A. DAVIDOGLOU

Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 359-444
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__359_0>

SUR L'ÉQUATION

DES

VIBRATIONS TRANSVERSALES

DES

VERGES ÉLASTIQUES,

PAR M. A. DAVIDOGLOU,

ÉLÈVE (ÉTRANGER) DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Le présent travail contient l'étude d'une équation du quatrième ordre que l'on rencontre en Physique mathématique. Nous avons fait cette étude en nous servant de la méthode des approximations successives. Dans ses Mémoires classiques sur les équations du second ordre, M. Picard, l'appliquant à des problèmes en quelque sorte particularisés, a obtenu des résultats très importants avec une remarquable simplicité. Cette méthode des approximations successives se présente d'ailleurs naturellement dans la question qui nous occupe, quand on envisage les intégrales comme fonctions d'un certain paramètre.

La première partie contient l'étude de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} = k\,\varphi(x)\,y. \tag{1}$$

Les méthodes de M. Picard s'appliquent à cette équation; des difficultés apparaissent quand on veut établir l'existence d'une suite infinie de valeurs remarquables de k. Une extension du théorème de Sturm pour les équations du second ordre nous est utile pour la représentation d'une fonction arbitraire au moyen d'intégrales remarquables de l'équation (1).

Dans la seconde partie nous étudions un développement asymptotique des intégrales de l'équation (1) par rapport à k. Nous avons tiré un très grand profit d'un Mémoire de M. Horn ([1]) sur les *équations du second ordre,* mais nous ne sommes pas encore arrivé à représenter asymptotiquement les valeurs remarquables de k. Il faudrait, pour cela, résoudre asymptotiquement une équation que nous formons.

Quelques Communications de ce qui précède ont été faites à l'Académie des Sciences.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Étude d'une équation auxiliaire.

1. Considérons l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \varphi(x) y, \tag{1}$$

la fonction $\varphi(x)$ étant positive et différente de zéro de a à b. Nous aurons à nous servir des intégrales de l'équation (1) tangentes à Ox en deux points et *non identiquement nulles.* Il s'agit donc de voir dans quels cas il existe de telles intégrales.

Pour cela faisons d'abord une remarque préliminaire. Si $\Psi(x)$ désigne une fonction positive de a à b, l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \Psi(x)$$

tangente à Ox en a et b est *positive dans l'intervalle ab.* C'est ce que

([1]) *Mathematische Annalen,* t. LII.

l'on vérifie immédiatement. Supposons, pour simplifier le calcul, $a = 0$; l'intégrale en question est

$$u = \frac{1}{6}\int_0^x [(x-z)^3 + P(x,z)]\,\Psi(z)\,dz + \frac{1}{6}\int_x^b P(x,z)\,\Psi(z)\,dz,$$

où $P(x, z)$ désigne le polynome

$$\frac{x^2(b-z)^2}{b^2}\left[3z - \frac{x}{b}(b+2z)\right].$$

$P(x, z)$ est donc positif de x à b et de plus

$$P(x,z) + (x-z)^3 = \frac{z^2(b-x)^2}{b^3}[b(x-z) + 2x(b-z)],$$

quantité positive de 0 à x. Remarquons en outre que l'intégrale $u(x)$ croît quand l'on remplace $\Psi(x)$ par une fonction plus grande.

Cela étant, nous démontrons d'abord le théorème suivant :

Si l'équation (1) *admet dans l'intervalle ab une intégrale $y(x)$ toujours positive et différente de zéro et telle, de plus, que*

$$y'(a) \geqq 0, \qquad y'(b) \leqq 0,$$

cette intégrale sera certainement donnée par la méthode des approximations successives (1).

Partons, pour les approximations successives, de la fonction y_0 vérifiant l'équation

$$\frac{d^4 y_0}{dx^4} = 0$$

et prenant, ainsi que $\frac{dy_0}{dx}$, en a et b les mêmes valeurs que y et $\frac{dy}{dx}$, respectivement. Le théorème de Rolle montre immédiatement que

---

(1) En général, toute intégrale positive de a à b et dont les conditions initiales et finales (ordonnée et tangente pour $x = a$, ordonnée et tangente pour $x = b$) sont telles que la cubique

$$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

déterminée par les mêmes conditions aux limites, soit positive de a à b, sera donnée par la méthode des approximations successives.

l'intégrale $y_0(x)$ est positive dans l'intervalle ab. Nous aurons ensuite les équations

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} = \varphi(x) y_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^4 y_n}{dx^4} = \varphi(x) y_{n-1},$$

les différentes fonctions y étant déterminées par les conditions initiales et finales suivantes

$$y_i(a) = y(a), \qquad y_i(b) = y(b),$$
$$y'_i(a) = y'(a), \qquad y'_i(b) = y'(b).$$

Nous allons démontrer que $y_i(x)$ *tend vers une limite quand l'indice i croît indéfiniment et que cette limite est précisément égale à $y(x)$.*

Envisageons l'équation

$$\frac{d^4(y - y_0)}{dx^4} = \varphi(x) y,$$

les différences $y - y_0$ et $y' - y'_0$ ayant leurs valeurs initiales et finales nulles. Il résulte de la remarque faite précédemment qu'on a constamment dans l'intervalle ab

$$y > y_0.$$

De même, l'équation

$$\frac{d^4(y - y_1)}{dx^4} = \varphi(x)(y - y_0)$$

donne

$$y > y_1 \qquad (\text{dans } ab),$$

et de l'équation

$$\frac{d^4(y_1 - y_0)}{dx^4} = \varphi(x) y_0$$

on conclut

$$y_1 > y_0 \qquad (\text{dans } ab).$$

En général on a, pour tout point x entre a et b,

$$y > y_i, \qquad y_i > y_j \qquad (i > j).$$

Il viendra donc finalement

$$o < y_0 < y_1 < \ldots < y_i < \ldots < y.$$

On en déduit d'abord

$$\frac{y - y_0}{y} < q < 1,$$

pour $a \leqq x \leqq b$, q étant un nombre fixe. Ensuite les deux équations

$$\frac{d^4(y - y_1)}{dx^4} = \varphi(x)(y - y_0),$$

$$\frac{d^4 q(y - y_0)}{dx^4} = q\varphi(x)y$$

montrent que

$$\frac{y - y_1}{y - y_0} < q.$$

D'une manière générale

$$\frac{y - y_n}{y - y_{n-1}} < q.$$

En multipliant toutes ces inégalités ($n = 0, 1, \ldots$) membre à membre on obtient

$$y - y_n < q^{n+1} y,$$

ce qui suffit pour établir la convergence *uniforme* de y_n vers y.

Une première conséquence de ce qui précède est qu'*il ne peut pas exister dans l'intervalle ab deux intégrales toujours positives et différentes de zéro, satisfaisant aux mêmes conditions initiales et finales (point et tangente positive ou nulle pour $x = a$, point et tangente négative ou nulle pour $x = b$).*

Ce théorème montre immédiatement que l'existence de $y(x)$ dans l'intervalle ab entraîne la *non-existence*, dans ce même intervalle, d'une intégrale $z(x)$, non identiquement nulle, tangente à Ox en a et b.

En effet, on peut toujours choisir une constante $C > 0$ telle que dans l'intervalle ab l'on ait

$$Z(x) = Cy(x) + z(x) > 0;$$

les deux intégrales $Z(x)$ et $Cy(x)$ sont toutes deux positives et différentes de zéro dans ab et satisfont aux mêmes conditions initiales et finales. Mais ceci est impossible, d'après ce que nous venons de voir, si $z(x) \neq 0$; on a donc

$$z(x) \equiv 0 \quad (^1).$$

2. Ce qui précède nous conduit naturellement à chercher dans quels intervalles ab existe une intégrale positive et telle que la méthode des approximations successives soit applicable.

Pour cela, nous commencerons les approximations successives avec la constante $y_0 = 1$; nous aurons ainsi la suite d'équations

$$\begin{aligned} \frac{d^4 y_0}{dx^4} &= 0, \\ \frac{d^4 y_1}{dx^4} &= \varphi(x) y_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^4 y_n}{dx^4} &= \varphi(x) y_{n-1}, \end{aligned}$$

où l'intégrale $y_i(x)$ est déterminée par les conditions

$$\left.\begin{aligned} y_i(a) &= y_i(b) = 1 \\ y'_i(a) &= y'_i(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$u_0 = y_0 = 1, \qquad u_1 = y_1 - y_0, \qquad \ldots, \qquad u_n = y_n - y_{n-1}, \qquad \ldots;$$

les conditions aux limites seront

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u_i(b) = 0, \\ u'_i(a) &= u'_i(b) = 0. \end{aligned}$$

Cela étant, envisageons les deux séries de constantes

$$W_{m,n} = \int_a^b \varphi(x) u_m u_n \, dx, \qquad V_{m,n} = \int_a^b \frac{d^2 u_m}{dx^2} \frac{d^2 u_n}{dx^2} \, dx,$$

analogues aux constantes de M. Schwarz. *Elles ne dépendent que de la somme $m + n$ des deux indices m, n.*

---

(1) Nous verrons plus tard que ce résultat subsiste même si les points de contact de $z(x)$ sont *dans* l'intervalle ab.

En effet, on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
W_{m,n} &= \int_a^b \frac{d^4 u_{m+1}}{dx^4}\, u_n\, dx &&= -\int_a^b \frac{d^3 u_{m+1}}{dx^3}\, \frac{du_n}{dx}\, dx \\
&= \int_a^b \frac{d^2 u_{m+1}}{dx^2}\, \frac{d^2 u_n}{dx^2}\, dx &&= -\int_a^b \frac{du_{m+1}}{dx}\, \frac{d^3 u_n}{dx^3}\, dx \\
&= \int_a^b u_{m+1}\, \frac{d^4 u_n}{dx^4}\, dx &&= \int_a^b \varphi(x)\, u_{m+1}\, u_{n-1}\, dx,
\end{aligned}$$

et de même

$$W_{m+1,n} = \int_a^b \frac{d^2 u_{m+1}}{dx^2}\, \frac{d^2 u_n}{dx^2} = \int_a^b \varphi(x)\, u_{m+1}\, u_{n-1}\, dx.$$

Donc

$$W_{m,n} = V_{m+1,n} = W_{m+n},$$

où l'on a posé

$$W_{m+n} = \int_a^b \varphi(x)\, u_{m+n}\, dx.$$

3. Cela étant, considérons la suite de constantes

$$(1) \qquad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots,$$

où

$$c_n = \frac{W_n}{W_{n-1}}.$$

Nous allons démontrer :

1° Que la suite (1) est croissante;

2° Qu'elle tend vers une limite c parfaitement déterminée.

1° L'inégalité

$$\int_a^b \varphi(x)(\alpha u_n + \beta u_{n+1})^2 dx > 0,$$

où α et β sont des constantes arbitraires, peut s'écrire

$$\alpha^2 W_{2n} + 2\alpha\beta W_{2n+1} + \beta^2 W_{2n+2} > 0,$$

d'après ce que nous avons vu au numéro précédent. On en conclut

$$W_{2n+1}^2 - W_{2n} W_{2n+2} < 0,$$

ou encore

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} < \frac{W_{2n+2}}{W_{2n+1}}.$$

De même l'inégalité

$$\int_a^b \left(\alpha \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \beta \frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2}\right)^2 dx > 0$$

donnera

$$\alpha^2 W_{2n-1} + 2\alpha\beta W_{2n} + \beta^2 W_{2n+1} > 0,$$

d'où

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}.$$

Il est *donc* démontré que l'on a

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \ldots < \frac{W_n}{W_{n-1}} < \ldots,$$

c'est-à-dire

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots.$$

2° Si M désigne le maximum de $u_1(x)$ dans l'intervalle ab, les différences

$$u_1 - M u_0, \quad u_2 - M u_1, \quad \ldots, \quad u_n - M u_{n-1}, \quad \ldots$$

sont toutes négatives dans le même intervalle, comme le montre l'équation

$$\frac{d^4(u_i - M u_{i-1})}{dx^4} = \varphi(x)(u_{i-1} - M u_{i-2}).$$

Or on a

$$W_{2n} - M W_{2n-1} = \int_a^b \varphi(x)\, u_n (u_n - M u_{n-1})\, dx,$$

et par suite, dans l'intervalle ab,

$$c_{2n} = \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < M.$$

La suite croissante

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots$$

tend donc vers une limite quand n croît indéfiniment. Cette limite sera désignée par c.

4. L'intégrale $u_n(x)$ de l'équation

$$\frac{d^4 u_n}{dx^4} = \varphi(x) u_{n-1}$$

peut s'écrire (*voir* n° 1)

$$u_n = \frac{1}{6}\int_a^x (x-z)^3 u_{n-1}(z)\varphi(z)\,dz + \frac{1}{6}\int_a^b \mathrm{P}(x, z) u_{n-1}(z)\varphi(z)\,dz,$$

où $\mathrm{P}(x, z)$ est un polynome en z et x. On pourra donc écrire, pour tout point x compris dans l'intervalle ab,

$$0 < u_n(x) < q\int_a^b \varphi(x)\, u_{n-1}(x)\,dx,$$

q étant un *nombre fixe*.

D'autre part, α et β étant des constantes arbitraires, l'inégalité

$$\int_a^b [\alpha\,\varphi(x)\, u_{n-1}(x) + \beta]^2\,dx > 0$$

donne

$$\left[\int_a^b \varphi(x)\, u_{n-1}(x)\,dx\right]^2 < (b-a)\int_a^b \varphi^2(x)\, u_{n-1}^2(x)\,dx.$$

De cette inégalité et de la précédente on tire

$$u_n^2(x) < q^2(b-a)\int_a^b \varphi^2(x)\, u_{n-1}^2(x)\,dx,$$

ou encore

$$\left[\frac{u_n(x)}{\sqrt{\mathrm{W}_{2n}}}\right]^2 < \mathrm{K}\frac{\mathrm{W}_{2n-2}}{\mathrm{W}_{2n}},$$

K étant un nombre fixe. Il vient donc finalement

$$\frac{u_n(x)}{\sqrt{\mathrm{W}_{2n}}} < \mathrm{Q} \qquad (\mathrm{Q} = \text{quantité fixe})$$

si l'on a eu soin de remarquer que $\frac{\mathrm{W}_{2n-2}}{\mathrm{W}_{2n}}$ a une limite pour $n = \infty$ $\left(\lim\limits_{n=\infty} \frac{\mathrm{W}_{2n-2}}{\mathrm{W}_{2n}} = \frac{1}{c^2}, \text{ n}^\circ\ 2\right)$.

L'inégalité précédente est fondamentale. Elle montre que la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

converge *uniformément* dans tout l'intervalle ab, si la série

$$\sqrt{W_0} + \sqrt{W_2} + \ldots + \sqrt{W_{2n}} + \ldots$$

est convergente. Or, pour cette série, la condition de convergence est manifeste; on a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{2n}}{W_{2n-2}}} = c.$$

Si donc $c < 1$, les approximations successives convergent dans l'intervalle ab, et nous formons ainsi une intégrale

$$y = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

toujours positive, telle que

$$y(a) = y(b) = 1,$$
$$y'(a) = y'(b) = 0,$$

et vérifiant l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \varphi(x) y \text{ [1]}.$$

Si $c > 1$ la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

ne peut pas converger *uniformément* dans l'intervalle ab. En effet, puisque

$$W_n = \int_a^b \varphi(x) u_n(x)\, dx,$$

la série

$$W_0 + W_1 + \ldots + W_n + \ldots$$

(1) La convergence uniforme des séries $\sum_0^\infty u_i'(x)$, $\sum_0^\infty u_i''(x)$ et $\sum_0^\infty u_i'''(x)$ s'établit d'une manière identique à celle employée pour la série $\sum_0^\infty u_i(x)$.

converge si la série

$$u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

converge uniformément dans ab et la première est divergente si $c>1$.

5. Ce dernier résultat nous permet de répondre en partie à la question posée au n° 1 à savoir, quels sont les intervalles ab dans lesquels une intégrale doublement tangente à Ox, positive de a à b, est identiquement nulle.

Une intégrale doublement tangente à Ox, de signe constant ou variable, est identiquement nulle dans tout intervalle ab tel que la quantité c correspondante soit inférieure à l'unité.

Remarquons d'abord que cette quantité c peut être définie comme la limite, pour $n=\infty$, de $\sqrt[n]{W_n}$. Cela étant, nous allons démontrer que la quantité c_1 correspondant à un intervalle a_1b_1 *intérieur* à ab, est moindre que c.

Pour cela, envisageons l'équation

$$\frac{d^4u}{dx^4}=\varphi(x)$$

et les intégrales $u_1(x)$ et $v_1(x)$ doublement tangentes à Ox, la première en a, b, la seconde en a_1, b_1. Ces intégrales peuvent s'écrire

$$6u_1=\int_a^x[(x-z)^3+\mathrm{P}\,(x,z)]\varphi(z)\,dz+\int_x^b\mathrm{P}\,(x,z)\varphi(z)\,dz,$$

$$6v_1=\int_{a_1}^x[(x-z)^3+\mathrm{P}_1(x,z)]\varphi(z)\,dz+\int_x^b\mathrm{P}_1(x,z)\varphi(z)\,dz,$$

où

$$\mathrm{P}(x,z)=\frac{(b-z)_2(x-a)^2}{(b-a)^3}[3(b-a)(z-x)+2(x-a)(b-z)],$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}(x,z)&=\mathrm{P}(x,z)+(x-z)^3\\&=\frac{(b-x)^2(z-a)^2}{(b-a)^3}[(b-a)(x-z)+2(x-a)(b-z)];\end{aligned}$$

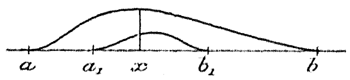
$\mathrm{P}_1(x,z)$ et $\mathrm{Q}_1(x,z)=\mathrm{P}_1+(x-z)^3$ sont les polynomes P et Q où l'on a remplacé a par a_1, b par b_1. Formons la différence $u_1 - v_1$; il viendra

$$6(u_1 - v_1) = \int_a^{a_1} Q\varphi\,dz + \int_{a_1}^{x} (Q - Q_1)\varphi\,dz + \int_x^{b_1} (P - P_1)\varphi\,dz + \int_{b_1}^{b} P\varphi\,dz.$$

Il suffit donc de démontrer les inégalités suivantes

$$P > P_1 \qquad (\text{de } x \text{ à } b_1),$$
$$Q > Q_1 \qquad (\text{de } a_1 \text{ à } x).$$

Fig. 1.



La première s'écrit

$$\frac{(b-z)^2(x-a)^2}{(b-a)^3}[3(b-a)(z-x)+2(x-a)(b-z)],$$
$$> \frac{(b_1-z)^2(x-a_1)^2}{(b_1-a_1)^3}[3(b_1-a_1)(z-x)+2(x-a_1)(b_1-z)],$$

ou encore

$$\frac{(b-z)(x-a)}{b-a} - \frac{(b_1-z)(x-a_1)}{b_1-a_1} > 0 \qquad (\text{de } x \text{ à } b_1).$$

Cette inégalité est vraie pour $z = b_1$; pour $z = x$ elle peut s'écrire

$$\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} - \frac{(b_1-x)(x-a_1)}{b_1-a_1} = \frac{1}{\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{b-x}} - \frac{1}{\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{1}{b_1-x}} > 0.$$

Passons à la seconde inégalité

$$Q > Q_1 \qquad (\text{de } a_1 \text{ à } x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{(b-x)^2(z-a)^2}{(b-a)^3}[(b-a)(x-z)+2(x-a)(b-z)]$$
$$> \frac{(b_1-x)^2(z-a_1)^2}{(b_1-a_1)^3}[(b_1-a_1)(x-z)+2(x-a_1)(b_1-z)].$$

Elle est une conséquence des inégalités suivantes

$$\left.\begin{aligned}\frac{(b-x)(z-a)}{b-a} &> \frac{(b_1-x)(z-a_1)}{b_1-a_1}\\ \frac{(b-z)(z-a)}{b-a} &> \frac{(b_1-z)(z-a_1)}{b_1-a_1}\end{aligned}\right\} \quad (a_1 \leqq z \leqq x).$$

Il est donc démontré que

$$u_1 > v_1 \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1).$$

On aura de même

$$u_2 > v_2,$$

u_2, v_2 étant respectivement les intégrales des équations

$$\frac{d^4 u_2}{dx^4} = \varphi(x)\, u_1(x),$$

$$\frac{d^4 v_2}{dx^4} = \varphi(x)\, v_1(x),$$

tangentes à Ox la première en (a, b), la seconde en (a_1, b_1).

