu + n)\, B^{\nu,n}(\alpha)\, \mathfrak{J}^{\nu+n}(x),$$

valables tous les deux aux environs de zéro. Les coefficients $b^{\nu,n}(\alpha)$, $B^{\nu,n}(\alpha)$ sont des polynomes entiers de α.

Or, à l'aide de cette équation

$$\frac{\partial^2 f^{\nu}(\alpha x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial f^{\nu}(\alpha x)}{\partial x} + \left(\alpha^2 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) f^{\nu}(\alpha x) = \frac{1}{x^2} g^{\nu}(\alpha x),$$

déduite de (α), nous aurons, en tenant compte de l'équation différentielle à laquelle $\mathfrak{J}^{\nu+n}(x)$ doit satisfaire, savoir

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{J}^{\nu+n}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \mathfrak{J}^{\nu+n}(x)}{\partial x} + \left[1 - \frac{(\nu+n)^2}{x^2}\right] \mathfrak{J}^{\nu+n}(x) = 0,$$

cette formule remarquable

$$(\varepsilon) \quad x^2 f^{\nu}(\alpha x) = \alpha^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\nu + n}{1 - \alpha^2} [(\nu+n)^2 - \mu^2][B^{\nu,n}(\alpha) - b^{\nu,n}(\alpha)]\, \mathfrak{J}^{\nu+n}(x).$$

On aura de même

$$\frac{\partial^2 f^{\nu}(\alpha x)}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial f^{\nu}(\alpha x)}{\partial \alpha} + \left(x^2 - \frac{\mu^2}{\alpha^2}\right) f^{\nu}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha^2} g^{\nu}(\alpha x)$$

d'où, en vertu de (γ) (δ) (ε), nous obtiendrons cette équation linéaire non homogène

$$(13) \quad \alpha^2(1 - \alpha^2)\frac{\partial^2 B^{\nu,n}(\alpha)}{\partial \alpha^2} + (2\nu + 1)\,\alpha(1 - \alpha^2)\frac{\partial B^{\nu,n}(\alpha)}{\partial \alpha}$$
$$+ [(\nu^2 - \mu^2) + n(n + 2\nu)\alpha^2]\, B^{\nu,n}(\alpha) = b^{\nu,n}(\alpha),$$

d'où l'on peut déduire quelques autres propriétés remarquables pour les coefficients $b^{\nu,n}(\alpha)$, $B^{\nu,n}(\alpha)$ et le coefficient $\mathfrak{A}^{\nu,n}(\alpha)$ correspondant qui figure dans ce développement en série *kapteynienne*

$$(\zeta)\qquad f^\nu(\alpha x) = \alpha^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{A}^{\nu,n}\left(\dfrac{\alpha}{\nu+n}\right)}{(\nu+n)^{\nu+1}} \mathfrak{J}^{\nu+n}[(\nu+n)x].$$

En premier lieu posons dans (13) $\alpha = 1$, ce qui est permis puisque $b^{\nu,n}(\alpha)$, $B^{\nu,n}(\alpha)$ ne sont que des polynomes entiers de α; nous aurons

$$(14)\qquad B^{\nu,n}(1) = \frac{b^{\nu,n}(1)}{(\nu+\mu+n)(\nu-\mu+n)},$$

formule qui donnera immédiatement la série *neumannienne* de $f^\nu(x)$, pourvu que celle de $g^\nu(x)$ soit connue. De cette manière nous obtiendrons immédiatement les séries *neumanniennes* de première espèce, obtenues pour les trois fonctions $\mathrm{H}^{\mu,\nu}(x)$, $\Phi^{\mu,\nu}(x)$, $\mathrm{H}^{\mu,\nu,\rho}(x)$ que j'ai étudiées dans mon Mémoire : *Évaluation nouvelle, etc.* (¹), développements dont le premier donnera comme cas particulier la série *neumannienne* obtenue pour la fonction

$$Z^\nu(x) = \frac{2\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi, \qquad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2},$$

série qui a été trouvée par M. P. Siemon (²), pourvu que ν soit égal à un nombre entier non négatif.

La formule (14) montrera encore la vérité de cette proposition :

Pourvu que $\nu \pm \mu$ ne soit pas égal à zéro ou à un négatif entier, les séries neumanniennes obtenues pour les deux fonctions $f^\nu(x)$, $g^\nu(x)$ ont le même rayon de convergence, de sorte qu'il en sera de même pour les séries de puissances qui nous définissent ces deux fonctions aux environs de zéro.

Quant à la série *kapteynienne* (ζ), les formules (12), (13) donneront

(¹) *Annali di Matematica* (sous presse).

(²) *Ueber die Integrale einer nicht homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung* (*Programm der Luisenschule*; Berlin, 1890), p. 15.

immédiatement cette expression

$$(15) \qquad \mathfrak{A}^{\nu,n}(\alpha) = \frac{b^{\nu,n}(\alpha) + [\mu^2 - n(n+2\nu)\alpha^2]\,B^{\nu,n}(\alpha)}{1-\alpha^2},$$

d'où nous obtiendrons les coefficients de la série *kapteynienne* pour la fonction $f^\nu(x)$ en y posant simplement $\alpha = \frac{1}{\nu+n}$. Dans le cas $\alpha = 1$, le second membre de (15) se présente sous forme indéterminée. Différentiant par rapport à α le numérateur et le dénominateur, on retombe, en vertu de (13), dans la formule (12).

