

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. ESTANAVE

## **Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 17 (1900), p. 295-358

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1900\\_3\\_17\\_\\_295\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__295_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CONTRIBUTION

A

# L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE

D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE MINCE,

PAR M. E. ESTANAVE.

---

### INTRODUCTION.

I. La principale des équations différentielles générales de l'équilibre transversal des plaques, qui va nous servir de point de départ dans cette étude analytique, a fait l'objet de nombreuses recherches. C'est l'équation bien connue, trouvée en 1813, sans démonstration, dans les papiers de Lagrange qui y était arrivé en 1811 en examinant la tentative faite par Sophie Germain, d'étendre aux plaques la méthode exposée dans la *Mécanique analytique*, pour exprimer l'équilibre de simples fils ou de lames élastiques.

Cette équation s'écrit

$$(1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{15}{16EI} p.$$

Elle donne le déplacement  $w$ , normal à la plaque, d'un point  $(x, y, 0)$  du feuillet moyen; la plaque rectangulaire étant soumise à une pression  $p$  par unité d'aire et ses bords étant encastrés, libres ou simplement appuyés sur un cadre.

La pression que subit un point de la plaque pouvant varier d'un point à un autre,  $p$  est une fonction de  $x$  et de  $y$ , continue ou discontinue, mais bien déterminée à l'intérieur du contour de la plaque; car ce sera

une des données du problème.  $E$  représente un coefficient d'élasticité de la matière constitutive de la plaque, savoir : le coefficient de l'élasticité de traction d'une petite barre prismatique extraite de sa matière (que l'on suppose isotrope). Enfin  $I$  est le moment d'inertie d'une ligne matérielle normale au feuillet moyen, par rapport au centre de gravité de cette ligne. Si la plaque est pleine et d'épaisseur  $\varepsilon$ ,

$$I = \frac{\varepsilon^3}{12}.$$

On écrit quelquefois cette équation sous la forme symbolique

$$\frac{16}{15} \Delta_2 \Delta_2 w = p,$$

en posant

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Poisson, Cauchy, Kirchhoff, etc., se sont occupés d'établir cette équation fondamentale. M. Boussinesq, dans deux Mémoires <sup>(1)</sup> : *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres*, a montré que l'on pouvait déduire l'équilibre des plaques de ce que présente de particulier leur forme aplatie et en tirant les conséquences cinématiques et statiques.

Suivant que le bord de la plaque est appuyé, encastré ou libre, la fonction  $w$  doit satisfaire aux conditions suivantes, où l'on suppose deux côtés de la plaque pris pour axes de coordonnées :

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

si le bord appuyé est parallèle à l'axe des  $x$ ;

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

---

(1) Mémoires présentés à l'Académie le 10 avril 1871. *Comptes rendus*, t. LXXII, p. 407 et 419, insérés au *Journal de Mathématiques* de Liouville, t. XVI, p. 241; avec des compléments, même journal, 1879, p. 163 et 329.

si le bord encastré est parallèle à l'axe des  $x$ ;

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( 7 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

si le bord libre est parallèle à l'axe des  $x$ .

Ces deux dernières conditions, dues à Kirchhoff, supposent toute la matière de la plaque complètement isotrope et le rapport de ses deux coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$  (notations de Lamé) égal à 1; ce qui est le cas ordinaire des corps durs, comme le verre, par exemple.

II. Navier s'est occupé, dans son Mémoire inédit de 1820, de déterminer le déplacement  $w$  vertical d'un point  $x$ ,  $y$  du feuillet moyen  $z=0$  d'une plaque rectangulaire horizontale, simplement appuyée tout autour sur un cadre fixe et supportant, en outre de son poids propre, une charge verticale pouvant varier d'un point à un autre de sa surface. Il est arrivé (1) à exprimer ce développement par la série double

$$w = \sum_i \sum_j A_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b},$$

où  $a$  et  $b$  représentent les longueurs des côtés de la plaque et  $A_{ij}$  un coefficient qu'il détermine par la méthode de Fourier.