D'une manière générale

$$u_n > v_n \qquad (a_1 \leqq x \leqq b_1),$$

et, par suite,

$$W_n = \int_a^b \varphi(x)\, u_n\, dx > \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x)\, v_n\, dx = W_n^1.$$

Finalement

$$c = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{W_n} > c_1.$$

Cela étant établi, revenons à la question que nous nous sommes posée. Soit y_1 une intégrale doublement tangente à $Ox(a_1, b_1)$, ces deux points étant intérieurs à ab. Pour l'intervalle $a_1 b_1$ on aura $c_1 < c < 1$. Les approximations successives convergent pour cet intervalle et nous pouvons déterminer une intégrale $Y_1(x)$ positive de a_1 à b_1 et telle que

$$Y_1(a_1) = Y_1(b_1) = 1,$$
$$Y_1'(a_1) = Y_1'(b_1) = 0.$$

Donc, d'après ce que nous avons vu à la fin du n° 1,

$$y_1(x) \equiv 0.$$

Une conséquence intéressante de ce théorème est qu'à l'*intérieur* d'un intervalle pour lequel $c = 1$, *une intégrale de l'équation*

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \varphi(x) y$$

est parfaitement déterminée par deux points et les tangentes en ces deux points.

6. Il nous reste à examiner le cas où $c = 1$. Nous allons démontrer que dans ce cas il existe pour l'équation (1) une intégrale doublement tangente à Ox (en a et b), positive de a à b et non identiquement nulle.

A cet effet, nous ferons voir successivement :

1° Que le produit

$$P_n = \frac{c_1}{c} \frac{c_2}{c} \cdots \frac{c_n}{c}$$

tend vers une limite pour $x = \infty$, *limite qui est différente de zéro ;*

2° Que le rapport

$$u'_n = \frac{u_n}{c^n}$$

tend aussi vers une limite différente de zéro quand n augmente indéfiniment.

1° Dans le produit P_n chaque terme est plus petit que *un ;* ce produit décroît donc avec $\frac{1}{n}$ et tend par suite vers une limite pour $n = \infty$. D'autre part, nous avons vu (n° 4) que

$$\frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} < Q.$$

Si l'on tient compte de cette inégalité, la relation

$$W_{2n} = \int_a^b \varphi(x) u_n^2(x) dx,$$

qu'on peut aussi écrire

$$1 = \int_a^b \varphi(x) \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} dx,$$

donne

$$\int_a^b \varphi(x) \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} dx > \frac{1}{Q}$$

ou encore

$$\frac{W_n}{\sqrt{W_{2n}}} > \frac{1}{Q}.$$

Cela étant, de

$$\frac{W_1}{W_0} = c_1, \qquad \frac{W_2}{W_1} = c_2, \qquad \dots \qquad \frac{W_n}{W_{n-1}} = c_n,$$

on tire

$$W_n = W_0 c_1 c_2 \dots c_n,$$

et par suite, le rapport

$$\frac{W_n^2}{W_{2n}} = W_0 \frac{c_1^2}{c_1 c_2} \frac{c_2^2}{c_3 c_4} \dots \frac{c_n^2}{c_{2n-1} c_{2n}},$$

qui décroît avec $\frac{1}{n}$ tout en restant supérieur à $\frac{1}{Q^2}$, tend vers *une limite différente de zéro*. Il en est donc de même pour le produit

$$\frac{c_1}{c_2} \frac{c_2}{c_4} \dots \frac{c_n}{c_{2n}},$$

car

$$\frac{c_i}{c_{2i-1}} < 1.$$

Or les relations

$$\frac{c_1}{c} = \frac{c_1}{c_2} \frac{c_2}{c_4} \frac{c_4}{c_8} \dots,$$

$$\frac{c_3}{c} = \frac{c_3}{c_6} \frac{c_6}{c_{12}} \frac{c_{12}}{c_{24}} \dots,$$

$$\frac{c_5}{c} = \frac{c_5}{c_{10}} \frac{c_{10}}{c_{20}} \frac{c_{20}}{c_{40}} \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

montrent que le produit

$$\frac{c_1}{c} \frac{c_3}{c} \frac{c_5}{c} \dots$$

a même limite que

$$\frac{c_1}{c_2} \frac{c_2}{c_4} \frac{c_4}{c_8} \dots.$$

C'est donc une quantité *différente de zéro*.

On démontrera de la même manière que le produit

$$\frac{c_2}{c}\,\frac{c_4}{c}\,\frac{c_6}{c}\cdots$$

a même limite que

$$\frac{c_2}{c_4}\,\frac{c_4}{c_8}\cdots.$$

Leur produit

$$\frac{c_1}{c}\,\frac{c_2}{c}\,\frac{c_3}{c}\cdots$$

aura donc une limite *différente de zéro*.

2° Posons

$$W'_n = \int_a^b \varphi(x)\, u'_n\, dx,$$

où

$$u'_n = \frac{u_n}{c^n}.$$

Il vient

$$W'_n = \frac{W_n}{c^n} = W_0 \frac{c_1}{c}\,\frac{c_2}{c}\cdots\frac{c_n}{c}.$$

D'après ce que nous venons de voir, W'_n a une limite *différente de zéro* pour $n = \infty$.

Cela étant, l'inégalité

$$\int_a^b [\alpha\varphi(x)\,|\,u'_n - u'_{n+k}\,| + \beta\,]^2 dx > 0,$$

où α et β sont des constantes arbitraires, donne

$$(e)\qquad \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,|\,u'_n - u'_{n+k}\,|\, dx \right\}^2 < (b-a)\int_a^b \varphi^2(x)\,(u'_n - u'_{n+k})^2\, dx.$$

D'autre part, les deux équations

$$\frac{d^4(u'_{n+1} - u'_{n+k+1})}{dx^4} = \frac{\varphi(x)}{c}(u'_n - u'_{n+k}),$$

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} = \frac{\varphi(x)}{c}\,|\,u'_n - u'_{n+k}\,|,$$

où $\theta(x)$ désigne une intégrale doublement tangente à Ox (a, b), montrent que

$$(e') \qquad \theta > |u'_{n+1} - u'_{n+k+1}|.$$

En effet, l'expression de $\theta(x)$ est

$$6\theta(x) = \int_a^x \frac{\varphi(z)}{c} |u'_n - u'_{n+k}| [(x-z)^3 + P(x, z)]\, dz$$
$$+ \int_a^b \frac{\varphi(z)}{c} |u'_n - u'_{n+k}| P(x, z)\, dz.$$

Aux deux inégalités (e), (e') nous adjoindrons une troisième (nº 4) :

$$\theta < q \int_a^b \frac{\varphi(z)}{c} |u'_n - u'_{n+k}|\, dz$$

dont une combinaison avec les deux autres est

$$(u'_{n+1} - u'_{n+k+1})^2 < q_1 \int_a^b \varphi(x)(u'_n - u'_{n+k})^2\, dx,$$

où q_1 dépend de l'intervalle ab et du maximum de $\varphi(x)$ dans cet intervalle.

Or

$$\int_a^b \varphi(x)(u'_n - u'_{n+k})^2\, dx = W'_{2n} - 2W'_{2n+k} + W'_{2n+2k},$$

et, puisque W'_n tend vers une limite, le second membre est inférieur à toute quantité $\frac{\varepsilon^2}{q_1}$ donnée à l'avance si n est suffisamment grand et cela quel que soit k. Donc, en tenant compte de l'inégalité précédente,

$$|u'_{n+1} - u'_{n+k+1}| < \varepsilon.$$

Ainsi se trouve établie l'existence d'une limite pour $u'_n(x)$; cette fonction tend vers sa limite $u'(x)$ d'une manière *uniforme*, d'après ce qui précède.

Faisons encore deux remarques essentielles.

La limite $u'(x)$ est certainement *différente de zéro*. En effet, on a

$$W'_n = \int_a^b \varphi(x)\, u'_n(x)\, dx$$

et nous savons que la limite de W'_n est différente de zéro.

La fonction $u'(x)$ vérifie l'équation

$$\frac{d^4 u'}{dx^4} = \frac{\varphi(x)}{c} u';$$

elle est tangente à Ox en a et b.

7. Les conclusions à tirer de ce qui précède sont tout indiquées. Supposons que pour une position du point b, $b = b_1$, la quantité c correspondant à l'intervalle ab_1 soit égale à l'unité. L'équation précédente devient l'équation que nous étudions

$$(1) \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = \varphi(x) y$$

et nous obtenons ainsi *une intégrale $u'(x)$ de cette équation, non identiquement nulle, positive et tangente à Ox en a et b_1.*

Réciproquement, si ab_1 est un intervalle tel qu'il existe pour l'équation (1) une intégrale $v'(x)$, *positive* et tangente à Ox en a et b_1, la quantité c correspondante est égale à l'unité.

En effet, à l'intervalle ab_1 correspond une fonction $u'(x)$ *positive* dans cet intervalle, vérifiant l'équation

$$\frac{d^4 u'}{dx^4} = \frac{\varphi(x)}{c} u',$$

et touchant l'axe des x en a et b_1. De cette équation et de la suivante

$$\frac{d^4 v'}{dx^4} = \varphi(x) v',$$

on tire la relation

$$v' \frac{d^4 u'}{dx^4} - u' \frac{d^4 v'}{dx^4} = \frac{1-c}{c} \varphi(x) u' v',$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{d}{dx}\left(v' \frac{d^3 u'}{dx^3} - u' \frac{d^3 v'}{dx^3} + \frac{d^2 v'}{dx^2} \frac{du'}{dx} - \frac{d^2 u'}{dx^2} \frac{dv'}{dx} \right) = \frac{1-c}{c} \varphi(x) u' v'.$$

Intégrons les deux membres entre a et b_1; le premier membre ne donne rien et il reste

$$\frac{1-c}{c}\int_a^{b_1}\varphi(x)\,u'v'\,dx=0,$$

ce qui exige évidemment $c=1$, les intégrales $u'(x)$, $v'(x)$ n'étant pas identiquement nulles.

7 *bis*. Pour calculer effectivement la quantité c correspondant à un intervalle donné ab il faut former la suite de quotients $\frac{W_n}{W_{n-1}}$ et déterminer sa limite. Ce calcul est évidemment très pénible. Mais je dis que si l'on peut trouver trois fonctions continues dans l'intervalle ab, soient $\rho(x)$, $\mu(x)$ et $\lambda(x)$, telles que l'on ait dans ce même intervalle

$$\rho'(x)-\rho^2(x)>2\mu(x)$$

$$\lambda'(x)-\varphi(x)>\mu^2(x)+\frac{[\lambda(x)-\mu'(x)+\mu(x)\rho(x)]^2}{\rho'(x)-\rho^2(x)-2\mu(x)},$$

la constante c correspondante est moindre que l'unité.

En effet, des égalités

$$W_{2m-1}-W_{2m}=\int_a^b\left[\left(\frac{d^2u_m}{dx^2}\right)^2-\varphi(x)u_m^2\right]dx,$$

$$0=\int_a^b\frac{d}{dx}(\lambda u_m^2-2\mu u_m u'_m+\rho u'^2_m)\,dx$$

on tire

$$\begin{aligned}W_{2m-1}-W_{2m}=\int_a^b\big\{&u''^2_m+(\rho'-2\mu)u'^2_m+[\lambda'-\varphi(x)]u_m^2\\&+2\rho u''_m u'_m+2(\lambda-\mu')u'_m u_m-2\mu u_m u''_m\big\}\,dx,\end{aligned}$$

et la forme quadratique entre parenthèses est certainement positive si les inégalités précédentes sont vérifiées. On aura donc, dans ce cas,

$$\frac{W_{2m}}{W_{2m-1}}<1,$$

et, par suite, $c<$ ou $=$ à l'unité. Mais on ne peut pas avoir $c=1$. En effet (6), on a, dans ce cas,

$$\int_a^b\left[\frac{d^4u'}{dx^4}-\varphi(x)u'\right]u'\,dx=0.$$

et, en intégrant par parties :

$$\int_a^b \left[\left(\frac{d^2 u'}{dx^2}\right)^2 - \varphi(x)\, u'^2\right] dx = 0.$$

Cette égalité et la suivante

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left[\lambda u'^2 - 2\mu u' \frac{du'}{dx} + \rho\left(\frac{du'}{dx}\right)^2\right] dx = 0$$

donnent évidemment lieu à une contradiction, l'intégrale $u'(x)$ n'étant pas identiquement nulle. *On a donc* $c < 1$.

En particulier, la constante c sera inférieure à l'unité si l'on peut trouver une fonction $\lambda(x)$ continue dans l'intervalle ab et telle que

$$\lambda' - \lambda^2 > \varphi(x).$$

Cette dernière inégalité se présente dans l'étude analogue de l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \varphi(x) y = 0 \; (^1).$$

Il est intéressant de remarquer que pour cette dernière équation, et même pour l'équation à deux variables

$$\Delta u + \Psi(x, y) u = 0,$$

où $\Psi(x,y)$ est une fonction positive dans un certain domaine, la condition correspondante (²)

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - \Psi(x, y) > B^2 + B'^2$$

est aussi nécessaire. Si, en effet, la constante de Schwarz relative à l'équation précédente est moindre que l'unité on peut toujours choisir une quantité positive ε assez petite pour qu'il en soit de même pour l'équation

$$\Delta v + [\Psi(x, y) + \varepsilon] v = 0.$$

(¹) *Voir* PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 103.

(²) *Ibid.*, t. II, p. 24.

Or, on sait que dans ce cas on peut trouver une intégrale V telle que les deux fonctions

$$B = -\frac{V'_x}{V}, \qquad B' = -\frac{V'_y}{V}$$

soient *continues* dans le domaine limité par le contour donné. Ces deux fonctions vérifient la relation

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - \Psi(x, y) = \varepsilon + B^2 + B'^2,$$

d'où il résulte l'inégalité précédente.

En ce qui concerne l'équation du quatrième ordre il est vraisemblable que les conditions données plus haut représentent des conditions nécessaires en y ajoutant toutefois quelques conditions aux limites pour les fonctions λ, μ et ρ.

8. Occupons-nous maintenant des intervalles ab plus grands que ab_1. Pour de tels intervalles nous sommes assurés que les approximations successives, telles que nous les avons dirigées au n° 2, ne convergent plus.

En particulier, il n'existe pas pour ces intervalles d'intégrales toujours *positives*, doublement tangentes à l'axe des x. Mais nous allons démontrer qu'il existe une suite infinie de points

$$b_2, \quad b_3, \quad \ldots, \quad b_m, \quad \ldots,$$

telle que l'intégrale $y_n(x)$ soit tangente à Ox en a et b_n et change $(n-1)$ fois de signe dans l'intervalle ab_n.

Désignons par $y_1(x)$ l'intégrale tangente à Ox en a et b_1 et posons

$$\begin{aligned} \omega &= y''_1(a) > 0, \\ \omega_1 &= y'''_1(a) < 0. \end{aligned}$$

Ces inégalités sont une conséquence immédiate de l'équation (1).

Nous envisageons l'intégrale $y_\lambda(x)$ de cette même équation, telle que

$$\begin{gathered} y_\lambda(a) = y'_\lambda(a) = 0, \\ y''_\lambda(a) = \omega, \qquad y'''_\lambda(a) = \lambda < \omega_1; \end{gathered}$$

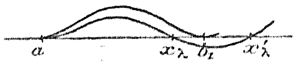
$y_\lambda(x)$ est une fonction continue de λ qu'on peut déterminer de proche en proche. Considérons d'autre part les intégrales

$$y_1(x) - y_\lambda(x) = z_\lambda(x) \qquad (\lambda < \omega_1),$$
$$y_\lambda(x) - y_{\lambda'}(x) = z_{\lambda'}(x) \qquad (\lambda' < \lambda < \omega_1).$$

Elles sont positives et croissantes d'après l'équation (1) et d'après les conditions initiales qui les définissent; de plus on voit facilement que :

1° Pour λ voisin de ω_1, $y_\lambda(x)$ coupe Ox en x_λ et x'_λ voisins de b_1

Fig. 2.



et situés de part et d'autre de ce point; elle est positive de a à x_λ, négative de x_λ à x'_λ;

2° Quand λ décroît x_λ va vers la gauche et x'_λ vers la droite, x_λ étant à chaque instant le seul zéro compris *entre* a et b_1.

Supposons qu'il existe un point $b'(\overline{ab'} > \overline{ab_1})$ tel que pour l'intervalle $b_1 b'$ la quantité c soit égale à l'unité. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x'_\lambda}$, qui commence par être positive, *s'annulera certainement entre* b_1 *et* b'. En effet, entre deux intégrales $y(x)$ et $Y(x)$ de l'équation (1) on a la relation

$$y\frac{d^3Y}{dx^3} - Y\frac{d^3y}{dx^3} = \text{const} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{dY}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Prenons $y = y_1$, $Y = y_\lambda$; la constante est nulle comme on le voit en faisant $x = a$; pour $x = b_1$ on obtient la relation

$$\left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{b_1} = (y_\lambda)_{b_1}\frac{\left(\frac{d^3y_1}{dx^3}\right)_{b_1}}{\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_{b_1}} < 0.$$

Le théorème de Rolle et l'équation (1) montrent, en effet, que les fonctions $\frac{d^2y_1}{dx^2}$ et $\frac{d^3y_1}{dx^2}$ s'annulent deux fois et une fois, respectivement, entre a et b_1 et par suite

$$\left(\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_{x=b_1} > 0, \qquad \left(\frac{d^3 y_1}{dx^3}\right)_{x=b_1} > 0.$$

On a donc finalement

$$\left[\frac{d(-y_\lambda)}{dx}\right]_{x=b_1} > 0, \qquad \left[\frac{d(-y_\lambda)}{dx}\right]_{x=b'} \leqq 0,$$

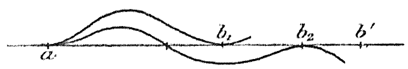
en supposant que la fonction $\left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{x'_\lambda}$ *conserve le même signe de* b_1 *à* b'_1.
Mais les inégalités précédentes sont impossibles, car elles montrent que les approximations successives convergent, pour l'intégrale $[-y_\lambda(x)]$, dans l'intervalle $b_1 b'$ où cette intégrale est positive, ce qui est évidemment incompatible avec l'existence d'une intégrale positive, tangente à Ox en b et b'.

Il est ainsi établi que pour une valeur de λ, $\lambda = \omega_2 (\omega_2 < \omega_1)$, l'intégrale $y_2(x)$ de l'équation (1) définie par les conditions initiales

$$y_2(a) = y'_2(a) = 0,$$
$$y''_2(a) = \omega, \qquad y'''_2(a) = \omega_2,$$

est tangente à l'axe des x en a et $b_2 (ab_1 < ab_2 < ab')$ et change une fois de signe *dans* ab_1.

Fig. 3.



L'intégrale $y_2(x)$ *ne s'annule plus à partir du point* $x = b_2$. En effet, le théorème de Rolle montre immédiatement que la fonction $\frac{d^3 y_2}{dx^3}$ s'annule deux fois entre a et b_2; comme elle est négative en a elle sera négative pour $x = b_2$; d'autre part, $\frac{d^2 y_2}{dx^2}$ qui s'annule trois fois et est positive en a, sera négative en b_2. En ce dernier point, on aura donc

$$y_2(b_2) = y'_2(b_2) = 0,$$
$$y''_2(b_2) < 0, \qquad y'''_2(b_2) < 0,$$

et l'équation différentielle (1) montre que

$$y_2(x) < 0,$$

pour tout point $x > b_2$.