La formule (15) donnera immédiatement les développements en séries *kapteyniennes* d'un grand nombre de fonctions qui sont liées aux fonctions cylindriques, plus ou moins intimement. On verra que les coefficients de ces développements s'expriment à l'aide des mêmes fonctions que ceux figurant dans les séries *neumanniennes* correspondantes. Par exemple, les coefficients obtenus dans les développements des deux fonctions

$$e^{\alpha x i}, \quad S^{\nu-\frac{1}{2}}(\alpha x)$$

se réduisent aussi à $k^{\nu,n}(\alpha)$ ou à $k^{\nu,n}(\sqrt{1-\alpha^2})$ respectivement, où $k^{\nu,n}(\alpha)$ désigne la fonction sphérique générale, c'est-à-dire les polynomes définis à l'aide du développement

$$\frac{1}{(1-2\alpha x + x^2)^\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} k^{\nu,n}(\alpha)\,x^n, \qquad |x| < 1.$$

Le premier de nos exemples susdits montre que *l'équation* (13) *renferme, comme un cas très particulier, celle connue pour le polynome* $k^{\nu,n}(\alpha)$.

Du reste, la formule (15) montre encore que les séries *kapteyniennes* sont plus compliquées que celles de M. Neumann, comme cela était à attendre. En effet, la simplification obtenue pour les coefficients de ces dernières séries, en posant $\alpha = 1$, ne peut pas être conservée pour les séries *kapteyniennes*.

9. Études maintenant les séries obtenues pour la fonction $\frac{1}{y-x}$,

nous aurons ces deux séries de première espèce

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n O^{\nu,n}(y)\, J^{\nu+n}(x),$$

$$(\beta) \qquad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \mathfrak{V}^{\nu,n}[(\nu+n)y]\, J^{\nu+n}[(\nu+n)x],$$

où les quantités ε_n doivent être égales à 2, à l'exception de ε_0 qui est égal à 1, et où l'on a posé respectivement

$$(\alpha') \qquad O^{\nu,n}(y) = \frac{\nu+n}{4} \cdot \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu+n-p)}{p!}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-2p+1}, \qquad O^{\nu,0}(y) = \frac{1}{y},$$

$$(\beta') \qquad \mathfrak{V}^{\nu,n}(y) = \frac{1}{4(\nu+n)^{\nu}} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(\nu+n-2p)^2\,\Gamma(\nu+n-p)}{p!}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-2p+1}.$$

Pour les séries de deuxième espèce nous aurons de même

$$(\gamma) \qquad \frac{y}{y^2-x^2} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} \mathfrak{U}^{\mu,\nu,2n}(y)\, J^{\mu+n}(x)\, J^{\nu+n}(x),$$

$$(\delta) \qquad \frac{y}{y^2-x^2} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} \mathfrak{W}^{\mu,\nu,2n}[(\mu+\nu+2n)y]\, J^{\mu+n}[(\mu+\nu+2n)x]\, J^{\nu+n}[(\mu+\nu+2n)x],$$

où l'on a posé

$$(\gamma') \qquad \mathfrak{U}^{\mu,\nu,2n}(y) = \frac{\mu+\nu+2n}{2} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)}{\mu+\nu+2p} \binom{\mu+\nu+n+p-1}{n-p} \left(\frac{2}{y}\right)^{2p+1},$$

$$(\delta') \qquad \mathfrak{W}^{\mu,\nu,2n}(y) = \frac{1}{2(\mu+\nu+2n)^{\mu+\nu}} \sum_{p=0}^{p=n} (\mu+\nu+2p)\,\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1 \binom{\mu+\nu+n+p-1}{n-p} \left(\frac{2}{y}\right)^{2p+1}.$$

Quant aux développements obtenus pour la fonction $\frac{x}{y^2-x^2}$, ils peuvent être déduits immédiatement de (γ), (δ) en y posant $\nu+1$ au lieu de ν et multipliant ensuite par $\frac{x}{y}$, ce qui nous conduira à poser

$$(\varepsilon) \qquad \mathfrak{U}^{\mu,\nu,2n+1}(y) = \frac{2}{y}\,\mathfrak{U}^{\mu,\nu+1,2n}(y),$$

$$(\varepsilon') \qquad \mathfrak{W}^{\mu,\nu,2n+1}(y) = \frac{2}{y}\,\mathfrak{W}^{\mu,\nu+1,2n}(y).$$

Cela posé, les formules (α'), (β') et (γ'), (δ') donneront cette formule, analogue à (12),

$$(16) \qquad Y'' + \frac{3-2\omega}{y}\,Y' + \frac{(\omega-1)^2}{y^2}\,Y = \frac{(\omega+n)^{\omega+1}}{y^2}\,\mathfrak{V},$$

les désignations étant analogues à celles appliquées dans (12). Or nous avons cette équation différentielle [1]

$$\frac{\partial^2 O^{\nu,n}(y)}{\partial y^2} + \frac{3-2\nu}{y}\,\frac{\partial O^{\nu,n}(y)}{\partial y} + \left[1 - \frac{(n-1)(n+1-2\nu)}{y^2}\right] O^{\nu,n}(y)$$
$$= \frac{\nu+n}{2y}\,\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)\cos^2\frac{n\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\nu+n}{y^2}\,\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{n+1}{2}\right)\sin^2\frac{n\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

ce qui donnera, en vertu de (16),

$$(17) \qquad \mathfrak{V}^{\nu,n}(y) = \frac{(\nu-n)^2 - y^2}{(\nu+n)^{\nu+1}}\,O^{\nu,n}(y)$$
$$+ \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)\cos^2\frac{n\pi}{2}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)(\nu+n)^{\nu}}\,y + \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{n+1}{2}\right)\sin^2\frac{n\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(\nu+n)^{\nu}}.$$