M. Maurice Lévy, dans une Note à l'Académie et publiée aux *Comptes rendus* (2), adopte, dans le cas où la plaque a au moins deux bords simplement appuyés, par exemple les deux bords parallèles à l'axe des  $y$ , les deux autres pouvant être libres, appuyés ou encastrés, pour  $w$  le développement donné par la série simple

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a},$$

où  $Y_i$  est une fonction seulement de  $y$  qu'il convient de déterminer afin que  $w$  satisfasse à l'équation fondamentale (1). En exprimant ce

(1) Voir Note du n° 73, p. 740, dans la *Théorie de l'élasticité des corps solides* de Clebsch, Saint-Venant et Flamant, édition de 1883.

(2) *Comptes rendus*, 9 octobre 1899, t. CXXIX, p. 535-539.

fait, on trouve que  $Y_i$  est l'intégrale générale de l'équation

$$Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15}{8EI\alpha} \int_0^a p \sin \alpha x dx,$$

en posant

$$\alpha = \frac{i\pi}{a},$$

les quatre constantes arbitraires de l'intégrale générale étant déterminées par les conditions au contour des deux bords  $y = 0$ ,  $y = b$  qui peuvent être libres, encastrés ou appuyés.

La solution indiquée par M. Maurice Lévy est générale et comprend, parmi les six problèmes qu'elle envisage, celui examiné par Navier, à condition de déterminer les constantes arbitraires de  $Y_i$ , de façon que les deux bords  $y = 0$ ,  $y = b$  soient simplement appuyés, conditions qui analytiquement se traduisent par

$$Y_i = 0, \quad Y_i'' = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et pour } y = b.$$

III. Je me suis proposé de montrer, en premier lieu, que le développement en série double de Navier se ramène au développement en série simple de M. Maurice Lévy, quelle que soit d'ailleurs la fonction  $p$  qui représente la charge que supporte la plaque appuyée sur ses quatre bords.

J'ai démontré ce résultat en partant de l'équation différentielle qui définit  $Y_i$ .

J'ai ensuite traité les six problèmes auxquels le développement de M. Maurice Lévy est applicable :

- 1° 4 bords appuyés (problème de Navier);
- 2° 3 bords appuyés, le quatrième libre (cas de Vannes);
- 3° 3 bords appuyés, le quatrième encastré;
- 4° 2 bords appuyés, 2 bords opposés libres;
- 5° 2 bords appuyés, 2 bords opposés encastrés;
- 6° 2 bords appuyés, 1 bord libre, 1 bord encastré.

Et en supposant ensuite la charge uniformément répartie sur la plaque, j'ai, comme application numérique des formules, calculé à  $\frac{1}{100}$  près la valeur de la flèche de courbure de la plaque supposée carrée.

Cela m'a permis de comparer les résultats trouvés par Navier, dans le cas où la plaque est appuyée par ses quatre bords, avec ceux que donne la méthode de M. Maurice Lévy et de conclure que les résultats donnés par cette dernière méthode sont plus approchés à égalité de longueur des calculs et que la flèche de courbure va en croissant avec le degré de liberté de la plaque.

Dans une deuxième Partie j'ai traité parallèlement le problème de Navier par la méthode de M. Lévy et par celle de Navier dans le cas où la charge  $p$  est représentée soit par une fonction linéaire en  $y$ , ou un polynôme quelconque en  $x$  et  $y$ , soit par une fonction sinusoïdale ou exponentielle. Par la comparaison des résultats, j'ai été conduit à la sommation de séries trigonométriques intéressantes, séries dont j'ai pu, d'ailleurs, calculer directement la valeur, ce qui est en quelque sorte une nouvelle démonstration de la proposition qui fait l'objet du premier Chapitre.

Dans le présent Travail, je me suis borné, pour cette deuxième Partie, à indiquer la méthode que j'ai suivie et les résultats obtenus, en me réservant de revenir ultérieurement à l'exposé complet qui nécessite de longs développements de calcul.