9. L'existence du point b_3 s'établit d'une manière entièrement analogue. Faisons parcourir à λ les mêmes valeurs, mais en sens contraire, à partir de ω_2. Nous envisageons, comme plus haut, l'intégrale $y_\lambda(x)$ telle que

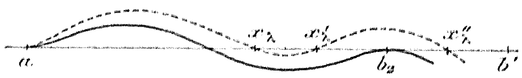
$$y_\lambda(a) = y'_\lambda(a) = 0,$$
$$y''_\lambda(a) = \omega, \qquad y'''_\lambda(a) = \lambda \qquad (\omega_2 \leqq \lambda < \omega_1).$$

La considération des intégrales

$$y_\lambda(x) - y_2(x) = z_\lambda(x),$$
$$y_{\lambda'}(x) - y_\lambda(x) = z_{\lambda'}(x) \qquad (\lambda < \lambda' < \omega_1),$$

toutes positives et croissantes d'après l'équation (1), montre, comme

Fig. 4.



plus haut, que pour λ voisin de ω_2, $y_\lambda(x)$ a la forme indiquée en pointillé dans la *fig.* 1; que, de plus, les points x_λ, x''_λ vont vers la droite, le point x'_λ allant vers la gauche. Soit b' le point tel qu'il existe une intégrale positive tangente à Ox en b_2 et b'. La dérivée $\left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{x''_\lambda}$ *s'annulera certainement entre b_2 et b'*. En effet, on démontre comme plus haut que

$$\left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{x=b_2} > 0.$$

Si l'on avait $\left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{x=b_1} \leqq 0$, les approximations successives convergeraient pour l'intervalle b_2b', ce qui est absurde. Soit

$$x''_\lambda = b_3 \qquad (\overline{ab_2} < \overline{ab_3} < \overline{ab'}),$$

le point de Ox pour lequel $\left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{x''_\lambda}$ s'annule (¹). L'intégrale $y_3(x)$ ainsi obtenue est tangente à Ox en a et b_3 et change deux fois de signe dans l'intervalle $\overline{ab_3}$; de plus le théorème de Rolle montre qu'elle ne s'annule plus à partir de $x = b_3$.

Le raisonnement est évidemment général et le théorème énoncé se trouve ainsi complètement établi.

Faisons encore une remarque qui nous sera très utile pour ce qui va suivre. Soient ab_1, $b_1b'_1$, $b'_1b''_1$, ... les intervalles pour lesquels les nombres c correspondants sont égaux à l'unité (un quelconque de ces intervalles peut être infini) : on aura

$$\overline{ab_n} < \overline{ab_1}^{(n-1)} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

II.

Étude de l'équation $\frac{d^4y}{dx^4} = k\varphi(x)y$.

10. Dans cette section nous envisageons les équations de la forme

$$\frac{d^4y}{dx^4} = k\varphi(x)y. \tag{1}$$

où k est un paramètre arbitraire et $\varphi(x)$ une fonction continue, positive et différente de zéro dans un intervalle ab. Dans tout ce qui va suivre cet intervalle restera le même : nous ferons varier le paramètre k et nous déterminerons les valeurs de ce paramètre pour lesquelles il existe une intégrale de l'équation correspondante tangente à Ox en a et b. Nous verrons dans un instant que toutes ces valeurs sont réelles et positives. Pour de telles valeurs de k, posons

$$c'_n = \frac{W'_n}{W'_{n-1}}$$

(¹) Les deux points x_λ, x'_λ seront distincts, une intégrale doublement tangente à Ox ne s'annulant plus à partir du second point de contact (théorème de Rolle).

où, comme dans la section précédente,

$$W'_n = \int_a^b k\varphi(x)\, u'_n\, dx.$$

Prenons $u'_0 = 1$; les autres fonctions u' seront déterminées par les équations

$$\frac{d^4 u'_1}{dx^4} = k\varphi(x)\, u'_0,$$

$$\frac{d^4 u'_2}{dx^4} = k\varphi(x)\, u'_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^4 u'_m}{dx^4} = k\varphi(x)\, u'_{m-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

les conditions initiales et finales étant

$$u'_m(a) = u'_m(b) = 0,$$

$$\frac{du'_m(a)}{dx} = \frac{du'_m(b)}{dx} = 0,$$

pour $m = 1, 2, \dots$.

Soit c' la limite des quantités c'_n

$$c' = \lim_{n=\infty} c'_n.$$

Si c désigne la limite des quantités c_n,

$$c_n = \frac{W_n}{W_{n-1}},$$

relatives à l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \varphi(x) y,$$

les égalités

$$u_0 = u'_0 = 1,$$

$$\frac{d^4(u'_1 - ku_1)}{dx^4} = 0.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^4(u_m - k^m u_m)}{dx^4} = 0,$$

donnent, si l'on tient compte des conditions initiales et finales,

$$u'_1 = k u_1, \qquad \ldots, \qquad u'_m = k^m u_m.$$

La valeur de c'_n devient alors

$$c'_n = \frac{W'_n}{W'_{n-1}} = k c_n$$

et, par suite,

$$c' = kc.$$

11. La relation précédente montre que pour $k < \frac{1}{c}$ les approximations successives convergent dans l'intervalle ab et que, par suite, une intégrale doublement tangente à l'axe des x dans cet intervalle est *identiquement nulle*. Au contraire, pour

$$k_1 = \frac{1}{c},$$

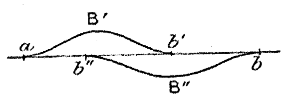
l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k_1 \varphi(x) y$$

admet une intégrale tangente à Ox en a et b et constamment positive dans cet intervalle. D'autre part, nous avons vu (n° 9) qu'une équation telle que la précédente admet une intégrale tangente à Ox en a et b_1, ce dernier point étant à droite de $x = b$, et que, de plus, cette intégrale change une fois de signe dans l'intervalle ab_1.

Cela étant, faisons croître k à partir de la valeur $k = k_1$. Nous aurons deux intégrales telles que $aB'b'$ et $bB''b''$; ces intégrales n'étant déter-

Fig. 5.



minées qu'à un facteur constant près, je puis les figurer l'une au-dessus de Ox, l'autre au-dessous. k continuant à croître, le point b' marchera vers la gauche et le point b'' vers la droite. Il arrivera donc un moment où les points b' et b'' coïncideront. Soient k'_1 la valeur de k pour laquelle ceci a lieu et β le point de contact commun. Les deux intégrales $aB'\beta$, $bB''\beta$ ne forment *jamais* une seule et unique intégrale. Mais, d'après ce que nous avons vu au n° 8, l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k'_1 \varphi(x) y$$

admet une intégrale tangente à Ox en a et β', ce dernier point étant tel que

$$\overline{a\beta} < \overline{a\beta'} < \overline{ab};$$

de plus, cette intégrale change une fois de signe dans l'intervalle ab.

En résumé, le second point de contact qui pour $k = k_1$ était en b_1, c'est-à-dire *en dehors* de l'intervalle ab, est venu pour $k = k'_1$ en β', c'est-à-dire *à l'intérieur* du même intervalle. Comme il varie d'une manière continue avec le paramètre k (¹), il a dû passer en $x = b$. Nous obtenons ainsi une valeur de k, $k = k_2$, plus grande que k_1 et plus petite que k'_1, pour laquelle l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k_2 \varphi(x) y$$

admet une intégrale tangente à l'axe des x en a et b, changeant une seule fois de signe dans ab.

Le raisonnement est évidemment général. L'équation ci-dessus admet une intégrale tangente à Ox en a et $b_n^{(k_2)}$ $(\overline{ab_n^{(k_2)}} < \overline{ab})$ et changeant $(n-1)$ fois de signe dans l'intervalle $ab_n^{(k_2)}$. D'autre part, on peut prendre $k = k'$ assez grand pour que, relativement à l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k' \varphi(x) y,$$

la quantité que nous avons désignée par $\overline{ab_1^{(n-1)}}$ (n° 9) soit plus petite que $\overline{ab}$. On aura donc pour cette équation

$$\overline{ab_n^{(k')}} < \overline{ab}.$$

Cette inégalité, jointe à la suivante

$$\overline{ab_n^{(k_2)}} > \overline{ab},$$

(¹) *Voir* le n° 19.

montre que le point de contact $b_n^{(k_2)}$ est venu à l'*intérieur* de ab pour $k = k'$; comme, d'autre part, il varie d'une manière continue avec k, il a dû passer par le point $x = b$.

L'existence d'une suite infinie

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$$

de valeurs de k, pour laquelle l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\varphi(x) y$$

admet des intégrales tangentes aux deux extrémités de l'intervalle ab, se trouve ainsi complètement établie. L'intégrale $y(x)$ correspondant à $k = k_n$ s'annule $(n-1)$ fois *entre* a et b.

12. Les quantités k_n peuvent aussi être définies comme les racines d'une équation entière que nous allons former. Pour cela envisageons quatre intégrales distinctes de l'équation (1)

$$y_0(x, k), \quad y_1(x, k), \quad y_2(x, k), \quad y_3(x, k),$$

prenant ainsi que leurs trois premières dérivées des valeurs *numériques* arbitrairement données; nous supposerons ces valeurs simplement assujetties à rendre différent de zéro un certain déterminant bien connu. Les quatre fonctions ci-dessus sont, d'après un théorème connu, des fonctions entières de la variable k.

Cela étant, une solution quelconque de l'équation (1) est de la forme

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3,$$

où c_0, c_1, c_2 et c_3 sont des constantes arbitraires. Les valeurs de k qui nous intéressent sont telles qu'on puisse déterminer les constantes c, *non toutes nulles*, par les conditions initiales et finales suivantes

$$y(a) = y(b) = 0, \qquad y'(a) = y'(b) = 0;$$

elles vérifient donc l'équation

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_0(a, k) & \ldots & y_3(a, k) \\ y'_0(a, k) & \ldots & y'_3(a, k) \\ y_0(b, k) & \ldots & y_3(b, k) \\ y'_0(b, k) & \ldots & y'_3(b, k) \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction entière de k qui s'annule certainement pour l'une quelconque des valeurs k_1, $k_2, \ldots, k_n, \ldots$. Il est donc établi que k_n augmente indéfiniment avec n.

Cela étant, l'équation

$$\Delta = 0$$

n'admet pas de racine *négative*. En effet, $y(x)$ étant une intégrale de l'équation (2) tangente à Ox en a et b, la relation

$$\int_a^b y\left[\frac{d^4 y}{dx^4} - k\varphi(x)y\right]dx = 0$$

donne, en intégrant par parties,

$$\int_a^b \left[\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 - k\varphi(x)y^2\right]dx = 0.$$

Cette dernière égalité est impossible pour des valeurs négatives du paramètre k.

Pareillement, les racines de l'équation $\Delta = 0$ sont toutes *réelles*. En effet, supposons le contraire. Soient

$$k = k' + ik''$$

une racine imaginaire et

$$y = u_1 + iu_2$$

l'intégrale correspondante, tangente à Ox en a et b. L'équation

$$\frac{d^4(u_1 + iu_2)}{dx^4} = (k' + ik'')\varphi(x)(u_1 + iu_2)$$

se décompose en les suivantes

$$\frac{d^4 u_1}{dx^4} = k'\varphi(x)\,u_1 - k''\varphi(x)u_2,$$

$$\frac{d^4 u_2}{dx^4} = k''\varphi(x)\,u_1 + k'\varphi(x)u_2.$$

Multiplions la première par $-u_2$ et la seconde par u_1; il vient, en ajoutant les résultats,

$$u_1\frac{d^4 u_2}{dx^4} - u_2\frac{d^4 u_1}{dx^4} = k''\varphi(x)(u_1^2 + u_2^2).$$

Or, le premier membre de cette égalité peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left(u_1\frac{d^3u_2}{dx^3}-u_2\frac{d^3u_1}{dx^3}+\frac{du_1}{dx}\frac{d^2u_2}{dx^2}-\frac{du_2}{dx}\frac{d^2u_1}{dx^2}\right),$$

et l'intégrale de cette quantité, prise entre a et b, est nulle. Nous pouvons donc écrire

$$o=k''\int_a^b\varphi(x)(u_1^2+u_2^2)\,dx,$$

et cette égalité n'est possible que si $k''=o$, l'intégrale $y=u_1+iu_2$ n'étant pas identiquement nulle.

13. Considérons maintenant une intégrale $Y(x)$ déterminée par les conditions initiales et finales suivantes :

$$\begin{aligned} Y(a)&=A, & Y(b)&=B,\\ Y'(a)&=A', & Y'(b)&=B'. \end{aligned}$$

D'après ce que nous venons de voir (numéro précédent), cette intégrale considérée comme fonction de la variable k est une fonction méromorphe dans tout le plan de cette variable, ses pôles étant k_1, $k_2, \ldots, k_n$.

Tous ces pôles sont simples. En effet, envisageons quatre intégrales *distinctes* y_0, y_1, y_2 et y_3 de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4}=k_i\varphi(x)y.$$

Nous prendrons, ce qui est ici possible,

$$\begin{aligned} y_0(a)&=y_0(b)=o,\\ y'_0(a)&=y'_0(b)=o. \end{aligned}$$

Les valeurs, pour $x=a$, de y_1, y_2, $y_3\,\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^3y_3}{dx^3}$ sont choisies de telle sorte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} o & y_1(a) & y_2(a) & y_3(a)\\ o & y'_1(a) & y'_2(a) & y'_3(a)\\ y''(a) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & y''(a)\\ y'''_0(a) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & y'''_3(a) \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Prenons, pour simplifier l'écriture,

$$y_1(a) = y'_1(a) = 0,$$
$$y_2(a) = 0.$$

Le déterminant précédent devient

$$-y_3(a)y'_2(a)[y'_0(a)y'''_1(a) - y'''_0(a)y'_1(a)];$$

il sera supposé différent de zéro.

Cela étant, prenons, pour les intégrales Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (k_i + \varepsilon)\varphi(x)y,$$

les mêmes conditions initiales respectivement que pour y_0, y_1, y_2 et y_3. Toutes ces intégrales sont, d'après un théorème connu, des fonctions entières de ε; on aura donc les développements

$$\begin{aligned}
Y_0 &= y_0 + \varepsilon y_0^{(1)} + \varepsilon^2 y_0^{(2)} + \ldots,\\
Y_1 &= y_1 + \varepsilon y_1^{(1)} + \varepsilon^2 y_1^{(2)} + \ldots,\\
Y_2 &= y_2 + \varepsilon y_2^{(1)} + \varepsilon^2 y_2^{(2)} + \ldots,\\
Y_3 &= y_3 + \varepsilon y_3^{(1)} + \varepsilon^2 y_3^{(2)} + \ldots,
\end{aligned}$$

les différentes fonctions $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \ldots, y_3^{(1)}, y_3^{(2)}, \ldots$ s'annulant pour $x = a$.

Revenons à l'intégrale $Y(x)$,

$$Y(x) = C_0 Y_0 + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3,$$

les constantes C_0, C_1, C_2 et C_3 devant être déterminées par les conditions

$$Y(a) = A, \qquad Y'(a) = A',$$
$$Y(b) = B, \qquad Y'(b) = B'.$$

Ces quatre équations peuvent s'écrire, si l'on tient compte des égalités

$$\begin{aligned}
y_0(a) &= y'_0(a) = 0,\\
y_0(b) &= y'_0(b) = 0,\\
y_1(a) &= y'_1(a) = 0,\\
y_2(a) &= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
C_3 y_3(a) = A, \qquad C_2 y_2'(a) + C_3 y_3'(a) = A', \\
C_0[\varepsilon y_0^{(1)}(b) + \ldots] + C_1[y_1(b) + \varepsilon y_1^{(1)}(b) + \ldots] \\
+ C_2[y_2(b) + \ldots] + C_3[y_3(b) + \ldots] = B, \\
C_0\left[\varepsilon \frac{dy_0^{(1)}(b)}{dx} + \ldots\right] + C_1\left[y_1'(b) + \varepsilon \frac{dy_1^{(1)}(b)}{dx} + \ldots\right] \\
+ C_2[y_2'(b) + \ldots] + C_3[y_3'(b) + \ldots] = B'.
\end{gathered}
$$

Les constantes C_2 et C_3 sont donc indépendantes du paramètre ε, tandis que C_0 devient infinie pour $\varepsilon = 0$. Ce dernier point sera un pôle simple si l'on a

$$y_1(b) \frac{dy_0^{(1)}(b)}{dx} - y_0^{(1)}(b) \frac{dy_1(b)}{dx} \neq 0.$$

Nous allons voir qu'il en est certainement ainsi. A cet effet, écrivons les deux équations

$$
\begin{aligned}
\frac{d^4 y_0}{dx^4} + \varepsilon \frac{d^4 y_0^{(1)}}{dx^4} + \ldots &= (k_i + \varepsilon)\varphi(x)(y_0 + \varepsilon y_0^{(1)} + \ldots), \\
\frac{d^4 y_1}{dx^4} + \varepsilon \frac{d^4 y_1^{(1)}}{dx^4} + \ldots &= (k_i + \varepsilon)\varphi(x)(y_1 + \varepsilon y_1^{(1)} + \ldots).
\end{aligned}
$$

Les termes indépendants de ε donnent lieu aux équations

$$
\begin{aligned}
\frac{d^4 y_0}{dx^4} &= k_i \varphi(x) y_0, \\
\frac{d^4 y_1}{dx^4} &= k_i \varphi(x) y_1;
\end{aligned}
$$

de même, les termes en ε dans la première équation devant être égaux, on obtient

$$\frac{d^4 y_0^{(1)}}{dx^4} = k_i \varphi(x) y_0^{(1)} + \varphi(x) y_0.$$

De ces trois dernières équations on tire les deux suivantes :

$$
\begin{aligned}
y_0 \frac{d^4 y_1}{dx^4} - y_1 \frac{d^4 y_0}{dx^4} &= 0, \\
y_0 \frac{d^4 y_0^{(1)}}{dx^4} - y_0^{(1)} \frac{d^4 y_0}{dx^4} &= \varphi(x) y_0^2.
\end{aligned}
$$

Intégrons la première entre a et b en tenant compte des conditions initiales et finales : il vient

$$\frac{dy_1(b)}{dx}\frac{d^2y_0(b)}{dx^2} - y_1(b)\frac{d^3y_0(b)}{dx^3} = 0.$$

Le même calcul appliqué à la seconde donne

$$\frac{dy_0^{(1)}(b)}{dx}\frac{d^2y_0(b)}{dx^2} - y_0^{(1)}(b)\frac{d^3y_0(b)}{dx^3} = \int_a^b \varphi(x)y_0^2(x)\,dx.$$

La première de ces deux relations montre qu'on ne peut pas avoir $y_1(b) = 0$; en effet, les facteurs $y_0''(b)$ et $y_0'''(b)$ étant certainement différents de zéro, les deux quantités $y_1(b)$ et $\frac{dy_1(b)}{dx}$ s'annulent en même temps. Si donc $y_1(b)$ était nulle, l'intégrale $y_1(x)$ ne différerait de $y_0(x)$ que par un facteur constant, ce qui est contraire aux hypothèses faites précédemment.

On tire ensuite

$$\frac{d^2y_0(b)}{dx^2}\left[y_1(b)\frac{dy_0^{(1)}(b)}{dx} - y_0^{(1)}(b)\frac{dy_1(b)}{dx}\right] = y_1(b)\int_a^x \varphi(x)y_0^2(x)\,dx.$$

La quantité entre parenthèses est donc *essentiellement* différente de zéro.

14. Indiquons quelques propriétés des nombres k_i et des intégrales $y_i(x)$ correspondantes. Soit $y_\alpha(x)$ l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} = k_\alpha \varphi(x)y,$$

doublement tangente à $Ox(a, b)$; soit, de même, $y_\beta(x)$ l'intégrale analogue correspondant à $k = k_\beta$; on a la relation

$$\int_a^b \varphi(x)y_\alpha(x)y_\beta(x)\,dx = 0 \qquad (\alpha \neq \beta).$$

La démonstration est immédiate. Les deux équations

$$\frac{d^4y_\alpha}{dx^4} = k_\alpha \varphi(x)y_\alpha,$$
$$\frac{d^4y_\beta}{dx^4} = k_\beta \varphi(x)y_\beta,$$

donnent

$$\int_a^b \left(y_\beta \frac{d^4 y_\alpha}{dx^4} - y_\alpha \frac{d^4 y_\beta}{dx^4} \right) dx = (k_\alpha - k_\beta) \int_a^b \varphi(x)\, y_\alpha(x)\, y_\beta(x)\, dx.$$

Le premier membre est nul, et dans le second $k_\alpha \neq k_\beta$; il reste donc la relation annoncée, qui est fondamentale pour ce qui va suivre; elle permet, en effet, de développer une fonction arbitraire suivant les intégrales $y_\alpha(x)$.