Dans le cas $\nu = 0$, nous supprimons le premier des indices fixés aux fonctions $\mathfrak{V}$, O, de sorte que nous aurons, en vertu de (17), cette formule particulière

$$(18) \qquad \mathfrak{V}^{n}(ny) = n(1-y^2)\,O^{n}(ny) + y\cos^2\frac{n\pi}{2} + \sin^2\frac{n\pi}{2},$$

formule que M. Kapteyn [2] a démontrée d'une autre manière.

---

(1) *Annali di Matematica* (sous presse).
(2) *Loc. cit.*, p. 117.

Les formules (17), (18) montrent que $\nu = 0$ est la seule valeur de ν pour laquelle le développement en série *kapteynienne* obtenu pour $\frac{1}{1-x}$ se présente sous la forme élégante indiquée dans l'Introduction.

En outre, la formule (17) montre que $\mathfrak{V}^{\nu,n}(y)$ doit satisfaire aussi à une équation linéaire non homogène de deuxième ordre; on déduit sans peine cette équation, qui devient beaucoup plus compliquée que celle obtenue pour $O^{\nu,n}(y)$. Quant à $\mathfrak{W}^{\mu,\nu,n}(y)$, on démontre au n° 13 que, dans les deux cas $\mu + \nu = 0$, $\mu + \nu = 1$, cette fonction doit satisfaire à une équation différentielle linéaire et homogène de quatrième ordre.

10. Avant de terminer cette première Partie de nos recherches, nous avons à mentionner deux développements remarquables d'une fonction particulière. Pour les obtenir, appliquons d'abord la formule (16); nous aurons immédiatement, en vertu de (α) au n° 9 :

$$\begin{aligned}\text{(19)}\qquad &\frac{\nu^2}{y-x} + \frac{(2\nu+1)x}{(y-x)^2} + \frac{2x^2}{(y-x)^3}\\ &\quad = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n (\nu+n)^{\nu+1}\, \mathfrak{V}^{\nu,n}(y)\, \mathfrak{J}^{\nu+n}(x),\end{aligned}$$

formule qui se présente sous forme élégante dans le cas $\nu = 0$. Posons encore $y = 2x$, ce qui est permis; nous obtiendrons cette formule remarquable

$$\text{(19}a\text{)}\qquad \frac{(\nu+1)^2+2}{x} = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n (\nu+n)^{\nu+1}\, \mathfrak{V}^{\nu,n}(2x)\, \mathfrak{J}^{\nu+n}(x).$$

Appliquons ensuite (α') au n° 7, nous aurons, en vertu de la définition de $O^{\nu,n}(y)$, cette autre formule

$$\text{(20)}\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(\nu+n)^2}\frac{x^n}{y^{n+1}} = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n O^{\nu,n}[(\nu+n)y]}{(\nu+n)^{\nu+1}}\, \mathfrak{J}^{\nu+n}[(\nu+n)x].$$

Dans le cas $\nu = 0$, les deux membres de (20) deviendront infiniment grands; soustrayant maintenant $\frac{1}{\nu^2 y}$ de ces deux membres, on aura, en posant $\nu = 0$,

$$(20_a) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \frac{x^n}{y^{n+1}} = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{O^n(ny)}{n} \mathfrak{S}^n(nx) - \frac{x^2}{2y}.$$

Le premier membre de cette formule représente, pour $y = 1$, la fonction célèbre pour laquelle Legendre (¹), Abel (²) et Schaeffers (³) ont démontré un nombre de propriétés remarquables.

Enfin, l'hypothèse $y = 2x$, qui est permise, donnera, en vertu de (20), (20_a), ces deux formules

$$(21) \qquad \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(\nu + n)^2} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{(\nu + n)^{\nu+1}} O^{\nu,n}[(2\nu + 2n)x] \mathfrak{S}^{\nu+n}[(\nu + n)x],$$

$$(21_a) \qquad \frac{1}{2x}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log^2 2\right) = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{O^n(2nx)}{n} \mathfrak{S}^n(nx) - \frac{x}{8}.$$

On verra sur-le-champ qu'il existera des formules analogues pour les séries de seconde espèce. Or, les démonstrations étant pas à pas les mêmes que celles que nous venons d'expliquer, elles peuvent être omises ici.

(¹) *Exercices de Calcul intégral*, t. I, p. 244.
(²) *Œuvres complètes*, t. II, p. 189.
(³) *Journal de Crelle*, t. 30.

SECONDE PARTIE.