Après avoir examiné avec les ressources de l'Analyse mathématique ces divers problèmes, j'ai cru qu'il y avait avantage à sortir de ce domaine abstrait et à voir les choses autrement que sous des formules.

Comme le dit si bien M. Paul Janet (1) « l'esprit y gagne en étendue ce qu'il perd en rigueur et peut-être les connaissances elles-mêmes sont-elles augmentées ». Si nous ne connaissions l'eau qui coule que par des définitions mathématiques, peut-être serions-nous bien souvent embarrassés pour prévoir les phénomènes les plus simples qui s'y produisent. J'ai alors imaginé un appareil qui, s'il ne réalise pas les conditions idéales du calcul, s'en rapproche et donne des résultats, non seulement du même ordre, mais même fort approchés.

IV. Je me suis appuyé dans les diverses transformations de calcul, principalement dans la deuxième Partie :

---

(1) *Premiers principes d'Électricité industrielle*, Préface, VII, édition 1893; Gauthier-Villars.



rapport à  $x$  ou à  $y$ , la nouvelle série obtenue converge dans le même rectangle que la première et a pour somme la dérivée partielle  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

Et si l'on multiplie tous les termes de la série par  $dx$ , et si l'on intègre par rapport à  $x$  de 0 à  $x$ , la nouvelle série est convergente dans le même rectangle que la proposée et a pour somme  $\int_0^x z dx$ .

De même s'il s'agissait de la variable  $y$ .

En terminant cette Introduction, qu'il me soit permis de témoigner ma profonde reconnaissance à MM. Boussinesq et Appell qui ont bien voulu me guider dans ces recherches, ainsi qu'à M. Bouty, qui, avec beaucoup de bienveillance, m'a autorisé à entrer au laboratoire d'Enseignement de Physique et m'a ainsi permis de vérifier par l'expérience les résultats du calcul.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

---

### CHAPITRE I.

IDENTITÉ DES DÉVELOPPEMENTS DE NAVIER ET DE M. MAURICE LÉVY.

---

1. *Calcul des coefficients  $A_{ij}$  de Navier.* — Pour satisfaire à l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{15}{16EI} P,$$

$p$  étant une fonction donnée de  $x$  et  $y$ , bien déterminée à l'intérieur du rectangle qui limite la plaque, prenons avec Navier la fonction

$$w = \sum_i \sum_j A_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$$



( $i, j$  étant les nombres entiers 1, 2, 3, ...), qui satisfait d'elle-même aux conditions qui expriment que la plaque est simplement appuyée sur ses bords.

Le coefficient  $A_{ij}$  est déterminé de la façon suivante :

Écrivons que la fonction  $\varphi$  satisfait à l'équation (1); nous aurons

$$\sum_i \sum_j A_{ij} \pi^4 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} = \frac{15}{16EI} P.$$

Conformément à la méthode de Fourier, multiplions les deux membres par  $\sin \frac{m\pi x}{a} dx$  et intégrons les deux membres entre les limites 0 et  $a$ .

L'intégrale qui figure sous le signe  $\sum_i \sum_j$  dans le premier membre, abstraction faite des coefficients, est

$$\int_0^a \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx;$$

elle est nulle si  $m \neq i$ , et a pour valeur  $\frac{a}{2}$  si  $m = i$ .

En sorte que la somme double du premier membre devient une somme simple, et l'on a

$$\sum_j A_{ij} \frac{a}{2} \pi^4 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{j\pi y}{b} = \frac{15}{16EI} \int_0^a P \sin \frac{i\pi x}{a} dx.$$

Si nous multiplions les deux membres par  $\sin \frac{n\pi y}{b} dy$  et si nous intégrons entre les limites 0 et  $b$ , le même raisonnement conduit à la relation

$$A_{ij} \frac{ab}{4} \pi^4 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2 = \frac{15}{16EI} \int_0^a \sin \frac{i\pi x}{a} dx \int_0^b P \sin \frac{j\pi y}{b} dy,$$

qui nous donne pour  $A_{ij}$  l'expression

$$A_{ij} = \frac{4}{ab} \frac{15}{16EI} \frac{1}{\pi^4 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b P \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy.$$