15. Indiquons encore une conséquence du théorème établi au n° 13 et dont nous aurons à faire usage bientôt. Considérons l'équation

$$(1') \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = k\, \varphi(x) y + \Psi(x),$$

et cherchons son intégrale qui *touche* Ox en a et b. Soit $z(x)$ une intégrale quelconque de l'équation (1') et $Y(x)$ l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\, \varphi(x) y.$$

L'intégrale que nous cherchons sera

$$y = Y(x) + z(x),$$

avec les conditions aux limites

$$Y(a) = -z(a), \qquad Y'(a) = -z'(a),$$
$$Y(b) = -z(b), \qquad Y'(b) = -z'(b).$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, l'intégrale $Y(x)$ ainsi déterminée admettra, *en général*, les points $k = k_i$ pour pôles. Il en sera donc de même de $y(x)$. Mais nous allons voir que, *si l'on a*

$$\int_a^b \Psi(x)\, y_\alpha(x)\, dx = 0,$$

le point $k = k_\alpha$ ne sera plus un pôle de $y(x)$.

En effet, pour k voisin de k_α, on peut écrire

$$y = \frac{U}{k - k_\alpha} + a_0 + a_1(k - k_\alpha) + \ldots,$$

les fonctions $U(x)$, $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $U'(x)$, $a'_0(x)$, ... s'annulant pour $x = a$ et $x = b$. Écrivons l'équation (1') sous la forme

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = (k - k_\alpha)\varphi(x)y + k_\alpha \varphi(x) y + \Psi(x),$$

et remplaçons y par sa valeur précédente; on obtient ainsi les deux équations

$$\frac{d^4 U}{dx^4} = k_\alpha \varphi(x) U,$$

$$\frac{d^4 a_0}{dx^4} = \varphi(x) U + k_\alpha \varphi(x) a_0 + \Psi(x).$$

De la première on tire, si l'on tient compte des conditions initiales et finales,

$$U \equiv C y_\alpha(x),$$

C étant une constante. D'autre part, multiplions la première par a_0, la seconde par $-$ U, et ajoutons les résultats; il vient

$$a_0 \frac{d^4 U}{dx^4} - U \frac{d^4 a_0}{dx^4} = -\varphi(x) U^2 - U \Psi(x).$$

L'intégrale du premier membre, prise entre a et b, est nulle; il reste donc la relation

$$\int_a^b \varphi(x) U^2 \, dx + \int_a^b U \Psi(x) \, dx = 0,$$

qu'on peut aussi écrire

$$C^2 \int_a^b \varphi(x) y_\alpha^2 \, dx + C \int_a^b \Psi(x) y_\alpha \, dx = 0.$$

Or, le second terme du premier membre est nul par hypothèse; d'autre part, $\int_a^b \varphi(x) y_\alpha^2 \, dx$ est une quantité essentiellement différente de zéro; il faut donc que l'on ait $C \equiv 0$, c'est-à-dire

$$U \equiv 0,$$

et le point $k = k_\alpha$ est un point *ordinaire* de $y(x)$.

16. Reprenons les notations du n° 13. Nous avons désigné par $Y(x)$ l'intégrale de l'équation (1) déterminée par les conditions

$$\begin{aligned} Y(a) &= A, & Y'(a) &= A', \\ Y(b) &= B, & Y'(b) &= B', \end{aligned}$$

et nous avons vu que la fonction ainsi déterminée est méromorphe par rapport à k, ses pôles étant $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, et que, de plus, tous ces pôles sont simples. Il s'agit, dans ce qui suit, de déterminer séparément chacun de ces pôles.

Pour cela remarquons que, tant que k est inférieur à k_1, on a pour $Y(x)$ le développement

$$Y(x) = u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \ldots.$$

Les différentes fonctions $u(x)$ vérifient les équations différentielles que l'on obtient en portant l'expression de $Y(x)$ dans l'équation (1) et en identifiant dans les deux membres les mêmes puissances de k. Ce sont les suivantes :

$$\frac{d^4 u_0}{dx^4} = 0, \qquad \frac{d^4 u_1}{dx^4} = \varphi(x) u_0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^4 u_n}{dx^4} = \varphi(x) u_{n-1}, \qquad \ldots,$$

les conditions aux limites étant

$$\begin{gathered} u_0(a) = A, \qquad u'_0(a) = A', \\ u_0(b) = B, \qquad u'_0(b) = B', \\ u_i(a) = u_i(b) = u'_i(a) = u'_i(b) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \end{gathered}$$

Envisageons les constantes

$$U_n = \int_a^b u_0(x)\, u_n(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

analogues à celles que nous avons considérées au n° 2 et où u_0 était égale à l'unité. Actuellement, $u_0(x)$ est une véritable fonction de x et peut changer de signe dans l'intervalle ab. De même, les autres fonctions $u(x)$ peuvent ne pas garder le même signe dans tout l'intervalle ab. Mais nous allons voir que tous les U_n sont positifs. En effet, on a, en intégrant par parties,

$$\mathrm{U}_n = \int_a^b \frac{d^2 u_1}{dx^2}\frac{d^2 u_n}{dx^2}\,dx$$
$$= \int_a^b u_1 u_{n-1}\,\varphi(x)\,dx$$

et, par suite,

$$\mathrm{U}_{2m} = \int_a^b u_m^2\,\varphi(x)\,dx, \qquad \mathrm{U}_{2m+1} = \int_a^b \left(\frac{d^2 u_{m+1}}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Cela étant, les inégalités

$$\int_a^b (\alpha u_n + \beta u_{n+1})^2\,\varphi(x)\,dx > 0, \qquad \int_a^b \left(\alpha\frac{d^2 u_n}{dx^2} + \beta\frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2}\right)^2 dx > 0$$

donnent (n° 2)

$$\frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{U}_0} < \frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{U}_1} < \ldots < \frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{U}_{n-1}} < \ldots.$$

Le quotient $\frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{U}_{n-1}}$ ne peut pas croître indéfiniment. En effet, supposons qu'il en soit ainsi ; la série

$$(\alpha) \qquad \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 k + \mathrm{U}_2 k^2 + \ldots$$

sera toujours divergente. Or, cette série peut s'écrire

$$\int_a^b u_0(u_0 + u_1 k + \ldots + u_n k^n + \ldots)\,\varphi(x)\,dx,$$

et cette dernière expression a une sens parfaitement déterminé pour $k < k_1$. Le rayon de convergence de la série (α) est donc égal à k_1 et, par suite,

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\mathrm{U}_n} \leqq \frac{1}{k_1}.$$

D'autre part, envisageons l'équation

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} = \varphi(x)\,|u_{n-1}|,$$

les valeurs initiales et finales pour $\theta(x)$ et $\theta'(x)$ étant *nulles*. Nous aurons (n° 6)

$$\theta > |u_n|.$$

Or on a (n° 4) l'inégalité

$$\theta < q\int_a^b \varphi(x)\,|u_{n-1}(x)|\,dx,$$

q étant un nombre fixe; il vient donc

$$|u_n| < q\int_a^b \varphi(x)\,|u_{n-1}(x)|\,dx,$$

ou encore

$$u_n^2(x) < q_1\int_a^b \varphi(x)\,u_{n-1}^2(x)\,dx.$$

De cette dernière inégalité on tire

$$\frac{|u_n(x)|}{\sqrt{U_{2n}}} < Q \qquad (Q = \text{nombre fixe}),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \leqq \lim_{n=\infty} \sqrt[2n]{U_{2n}}.$$

Les deux séries

$$u_0 + u_1 k + \ldots + u_n k^n + \ldots,$$
$$U_0 + U_1 k + \ldots + U_n k^n + \ldots,$$

ont donc même cercle de convergence et l'on obtient ainsi pour $\frac{1}{k_1}$

$$\frac{1}{k_1} = \lim_{n=\infty} \frac{U_n}{U_{n-1}}.$$

17. Passons au calcul de k_2. L'intégrale $Y(x)$ admet le point $k = k_1$ comme pôle simple; soit u' son résidu (à un facteur constant près); la différence

$$Y(x) - \frac{u'}{1 - \frac{k}{k_1}}$$

est une fonction méromorphe de k et dont les pôles sont k_2, h_3, $\ldots$, k_n, $\ldots$.

On peut donc écrire

$$Y(x) = \frac{u'}{1 - \frac{k}{k_1}} + v_0 + v_1 k + \ldots + v_n k^n + \ldots,$$

la série du second membre étant convergente jusqu'à $k = k_2$.

Il est aisé de former des équations différentielles vérifiées par $u'(x)$ et les $v(x)$. En effet, on a évidemment l'égalité

$$v_n = u_n - \frac{u'}{k_1^n},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^4 v_n}{dx^4} = \frac{d^4 u_n}{dx^4} - \frac{1}{k_1^n} \frac{d^4 u'}{dx^4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^4 v_n}{dx^4} = \varphi(x) v_{n-1} - \frac{1}{k_1^n}\left[\frac{d^4 u'}{dx^4} - k_1 \varphi(x) u'\right].$$

La parenthèse du second membre est nulle, comme on le voit en portant l'expression précédente de $Y(x)$ dans l'équation différentielle (1). On obtient ainsi les équations

$$\frac{d^4 u'}{dx^4} = k_1 \varphi(x) u',$$
$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} = -k_1 \varphi(x) u',$$
$$\frac{d^4 v_1}{dx^4} = \varphi(x) v_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^4 v_n}{dx^4} = \varphi(x) v_{n-1},$$

les conditions aux limites étant

$$u'(a) = u'(b) = 0,$$
$$\frac{du'(a)}{dx} = \frac{du'(b)}{dx} = 0,$$

$$\begin{aligned} &v_0(a) = A, \quad &v'_0(a) = A', \quad &v_n(a) = v_n(b) = 0, \\ &v_0(b) = B, \quad &v'_0(b) = B', \quad &v'_n(a) = v'_n(b) = 0 \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on forme les constantes

$$V_n = \int_a^b v_0(x)\, v_n(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

on aura, comme précédemment,

$$\frac{1}{k_2} = \lim_{n=\infty} \frac{V_n}{V_{n-1}}.$$

Le calcul précédent nous donne en même temps l'intégrale $u'(x)$ tangente à l'arc Ox en a et b, car la série

$$v_0 + v_1 k + \ldots + v_n k^n + \ldots$$

étant convergente jusqu'à $k = k_2 > k_1$, on a

$$\lim_{n=\infty} (v_n k_1^n) = 0,$$

et l'égalité

$$v_n = u_n - \frac{u'}{k_1^n}$$

montre que

$$u' = \lim_{n=\infty} (u_n k_1^n).$$

Pareillement, pour avoir k_3, on écrira

$$y(x) = \frac{u'}{1 - \frac{k}{k_1}} + \frac{v'}{1 - \frac{k}{k_2}} + w_0 + w_1 k + \ldots,$$

et l'on aura

$$\frac{1}{k_3} = \lim_{n=\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}},$$

où l'on a posé, comme plus haut,

$$W_n = \int_a^b w_0(x)\, w_n(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

De même, l'intégrale $v'(x)$ tangente à Ox en a et b et changeant *une* fois de signe dans l'intervalle ab, sera

$$v' = \lim (v_n k_2^n).$$

Les autres valeurs de k s'obtiennent d'une manière identique, ainsi que les intégrales correspondantes, tangentes à Ox en a et b.

18. Avant de terminer l'étude de l'équation (1), indiquons encore une propriété des nombres k_n.

Les valeurs trouvées précédemment, et qui définissent les k_n comme limites de certains quotients, ne nous renseignent en rien sur l'ordre de grandeur de ces quantités. Ce qui va suivre nous montrera que k_n *croît au moins comme la quatrième puissance de* n.

Pour cela, faisons d'abord la remarque suivante : l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = z,$$

tangente à l'axe des x à l'origine et s'annulant pour $x = \lambda$, est, à un facteur constant près,

$$\begin{aligned} z = {} & \sin x(e^\lambda + e^{-\lambda} - 2\cos\lambda) + \cos x(e^{-\lambda} - e^\lambda + 2\sin\lambda) \\ & + e^x(\cos\lambda - \sin\lambda - e^{-\lambda}) + e^{-x}(e^\lambda - \cos\lambda - \sin\lambda). \end{aligned}$$

Cette intégrale sera *tangente* à Ox en $x = \lambda$ si l'on a la relation

$$\cos\lambda \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} = 1.$$

Posons

$$f(\lambda) = \cos\lambda \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} - 1.$$

On trouve

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \cos\lambda \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} - \sin\lambda \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}, \\ f''(\lambda) &= -\sin\lambda(e^\lambda - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

A l'aide de ces formules on vérifie immédiatement les inégalités

$$2\mu\pi < \lambda_{2\mu} < 2\mu\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$(2\mu + 1)\pi + \frac{\pi}{2} < \lambda_{2\mu+1} < (2\mu + 1)\pi + \pi,$$

où λ_n désigne la $n^{\text{ième}}$ racine de l'équation $f(\lambda) = 0$. L'intégrale correspondant à $\lambda = \lambda_n$ s'annule $(n - 1)$ fois *entre* ses points de contact avec Ox.

Si l'équation donnée est

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = cz,$$

c étant une constante, on la ramène à la forme précédente en posant

$$x = \frac{x'}{\sqrt[4]{c}}.$$

Si donc une intégrale de cette équation, tangente à Ox en α et β_n, s'annule $(n-1)$ fois entre ces deux points, on aura

$$\overline{\alpha\beta_n} = \frac{\lambda_n}{\sqrt[4]{c}}.$$

19. Cela étant, nous allons démontrer le théorème suivant :

Soit y_n l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \varphi(x) y, \tag{1}$$

tangente à Ox en a et b_n et s'annulant $(n-1)$ fois entre *a et b_n; soit, d'autre part, z_n l'intégrale analogue (tangente en a et b'_n) de l'équation*

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \varphi_1(x) z. \tag{2}$$

Si, dans l'intervalle ab_n, on a

$$\varphi_1(x) > \varphi(x),$$

on aura aussi

$$\overline{ab'_n} < \overline{ab_n}.$$

Il suffit évidemment de démontrer ce théorème pour une variation infiniment petite de $\varphi(x)$,

$$0 < \varphi_1(x) - \varphi(x) < \varepsilon,$$

en faisant voir, en même temps, que le nombre de zéros se conserve.

1° Soient

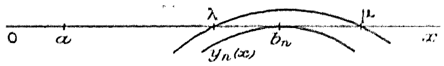
$$\left(\frac{d^2 y_n}{dx^2}\right)_{x=a} = \omega > 0, \qquad \left(\frac{d^3 y_n}{dx^3}\right)_{x=a} = \omega_1 < 0,$$

et considérons l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1) définie par les conditions

$$y(a) = y'(a) = 0,$$
$$y''(a) = \omega, \qquad y'''(a) = \theta > \omega_1.$$

La différence $y - y_n$ vérifie l'équation (1) et les conditions initiales montrent qu'elle est positive pour $x > a$. Elle coupera donc l'axe des x en deux points λ et μ aussi rapprochés de b_n que l'on voudra si θ est suffisamment voisin de ω_1; de plus, l'intégrale y est positive de λ à μ.

Fig. 6.



Envisageons, d'autre part, l'intégrale $z_0(x)$ de l'équation (2), telle que

$$z_0(a) = z'_0(a) = 0,$$
$$z''_0(a) = \omega, \qquad z'''_0(a) = \theta.$$

Pour ε suffisamment voisin de zéro, l'intégrale $z_0(x)$ sera infiniment peu différente de $y(x)$ et, par suite, de $y_n(x)$. Elle coupera donc l'axe des x en deux points λ', μ' très voisins de λ, μ et, de plus, l'intégrale

$$\int_a^{b_n} z_0 y_n [\varphi_1(x) - \varphi(x)]\, dx$$

sera *certainement* positive.

Cela étant, pour une valeur θ_1 de θ, $\theta_1 < \theta$, l'intégrale $z_{0_1}(x)$ correspondante sera tangente à Ox entre λ' et μ'. En effet, considérons la solution $z_{0'}(x)$ de l'équation (2) telle que

$$z_{0'}(a) = z'_{0'}(a) = 0,$$
$$z''_{0'}(a) = \omega, \qquad z'''_{0'}(a) = \theta' < \theta,$$

θ' étant très voisin de θ. La différence $z_0 - z_{0'}$ est constamment positive; donc z_0 *enveloppe* $z_{0'}$ de λ' à μ'. Cela suffit pour établir que le point de contact b'_n sera entre λ' et μ' et, par suite, aussi rapproché de b_n que l'on voudra. Nous obtenons ainsi l'intégrale $z_{0_1}(x)$ dont le second point de contact avec Ox est en b'_n. Cette intégrale sera aussi voisine que l'on voudra de y_n, *pour tout point x entre a et b_n*. En effet, soit $b_n^{(1)}$ un point *quelconque* entre b_n et b'_n. On peut former effectivement deux intégrales $z_0^{(1)}$, $z_{0_1}^{(1)}$ ayant en a et $b_n^{(1)}$ ainsi que leurs dérivées premières les mêmes valeurs, respectivement, que z_0, z_{0_1} et leurs dérivées premières. Ces dernières valeurs coïncidant ou étant très voisines, $z_0^{(1)}$ et $z_{0_1}^{(1)}$ *différeront infiniment peu pour tout point x entre a et $b_n^{(1)}$*. Mais je dis qu'on a

$$z_0^{(1)} \equiv z_0, \qquad z_{0_1}^{(1)} \equiv z_{0_1}.$$

En effet, dans le cas contraire, l'équation aurait deux intégrales y_n, Y_n, respectivement tangentes à l'axe des x en a et $b_n^{(1)}$, en a et b'_n, les points b_n, b'_n étant infiniment rapprochés. Par un raisonnement identique à celui du commencement de ce numéro, on remplacera l'intégrale $Y_n(x)$ par une autre $Z_n(x)$ infiniment voisine de l'intégrale $Y_n(x)$ et *coupant* Ox en b'_n et β'_n, ces deux derniers points étant situés de part et d'autre de $b_n^{(1)}$.

Or cela est en contradiction avec l'égalité

$$(Z_n y'''_n - y_n Z'''_n + y'_n Z''_n - Z'_n y''_n)_a^{b'_n} = 0,$$

qui donne $(Z'_n)_{x=b'_n} = 0$.

Il est ainsi démontré que si ε est suffisamment petit, l'intégrale $z_{0_1}(x)$ diffère indéfiniment peu de $z_0(x)$ et, par conséquent, de $y_n(x)$, et cela pour tout point x entre a et b_n. *Il s'ensuit que la quantité*

$$\int_a^{b_n} y_n z_{0_1}[\varphi_1(x) - \varphi(x)]\,dx$$

est positive

De ceci on déduit sans peine que le point $x = b'_n$ est compris *entre a et b_n*, c'est-à-dire que

$$\overline{ab'_n} < \overline{ab_n}.$$

Car, si l'on suppose le contraire, la relation

$$(y_n z'''_{0_1} - z_{0_1} y'''_n + z'_{0_1} y''_n - y'_n z''_{0_1})_a^{b_n} = \int_a^{b_n} y_n z_{0_1}[\varphi_1(x) - \varphi(x)] > 0$$

est impossible, comme le montrent les inégalités

$$y_n(a) = y'_n(a) = 0, \qquad y_n(b_n) = y'_n(b_n) = 0, \qquad z_{\theta_1}(a) = z'_{\theta_1}(a) = 0;$$
$$y''_n(b) < 0, \qquad y'''_n(b) < 0, \qquad z_{\theta_1}(b) < 0, \qquad z'_{\theta_1}(b) > 0.$$

2° Le nombre de zéros reste le même quand on passe de y_n à z_{θ_1}. En effet, le contraire reviendrait à admettre l'existence d'une intégrale tangente à Ox en deux points et s'annulant après son second point de contact, car notre courbe ne cesse pas de couper l'axe des x entre λ et μ. Or, cela est impossible d'après ce que nous avons vu au n° 9.