IV. — Évaluation nouvelle de certaines séries de seconde espèce.

11. Supposons que la série de puissances $\sum a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n$ soit convergente pourvu que $|x| < \rho$; il est évident que les deux fonctions

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n} \frac{x^{2n}}{y^{2n+1}},$$

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{y^{2n+2}}$$

sont définies pour les combinaisons des valeurs de x et de y qui satisfont à l'inégalité

$$(\alpha) \qquad \left|\frac{x}{y}\right| < \rho,$$

et que, cette condition remplie, les deux fonctions possèdent les propriétés fondamentales d'une série de puissances. Cela posé, appliquons ces deux formules bien connues

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2n} \quad \cos(2\nu\varphi)\, d\varphi \qquad = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+1-\nu)},$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2n+1} \cos(2\nu-1)\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+2-\nu)},$$

où n désigne un entier non négatif, tandis que ν est une quantité finie quelconque, nous aurons immédiatement ces deux autres formules

$$(22) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi, y) \cos(2\nu\varphi)\, d\varphi \qquad = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})\,a_{2n}}{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+1-\nu)} \frac{x^{2n}}{y^{2n+1}},$$

$$(22_a) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x\cos\varphi, y) \cos(2\nu-1)\varphi\, d\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})\,a_{2n+1}}{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+2-\nu)} \frac{x^{2n+1}}{y^{2n+2}},$$

qui gardent leur validité, pourvu que la condition (α) soit remplie. On obtiendra deux nouvelles formules analogues à (22) en appliquant les deux identités

$$(\beta) \qquad f(x\alpha, y) = \frac{1}{\alpha} f\left(x, \frac{y}{\alpha}\right),$$

$$(\beta') \qquad g(x\alpha, y) = \frac{1}{\alpha} g\left(x, \frac{y}{\alpha}\right).$$

Appliquons encore ces deux autres formules bien connues

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\omega)^{2n+1} (\operatorname{tang} \omega)^{2\nu} \, d\omega = \frac{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+1-\nu)}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})(2n+1)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\omega)^{2n+2} (\operatorname{tang} \omega)^{2\nu-1} \, d\omega = \frac{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+2-\nu)}{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})(2n+2)};$$

nous aurons de même

$$(23) \qquad -\frac{y}{\sqrt{\pi}} D_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x, \frac{y}{\sin 2\omega}\right) (\operatorname{tang} \omega)^{2\nu} \, d\omega = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+1-\nu)\, a_{2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{x^{2n}}{y^{2n+1}},$$

$$(23_a) \qquad -\frac{y}{\sqrt{\pi}} D_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(x, \frac{y}{\sin 2\omega}\right) (\operatorname{tang} \omega)^{2\nu-1} \, d\omega = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+2-\nu)\, a_{2n+1}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\frac{3}{2})} \frac{x^{2n+1}}{y^{2n+2}},$$

formules qui sont valables, pourvu que les conditions (α) soient remplies et qu'en outre

$$1 > \Re(\nu) > -1,$$
$$2 > \Re(\nu) > -1,$$

respectivement. Il est évident que les formules (β) nous donneront deux formules analogues à (23), (23_a). En outre, des quatre formules ainsi obtenues on pourra déduire quatre formules nouvelles, en appliquant l'identité

$$(\gamma) \qquad -y\, D_y \int = D_x \left(x \int\right).$$

Cela posé, combinons les formules (22), (23) et (22_a), (23_a), nous obtiendrons ces deux identités

$$(24)\qquad -\frac{2y}{\pi}D_y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\cos\varphi, \frac{y}{\sin 2\omega}\right)\cos(2\nu\varphi)(\operatorname{tang}\omega)^{2\nu}\,d\varphi\,d\omega = f(x, y),$$

$$(24_a)\qquad -\frac{2y}{\pi}D_y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(x\cos\varphi, \frac{y}{\sin 2\omega}\right)\cos(2\nu-1)\,\varphi(\operatorname{tang}\omega)^{2\nu-1}\,d\varphi\,d\omega = g(x, y),$$

qui possèdent six formules analogues déduites à l'aide des transformations (β), (γ). Il est évident que les deux fonctions générales $f(x, y)$, $g(x, y)$ peuvent être remplacées par $\frac{y}{y^2-x^2}$ et $\frac{x}{y^2-x^2}$ respectivement.

12. Appliquons maintenant la formule (α) au n° 5 pour l'évaluation du produit de deux fonctions cylindriques; nous aurons, en vertu de (22)

$$(\alpha)\qquad \mathfrak{J}^{\frac{n+\nu}{2}}(x)\,\mathfrak{J}^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathfrak{J}^n(2x\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi,$$

où n désigne un nombre entier non négatif, tandis que ν est une quantité finie quelconque. Cela posé, les identités (24) nous conduisent à poser $\nu = 0$ et $2x$, $2y$ au lieu de x, y dans les développements en séries *neumanniennes* ou *kapteyniennes* de première espèce, obtenus pour les deux fonctions

$$(\beta)\qquad \frac{y}{y^2-x^2},\quad \frac{x}{y^2-x^2},$$

ce qui donnera ces deux mêmes fonctions développées en séries de seconde espèce pour lesquelles $\mu+\nu=0$ ou $\mu+\nu=1$ respectivement. Écrivons simplement $\mathfrak{U}^{\nu,n}(y)$ et $\mathfrak{W}^{\nu,n}(y)$ au lieu de $\mathfrak{U}^{\nu,-\nu,n}(y)$, $\mathfrak{W}^{\nu,-\nu,n}(y)$, nous obtiendrons ces deux formules

$$(25)\qquad \mathfrak{U}^{\nu,2n}(y) = -2y\,D_y\int_0^{\frac{\pi}{2}} O^{2n}\left(\frac{2y}{\sin 2\omega}\right)(\operatorname{tang}\omega)^{2\nu}\,d\omega,$$

$$(25_a)\qquad \mathfrak{U}^{\nu,2n+1}(y) = -2y\,D_y\int_0^{\frac{\pi}{2}} O^{2n+1}\left(\frac{2y}{\sin 2\omega}\right)(\operatorname{tang}\omega)^{2\nu-1}\,d\omega,$$

et deux autres obtenues par là en mettant $\mathfrak{W}^{\nu,n}(y)$ et $\mathfrak{V}^{\nu,n}(y)$ au lieu de $\mathfrak{U}^{\nu,n}(y)$, $O^n(y)$ respectivement. Posons $\nu = 0$, la formule tirée de (25) est due à M. Kapteyn [1].