2. *Détermination de la fonction  $Y_i$ .* — Considérons maintenant, comme le fait M. Maurice Lévy, la fonction

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a},$$

$Y_i$  étant une fonction de  $y$  seulement. Cherchons à déterminer  $Y_i$  de façon que cette expression de  $w$  satisfasse à l'équation (1). Nous aurons

$$\sum_i \left( Y_i^{(4)} - 2 \frac{i^2 \pi^2}{a^2} Y_i'' + \frac{i^4 \pi^4}{a^4} Y_i \right) \sin \frac{i\pi x}{a} = \frac{15}{16EI} p,$$

et si l'on multiplie les deux membres par  $\sin \frac{m\pi x}{a} dx$  et qu'on intègre entre les limites 0 et  $a$ , on a, pour déterminer  $Y_i$ , l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre

$$(2) \quad Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15}{8EIa} \int_0^a p \sin \frac{i\pi x}{a} dx,$$

en posant  $\alpha = \frac{i\pi}{a}$ .

Si l'on désigne par  $\varphi_i(y)$  une intégrale particulière de l'équation précédente avec second membre, l'intégrale générale sera

$$Y_i = \varphi_i(y) + A_i \operatorname{sh} \alpha y + B_i \operatorname{ch} \alpha y + y(C_i \operatorname{sh} \alpha y + D_i \operatorname{ch} \alpha y),$$

où les fonctions sh, ch sont les sinus et cosinus hyperboliques, et  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  quatre constantes arbitraires.

La fonction

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}$$

satisfait d'elle-même aux conditions

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = a,$$

qui expriment que la plaque rectangulaire est simplement appuyée sur les bords  $x = 0$  et  $x = a$ .

Pour que la plaque soit également appuyée sur les deux autres

bords  $y = 0$ ,  $y = b$ , il faut que

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

pour ces valeurs de  $y$ . D'où les conditions

$$Y_i = 0, \quad Y_i' = 0, \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } y = b,$$

qui donnent quatre relations permettant de déterminer les quatre constantes arbitraires  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ .

Ces constantes étant ainsi déterminées, je vais montrer que les deux fonctions

$$w = \sum_i \sum_j A_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad \text{et} \quad w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}$$

sont identiques.

En effet, si dans la première expression de  $w$  nous groupons les termes en  $i$ , nous pouvons écrire

$$w = \sum_i \sin \frac{i\pi x}{a} \sum_j A_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b}.$$

Posons

$$Y_{1,i} = \sum_j A_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b};$$

l'expression de  $w$  peut s'écrire

$$w = \sum_i Y_{1,i} \sin \frac{i\pi x}{a},$$

qui sera identique à celle adoptée par M. Maurice Lévy

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a},$$

dès que nous aurons montré que

$$Y_i \equiv Y_{1,i},$$

dans les conditions où nous nous sommes placés, où les constantes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  sont déterminées de façon que les bords  $y = 0$ ,  $y = b$  soient appuyés (seul cas où le développement de Navier s'applique).

3. Les deux fonctions  $Y_i, Y_{i1}$  satisfont à la même équation différentielle. — La pression  $p$  étant une fonction bien déterminée à l'intérieur du rectangle qui limite la plaque, on peut, par la méthode de Fourier, développer cette fonction suivant la série double

$$p = \sum_i \sum_j B_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b},$$

$B_{ij}$  est déterminé par la méthode suivie pour la détermination des  $A_{ij}$  et a pour valeur

$$B_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \sin \frac{i\pi x}{a} dx \int_0^b p \sin \frac{j\pi y}{b} dy.$$