20. Il ne reste plus, pour obtenir le résultat annoncé, que d'appliquer le théorème précédent aux deux équations

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k_n \varphi(x) y,$$
$$\frac{d^4 z}{dx^4} = k_n \mathrm{M} z.$$

Dans la seconde de ces deux équations, M désigne une quantité supérieure à $\varphi(x)$ pour tout point x de l'intervalle ab. On aura donc l'inégalité (n° 18)

$$b - a > \frac{\lambda_n}{\sqrt{k_n \mathrm{M}}},$$

d'où l'on conclut

$$k_n > \frac{\lambda_n^4}{(b-a)^4 \mathrm{M}},$$

c'est-à-dire

$$k_n > \frac{(2n+1)^4 \pi^4}{16 \mathrm{M} (b-a)^4},$$

si *n est impair,* et

$$k_n > \frac{(2n)^4 \pi^4}{16 \mathrm{M} (b-a)^4},$$

si n est pair. On aura donc *dans tous les cas l'inégalité*

$$k_n > \mu n^4,$$

où μ *représente une quantité fixe.*

III.

21. Soit

$$W = f(x),$$

la courbe représentant le filet moyen d'une verge élastique que l'on abandonne sans vitesse initiale. Cette verge sera supposée encastrée en deux points a et b de l'axe des x. En se bornant à de petites déformations le mouvement de vibration sera le même pour tous les points d'une même section droite et il suffit, par suite, de considérer le filet moyen. On sait qu'à un instant quelconque l'ordonnée d'un de ses points vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \varphi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

où $\varphi(x)$ dépend de la vitesse des vibrations longitudinales et du rayon de gyration de la section $(x, x+dx)$ autour d'un axe mené par son centre de gravité perpendiculairement au plan Wox.

Nous chercherons à satisfaire à cette équation par un mouvement pendulaire d'amplitude variable y

$$W = y(x) \cos t\sqrt{k},$$

en déterminant convenablement la fonction $y(x)$ et le paramètre k. Si l'on porte cette valeur de W dans l'équation différentielle on obtient

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\,\varphi(x) y. \tag{1}$$

La verge étant encastrée par ses deux bouts, il faut avoir pendant tout le mouvement

$$W(a, t) = W(b, t) = 0,$$
$$W'_x(a, t) = W'_x(b, t) = 0.$$

Il faut donc que les valeurs initiales et finales de $y(x)$ et $\frac{dy(x)}{dx}$ soient nulles. Nous avons vu que cela n'était possible que si k avait une des valeurs comprises dans la série

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots.$$

La solution générale de l'équation en W sera, dans ce cas,

$$W(x, t) = \sum_1^\infty A_i y_i(x) \cos t\sqrt{k_i},$$

les constantes A_i devant être choisies de manière que l'on ait

$$f(x) = \sum_1^\infty A_i y_i(x).$$

On est donc conduit à développer la fonction donnée $f(x)$ suivant les intégrales $y_i(x)$.

22. Supposons la série du second membre du développement précédent uniformément convergente dans l'intervalle ab, et multiplions les deux membres par $\varphi(x)\, y_i(x)$. Il viendra, si l'on tient compte de la relation

$$\int_a^b \varphi(x) y_\alpha y_\beta \, dx = 0 \qquad (\alpha \neq \beta),$$

$$A_i = \frac{\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, y_i(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)\, y_i^2(x)\, dx}.$$

Les différentes intégrales $y_i(x)$ n'étant déterminées qu'à un facteur constant près on peut poser

$$\int_a^b \varphi(x)\, y_i^2(x)\, dx = 1;$$

la valeur du coefficient A_i sera donc

$$A_i = \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, y_i(x)\, dx.$$

Tout ce que nous venons de dire n'est valable que si la série $\sum A_i y_i(x)$ est uniformément convergente dans l'intervalle ab, et nous ne savons rien sur la convergence de cette série. Mais nous pouvons envisager, *a priori*, la série

$$\sum_1^\infty y_i(x) \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,y_i(x)\,dx$$

obtenue précédemment et étudier sa convergence.

Si cette série converge uniformément dans tout l'intervalle ab, elle représente la fonction donnée $f(x)$.

En effet, écrivons

$$f(x) = \sum_1^m y_i(x) \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,y_i(x)\,dx + \mathrm{R}_m(x) \qquad (i \leqq m).$$

Par hypothèse la fonction $\mathrm{R}_m(x)$ tend uniformément vers une limite $\mathrm{R}(x)$ quand m croît indéfiniment. *Il s'agit de faire voir que cette limite est nulle.*

Dans l'égalité

$$\mathrm{A}_i = \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,y(x)\,dx,$$

remplaçons $f(x)$ par sa valeur; il vient

$$\int_a^b \varphi(x)\,y_i(x)\,\mathrm{R}_m(x)\,dx = \mathrm{A}_i - \int_a^b \varphi(x)\,y_i(x)\left(\sum_1^m \mathrm{A}_n y_n\right)dx = \mathrm{A}_i - \mathrm{A}_i = 0.$$

On aura donc pour $m \geqq i$

$$\int_a^b \varphi(x)\,y_i(x)\,\mathrm{R}_m(x)\,dx = 0.$$

Envisageons maintenant l'intégrale

$$\mathrm{I}_m = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{R}_m^2(x)\,dx,$$

et démontrons *qu'elle tend vers une limite*. Pour cela, formons la différence $I_m - I_{m+1}$: on a

$$I_m - I_{m+1} = \int_a^b \varphi(x)\left[\left(f - \sum_1^m A_i y_i\right)^2 - \left(f - \sum_1^m A_i y_i - A_{m+1} y_{m+1}\right)^2\right] dx$$

$$= 2A_{m+1}\int_a^b \varphi(x) y_{m+1}\left(f - \sum_1^m A_i y_i\right) dx - A_{m+1}^2 \int_a^b \varphi(x) y_{m+1}^2\, dx$$

$$= 2A_{m+1}\int_a^b \varphi(x) f(x)\, y_{m+1}(x)\, dx - A_{m+1}^2$$

$$= A_{m+1}^2.$$

Cette différence est donc essentiellement positive et par suite on a l'inégalité

$$I_{m+1} < I_m,$$

ce qui prouve que la quantité positive I_m tend vers une limite.

Cela étant, considérons l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = k\varphi(x)\, u + \varphi(x)\, R_m(x)$$

L'intégrale u de cette équation tangente à Ox en a et b admettra les points $k_1, k_2, \ldots, k_m$ comme points ordinaires et les points

$$k_{m+1}, \quad k_{m+2}, \quad k_m, \quad \ldots,$$

pour pôles. Tout ceci résulte des relations

$$\int_a^b \varphi(x)\, y_i(x)\, R_m(x)\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et de ce que nous avons vu précédemment (n° 15).

Écrivons le développement par rapport à k de l'intégrale u de l'équation différentielle précédente

$$u = u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \ldots.$$

Les différentes fonctions u_0, u_1 ... seront déterminées de proche en proche par les équations

$$\frac{d^4 u_0}{dx^4} = \varphi(x)\,\mathrm{R}_m(x),$$
$$\frac{d^4 u_1}{dx^4} = \varphi(x)\,u_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^4 u_n}{dx^4} = \varphi(x)\,u_{n-1},$$

les conditions initiales et finales étant

$$\begin{matrix} u_i(a) = u_i(b) = 0 \\ u'_i(a) = u'_i(b) = 0 \end{matrix} \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

Posons (n° 16)

$$\mathrm{U}_n = \int_a^b u_0(x)\,u_n(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Nous savons que les constantes U_n sont toutes positives et que, de plus, le rapport $\frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{U}_{n-1}}$ va constamment en croissant. Cela étant, la série

$$\sum_0^\infty k^i\,\mathrm{U}_i$$

peut s'écrire

$$\sum_0^\infty k^i\,\mathrm{U}_i = \int_a^b \varphi(x)\,u_0(x)\left(\sum_0^\infty k^n u_n\right)dx.$$

Dans le second membre, la série qui entre sous le signe $\int$ est convergente jusqu'à la valeur $k = k_{m+1}$, d'après ce que nous avons vu plus haut. On peut donc écrire l'inégalité

$$\frac{\mathrm{U}_i}{\mathrm{U}_{i-1}} < \frac{1}{k_{m+1}},$$

à partir d'une certaine valeur de i; il viendra donc finalement

$$\frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{U}_0} < \frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{U}_1} < \ldots < \frac{\mathrm{U}_i}{\mathrm{U}_{i-1}} < \ldots < \frac{1}{k_{m+1}}.$$

De cette série d'inégalités on déduit

$$U_0^2 > k_{m+1} U_0 U_1$$

et

$$\frac{1}{U_2} > k_{m+1} \frac{1}{U_1}.$$

Multiplions ces deux inégalités membre à membre; il vient

$$\frac{U_0^2}{U_2} > k_{m+1}^2 U_0.$$

Cela étant, de l'inégalité

$$\int_a^b \varphi(x)(\alpha u_1 + \beta R_m)^2 \, dx > 0,$$

où α et β sont des constantes arbitraires, on tire

$$\int_a^b \varphi(x) R_m^2 \, dx > \frac{\left[\int_a^b \varphi(x) u_1 R_m \, dx\right]^2}{\int_a^b \varphi(x) u_1^2 \, dx} = \frac{\left[\int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx\right]^2}{\int_a^b \varphi(x) u_1^2 \, dx}.$$

Dans le second membre nous avons remplacé $\int_a^b \varphi(x) u_1 R_m \, dx$ par $\int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx$ d'après les égalités

$$\int_a^b \varphi(x) u_1 R_m \, dx = \int_a^b \frac{d^4 u_0}{dx^4} u_1 \, dx = \int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx.$$

L'inégalité précédente peut aussi s'écrire

$$\int_a^b \varphi(x) R_m^2 \, dx > \frac{U_0^2}{U_2}$$

en vertu des relations

$$U_0 = \int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx,$$

$$U_2 = \int_a^b \varphi(x) u_1^2 \, dx.$$

Remplaçons $\frac{U_0^2}{U_2}$ par sa limite inférieure trouvée plus haut; nous obtenons ainsi l'inégalité que nous avions en vue :

$$(1) \qquad \int_a^b \varphi(x) R_m^2 \, dx > U_0 k_{m+1}^2.$$

Elle nous montre que la quantité U_0 tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. En effet, le premier membre de l'inégalité précédente n'est autre que la quantité que nous avons désignée plus haut par I_m et qui tend vers une limite finie quand m croît indéfiniment. Nous pouvons donc écrire

$$(2) \qquad \lim_{m=\infty} \int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx = 0.$$

D'autre part, si, comme nous le supposons, $R_m(x)$ tend *uniformément* vers une limite, il en sera de même, d'après l'équation

$$\frac{d^4 u_0}{dx^4} = \varphi(x) R_m(x),$$

de la fonction $u_0(x)$. Or, cette dernière fonction ne peut avoir que zéro pour limite, d'après l'équation (2). La limite de $R_m(x)$ est donc nulle, comme le montre l'équation précédente.

On aura donc l'égalité

$$f(x) = \sum_1^\infty y_i(x) \int_a^b f(x) \varphi(x) y_i(x) \, dx,$$

pourvu que la série du second membre *converge uniformément* dans l'intervalle ab.

23. Soit $\lambda(x)$ une fonction continue de x possédant les deux premières dérivées et s'annulant ainsi que $\lambda'(x)$ pour $x = a$ et $x = b$.

Posons

$$\lambda(x) = \sum_1^m y_i(x) \int_a^b \lambda(x) \varphi(x) y_i(x) \, dx + \rho_m(x)$$

et envisageons l'équation différentielle

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = k\varphi(x) u + \varphi(x) \rho_m(x).$$

Nous avons vu (n° 22) qu'on a, pour $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\int_a^b \varphi(x) y_i(x) \rho_m(x)\, dx = 0.$$

De plus, lorsque m augmente indéfiniment, l'intégrale

$$\mathrm{I}_m = \int_a^b \varphi(x) \rho_m^2(x)\, dx$$

tend vers une limite parfaitement déterminée. Les deux propriétés de la fonction $\rho_m(x)$ que nous venons de rappeler ne supposent pas que $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ [et, par suite, $\rho_m(x)$ et $\rho'_m(x)$] s'annulent pour $x = a$ et $x = b$. *Dans ce dernier cas, la limite de* $\mathrm{I}_m(x)$ *pour* $m = \infty$ *est nulle.*

La démonstration résultera immédiatement de l'inégalité

$$\int_a^b \varphi(x) \rho_m^2(x)\, dx < \frac{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2}\right)^2 dx}{k_{m+1}}$$

et du fait que la quantité

$$\int_a^b \left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2}\right)^2 dx$$

tend vers une limite parfaitement déterminée.

Rappelons d'abord que l'intégrale $u(x)$ (tangente à Ox en a et b)

$$u(x) = u_0 + u_1 k + \ldots + u_n k^n + \ldots$$

de l'équation différentielle écrite plus haut, donne lieu aux équations suivantes :

$$\frac{d^4 u_0}{dx^4} = \varphi(x) \rho_m(x),$$

$$\frac{d^4 u_1}{dx^4} = \varphi(x) u_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^4 u_n}{dx^4} = \varphi(x) u_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les u et les u' s'annulant pour $x = a$ et $x = b$.

Cela étant :

1° L'inégalité

$$\alpha^2 \int_a^b \left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2}\right)^2 dx + 2\alpha\beta \int_a^b \frac{d^2 \rho_m}{dx^2} \frac{d^2 u_0}{dx^2} dx + \beta^2 \int_a^b \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2}\right)^2 dx > 0$$

donne

$$\left(\int_a^b \frac{d^2 \rho_m}{dx^2} \frac{d^2 u_0}{dx^2} dx\right)^2 < \int_a^b \left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2}\right)^2 dx \int_a^b \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi(x) \rho_m^2 \, dx}{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2}\right)^2 dx} < \frac{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x) \rho_m^2 \, dx},$$

car on a évidemment

$$\int_a^b \varphi(x) \rho_m^2 \, dx = \int_a^b \frac{d^4 u_0}{dx^4} \rho_m \, dx = \int_a^b \frac{d^2 \rho_m}{dx^2} \frac{d^2 u_0}{dx^2} dx.$$

Pareillement, l'inégalité

$$\alpha^2 \int_a^b \varphi(x) \rho_m^2 \, dx + 2\alpha\beta \int_a^b \varphi(x) \rho_m u_0 \, dx + \beta^2 \int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx > 0$$

donnera

$$(2) \qquad \frac{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx} < \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi(x) \rho_m^2 \, dx}{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2}\right)^2 dx};$$

aux inégalités (1) et (2) nous ajouterons la suivante

$$(2') \qquad \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx}{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2}\right)^2 dx} < \frac{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x) u_0^2 \, dx}$$

qu'on établit en partant de l'inégalité

$$\alpha^2 \int_a^b \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2}\right)^2 dx + 2\alpha\beta \int_a^b \frac{d^2 u_1}{dx^2}\frac{d^2 u_0}{dx^2}\,dx + \beta^2 \int_a^b \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2}\right)^2 dx > 0$$

et en se servant de la relation

$$\int_a^b \frac{d^2 u_1}{dx^2}\frac{d^2 u_0}{dx^2}\,dx = \int_a^b \varphi(x)\, u_0^2\, dx.$$

Le premier membre de l'inégalité (2′) peut être remplacé par k_{m+1} ; en effet (n° 22)

$$k_{m+1} < \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\, u_0^2\, dx}{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2}\right)^2 dx};$$

il vient donc finalement

$$k_{m+1} < \frac{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 u_0}{dx^2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\, u_0^2\, dx}. \tag{3}$$

Il ne nous reste plus, pour obtenir l'inégalité annoncée, que de multiplier les inégalités (1), (2), (3) membre à membre; il vient ainsi

$$k_{m+1} < \frac{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\, \rho_m^2\, dx}.$$

2° L'intégrale

$$J_m = \int_a^b \left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2}\right)^2 dx$$

tend vers une limite quand on augmente indéfiniment. En effet, formons la différence $J_m - J_{m+1}$:

$$J_m - J_{m+1} = \int_a^b \left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2} - \frac{d^2 \rho_{m+1}}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 \rho_m}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_{m+1}}{dx^2}\right) dx.$$

On a

$$\frac{d^2\rho_m}{dx^2} - \frac{d^2\rho_{m+1}}{dx^2} = y''_{m+1}(x)\int_a^b \lambda(x)\,\varphi(x)\,y_{m+1}(x)\,dx,$$

$$\frac{d^2\rho_m}{dx^2} + \frac{d^2\rho_{m+1}}{dx^2} = 2\lambda''(x) - y''_{m+1}(x)\int_a^b \lambda(x)\,\varphi(x)\,y_{m+1}(x)\,dx$$
$$- 2\sum_1^m y''_i(x)\int_a^b \lambda(x)\,\varphi(x)\,y_i(x)\,dx.$$

Multiplions ces deux relations membre à membre et posons

$$B_i = \int_a^b \lambda(x)\,\varphi(x)\,y_i(x)\,dx;$$

il vient

$$\left(\frac{d^2\rho_m}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2\rho_{m+1}}{dx^2}\right)^2$$
$$= 2B_{m+1}\lambda''(x)\,y''_{m+1}(x) - B^2_{m+1}y''^2_{m+1}(x) - 2B_{m+1}y''_{m+1}(x)\sum_1^m B_i y''_i(x).$$

Intégrons les deux membres entre a et b; l'intégrale du premier terme du second membre se calcule immédiatement; on a

$$2B_{m+1}\int_a^b \lambda'' y''_{m+1}\,dx = -2B_{m+1}\int_a^b \lambda' y'''_{m+1}\,dx$$
$$= 2B_{m+1}\int_a^b \lambda y^{(4)}_{m+1}\,dx = 2k_{m+1}B^2_{m+1}.$$

On aura de même pour le second terme

$$-B^2_{m+1}\int_a^b y''^2_{m+1}\,dx = -k_{m+1}B^2_{m+1}\int_a^b \varphi(x)\,y^2_{m+1}\,dx = -k_{m+1}B^2_{m+1}.$$

La partie provenant du troisième terme est nulle; en effet

$$\int^b y''_{m+1}\left(\sum_1^m B_i y''_i\right)dx = \int_a^b \varphi(x)\,y_{m+1}(x)\left[\sum_1^m B_i k_i y_i(x)\right]dx = 0.$$

La valeur de la différence $J_m - J_{m+1}$ sera donc

$$J_m - J_{m+1} = 2k_{m+1}B_{m+1}^2 - k_{m+1}B_{m+1}^2 = k_{m+1}B_{m+1}^2.$$

Cette différence est donc positive; les constantes J_m vont, par suite, en décroissant, et comme elles sont toutes positives, elles tendent vers une limite.

Le résultat annoncé se trouve ainsi acquis; *on a*

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \varphi(x)\rho_m^2(x)\,dx = 0.$$

24. A côté de la fonction $\lambda(x)$ considérée précédemment et définie par l'égalité

$$\lambda(x) = \sum_1^m y_i(x)\int_a^b \lambda(x)\varphi(x)y_i(x)\,dx + \rho_m(x),$$

envisageons une seconde fonction $\mu(x)$ dont les valeurs, pour $x = a$ et $x = b$, ne sont nécessairement pas nulles; posons

$$\mu(x) = \sum_1^m y_i(x)\int_a^b \mu(x)\varphi(x)y_i(x)\,dx + \varpi_m(x).$$

Nous écrirons aussi les deux fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$ sous la forme

$$\lambda(x) = \sum_1^m B_i y_i(x) + \rho_m(x),$$

$$\mu(x) = \sum_1^m C_i y_i(x) + \varpi_m(x),$$

en posant, comme plus haut,

$$B_i = \int_a^b \lambda(x)\varphi(x)y_i(x)\,dx,$$

$$C_i = \int_a^b \mu(x)\varphi(x)y_i(x)\,dx.$$

Formons l'intégrale

$$\int_a^b \lambda(x)\,\mu(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

et rappelons-nous les relations

$$\int_a^b \varphi(x) y_\alpha y_\beta\,dx = 0 \qquad (\alpha \neq \beta),$$

$$\int_a^b \varphi(x) y_\alpha^2\,dx = 1,$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,y_\alpha(x)\,\rho_m(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b \varphi(x)\,y_\alpha(x)\,\varpi_m(x)\,dx = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m);$$

il viendra

$$\int_a^b \lambda(x)\,\mu(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_1^m \mathrm{B}_i \mathrm{C}_i + \int_a^b \rho_m(x)\,\varpi_m(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Or, l'intégrale du second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$; en effet, de l'inégalité

$$\int_a^b \varphi(x)\,(\alpha\rho_m + \beta\varpi_m)^2\,dx > 0$$

on tire

$$\left[\int_a^b \rho_m(x)\,\varpi_m(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2 < \int_a^b \varphi(x)\,\rho_m^2(x)\,dx \int_a^b \varphi(x)\,\varpi_m^2(x)\,dx.$$

Le premier facteur du second membre *tend vers zéro* et le second reste fini. On peut donc écrire

$$(1) \qquad \int_a^b \lambda(x)\,\mu(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_1^\infty \mathrm{B}_i \mathrm{C}_i,$$

la série du second membre étant convergente.