On verra sans peine que la restriction relative à $\mathcal{R}(\nu)$ exigée par les intégrales définies vient à disparaître pour les séries de seconde espèce.

Nos identités (24) donnent encore, à l'aide de (α), cette autre formule

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{J}^n(x) = D_x \left[x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{J}^{\frac{n+\nu}{2}}\left(\frac{x \sin 2\omega}{2}\right) \mathfrak{J}^{\frac{n-\nu}{2}}\left(\frac{x \sin 2\omega}{2}\right) \sin 2\omega (\operatorname{tang} \omega)^\nu \, d\omega \right],$$

inverse à (α), de sorte que les développements des fonctions (β) en séries de première espèce peuvent être déduits aussi des séries de seconde espèce à l'aide de nos identités générales. Cette méthode donnera de même ces deux formules nouvelles

$$(26) \qquad O^{2n}(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{U}^{\nu,2n}\left(\frac{y}{2\cos\varphi}\right) \frac{\cos(2\nu\varphi)}{\cos\varphi} \, d\varphi,$$

$$(26_a) \qquad O^{2n+1}(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{U}^{\nu,2n+1}\left(\frac{y}{2\cos\varphi}\right) \frac{\cos(2\nu-1)\varphi}{\cos\varphi} \, d\varphi,$$

inverses à (25), et deux autres obtenues par là en posant $\mathfrak{V}^n(y)$ et $\mathfrak{W}^{\nu,n}(y)$ au lieu de $O^n(y)$ et $\mathfrak{U}^{\nu,n}(y)$.

Cela posé, l'intégrale fondamentale de Cauchy montrera immédiatement la vérité de cette assertion :

Nos séries neumanniennes ou kapteyniennes de seconde espèce se présentent, sous ce point de vue, comme une conséquence immédiate des mêmes séries de première espèce. L'inverse est vrai aussi.

Notre déduction des séries de première espèce à l'aide de celles de seconde espèce, et *vice versa*, montre encore que les deux catégories de séries ont le même champ de convergence et ne peuvent être formées que d'une seule façon.

Les développements nouveaux obtenus des séries *neumanniennes* ou

---

(1) *Loc. cit.*, p. 141.

kapteyniennes en appliquant la formule (γ) au n° 11 peuvent être déduits immédiatement d'une manière directe à l'aide de l'identité

$$\int D_x\left(\frac{x}{y-x}\right)\frac{dy}{y} = \frac{1}{y-x}.$$

13. On verra sur-le-champ que les identités (24) au n° 11 s'appliqueront sans peine au développement général

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathcal{G}^n(y)\,\mathfrak{F}^n(x),$$

où l'on a posé

$$\mathcal{G}^n(y) = \sum \frac{\mathfrak{A}_n^p}{y^{p+1}},$$
$$\mathfrak{F}^n(x) = \sum A_n^p x^p,$$

et où l'exposant p doit être assujetti à parcourir des valeurs entières non négatives et de même parité que n. Les fonctions nouvelles de y et de x ainsi obtenues s'expriment sans peine à l'aide des formules analogues à (α) et à (25) au n° 12. Prenant encore ces développements nouveaux pour point de départ, on obtiendra, en vertu des formules analogues à (γ) et à (26) au n° 12, le développement primitif (α).

Il est évident qu'une application répétée de ces méthodes nous donnera, en vertu de (α), un nombre illimité de développements nouveaux qui possèdent tous le même champ de convergence absolue que (α) et qui ne peuvent être effectués que d'une seule façon, pourvu que (α), ou un autre des développements nouveaux ainsi obtenus, possède une telle propriété.

Cependant nous avons préféré nous borner ici à l'étude des séries *neumanniennes* et *kapteyniennes*, parce que ces séries possèdent la propriété remarquable que les fonctions nouvelles obtenues par les transformations s'expriment d'une façon très simple à l'aide des fonctions cylindriques. Les séries de fonctions sphériques, par exemple, ne possèdent pas une telle propriété.

Quant au développement général (α), M. Pincherle [1] a signalé

---

[1] *Reale Istituto Lombardo : Rendiconti*, 2e série, vol. XV, p. 525; 1882.

cette formule remarquable :

$$(\beta) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{A}_n^p A_n^r = \begin{cases} 1, & p = r, \\ 0, & p \lessgtr r, \end{cases}$$

qui est fondamentale dans la théorie de tels développements en nous fournissant un moyen, général peut-être, pour déterminer l'un des groupes de fonctions $\mathfrak{F}^n(x)$ et $\mathfrak{G}^n(y)$, pourvu que l'autre soit donné et que la formule (α) soit vraie. En effet, nos déterminations des développements de $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ ou de $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}$ en séries *kapteyniennes* de première et de seconde espèce ne sont autre chose qu'une résolution des équations (β) correspondantes. En outre, Heine (¹) a déterminé de la même manière le développement d'une puissance de x selon les fonctions sphériques de première espèce.