D'autre part, nous pouvons développer la fonction  $p$  suivant la série simple

$$p = \sum_i p_i(y) \sin \frac{i\pi x}{a}$$

( $p_i$  étant une fonction seulement de  $y$ ). Si, en effet, on veut déterminer la fonction  $p_i$ , on multipliera les deux membres par  $\sin \frac{m\pi x}{a} dx$ , et en intégrant de 0 à  $a$  on aura, en prenant  $m = i$  (seul cas où l'intégrale coefficient de  $p_i$  n'est pas nulle),

$$p_i = \frac{2}{a} \int_0^a p \sin \frac{i\pi x}{a} dx.$$

Cela posé, démontrons tout d'abord que

$$(3) \quad p_i(y) = \sum_j B_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b};$$

en effet, calculons

$$\int_0^a p \sin \frac{i\pi x}{a} dx;$$

multiplions pour cela les deux membres de l'équation qui définit  $p$  en une série double, par  $\sin \frac{m\pi x}{a} dx$  et intégrons de 0 à  $a$ . Nous aurons,

en supposant  $m = i$ , seul cas où le deuxième membre n'est pas nul,

$$\int_0^a p \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \sum_j B_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b} \int_0^a \sin^2 \frac{i\pi x}{a} dx$$

ou

$$\sum_j B_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b} = \frac{2}{a} \int_0^a p \sin \frac{i\pi x}{a} dx.$$

D'où la relation (3) que nous voulions établir.

Cela étant, la fonction  $Y_i$  de M. Lévy satisfait à l'équation

$$(4) \quad Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15}{16EI} p_i(y),$$

en prenant pour  $p$  le développement

$$p = \sum_i p_i(y) \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

Je dis que  $Y_{ij}$ , défini par

$$Y_{ij} = \sum_j A_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b},$$

satisfait à la même équation que  $Y_i$ .

Si nous substituons en effet cette valeur de  $Y_{ij}$  dans l'équation (4), en tenant compte de la relation (3), nous trouvons que  $A_{ij}$  doit satisfaire à la relation

$$A_{ij} \pi^4 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2 = \frac{15}{16EI} B_{ij},$$

ou, en remplaçant  $B_{ij}$  par la valeur calculée, on déduit pour  $A_{ij}$  la valeur

$$A_{ij} = \frac{4}{ab} \frac{15}{16EI} \frac{1}{\pi^4 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b p \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy,$$

qui est justement celle trouvée par Navier.

Donc  $Y_i$  et  $Y_{ij}$  satisfont à la même équation différentielle.

4. *Détermination des constantes  $A_i, B_i, C_i, D_i$ .* — Je dis maintenant que, à raison des hypothèses qui déterminent les constantes  $A_i, B_i,$

$C_i, D_i$  de  $Y_i$ , pour que le développement de M. Lévy corresponde au cas où la plaque est appuyée sur ses quatre bords,  $Y_i$  ne diffère pas de  $Y_{1i}$ .

Nous avons en effet, puisque ces deux fonctions satisfont à la même équation (4), les relations

$$Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15}{16EI} p_i(y),$$

$$Y_{1i}^{(4)} - 2\alpha^2 Y_{1i}'' + \alpha^4 Y_{1i} = \frac{15}{16EI} p_i(y).$$

En retranchant membre à membre et posant

$$Z = Y_i - Y_{1i},$$

nous avons, pour déterminer  $Z$ , l'équation différentielle, sans second membre,

$$Z^{(4)} - 2\alpha^2 Z'' + \alpha^4 Z = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$Z = A \operatorname{sh} \alpha y + B \operatorname{ch} \alpha y + y(C \operatorname{sh} \alpha y + D \operatorname{ch} \alpha y),$$

$A, B, C, D$  étant quatre constantes arbitraires que nous allons déterminer.

Remarquons que  $Y_i$ , par hypothèse, est nul pour  $y = 0$  et  $y = b$ , de même  $Y_{1i}'$ , puisque la plaque est supposée appuyée sur ses bords. Par définition même,

$$Y_{1i} = \sum_j \Lambda_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b}$$

est nul pour  $y = 0, y = b$ , ainsi que  $Y_{1i}''$ .

Donc  $Z$  et  $Z''$  sont nuls simultanément soit pour  $y = 0$ , soit pour  $y = b$ . Ces quatre conditions vont nous permettre de voir que les constantes  $A, B, C, D$  sont nulles.