25. Revenons à la fonction $f(x)$ et posons

$$\lambda(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{\varphi(x)},$$

$$\mu(x) = \frac{\lambda^{(4)}(x)}{\varphi(x)}.$$

Nous supposons donc l'existence des huit premières dérivées de $f(x)$; de plus, les fonctions $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$ s'annuleront pour $x=a$ et $x=b$. Les coefficients B_i et C_i se calculent immédiatement. On a les égalités

$$B_i = \int_a^b f^{(4)}(x)\, y_i(x)\, dx = \frac{1}{k_i} \int_a^b \lambda^{(4)}(x)\, y_i(x)\, dx,$$

$$C_i = \int_a^b \lambda^{(4)}(x)\, y_i(x)\, dx,$$

d'où l'on tire

$$C_i = k_i B_i.$$

La relation (1) (n^o 24) devient

$$\int_a^b \lambda(x)\, \mu(x)\, \varphi(x)\, dx = \sum_1^\infty k_i B_i^2 = \sum_1^\infty k_i \left[\int_a^b f^{(4)}(x)\, y_i(x)\, dx \right]^2,$$

la série du second membre étant convergente.

Cela étant, je dis que la série

$$\sum_1^\infty y_i(x) \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, y_i(x)\, dx = \sum_1^\infty A_i y_i(x)$$

est *uniformément convergente* dans tout l'intervalle ab. Pour le voir, nous établirons l'inégalité

$$(1) \qquad |A_i y_i(x)| < \alpha k_i \left[\int_a^b f^{(4)}(x)\, y_i(x)\, dx \right]^2 + \frac{1}{2 k_i},$$

où α est une constante positive fixe. Il en résultera bien le théorème que nous avons en vue, les deux séries

$$\sum_1^\infty k_n \left[\int_a^b f^{(4)}(x)\, y_i(x)\, dx \right]^2$$

et

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k_n} < \frac{1}{\mu} \sum \frac{1}{n^4}$$

étant convergentes.

Pour démontrer l'inégalité (1) cherchons une limite supérieure de $|y_i|$. On sait (n° 5) que l'intégrale $y_i(x)$ de l'équation

$$\frac{d^4 y_i}{dx^4} = k_i \varphi(x) y_i$$

peut s'écrire

$$6 y_i = k_i \int_a^x [(x-z)^3 + \mathrm{P}(x, z)] \varphi(z) y_i(z) \, dz + k_i \int_a^b \mathrm{P}(x, z) \varphi(z) y_i(z) \, dz,$$

ou encore, en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(x, z) &= (x-z)^3 + \mathrm{P}(x, z) \\ &= \frac{(b-x)^2 (z-a)^2}{(b-a)^3} [(b-a)(x-z) + 2(x-a)(b-z)] \end{aligned}$$

pour $a \leqq z \leqq x$, et

$$\mathrm{G}(x, z) = \mathrm{P}(x, z) = \frac{(b-z)^2 (x-a)^2}{(b-a)^3} [3(b-a)(z-x) + 2(x-a)(b-z)]$$

pour $x \leqq z \leqq b$,

$$6 y_i = k_i \int_a^b \mathrm{G}(x, z) \varphi(z) y_i(2) \, dz.$$

Cela étant, l'inégalité

$$\int_a^b \varphi(z) [\alpha y_i(z) + \beta \mathrm{G}(x, z)]^2 \, dz > 0,$$

où α et β sont deux constantes arbitraires, donne

$$\left[\int_a^b \mathrm{G}(x, z) \varphi(z) y_i(z) \, dz \right]^2 < \int_a^b \varphi(z) \mathrm{G}^2(x, z) \, dz,$$

car on a posé

$$\int_a^b \varphi(z) y_i^2(z) \, dz = 1.$$

De cette inégalité on tire

$$\left| \int_a^b \mathrm{G}(x, z) \varphi(z) y_i(z) \, dz \right| < 6\mathrm{M},$$

où M est une quantité fixe. Finalement

$$|y_i| < \mathrm{M} k_i.$$

Cherchons de même une limite supérieure de la quantité $|\mathrm{A}_i y_i(x)|$; on a

$$\mathrm{A}_i = \int_a^b f(x)\varphi(x) y_i(x)\,dx$$

et en intégrant par parties

$$\mathrm{A}_i = \frac{1}{k_i}\int_a^b f^{(4)}(x) y_i(x)\,dx.$$

On obtient ainsi

$$|\mathrm{A}_i y_i(x)| < \mathrm{M}\left|\int_a^b f^{(4)}(x) y_i(x)\,dx\right|$$

ou encore

$$|\mathrm{A}_i y_i(x)| < \frac{\mathrm{M}^2}{2} k_i \left[\int_a^b f^{(4)}(x) y_i(x)\,dx\right]^2 + \frac{1}{2k_i}.$$

Cette dernière inégalité est bien de la forme annoncée où $\alpha = \frac{\mathrm{M}^2}{2}$.

26. La méthode suivie précédemment pour établir la possibilité du développement

$$f(x) = \sum_1^\infty \mathrm{A}_i y_i(x)$$

exige, en particulier, comme on l'a vu, l'existence des huit premières dérivées de la fonction $f(x)$. Nous allons voir, par ce qui va suivre, que ce développement est valable même si la fonction $f(x)$ ne possède que les quatre premières dérivées.

Envisageons l'équation

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = f^{(4)}(x);$$

on pourra écrire, comme précédemment,

$$6 f(x) = \int_a^b \mathrm{G}(x, z) f^{(4)}(z)\,dz.$$

Cela étant, dans la relation

$$\int_a^b \lambda(z)\mu(z)\varphi(z)\,dz = \sum_1^\infty B_i C_i \tag{1}$$

faisons

$$\lambda(z) = G(x, z),$$
$$\mu(z) = \frac{f^{(4)}(z)}{\varphi(z)};$$

il viendra

$$6f(x) = \sum_1^\infty B_i C_i. \tag{1'}$$

Nous allons calculer séparément les valeurs des B_i et C_i.

On a (n° 25) :

$$B_i = \int_a^b \lambda(z)\varphi(z)y_i(z)\,dz = \int_a^b G(x, z)\varphi(z)y_i(z)\,dz = \frac{6y_i(x)}{k_i}.$$

De même,

$$C_i = \int_a^b \mu(z)\varphi(z)y_i(z)\,dz = \int_a^b f^{(4)}(z)y_i(z)\,dz$$

ou, en intégrant par parties,

$$C_i = k_i \int_a^b f(z)\varphi(z)y_i(z)\,dz = A_i k_i.$$

La relation (1') deviendra donc

$$f(x) = \sum_1^\infty A_i y_i(x);$$

c'est le développement cherché.

27. Dans tout ce qui précède nous avons supposé la verge encastrée aux points a et b. Supposons-la maintenant *appuyée* en a et encastrée en b. L'équation du mouvement (n° 21),

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varphi(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

devra être intégrée avec les conditions suivantes :

1° Quel que soit le temps t, on a

$$W(a, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, t) = 0,$$
$$W(b, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(b, t) = 0;$$

2° Pour $t = 0$, on a identiquement

$$f(x) = W(x, 0).$$

Si nous prenons comme solution particulière de l'équation précédente un mouvement pendulaire

$$W = y(x) \cos t\sqrt{k},$$

la fonction $y(x)$ devra vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\varphi(x)y, \tag{1}$$

les conditions initiales et finales étant

$$y(a) = y''(a) = 0,$$
$$y(b) = y'(b) = 0.$$

Une telle solution n'existe que si k est réel et positif. En effet, supposons d'abord k imaginaire et posons

$$k = k' + ik'',$$
$$y = u_1 + iu_2;$$

il viendra (n° 12)

$$[u_1 u_2''' - u_2 u_1''' + u_1' u_2'' - u_2' u_1'']_a^b = k'' \int_a^b \varphi(x)[u_1^2 + u_2^2]\, dx.$$

Le premier membre de cette dernière égalité étant nul, il faut que k'' soit égal à zéro; *k est positif.* En effet, on a

$$0 = \int_a^b y\left[\frac{d^4 y}{dx^4} - k\varphi(x)y\right] dx = \int_a^b \left[\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 - k\varphi(x)y^2\right] dx,$$

ce qui montre que $k > 0$.

28. Nous allons démontrer qu'il existe effectivement des valeurs positives de k pour lesquelles les équations (1) correspondantes admettent des intégrales satisfaisant aux conditions aux limites posées plus haut.

Pour cela, envisageons l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \varphi(x) y,$$

et rappelons-nous l'existence d'une suite infinie de points

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots,$$

telle qu'il existe, pour l'équation précédente, une intégrale tangente à l'axe des x en a et b_n, et s'annulant $(n-1)$ fois *entre* a et b_n.

Cela étant, les constantes introduites précédemment (n° 2) gardent, ainsi qu'il est facile de le vérifier, avec les nouvelles conditions aux limites, leurs propriétés fondamentales. On démontre ainsi, sans rien changer aux raisonnements employés, l'existence d'un point $x = c_1$, telle que l'équation précédente admette une intégrale z_1 ayant une inflexion pour $x = a$ et tangente à Ox en $x = c_1$, cette intégrale étant constamment positive de a à c_1. Il est d'ailleurs évident que $\overline{ac_1} < ab_1$; autrement les approximations successives, telles que nous les avons dirigées au n° 2, convergeraient pour l'intervalle ab_1, ce qui est impossible (n° 8). Remarquons de plus que l'intégrale $z_1(x)$ ne s'annule plus à partir de $x = c_1$.

De cette intégrale nous allons déduire (n° 8) toutes les autres, en faisant varier convenablement $\left(\frac{d^3 z_1}{dx^3}\right)_{x=a}$. Pour cela, posons

$$z_1'(a) = \omega, \qquad z_1'''(a) = \omega_1 < 0;$$

on a, en outre,

$$z_1(a) = z_1''(a) = 0.$$

Envisageons l'intégrale $\rho_\lambda(x)$ de l'équation (1) telle que

$$\rho_\lambda(a) = \rho_\lambda''(a) = 0,$$
$$\rho_\lambda'(a) = \omega, \qquad \rho_\lambda'''(a) = \lambda < \omega_1.$$

La différence $z_1(x) - \rho_\lambda(x)$ est, d'après l'équation (1), constamment positive. Si donc λ est voisin de ω_1, l'intégrale $\rho_\lambda(x)$ coupera l'axe des x en deux points x_1 et x'_1 voisins de $x = c_1$ et sera négative de x_1

Fig. 7.

à x'_1. λ continuant à décroître le point x_1 marchera vers la gauche et le point x'_1 marchera vers la droite. La dérivée $\left(\dfrac{d\rho_\lambda}{dx}\right)_{x=x'_1}$ s'annulera *certainement* pour une position du point x'_1 *entre* c_1 et b_2.

En effet, supposons le contraire; la relation

$$\rho_\lambda y'''_2 - y_2 \rho'''_\lambda - \rho'_\lambda y''_2 + y'_2 \rho''_\lambda = \text{const.}$$

donne

$$\rho'_\lambda(a) y''_2(a) = \rho'_\lambda(b_2) y''_2(b_2).$$

Or, cette dernière égalité est impossible, attendu que

$$\rho'_\lambda(a) > 0, \qquad \rho'_\lambda(b_2) > 0,$$
$$y''_2(a) > 0, \qquad y''_2(b_2) < 0$$

[$y_2(x)$ désigne l'intégrale de l'équation (1) tangente à Ox en a et b_2 et changeant une fois de signe entre a et b_2].

Soit $x = c_2$ le point tel que

$$\left(\frac{d\rho_\lambda}{dx}\right)_{x=c_2} = 0.$$

Nous venons de voir que $\overline{ac_2} > \overline{ab_2}$. La relation

$$\rho'_\lambda(a) y''_1(a) = \rho'_\lambda(b_1) y''_1(b_1),$$

où

$$y''_1(a) > 0, \qquad y''_1(b_1) > 0, \qquad \rho'_\lambda(a) > 0,$$

montre que

$$\rho'_\lambda(b_1) > 0,$$

c'est-à-dire que

$$\overline{ac_2} > \overline{ab_1}.$$

On obtient ainsi une intégrale que nous désignerons par $z_2(x)$, s'annulant et ayant une inflexion pour $x = a$ et tangente à Ox en

$x = c_2$. Cette intégrale n'a qu'un seul zéro *entre* a et c_2. Cela résulte immédiatement de la méthode suivie pour l'obtenir et de ce qu'une pareille intégrale ne s'annule plus à partir de son point de contact avec Ox.

29. Admettons l'existence des points $c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$ tels que

$$\overline{ab_{i-1}} < \overline{ac_i} < \overline{ab_i} \ (^1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1),$$

et démontrons l'existence du point c_n tel que

$$\overline{ab_{n-1}} < \overline{ac_n} < \overline{ab_n}.$$

Nous désignons par $z_\alpha(x)$ l'intégrale de l'équation (1) s'annulant et ayant une inflexion pour $x = a$ et tangente à Ox pour $x = c_\alpha$; $y_\alpha(x)$ sera l'intégrale de la même équation tangente à Ox en a et b_α.

Nous posons, comme plus haut,

$$z_{n-1}(a) = z''_{n-1}(a) = 0,$$
$$z'_{n-1}(a) = \omega > 0, \qquad z'''_{n-1}(a) = \omega_1 < 0,$$

et nous envisageons l'intégrale $\rho_\lambda(x)$ de l'équation (1), telle que

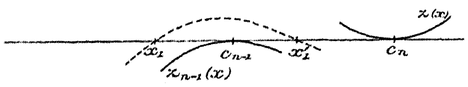
$$\rho_\lambda(a) = \rho''_\lambda(a) = 0,$$
$$\rho'_\lambda(a) = \omega, \qquad \rho'''_\lambda(a) = \lambda > \omega_1,$$

en supposant $\left(\dfrac{d^2 z_{n-1}}{dx^2}\right)_{x=c_{n-1}} < 0$. L'intégrale positive

$$Z = \rho_\lambda(x) - z_{n-1}(x)$$

montre que, pour λ voisin de ω_1, $\rho_\lambda(x)$ coupe Ox en x_1 et x'_1 voisins

Fig. 8.



de c_{n-1} et situés de part et d'autre de ce point. Quand le paramètre λ croît le point x_1 marche vers la gauche et le point x'_1 vers la droite.

(¹) Nous admettons, en outre, comme cela arrive pour $n = 1$ et $n = 2$, que les courbes $y_i(x)$ et $z_i(x)$ ont respectivement même allure au voisinage de $x = b_i$ et $x = c_i$.

Considérons les différents points de rencontre de $\rho_\lambda(x)$ avec Ox, situés à gauche de x'_1 et les valeurs de $\frac{d\rho_\lambda(x)}{dx}$ en ces différents points. $\left[\frac{d\rho_\lambda(x)}{dx}\right]_{x=x'_1}$ sera la fonction qui s'annulera la première, car une intégrale s'annulant, et ayant une inflexion en a et tangente à Ox en un autre point, ne s'annule plus à partir de son point de contact. D'autre part, cette même fonction, $\left[\frac{d\rho_\lambda(x)}{dx}\right]_{x=x'_1}$, ne peut pas s'annuler pour une position du point x'_1 entre c_{n-1} et b_{n-1}. En effet, si cela arrivait, pour une valeur de λ plus grande que ω_1 l'intégrale $\rho_\lambda(x)$ correspondante passerait en b_{n-1} avec une tangente *positive*. Or cela est impossible d'après la relation

$$\rho'_\lambda(a)y''_{n-1}(a)=\rho'_\lambda(b_{n-1})y''_{n-1}(b_{n-1}),$$

déduite de l'équation

$$\rho_\lambda y'''_{n-1}-y_{n-1}\rho'''_\lambda-\rho'_\lambda y''_{n-1}+y'_{n-1}\rho''_\lambda=\text{const.},$$

et où

$$\begin{aligned}&\rho'_\lambda(a)\ >0, &&\rho'_\lambda(b_{n-1})\ >0,\\ &y''_{n-1}(a)>0, &&y''_{n-1}(b_{n-1})<0\ (^1).\end{aligned}$$

Pareillement, l'équation

$$\rho'_\lambda(a)y''_n(a)=\rho'_\lambda(b_n)y''_n(b_n),$$

où

$$\rho'_\lambda(a)>0,\qquad y''_n(a)>0,\qquad y''_n(b_n)>0,$$

montre que

$$\rho'_\lambda(b_n)>0.$$

Donc $\left[\frac{d\rho_\lambda(x)}{dx}\right]_{x=x'_1}$ s'annulera certainement pour une position de x'_1 à gauche de b_n. Finalement

$$\overline{ab_{n-1}}<\overline{ac_n}<\overline{ab_n}.$$

(1) Car nous avons supposé $z''_{n-1}(c_{n-1})<0$.

30. Cela étant, le théorème suivant se démontre d'une manière identique à celle employée précédemment (n° 19) pour un théorème analogue :

Soit $z_n(x)$ *l'intégrale de l'équation*

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \varphi(x)\, z,$$

s'annulant et ayant une inflexion en $x = a$, *tangente à* Ox *en* $x = c_n$; *et s'annulant* $(n-1)$ *fois* entre a *et* c_n ; *soit, d'autre part,* $\rho_n(x)$ *l'intégrale analogue* (*tangente en* $x = c'_n$) *de l'équation*

$$\frac{d^4 \rho}{dx^4} = \varphi_1(x)\, \rho.$$

Si dans tout l'intervalle $\overline{ac_n}$ *on a*

$$\varphi_1(x) > \varphi(x),$$

on aura aussi

$$\overline{ac'_n} < \overline{ac_n}.$$

Revenons à l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\, \varphi(x)\, y.$$

Pour $k = k_{n-1}$ cette équation possède :

1° Une intégrale tangente à Ox en a et $b_{n-1} = b$ et s'annulant $(n-2)$ fois *entre* a et b ;

2° Une intégrale tangente à Ox en a et b_n ($\overline{ab_n} > \overline{ab}$) et s'annulant $(n-1)$ fois entre a et b_n ;

3° Une intégrale s'annulant et ayant une inflexion en $x = a$ et tangente à Ox au point $x = c_n$ tel que

$$ab < \overline{ac_n} < \overline{ab_n}.$$

Faisons croître k à partir de $k = k_{n-1}$; d'après ce qui précède, les trois points b_{n-1}, c_n et b_n marcheront vers la gauche, c_n étant à chaque instant entre b_{n-1} et b_n. Or, pour $k = k_n$ le point b_n arrive en b ; il existe donc une valeur de k,

$$k = \lambda_n,$$

valeur pour laquelle le point c_n vient en b.

Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

Il existe une suite infinie discontinue de valeurs réelles et positives du paramètre k,

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots,$$

telles que : 1°

$$k_{n-1} < \lambda_n < k_n;$$

2° *l'équation*

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \lambda_n \varphi(x) z$$

admet une intégrale s'annulant et ayant une inflexion pour $x = a$ *et tangente à* Ox *en* $x = b$; *cette intégrale s'annulant* $(n-1)$ *fois en dehors des points extrêmes.*

31. Le cas étudié permet de passer facilement à celui où la verge est appuyée par ses deux bouts. Cela revient à démontrer l'existence d'une suite de valeurs de k pour laquelle l'équation

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k \varphi(x) y$$

admette des intégrales s'annulant en $x = a$ et $x = b$ et ayant des inflexions en ces points. Il n'est point besoin de recommencer les raisonnements, ils sont entièrement semblables aux précédents. On démontrera ainsi l'existence d'une suite infinie de valeurs positives de k

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_n, \quad \ldots,$$

telle que

$$\lambda_{n-1} < \mu_n < \lambda_n.$$

La représentation d'une fonction au moyen d'intégrales $z_i(x)$ ou $u_i(x)$ se traite d'une manière entièrement analogue à celle employée pour la représentation de la fonction $f(x)$ (n^{os} 22-26) au moyen d'intégrales $y_i(x)$. Il suffit de remarquer que les relations fondamentales subsistent avec les nouvelles conditions aux limites.

SECONDE PARTIE.

1. Dans cette seconde Partie nous nous occuperons d'un développement asymptotique des intégrales de l'équation (1), que nous écrirons sous la forme

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k^4 \varphi(x) y,$$

en supposant que la fonction $\varphi(x)$ admette des dérivées de tout ordre. Nous n'envisagerons que les valeurs réelles de k que nous pouvons supposer positives.

Soit $y(x)$ l'intégrale de l'équation précédente, déterminée par les conditions initiales suivantes

$$y(a) = \alpha, \qquad y'(a) = \alpha', \qquad y''(a) = \alpha'', \qquad y'''(a) = \alpha''',$$

α, α', α'', α''' étant des constantes arbitraires indépendantes de k.

Posons $k_1 = ik$ et envisageons le développement

$$\begin{aligned} y = {} & \cos k\theta \sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m}}{k^{2m}} + \sin k\theta \sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m+1}}{k^{2m+1}} \\ & + \cos k_1\theta \sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m}}{k_1^{2m}} + \sin k_1\theta \sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m+1}}{k_1^{2m+1}}, \end{aligned}$$

où θ et les λ sont des fonctions de x que nous déterminerons de proche en proche en nous servant de l'équation (1).

Écrivons le développement précédent sous la forme

$$y = y_1(k) + y_1(k_1).$$

L'équation différentielle (1), que nous pouvons mettre sous la forme

$$\frac{d^4 y_1(k, x)}{dx^4} + \frac{d^4 y_1(k_1, x)}{dx^4} = k^4 \varphi(x) y_1(k) + k_1^4 \varphi(x) y_1(k_1),$$

montre qu'il suffit d'identifier dans les deux membres les termes correspondants en k.

Ceci posé, les dérivées successives de $y_1(x, k)$, par rapport à x, se calculent immédiatement; on a

$$\frac{dy_1}{dx} = \cos k\theta \sum_0^\infty \frac{\lambda'_{2m} + \theta' \lambda'_{2m+1}}{k^{2m}} + \sin k\theta \left[-k\theta'\lambda_0 + \sum_0^\infty \frac{\lambda'_{2m} - \theta'\lambda_{2m}}{k^{2m-1}} \right],$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_1}{dx^2} = {} & \cos k\theta \left[-k^2\theta'^2\lambda_0 + \sum_0^\infty \frac{\lambda''_{2m} + 2\theta'\lambda'_{2m+1} + \theta''\lambda_{2m+1} - \theta'^2\lambda_{2m+2}}{k^{2m}} \right] \\ & + \sin k\theta \Big[-k(2\theta'\lambda'_0 + \theta''\lambda_0 + \theta'^2\lambda_1) \\ & \qquad + \sum \frac{\lambda''_{2m-1} - 2\theta'\lambda'_{2m} - \theta''\lambda_{2m} - \theta'^2\lambda_{2m+1}}{k^{2m-1}} \Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3y_1}{dx^3} = {} & \cos k\theta \left[-k^2(3\theta'\theta''\lambda^0 + 3\theta'^2\lambda'_0 + \theta'^3\lambda_1) + \sum_0^\infty \frac{\Psi'_m + \theta'\chi_{m+1}}{k^{2m}} \right] \\ & + \sin k\theta \Big[k^3\theta'^3\lambda_0 - k(3\theta''\lambda'_0 + 2\theta'\lambda''_0 + \theta'''\lambda_0 + 2\theta'\theta''\lambda_1 + \theta'^2\lambda'_1 + \Psi_0\theta') \\ & \qquad + \sum_1^\infty \frac{\chi'_m - \Psi_m\theta'}{k^{2m-1}} \Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4y_1}{dx^4} = {} & \cos k\theta \Big\{ k^4\theta'^4\lambda_0 - k^2\Big[\frac{d}{dx}(3\theta'\theta''\lambda_0 + 3\theta'^2\lambda'_0 + \theta'^3\lambda_1) + 2\theta'^2\lambda''_0 \\ & \qquad + 3\theta'\theta''\lambda'_0 + \theta'\theta'''\lambda_0 + 2\theta'^2\theta''\lambda_1 + \theta'^3\lambda'_1 + \theta'^2\Psi_0\Big] \\ & \qquad + \sum_0^\infty \frac{\Psi''_m + \theta''\chi_{m+1} + 2\theta'\chi'_{m+1} - \theta'^2\Psi_{m+1}}{k^{2m}} \Big\} \\ & + \sin k\theta \Big[k^3(6\theta'^2\theta''\lambda_0 + 4\theta'^3\lambda'_0 + \theta'^4\lambda_0) - k(\theta''\Psi_0 + 2\theta'\Psi'_0 + \theta'^2\chi_1 + \mathrm{U}') \\ & \qquad + \sum_1^\infty \frac{\chi''_m - \theta''\Psi''_m - 2\theta'\Psi'_m - \theta'^2\chi_{m+1}}{k^{2m-1}} \Big].\end{aligned}$$

Dans ces relations, on a posé

$$\mathrm{U} = 2\theta'^2\lambda''_0 + 3\theta'\theta''\lambda'_0 + \theta'\theta'''\lambda_0 + 2\theta'^2\theta''\lambda_1 + \theta'^3\lambda'_1 + \theta'^2\Psi_0$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_m &= \lambda''_{2m} + 2\theta'\lambda'_{2m+1} + \theta''\lambda_{2m+1} - \theta'^2\lambda_{2m+2},\\ \chi_m &= \lambda''_{2m-1} - 2\theta'\lambda'_{2m} - \theta''\lambda_{2m} - \theta'^2\lambda_{2m+1}.\end{aligned}$$

En portant l'expression de $\dfrac{d^4 y_1}{dx^4}$ dans l'équation

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} = k^4\varphi(x) y_1$$

et en identifiant les coefficients en

$$k^n \cos k\theta, \qquad k^n \sin k\theta \qquad (n = 4, 3, 2, 1, 0, -1, \ldots)$$

on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}&\theta'^4\lambda_0 = \varphi(x)\lambda_0,\\ &4\theta'^3\lambda'_0 + 6\theta'^2\theta''\lambda_0 = 0,\\ &4\theta'^3\lambda'_1 + 6\theta'^2\theta''\lambda_1 = -6\theta'^2\lambda''_0 - 12\theta'\theta''\lambda'_0 - (3\theta''^2 + 4\theta'\theta''')\lambda_0,\\ &4\theta'^3\lambda'_2 + 6\theta'^2\theta''\lambda_2 = 6\theta'^2\lambda''_1 + 12\theta'\theta''\lambda'_1 + (3\theta''^2 + 4\theta'\theta''')\lambda_1,\\ &\qquad + 4\theta'\lambda'''_0 + 6\theta''\lambda''_0 + 4\theta'''\lambda'_0 + \theta^{(\mathrm{IV})}\lambda_0.\end{aligned}$$

En général,

$$\begin{aligned}4\theta'^3\lambda'_{2m+1} + 6\theta'^2\theta''\lambda_{2m+1} = &-6\theta'^2\lambda''_{2m} - 12\theta'\theta''\lambda'_{2m} - (3\theta''^2 + 4\theta'\theta''')\lambda_{2m}\\ &+ 4\theta'\lambda'''_{2m-1} + 6\theta''\lambda''_{2m-1} + 4\theta'''\lambda'_{2m-1} + \theta^{(\mathrm{IV})}\lambda_{2m-1} + \lambda^{(\mathrm{IV})}_{2m-2}\end{aligned}$$

pour $m = 1, 2, \ldots$, et

$$\begin{aligned}4\theta'^3\lambda'_{2m} + 6\theta'^2\theta''\lambda_{2m} = &\,6\theta'^2\lambda''_{2m-1} + 12\theta'\theta''\lambda'_{2m-1} + (3\theta''^2 + 4\theta'\theta'')\lambda_{2m-1}\\ &+ 4\theta'\lambda'''_{2m-2} + 6\theta''\lambda''_{2m-2} + 4\theta'''\lambda'_{2m-2} + \theta^{(\mathrm{IV})}\lambda_{2m-2} + \lambda^{(\mathrm{IV})}_{2m-3}\end{aligned}$$

pour $m = 2, 3, \ldots$.

De ces équations on tire successivement

$$\theta(x) = \int_a^x \varphi^{\frac{1}{4}}(x)\,dx,$$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{\varphi^{\frac{3}{4}}(x)},$$

et, en général,

$$\lambda_n = \frac{1}{\varphi^{\frac{3}{4}}(x)}\int_a^x \frac{\mathrm{L}_n(x)}{\varphi^{\frac{3}{4}}(x)} + \frac{c_n}{\varphi^{\frac{3}{4}}(x)}.$$

2. Les constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, seront déterminées par la condition que pour $x = a$ les fonctions y, y', y'', y''' se réduisent respectivement à $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$.

Mettons l'intégrale $y(x)$ sous la forme

$$y = \cos k\theta \sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m}}{k^{2m}} + \sin k\theta \sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m+1}}{k^{2m+1}}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{k\theta} \sum_0^\infty (-1)^m \left(\frac{\lambda_{2m}}{k^{2m}} + \frac{\lambda_{2m+1}}{k^{2m+1}} \right) + \frac{1}{2} e^{-k\theta} \sum_0^\infty (-1)^m \left(\frac{\lambda_{2m}}{k^{2m}} - \frac{\lambda_{2m+1}}{k^{2m+1}} \right).$$

Il viendra, pour $x = a$,

$$\alpha = \sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m}(a)}{k^{2m}} [1 + (-1)^m],$$

$$\alpha' = \sum_0^\infty \frac{\lambda'_{2m}(a) + \theta'(a)\lambda_{2m+1}(a)}{k^{2m}} [1 + (-1)^m],$$

$$\alpha'' = \sum_0^\infty \frac{\lambda''_{2m}(a) + 2\theta'(a)\lambda'_{2m+1}(a) + \theta''(a)\lambda_{2m+1}(a) - \theta'^2(a)\lambda_{2m+2}(a)}{k^{2m}} [1 + (-1)^m],$$

$$\alpha''' = \sum_0^\infty \frac{\left\{ \begin{array}{l} \lambda'''_{2m}(a) + 3\theta'(a)\lambda_{2m+1}(a) + 3\theta''(a)\lambda'_{2m+1}(a) + \theta'''(a)\lambda_{2m+1}(a) \\ \quad - 3\theta'^2(a)\lambda'_{2m+2}(a) - 3\theta'\theta''(a)\lambda_{2m+2}(a) - \theta'^3(a)\lambda_{2m+3}(a) \end{array} \right\}}{k^{2m}} [1 + (-1)^m].$$

Les premiers membres de ces différentes égalités étant indépendants de k, il faut qu'il en soit de même des seconds. Donc :

1° Pour $m = 2\rho$ ($\rho = 0, 1, 2, \ldots$),

$$\lambda_0(a) = \frac{1}{2}\alpha, \qquad \lambda_{4\rho}(a) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots),$$

d'où l'on tire

$$c_0 = \frac{1}{2}\alpha\varphi^{\frac{3}{4}}(a), \qquad c_{4\rho} = 0;$$

2° Pour $m = 2\rho + 1$,

$$\lambda'_0(a) + \theta'(a)\lambda_1(a) = \frac{1}{2}\alpha', \qquad \lambda'_{4\rho}(a) + \theta'(a)\lambda_{4\rho+1}(a) = 0,$$

d'où l'on conclut

$$c_1 = \left[\frac{1}{2}\alpha' - \lambda'_0(a)\right]\varphi^{\frac{1}{2}}(a), \qquad c_{4\rho+1} = -\lambda'_{4\rho}(a)\,\varphi^{\frac{1}{2}}(a);$$

3° Pour $m = 2\rho + 2$ ($\rho = 0, 1, \ldots$), les constantes $c_2, c_6, \ldots, c_{4\rho+2}, \ldots$ seront déterminées par les équations

$$\lambda''_0(a) + 2\theta'(a)\lambda'_1(a) + \theta''(a)\lambda_1(a) - \theta'^2(a)\lambda_2(a) = \tfrac{1}{2}\alpha'',$$
$$\lambda''_{4\rho}(a) + 2\theta'(a)\lambda'_{4\rho+1}(a) + \theta''(a)\lambda_{4\rho+1}(a) - \theta'^2(a)\lambda_{4\rho+2}(a) = 0.$$

4° Et enfin, pour $m = 2\rho + 3$, les équations

$$\begin{aligned}&\lambda'''_0(a) + 3\theta'(a)\lambda''_1(a) + 3\theta''(a)\lambda'_1(a)\\ &\quad + \theta'''(a)\lambda_1(a) - 3\theta'^2(a)\lambda'_2(a) - 3\theta'(a)\theta''(a)\lambda_2(a) - \theta'^3(a)\lambda_3(a) = \tfrac{1}{2}\alpha''',\\ &\lambda'''_{4\rho}(a) + 3\theta'(a)\lambda''_{4\rho+1}(a) + 3\theta''(a)\lambda'_{4\rho+1}(a)\\ &\quad + \theta'''(a)\lambda_{4\rho+1}(a) - 3\theta'^2(a)\lambda'_{4\rho+2}(a) - 3\theta'(a)\theta''(a)\lambda_{4\rho+2}(a) - \theta'^3(a)\lambda_{4\rho+3}(a) = 0\end{aligned}$$

donneront les valeurs de $c_3, c_7, \ldots, c_{4\rho+3}, \ldots$.

Toutes les constantes c se trouvent ainsi déterminées sans ambiguïté; on en déduira les fonctions λ par les égalités

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{\varphi^{\frac{3}{4}}(x)},$$
$$\lambda_n = \frac{1}{\varphi^{\frac{3}{4}}(x)}\int_a^x \frac{L_n(x)}{\varphi^{\frac{3}{4}}(x)} + \frac{c_n}{\varphi^{\frac{3}{4}}(x)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

et le développement y ainsi obtenu satisfera formellement à l'équation (1).

Remarque. — On voit immédiatement, d'après ce qui précède, que si l'on suppose $\alpha = \alpha' = 0$, les constantes c_0 et c_1 sont nulles ainsi que la fonction $\lambda_0(x)$. Il en résulte immédiatement, de l'équation qui définit $\lambda_1(x)$, que cette dernière fonction est identiquement nulle : le développement de y sera, dans ce cas,

$$\begin{aligned}y = &-\frac{\cos k\theta}{k^3}\sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m+2}}{k^{2m}} + \frac{\sin k\theta}{k^3}\sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m+3}}{k^{2m+1}}\\ &+ \frac{\cos k_1\theta}{k_1^2}\sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m+2}}{k_1^{2m}} + \frac{\sin k_1\theta}{k_1^3}\sum_0^\infty \frac{\lambda_{2m+3}}{k_1^{2m+1}};\end{aligned}$$

on a posé $k_1 = ik$.

3. Nous allons obtenir le même développement que précédemment, mais en suivant une autre voie qui nous permettra de démontrer qu'il représente asymptotiquement, pour les grandes valeurs de k, l'intégrale $y(x)$.

A cet effet, formons l'équation différentielle

$$\Delta(u) = \frac{d^4 u}{dx^4} + \alpha(x)\frac{d^3 u}{dx^3} + \beta(x)\frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma(x)\frac{du}{dx} + \varepsilon(x)u = 0,$$

qui admet les quatre solutions,

$$\lambda(x)e^{\pm ik\theta}, \quad \lambda(x)e^{\pm ik_1\theta},$$

où les fonctions $\lambda(x)$ et $\theta(x)$ sont liées par l'équation

$$2\theta'\lambda' + 3\theta''\lambda = 0,$$

$$\theta = \int_a^x \varphi^{\frac{1}{4}}(x)\,dx, \qquad \lambda = \left[\frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}\right]^{\frac{3}{4}}.$$

Un calcul un peu long, mais ne présentant aucune difficulté, donne

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = 5\left[\frac{\theta'''}{\theta} - \frac{3}{2}\frac{\theta''^2}{\theta'^2}\right],$$

$$\gamma = 5\left[\frac{\theta^{(\text{IV})}}{\theta'} - 4\frac{\theta''}{\theta'}\frac{\theta'''}{\theta'} + 3\frac{\theta''^3}{\theta'^3}\right],$$

$$\varepsilon = -k^4\varphi(x) + \frac{3}{2}\frac{\theta^{(\text{V})}}{\theta'} + \frac{15}{2}\left[-\frac{\theta''}{\theta'}\frac{\theta^{(\text{IV})}}{\theta'} + \frac{5}{2}\frac{\theta''^2}{\theta'^2}\frac{\theta'''}{\theta'} - \frac{1}{2}\frac{\theta'''^2}{\theta'^2} + \frac{9}{8}\frac{\theta''^4}{\theta'^4}\right],$$

$$= -k^4\varphi(x) + \delta(x).$$

L'équation $\Delta(u) = 0$ pourra donc s'écrire

$$\Delta(u) = \frac{d^4 u}{dx^4} - k^4\varphi(x)u + \beta(x)\frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma(x)\frac{du}{dx} + \delta(x)u = 0.$$

Procédons par approximations successives. Nous envisageons la suite d'équations

$$\Delta(u_0) = 0,$$

$$\Delta(u_1) = \beta(x)\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \gamma(x)\frac{du_0}{dx} + \delta(x)u_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\Delta(u_n) = \beta(x)\frac{d^2 u_{n-1}}{dx^2} + \gamma(x)\frac{du_{n-1}}{dx} + \delta(x)u_{n-1},$$

que nous écrirons aussi en posant

$$\Delta_1(u) = \beta\frac{d^2u}{dx^2} + \gamma\frac{du}{dx} + \delta u,$$
$$\Delta(u_0) = 0,$$
$$\Delta(u_1) = \Delta_1(u_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta(u_n) = \Delta_1(u_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous intégrerons ces équations en prenant pour conditions initiales les suivantes

$$u_0(a) = u'_0(a) = 0; \qquad u_1(a) = u'_1(a) = 0,$$
$$u''_0(a) = \alpha'', \qquad u'''_0(a) = \alpha''\lambda'(a); \qquad u''_1(a) = 0, \qquad u'''_1(a) = \alpha''' - \alpha''\lambda'(a),$$
$$u_m(a) = u'_m(a) = u''_m(a) = u'''_m(a) = 0 \qquad (m = 2, 3, \ldots).$$

L'équation

$$\Delta(u_0) = 0$$

admet les quatre solutions

$$\lambda(x)e^{\pm ik\theta}, \quad \lambda(x)e^{\pm ik_1\theta}.$$

Il viendra, en tenant compte des conditions initiales,

$$u_0 = \frac{\alpha''\lambda e^{ik\theta}}{4(ik)^2\theta'^2(a)} + \frac{\alpha''\lambda e^{-ik\theta}}{4(-ik)^2\theta'^2(a)} + \frac{\alpha''\lambda e^{ik_1\theta}}{4(ik_1)^2\theta'^2(a)} + \frac{\alpha''\lambda e^{-ik_1\theta}}{4(-ik_1)^2\theta'^2(a)}.$$

Passsons à la seconde équation

$$\Delta(u_1) = \Delta_1(u_0),$$

où le second membre peut être considéré comme connu. On trouve pour l'intégrale $u_1(x)$ satisfaisant aux conditions initiales écrites plus haut

$$u_1(a) = u'_1(a) = u''_1(a) = 0$$
$$u'''_1(a) = \alpha''' - \alpha''\lambda'(a),$$

$$\begin{aligned} u_1 = {} & \frac{\lambda e^{ik\theta}}{4(ik)^3}\int_a^x \frac{e^{-ik\theta}\Delta_1(u_0)}{\lambda\theta'^3}dx + \frac{\lambda e^{-ik\theta}}{4(-ik)^3}\int_a^x \frac{e^{ik\theta}\Delta_1(u_0)}{\lambda\theta'^3}dx \\ & + \frac{\lambda e^{ik_1\theta}}{4(ik_1)^3}\int_a^x \frac{e^{-ik_1\theta}\Delta_1(u_0)}{\lambda\theta'^3}dx + \frac{\lambda e^{-ik_1\theta}}{4(-ik_1)^3}\int_a^x \frac{e^{ik_1\theta}\Delta_1(u_0)}{\lambda\theta'^3}dx \\ & + \frac{\alpha''' - \alpha''\lambda'(a)}{4\theta'^3(a)}\left[\frac{\lambda e^{ik\theta}}{(ik)^3} + \frac{\lambda e^{-ik\theta}}{(-ik)^3} + \frac{\lambda e^{ik_1\theta}}{(ik_1)^3} + \frac{\lambda e^{-ik_1\theta}}{(-ik_1)^3}\right]. \end{aligned}$$

Les valeurs des autres intégrales u seront données par l'équation

$$u_m = \frac{\lambda e^{ik\theta}}{4(ik)^3}\int_a^x \frac{e^{-ik\theta}\Delta_1(u_{m-1})}{\lambda\theta'^3}dx + \frac{\lambda e^{-ik\theta}}{4(-ik)^3}\int_a^x \frac{e^{ik\theta}\Delta_1(u_{m-1})}{\lambda\theta'^3}dx$$
$$+ \frac{\lambda e^{ik_1\theta}}{4(ik_1)^3}\int_a^x \frac{e^{-ik_1\theta}\Delta_1(u_{m-1})}{\lambda\theta'^3}dx + \frac{\lambda e^{-ik_1\theta}}{4(-ik_1)^3}\int_a^x \frac{e^{ik_1\theta}\Delta_1(u_{m-1})}{\lambda\theta'^3}dx.$$

pour $m = 2, 3, \ldots$.