Le sens propre des développements nouveaux que nous venons d'indiquer saute aux yeux si nous tenons compte de la formule de M. Pincherle : *Les transformations des fonctions $\mathfrak{F}^n(x)$ et $\mathfrak{G}^n(y)$ effectuées par les intégrales définies n'altèrent pas la formule* (β).

En effet, les formules (22), (23) montrent que les coefficients des fonctions nouvelles peuvent être obtenus en multipliant $\mathfrak{A}_n^p$ par une quantité indépendante de n et en divisant A_n^p par la même quantité. C'est-à-dire que les développements d'une puissance entière non négative de x selon les produits de deux fonctions cylindriques dus à Lommel (²) ne sont au fond, sous ce point de vue, autre chose que les développements analogues selon les fonctions cylindriques elles-mêmes dus à M. Schlömilch (³).

La recherche générale correspondante présente un intérêt assez considérable, cependant elle nous conduirait beaucoup trop loin ici.

Il est digne de remarque que l'application des intégrales définies nous épargne de chercher le champ de convergence *absolue* des séries nouvelles et de démontrer qu'elles ne peuvent être formées que d'une

---

(¹) *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. I, p. 72 (2ᵉ éd.); Berlin, 1878.
(²) *Studien über die Bessel'schen Functionen*, p. 48; Leipzig, 1868.
(³) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. II, p. 141; 1857.

seule façon, problèmes qui offrent certainement des difficultés considérables pris dans toute leur généralité.

V. — Évaluation de certaines formules particulières contenant les fonctions cylindriques.

14. En terminant la première Partie nous avons, au n° 10, développé quelques formules particulières contenant des fonctions célèbres dans la théorie des fonctions cylindriques. Il nous reste ici à montrer comment les formules générales évaluées au n° 11 nous fournissent un moyen simple pour la déduction de nombre de formules du même genre.

Regardons tout d'abord les séries *neumanniennes* de première espèce obtenues pour les fonctions

$$\frac{y}{y^2 - x^2}, \quad \frac{x}{y^2 - x^2};$$

les formules (22) donnent, en vertu de (α) au n° 12,

$$(27) \qquad y \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} O^{2n}(y) \mathfrak{J}^{n+\nu}(x) \mathfrak{J}^{n-\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1+\nu)\Gamma(n+1-\nu)} \left(\frac{2x}{y}\right)^{2n},$$

$$(27_a) \qquad 2y \sum_{n=0}^{n=\infty} O^{2n+1}(y) \mathfrak{J}^{n+\nu}(x) \mathfrak{J}^{n+1-\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+1+\nu)\Gamma(n+2-\nu)} \left(\frac{2x}{y}\right)^{2n+1},$$

formules qui sont valables, pourvu que $|2x| < |y|$.

Remarquons en passant que la formule fondamentale de M. Pincherle nous fournira un moyen simple pour trouver la condition nécessaire et suffisante que les fonctions $\mathrm{A}^n(y)$ doivent remplir pour que la somme de cette série

$$(\alpha) \qquad y \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{A}^n(y) \mathfrak{J}^{n+\nu}(x) \mathfrak{J}^{n-\nu}(x)$$

soit une fonction de $\left(\frac{x}{y}\right)^2$, savoir $\Sigma a_n \left(\frac{x}{y}\right)^{2n}$. En effet, ordonnant la série (α) selon les puissances négatives de y, on aura immédiatement, en vertu du développement (γ) au n° 9,

$$\mathcal{A}^n(y) = \frac{n}{2}\sum_{p=0}^{p=n} \frac{\Gamma(p+1+\nu)\,\Gamma(p+1-\nu)}{p!}\binom{n+p-1}{n-p} a_p \left(\frac{2}{y}\right)^{2p+1};$$

c'est-à-dire que $\mathcal{A}^n(y)$ peut être formée en multipliant les termes de $\mathfrak{U}^{\nu,2n}(y)$ par les cofficients a correspondants. La même méthode peut être étendue immédiatement à tous les autres développements du même genre.

Les séries *kapteyniennes* de première espèce donneront de même

$$(28)\quad \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi} + 2y\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{V}^{2n}(2ny)\,\mathfrak{J}^{n+\nu}(2nx)\,\mathfrak{J}^{n-\nu}(2nx)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+1-\nu)}\left(\frac{2x}{y}\right)^{2n},$$

$$(28_a)\quad 2y\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{V}^{2n+1}[(2n+1)y]\,\mathfrak{J}^{n+\nu}[(2n+1)x]\,\mathfrak{J}^{n+1-\nu}[(2n+1)x]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+2-\nu)}\left(\frac{2x}{y}\right)^{2n+1}.$$

Posons, dans (27), $\nu = 0$; nous obtiendrons ces deux formules remarquables :

$$(29)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} O^{2n}(y)\,[\mathfrak{J}^n(x)]^2 = \frac{1}{\sqrt{y^2-4x^2}},$$

$$(29_a)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} O^{2n+1}(y)\,\mathfrak{J}^n(x)\,\mathfrak{J}^{n+1}(x) = \frac{1}{4x}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2-4x^2}} - 1\right),$$

et les formules (28) en donneront deux autres du même genre.