En effet, les conditions  $Z = 0, Z'' = 0$  pour  $y = 0$  donnent

$$B = 0, \quad C = 0.$$

Les conditions  $Z = 0, Z'' = 0$  pour  $y = b$  donnent, pour déterminer  $A$  et  $D$ , le système de deux équations homogènes,

$$\begin{aligned} A \operatorname{sh} \alpha b + bD \operatorname{ch} \alpha b &= 0, \\ A \alpha \operatorname{sh} \alpha b + D(2 \operatorname{sh} \alpha b + b\alpha \operatorname{ch} \alpha b) &= 0, \end{aligned}$$

dont le déterminant des coefficients est  $2 \operatorname{sh}^2 \alpha b$ , par conséquent différent de zéro. Il est donc nécessaire que

$$A = 0, \quad D = 0.$$

Par suite,  $Z$  est identiquement nul et l'on peut conclure

$$Y_i \equiv Y_{1i},$$

ce qui démontre la proposition.

*Remarque.* — Nous pourrions, comme application, expliciter la fonction  $p$  et démontrer, dans chacun des cas où cette fonction est particularisée, que  $Y_{1i}$  satisfait à l'équation différentielle qui définit  $Y_i$ . Ce serait une nouvelle vérification, dans chacun de ces cas, de la proposition que nous venons d'établir.

Dans le cas où  $p = A\gamma$ , le calcul conduit au développement de  $\frac{\gamma}{2}$  en série trigonométrique, et si  $p$  est, d'une façon plus générale, un polynôme en  $\gamma$ , on est conduit au développement en série trigonométrique de ce polynôme et à la sommation de la série  $\sum_j \frac{(-1)^j \sin j\gamma}{j^{2p+1}}$ . Le calcul détaillé montre que les  $p$  constantes d'intégration que l'on introduit en partant de  $\sum_j \frac{(-1)^j \sin j\gamma}{j}$  et intégrant  $2p$  fois sont données par des équations linéaires. Ces constantes sont d'ailleurs en relation directe avec les nombres de Bernoulli. Je me borne, pour le moment, à signaler ces résultats qu'on trouve en écrivant simplement que  $Y_{1i}$  satisfait à l'équation différentielle du quatrième ordre qui définit  $Y_i$  et qui sont compris dans la formule de Fourier, ou plutôt même de Lagrange, donnant le développement d'une fonction, dans un intervalle donné, en série de sinus ayant pour période le double de cet intervalle ou les parties aliquotes de ce double, pour aborder les problèmes auxquels la méthode de M. Maurice Lévy est applicable, et en particulier celui de M. Navier.

## CHAPITRE II.

PLAQUE APPUYÉE PAR SES QUATRE BORDS. — PROBLÈME DE NAVIER.

5. Nous allons traiter le problème de Navier par la méthode de M. Maurice Lévy.

Adoptons pour  $w$  le développement en série simple,

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a},$$

$Y_i$  étant une fonction de  $y$ .

Par la forme même de  $w$ , la plaque est appuyée sur les bords  $x = 0$ ,  $x = a$ ; pour qu'elle soit aussi appuyée sur les deux bords  $y = 0$ ,  $y = b$ , il faut que

$$(1) \quad Y_i = 0, \quad Y_i'' = 0, \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } y = b.$$

Nous savons que  $Y_i$  doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(2) \quad Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15}{8EIa} \int_0^a p \sin \frac{i\pi x}{a} dx,$$

dont l'intégrale générale est

$$Y_i = \varphi_i(\varphi) + A_i \operatorname{sh} \alpha y + B_i \operatorname{ch} \alpha y + \gamma (C_i \operatorname{sh} \alpha y + D_i \operatorname{ch} \alpha y),$$

où  $\varphi_i(\gamma)$  désigne une intégrale particulière de l'équation.