4. Envisageons la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et posons

$$\frac{|\alpha''|}{\theta'^2(a)} = n, \qquad |\lambda(x)| \leqq \mathrm{M}, \qquad \frac{1}{|\lambda\theta'^3|} < \mathrm{N}, \qquad \rho = \frac{|\alpha''\lambda'(a) - \alpha'''|}{\theta'^3(a)}.$$

La troisième des inégalités ci-dessus résulte évidemment de la seconde et de l'équation différentielle

$$2\lambda'\theta' + 3\lambda\theta'' = 0.$$

Nous supposerons, de plus, que les quantités

$$|\lambda' + iq'\theta'\lambda| \quad |\lambda'' - k^2\theta'^2\lambda + iq'(2\theta'\lambda' + \theta''\lambda)|,$$

où $q' = \pm k$ ou $\pm k_1$, sont respectivement moindres que

$$lk + l', \quad pk^2 + qk + r,$$

l, l', p, q et r étant des constantes positives fixes, et cela quelle que soit la valeur positive de k.

Cela étant nous pouvons toujours trouver une constante positive a telle que l'inégalité suivante

$$|\Delta_1(u_m)| < a(|u''_m| + |u'_m| + |u_m|)$$

soit vérifiée quel que soit m.

On trouve alors immédiatement

$$|u_0| \leqq \frac{M\eta}{k^2} e^{k\theta},$$

$$|u'_0| \leqq \frac{\eta(lk + l')}{k^2} e^{k\theta},$$

$$|u''_0| \leqq \frac{\eta(pk^2 + qk + r)}{k^2} e^{k\theta}.$$

La limite supérieure de $|\Delta_1(u_0)|$ sera

$$|\Delta_1(u_0)| < a\eta\, e^{k\theta}\left(p + \frac{l+q}{k} + \frac{l'+r+M}{k^2}\right) = a\eta\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)e^{k\theta},$$

où l'on a posé

$$s = l + q,$$
$$t = l' + r + M.$$

On trouvera de même, en remarquant que $\int_a^x e^{k\theta(x)}\,dx \leqq e^{k\theta(x)}(x-a)$,

$$|u_1| \leqq \frac{MNa\eta}{k^3}\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)e^{k\theta}(x-a) + \frac{M\rho}{k^3}e^{k\theta},$$

$$|u'_1| \leqq \frac{(lk+l')Na\eta}{k^3}\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)e^{k\theta}(x-a) + \frac{(lk+l')\rho}{k^3}e^{k\theta},$$

$$|u''_1| \leqq \frac{(pk^2+qk+r)Na\eta}{k^3}\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)e^{k\theta}(x-a) + \frac{(pk^2+qk+r)\rho}{k^3}e^{k\theta},$$

et pour $|\Delta_1(u_1)|$,

$$|\Delta_1(u_1)| \leqq \frac{Na^2\eta}{k}\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)^2 e^{k\theta}(x-a) + \frac{a\rho}{k}\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)e^{k\theta}.$$

La loi de succession de ces diverses limites supérieures est manifeste ; on la démontrera immédiatement en l'admettant pour $m = n - 1$ et en vérifiant qu'elle subsiste pour $m = n$. On trouve ainsi

$$e^{-k\theta}|u_m| \leqq \frac{M\eta}{k^2}\left[\frac{aN\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)(x-a)}{k}\right]^m \frac{1}{m!}$$
$$+ \frac{M\rho}{k^3}\left[\frac{aN\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)(x-a)}{k}\right]^{m-1} \frac{1}{(m-1)!},$$

les limites supérieures de $e^{-k\theta}|u'_m|$, $e^{-k\theta}|u''_m|$ se déduisant de celle-ci par le simple changement de M en

$$lk + l' \quad \text{et} \quad pk^2 + qk + r.$$

Enfin, pour $|\Delta_1(u_m)|$, on trouve

$$e^{-k}|\Delta_1(u_m)| \leqq \frac{a^{m+1}N^m\eta}{k^m}\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)^{m+1}\frac{(x-a)^m}{m!}$$
$$+ \frac{a^m N^{m-1}\rho}{k^m}\left(p + \frac{s}{k} + \frac{t}{k^2}\right)^m \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

De ce qui précède résulte la convergence uniforme des séries

$$k^2 e^{-k\theta}\sum_0^\infty |u_m|,$$

$$k\, e^{-k\theta}\sum_0^\infty |u'_m|,$$

$$e^{-k\theta}\sum_0^\infty |u''_m|,$$

pour toutes les valeurs de x ou de k telles que l'on ait

$$a \leqq x \leqq b, \qquad k > \mathrm{R} \qquad (\mathrm{R} > 0).$$

L'équation différentielle

$$\frac{d^4 u_m}{dx^4} = k^4\varphi(x)\,u_m + \beta\frac{d^2 u_m}{dx^2} + \gamma\frac{du_m}{dx} + \delta u_m + \beta\frac{d^2 u_{m-1}}{dx^2} + \gamma\frac{du_{m-1}}{dx} + \delta u_{m-1}$$

montre de même que la série

$$\frac{1}{k^2}e^{-k\theta}\sum_0^\infty\left|\frac{d^4 u_m}{dx^4}\right|$$

converge uniformément dans le même domaine de x et k.

On peut donc écrire

$$\Delta\ (u_0 + u_1 + \ldots) = \lim_{m=\infty}\Delta\ (u_0 + \ldots + u_m),$$
$$\Delta_1(u_0 + u_1 + \ldots) = \lim_{m=\infty}\Delta_1(u_0 + \ldots + u_m).$$

Or, en ajoutant les équations

$$\begin{aligned}
\Delta(u_0) &= 0,\\
\Delta(u_1) &= \Delta_1(u_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Delta(u_m) &= \Delta_1(u_{m-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on obtient

$$\Delta(u_0+u_1+\ldots+u_m) = \Delta_1(u_0+u_1+\ldots+u_{m-1}),$$

et, par suite, pour $m=\infty$,

$$\Delta(u_0+u_1+\ldots) = \Delta_1(u_0+u_1+\ldots).$$

Ceci veut dire que *la série*

$$y = u_0+u_1+\ldots$$

vérifie l'équation

$$\Delta(y) = \Delta_1(y),$$

qu'on peut aussi écrire

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k^4 \varphi(x)\, y.$$

Remarque. — De ce qui précède résulte immédiatement la convergence uniforme des séries

$$k^{n+2} e^{-k\theta} \sum_{m=n}^{m=\infty} |u_m|,$$

$$k^{n+1} e^{-k\theta} \sum_{m=n}^{m=\infty} |u'_m|,$$

$$k^{n} e^{-k\theta} \sum_{m=n}^{m=\infty} |u''_m|,$$

$$k^{n-2} e^{-k\theta} \sum_{m=n}^{m=\infty} |u^{(\text{IV})}_m|.$$

Cette remarque nous sera utile pour ce qui va suivre.

5. Nous allons démontrer que, si dans l'expression

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{e^{ik\theta}}{(ik)^3}\int_a^x e^{-ik\theta}u\,dx+\frac{e^{-ik\theta}}{(-ik)^3}\int_a^x e^{+ik\theta}u\,dx\\ &+\frac{e^{ik_1\theta}}{(ik_1)^3}\int_a^x e^{-ik_1\theta}u\,dx+\frac{e^{-ik_1\theta}}{(-ik_1)^3}\int_a^x e^{ik_1\theta}u\,dx \qquad (k_1=ik),\end{aligned}\right.$$

on fait

$$(2)\qquad u=f_0(x)\left[\frac{e^{ik\theta}}{(ik)^\rho}+\frac{e^{-ik\theta}}{(-ik)^\rho}+\frac{e^{ik_1\theta}}{(ik_1)^\rho}+\frac{e^{-ik_1\theta}}{(-ik_1)^\rho}\right],$$

on obtient un résultat de la forme

$$\begin{aligned} &e^{ik\theta}\sum_{\nu=0}^{\nu=\omega}\frac{\chi_\nu(x)}{(ik)^{\nu+\rho+3}}+e^{-ik\theta}\sum_{\nu=0}^{\nu=\omega}\frac{\chi_\nu(x)}{(-ik)^{\nu+\rho+3}}\\ &+e^{ik_1\theta}\sum_{\nu=0}^{\nu=\omega}\frac{\chi_\nu(x)}{(ik_1)^{\nu+\rho+3}}+e^{-ik_1\theta}\sum_{\nu=0}^{\nu=\omega}\frac{\chi_\nu(x)}{(-ik_1)^{\nu+\rho+3}}+\frac{e^{k\theta}}{k^{\omega+\rho+3}}\mathrm{R},\end{aligned}$$

où $\chi_\nu(x)$ est une fonction réelle de x et

$$\lim_{k=\infty}\mathrm{R}=0.$$

Il est d'abord évident que la substitution de la fonction $u(x)$ sous la forme (1) donnera lieu à des termes de la forme suivante :

$$\mathrm{J}_1=e^{\pm ik\theta}\int_a^x e^{\mp 2ik\theta}f_0(x)\,dx,$$

$$\mathrm{J}_2=e^{\pm ik\theta}\int_a^x e^{\mp i(k+k_1)}f_0(x)\,dx,$$

$$\mathrm{J}_3=e^{\pm ik\theta}\int_a^x e^{\mp i(k-k_1)}f_0(x)\,dx.$$

Les autres s'obtiennent en remplaçant k par k_1 et k_1 par k dans les expressions ci-dessus.

Posons

$$f_1=\frac{d}{dx}\left[\frac{f_0(x)}{\theta'(x)}\right],\qquad f_2(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{\theta'(x)}\right],\qquad \ldots.$$

On trouve, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
J_1 = &- \frac{e^{\mp ik\theta}}{\theta'(x)} \sum_0^{n-1} \frac{f_m(x)}{(\pm 2ik)^{m+1}} + \frac{e^{\pm ik\theta}}{\theta'(a)} \sum_0^{n-1} \frac{f_m(a)}{(\pm 2ik)^{m+1}} \\
&+ \frac{e^{\pm ik\theta}}{(\pm 2ik)^n} \int_a^x e^{\mp 2ik\theta} f_n(x)\,dx, \\
J_2 = &- \frac{e^{\mp ik_1\theta}}{\theta'(x)} \sum_0^{n-1} \frac{f_m(x)}{[\pm i(k+k_1)]^{m+1}} + \frac{e^{\pm ik\theta}}{\theta'(a)} \sum_0^{n-1} \frac{f_m(a)}{[\pm i(k+k_1)]^{m+1}} \\
&+ \frac{e^{\pm ik\theta}}{[\pm i(k+k_1)]^n} \int_a^x e^{\mp i(k+k_1)\theta} f_n(x)\,dx, \\
J_3 = &- \frac{e^{\pm ik_1\theta}}{\theta'(x)} \sum_0^{n-1} \frac{f_m(x)}{[\pm i(k-k_1)]^{m+1}} + \frac{e^{\pm ik\theta}}{\theta'(a)} \sum_0^{n-1} \frac{f_i(a)}{[\pm i(k-k_1)]^{m+1}} \\
&+ \frac{e^{\pm ik\theta}}{[\pm i(k-k_1)]^n} \int_a^x e^{\mp i(k-k_1)\theta} f_n(x)\,dx.
\end{aligned}$$

A l'aide de ces trois expressions et des trois autres analogues où l'on a changé k en k_1 et k_1 en k on verra que la fonction réelle $\chi_\nu(x)$ a pour expression

$$\chi_\nu(x) = \frac{f_{\nu-1}(x)}{\theta'(x)} \frac{1 + 2^{\frac{\nu+2}{2}} \sin\frac{\pi\nu}{4}}{(-2)^\nu} + \frac{f_{\nu-1}(a)}{\theta'(a)} \frac{(1+i)^\nu + (-1)^\rho (1-i)^\nu + (-1)^\rho}{2^\nu i^\rho}$$

pour $\nu = 1, 2, \ldots$ et

$$\chi_0(x) = \int_a^x f_0(x)\,dx.$$

D'autre part, considérons les quantités

$$e^{\pm ik\theta} \int_a^x e^{\mp 2ik\theta} f_n(x)\,dx, \quad e^{\pm ik\theta} \int_a^x e^{\mp i(k+k_1)\theta} f_n(x)\,dx,$$
$$e^{\pm ik\theta} \int_a^x e^{\mp i(k-k_1)\theta} f_n(x)\,dx \qquad (k_1 = ik),$$

ainsi que celles qui se déduisent de celles-ci par le changement de k en k_1 et réciproquement. On vérifie immédiatement que le produit d'une de ces douze quantités par $e^{-k\theta}$ tend vers zéro quand k augmente indéfiniment. Il en résulte bien que la substitution de $u(x)$ dans l'expression (1) a la forme indiquée précédemment.

6. Cela étant, écrivons, pour la symétrie,

$$u_0 = e^{ik\theta}\frac{F_0(x)}{(ik)^2} + e^{-ik\theta}\frac{F_0(x)}{(-ik)^2} + e^{ik_1\theta}\frac{F_0(x)}{(ik_1)^2} + e^{-ik_1\theta}\frac{F_0(x)}{(-ik_1)^2}.$$

L'expression

$$\Delta_1(u_0) = \beta u''_0 + \gamma u'_0 + \delta u_0$$

deviendra

$$\Delta_1(u_0) = e^{ik\theta}\sum_0^2 \frac{\alpha_\nu(x)}{(ik)^\nu} + \ldots.$$

On trouve ensuite

$$u_1 = e^{ik\theta}\sum_3^\omega \frac{F_{1\nu}(x)}{(ik)^\nu} + \ldots + \frac{e^{k\theta}R_1}{k^\omega} \qquad \lim_{k=\infty} R_1 = 0,$$

$$u_2 = e^{ik\theta}\sum_4^\omega \frac{F_{2\nu}(x)}{(ik)^\nu} + \ldots + \frac{e^{k\theta}R_2}{k^\omega} \qquad \lim_{k=\infty} R_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots,$$

$$u_{\omega-3} = e^{ik\theta}\sum_{\omega-1}^\omega \frac{F_{(\omega-3)\nu}(x)}{(ik)^\nu} + \ldots + \frac{e^{k\theta}R_{\omega-3}}{k^\omega} \qquad \lim_{k=\infty} R_{\omega-3} = 0.$$

Pour $m > \omega - 3$ nous poserons

$$u_{\omega-2} = e^{k\theta}\frac{R_{\omega-2}}{k^{\omega-2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_m = e^{k\theta}\frac{R_m}{k^m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il viendra donc

$$\begin{aligned} y &= u_0 + u_1 + \ldots \\ &= e^{ik\theta}\sum_2^\omega \frac{\Phi_\nu(x)}{(ik)^\nu} + e^{-ik\theta}\sum_2^\omega \frac{\Phi_\nu(x)}{(ik)^\nu} + e^{ik_1\theta}\sum_2^\omega \frac{\Phi_\nu(x)}{(ik_1)^\nu} + e^{-ik_1\theta}\sum_2^\omega \frac{\Phi_\nu(x)}{(-ik_1)^\nu} \\ &\quad + e^{k\theta}\frac{(R_1 + \ldots + R_{\omega-3} + R_{\omega-2} + \ldots + R_m + \ldots)}{k^\omega}. \end{aligned}$$

Or, la série

$$R_{\omega-2}+R_{\omega-1}+\ldots=e^{-k\theta}k^{\omega}(u_{\omega-2}+\ldots)$$

est convergente (Remarque du n° 4). On peut prendre p assez grand pour que, pour $n>p$, on ait

$$|R_n+R_{n+1}+\ldots|<\frac{\varepsilon}{2},$$

ε étant une quantité donnée à l'avance aussi petite que l'on veut. D'autre part, on peut écrire aussi

$$|R_1+\ldots+R_n|<\frac{\varepsilon}{2},$$

en choisissant convenablement la quantité R telle que

$$k>R.$$

Finalement,

$$y=e^{ik\theta}\sum_{2}^{\omega}\frac{\Phi_\nu(x)}{(ik)^\nu}+\ldots+\frac{e^{k\theta}R}{k^{\omega}},$$

où $\lim_{k=\infty} R=0$. Par suite, on aura asymptotiquement

$$y=e^{ik\theta}\sum_{2}^{\infty}\frac{\Phi_\nu(x)}{(ik)^\nu}+\ldots.$$

Prenons

$$\lambda_2=2\Phi_2(x),\qquad \lambda_3=-2\Phi_3(x)\ldots.$$

Le développement précédent devient

$$y=\frac{\cos k\theta}{k^2}\sum_{0}^{\infty}\frac{\lambda_{2m+2}}{k^{2m}}+\ldots;$$

c'est le même que celui posé précédemment (Remarque du n° 2).

7. On voit immédiatement que le développement spécial précédent peut être différentié et qu'il vérifie formellement l'équation (1). Tout cela n'offre aucune difficulté; c'est une conséquence immédiate de la

remarque que nous avons faite au n° 4. Cela étant, écrivons-le sous la forme

$$(1) \qquad y = e^{ik0} \sum_{2}^{\infty} \frac{\Phi_\nu^{(1)}(x)}{(ik)^\nu} + \ldots + \alpha''' e^{ik0} \sum_{0}^{\infty} \frac{\Phi_\nu^{(2)}(x)}{(ik)^\nu} + \ldots$$

où

$$\Phi_\nu(x) = \Phi_\nu^{(1)} + \alpha''' \Phi_\nu^{(2)} \qquad (\Phi_\nu^{(1)} \equiv 0).$$

On en tire

$$(1') \qquad \frac{dy}{dx} = e^{ik0} \sum_{0}^{\infty} \frac{\Psi_\nu^{(1)}(x)}{(ik)^\nu} + \ldots + \alpha''' e^{ik0} \sum_{0}^{\infty} \frac{\Psi_\nu^{(2)}(x)}{(ik)^\nu} + \ldots.$$

Si nous supposons que $y(x)$ et $y'(x)$ s'annulent pour $x = b$, les équations (1) et (1′) serviraient à donner les valeurs remarquables de k ainsi que les valeurs correspondantes de α''' qui représentent

$$\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_{x=a}.$$