Posons encore, dans (28), $y = 1$; nous aurons, en vertu de (18) au n° 9, ces deux formules élégantes :

$$(30)\qquad \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\mathfrak{J}^{n+\nu}(2nx)\,\mathfrak{J}^{n-\nu}(2nx)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{n\,!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+1-\nu)}(2x)^{2n},$$

$$(30_a)\qquad 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathfrak{J}^{n+\nu}[(2n+1)x]\,\mathfrak{J}^{n-\nu}[(2n+1)x]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{n\,!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+1+\nu)\,\Gamma(n+2-\nu)}(2x)^{2n+1},$$

d'où, en mettant $\nu=0$,

$$(31)\qquad 1+2\sum_{n=0}^{n=\infty}[\mathfrak{J}^{n}(2nx)]^2=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}},$$

$$(31_a)\qquad 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathfrak{J}^{n}[(2n+1)x]\,\mathfrak{J}^{n+1}[(2n+1)x]=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}-1\right);$$

on verra que les quatre dernières formules sont complètement analogues à la formule célèbre (α) citée dans l'Introduction.

Nous avons encore à développer l'intégrale elliptique de première espèce en séries de seconde espèce. A cet égard, posons dans (29),

$$y=\frac{2}{\sin\varphi},$$

et intégrons par rapport à φ de 0 à φ; nous aurons, en écrivant k au lieu de x, ces développements en séries *neumanniennes* de seconde espèce

$$(32)\qquad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=2\sum_{n=0}^{n=\infty}\varepsilon_{2n}[\mathfrak{J}^{n}(k)]^2\int_0^{\varphi}O^{2n}\left(\frac{2}{\sin\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\sin\varphi},$$

$$(32_a)\qquad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\varphi+4k\sum_{n=0}^{n=\infty}\mathfrak{J}^{n}(k)\,\mathfrak{J}^{n+1}(k)\int_0^{\varphi}O^{2n+1}\left(\frac{2}{\sin\varphi}\right)d\varphi,$$

où il faut que $|k|<1$. Les séries *kapteyniennes* analogues, obtenues à l'aide de (28), sont plus compliquées. Posant, dans (32), $\varphi=\frac{\pi}{2}$, nous aurons l'intégrale elliptique complète de première espèce développée en série *neumannienne* de seconde espèce.

Dans le cas général, les deux formules (32) se présentent sous une forme très remarquable indiquant une connexion nouvelle et très intéressante entre les fonctions cylindriques et les fonctions rationnelles $O^n(y)$ de M. Neumann; cependant, leur utilité pour un calcul numérique n'est que très médiocre. En effet, la remarque, faite par M. J.-P. Gram (¹), que la série *neumannienne* obtenue pour x^n n'est guère convenable pour un tel calcul, s'étend évidemment à toutes les séries *neumanniennes;* c'est-à-dire que les séries de ce genre ne présentent qu'un intérêt purement mathématique.

15. Appliquons encore (25) au nº 11; nous aurons, en vertu de (23), ces deux formules

$$(33) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} \mathfrak{U}^{\nu,2n}(y)\, \mathfrak{J}^{2n}(x) = \frac{\pi\nu}{\sin\pi\nu}\,\frac{1}{y}\,F\left(1+\nu,\ 1-\nu,\ \frac{1}{2},\ \frac{x^2}{4y^2}\right),$$

$$(33_a) \qquad 2\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{U}^{\nu,2n+1}(y)\, \mathfrak{J}^{2n+1}(x) = \frac{\pi\nu(1-\nu)}{\sin\pi\nu}\,\frac{x}{2y^2}\,F\left(1+\nu,\ 2-\nu,\ \frac{3}{2},\ \frac{x^2}{4y^2}\right),$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire des quatre éléments α, β, γ, x. De même il est évident que nous obtiendrons deux formules analogues pour les séries *kapteyniennes* correspondantes. Or, nous nous bornerons à démontrer que les fonctions rationnelles $\mathfrak{U}$ satisfont à une équation différentielle linéaire et homogène de quatrième ordre.

Regardons tout d'abord $\mathfrak{U}^{\nu,2n}(y)$; nous aurons, en désignant par X le second membre de (33),

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{x}{2y^3}\,F',$$

$$(\alpha') \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{2y^3}\,F' + \frac{x^2}{4y^5}\,F'',$$

d'où, en tenant compte de l'équation différentielle à laquelle $\mathfrak{J}^{2n}(x)$

(¹) *Om Raekkeudviklinger bestemte ved Hjaelp af de mindste Kvadraters Methode* (Thèse de doctorat), p. 44; Copenhague, 1879.

doit satisfaire, savoir

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{J}^{2n}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \mathfrak{J}^{2n}(x)}{\partial x} + \mathfrak{J}^{2n}(x) = \frac{4n^2}{x^2}\mathfrak{J}^{2n}(x),$$

nous obtiendrons, en vertu de (33),

$$(\beta) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n}\, 4n^2\, \mathfrak{U}^{\nu,2n}(y)\, \mathfrak{J}^{2n}(x) = \frac{x^4}{4y^5} F'' + \frac{x^2}{y^3} F' + \frac{x^2}{y} F.$$

De même, nous obtiendrons

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} F - \frac{x^2}{2y^4} F''$$

$$(\gamma') \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3} F + \frac{5x^2}{2y^5} F'' + \frac{x^4}{4y^7} F''',$$

ce qui donnera, en vertu de (β), cet autre développement

$$(34) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} \left[(4n^2-1)\mathfrak{U}^{\nu,2n}(y) - 3y\frac{\partial \mathfrak{U}^{\nu,2n}(y)}{\partial y^2} - y^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{U}^{\nu,2n}(y)}{\partial y^2}\right] \mathfrak{J}^{2n}(x) = \frac{x^2}{y} F.$$

Or, notre fonction F doit satisfaire à cette équation différentielle

$$(\delta) \qquad \left(\frac{x^2}{4y^2} - \frac{x^4}{16y^4}\right) F''' + \left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4y^2}\right) F'' + (\nu^2 - 1) F = 0.$$

Après avoir multiplié cette équation par $\frac{4x^2}{y^2}$, les formules (γ), (γ') suffisent pour déterminer la somme

$$\frac{x^4}{y^2} F''' + \frac{2x^2}{y^2} F'',$$

tandis que le terme

$$\frac{4x^2}{y^2}(\nu^2 - 1) F$$

peut être tiré directement de (34), et la somme

$$-\frac{x^6}{4y^6} F''' - \frac{3x^4}{y^4} F''$$

peut être calculée en appliquant sur (34) les formules (γ), (γ').

Cela posé, tenons compte du fait qu'un développement de zéro en série *neumannienne* de ce genre est impossible; pourvu que les coefficients ne soient pas tous égaux à zéro, nous obtiendrons finalement l'équation cherchée

$$(35)\qquad \begin{aligned} Z^{\text{IV}} + \frac{6}{y} Z''' + \left(4 - \frac{4n^2 - 4\nu^2 - 5}{y^2}\right) Z'' \\ + \left(\frac{16}{y} + \frac{4n^2 - 12\nu^2 - 1}{y^3}\right) Z' \\ + \left(\frac{8}{y^2} + \frac{(4n^2-1)(4\nu^2-1)}{y^4}\right) Z = 0, \end{aligned}$$

où Z désigne la fonction $\mathfrak{U}^{\nu,2n}(y)$

En traitant de la même manière la formule (33_a), on obtiendra pour la fonction $\mathfrak{U}^{\nu,2n+1}(y)$ cette autre équation différentielle

$$(35_a)\qquad \begin{aligned} Z^{\text{IV}} + \frac{6}{y} Z''' + \left[4 - \frac{(2n+1)^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 6}{y^2}\right] Z'' \\ + \left[\frac{16}{y} + \frac{(2n+1)^2 - 12\nu^2 + 12\nu - 4}{y^3}\right] Z' \\ + \left[\frac{8}{y^2} + \frac{[(2n+1)^2 - 1](4\nu^2 - 4\nu)}{y^4}\right] Z = 0. \end{aligned}$$

Posons dans ces formules $\nu = 0$, nous obtiendrons les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les deux fonctions rationnelles introduites par M. C. Neumann, équations qui semblent être restées inaperçues jusqu'ici.

Il est digne d'être remarqué que les deux fonctions $\mathfrak{U}^{\nu,2n}(y)$, $\mathfrak{U}^{\nu,2n+1}(y)$ ne satisfont pas à des équations de la même forme, de sorte qu'il en sera de même pour les polynomes de M. Neumann. Or, les formules (35) (35_a) montrent que les fonctions $\mathfrak{U}^{\frac{\nu}{2},2n}(y)$, $\mathfrak{U}^{\frac{\nu+1}{2},2n+1}(y)$ satisfont toutes les deux, pour une parité quelconque de n, à cette équation commune

$$(35_b)\qquad \begin{aligned} Z^{\text{IV}} + \frac{6}{y} Z''' + \left(4 - \frac{n^2 - \nu^2 - 5}{y^2}\right) Z'' + \left(\frac{16}{y} + \frac{n^2 - 3\nu^2 - 1}{y^3}\right) Z' \\ + \left[\frac{8}{y^2} + \frac{(n^2-1)(\nu^2-1)}{y^4}\right] Z = 0. \end{aligned}$$

En se rappelant la formule (16) au nº 9 qui exprime $\mathfrak{W}^{\nu,n}(y)$ à l'aide de $\mathfrak{U}^{\nu,n}(y)$, on verra que la fonction rationnelle $\mathfrak{W}^{\nu,n}(y)$ doit satisfaire aussi à une équation différentielle linéaire et homogène de quatrième ordre.

Posons maintenant dans (35_b) $\nu = 0$, nous verrons que, sous ce point de vue, ce développement d'une série de puissances impaires

$$(\varepsilon) \qquad \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left[\mathfrak{J}^{n+\frac{1}{2}}(x)\right]^2,$$

indiqué pour la première fois par feu M. Lommel (1), deviendra analogue à celui de M. Neumann

$$(\varepsilon') \qquad \sum_{p=0}^{p=\infty} a'_p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} b'_n [\mathfrak{J}^n(x)]^2.$$

En effet, cherchons le développement de la fonction $\frac{1}{y-x}$, nous aurons simplement

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \mathfrak{S}^n(y) \left[\mathfrak{J}^{\frac{n}{2}}(x)\right]^2, \qquad |y| > |x|,$$

où $\mathfrak{S}^n(y)$, pour une parité quelconque de n, doit satisfaire à l'équation tirée de (35_b) en y posant $\nu = 0$. Cependant, cette analogie entre les séries (ε), (ε') ne semble être que d'une nature purement formelle.

En effet, posons dans (27_a) $\nu = \frac{1}{2}$, nous verrons que la série particulière ainsi obtenue représente une fonction entièrement différente de celle obtenue de (27) en y posont $\nu = 0$. C'est pourquoi j'ai préféré suivre, dans ces recherches, la marche indiquée par M. Neumann.

(1) *Mathematische Annalen*, t. II, p. 633; 1870.