En explicitant les conditions (1), nous avons, pour déterminer les quatre constantes arbitraires  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ , les équations

$$\begin{aligned} \varphi_i(0) + B_i &= 0, & \varphi_i''(0) + B_i \alpha^2 + 2C_i \alpha &= 0, \\ \varphi_i(b) + A_i \operatorname{sh} \alpha b + B_i \operatorname{ch} \alpha b + b(C_i \operatorname{sh} \alpha b + D_i \operatorname{ch} \alpha b) &= 0, \\ \varphi_i''(b) + \alpha^2(A_i \operatorname{sh} \alpha b + B_i \operatorname{ch} \alpha b) & \\ + 2\alpha(C_i \operatorname{ch} \alpha b + D_i \operatorname{sh} \alpha b) + b\alpha^2(C_i \operatorname{sh} \alpha b + D_i \operatorname{ch} \alpha b) &= 0. \end{aligned}$$



Des deux premières on tire,

$$B_i = -\varphi_i(0), \quad C_i = -\frac{1}{2\alpha}[\varphi_i''(0) - \alpha^2 \varphi_i(0)].$$

En remplaçant dans les deux autres  $B_i$ ,  $C_i$  par ces valeurs et réduisant, on a, pour déterminer  $A_i$  et  $D_i$ , les équations

$$\begin{aligned} A_i \operatorname{sh} \alpha b + D_i b \operatorname{ch} \alpha b &= -\varphi_i(b) + \varphi_i(0) \operatorname{ch} \alpha b + \frac{b}{2\alpha} \operatorname{sh} \alpha b [\varphi_i''(0) - \alpha^2 \varphi_i(0)] = m_i, \\ A_i \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha b + D_i (2\alpha \operatorname{sh} \alpha b + b\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha b) \\ &= -\varphi_i''(b) + \varphi_i''(0) \operatorname{ch} \alpha b - \frac{\alpha b}{2} \operatorname{sh} \alpha b [\alpha^2 \varphi_i(0) - \varphi_i''(0)] = n_i, \end{aligned}$$

où j'ai désigné par  $m_i$  et  $n_i$  les seconds membres de ces équations. On a

$$\begin{aligned} A_i \operatorname{sh} \alpha b + D_i b \operatorname{ch} \alpha b &= m_i, \\ A_i \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha b + D_i (2\alpha \operatorname{sh} \alpha b + b\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha b) &= n_i, \end{aligned}$$

d'où l'on tire facilement

$$D_i = \frac{n_i - \alpha^2 m_i}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b}, \quad A_i = \frac{m_i (2\alpha \operatorname{sh} \alpha b + b\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha b) - b n_i \operatorname{ch} \alpha b}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b}.$$

En développant ces calculs et posant, pour abrégier,

$$\psi_i(z) = \varphi_i''(z) - \alpha^2 \varphi_i(z),$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\psi_i(0) \operatorname{ch} \alpha b - \psi_i(b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b}, \\ A_i &= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha b} [\varphi_i(0) \operatorname{ch} \alpha b - \varphi_i(b)] + \frac{b}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} [\psi_i(b) \operatorname{ch} \alpha b - \psi_i(0)]. \end{aligned}$$

Ce sont là les formules qui, dans chaque cas où la fonction  $\varphi_i(\gamma)$  sera déterminée, nous fourniront les valeurs des constantes.

6. *Cas où la charge est uniformément répartie sur la plaque.* — Dans ce cas,  $p$  est une constante et l'équation qui définit  $Y_i$  devient

$$Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15p}{8EI\alpha} (1 - \cos i\pi) = \begin{cases} \text{zéro pour } i \text{ pair,} \\ \frac{15p}{4EI\alpha} \text{ pour } i \text{ impair.} \end{cases}$$

On se bornera donc aux valeurs  $i = 1 = 3 = 5 = \dots$

Une intégrale particulière de l'équation sera

$$\varphi_i(y) = \frac{15\rho}{4EI\alpha\alpha^5},$$

$\varphi_i$  étant une constante, il suit que  $\varphi_i''$  est nul; par suite,

$$\psi(z) = -\alpha^2 \varphi_i(z).$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{15\rho}{4EI\alpha} = K_1;$$

alors,

$$\varphi_i = \frac{K_1}{\alpha^5}.$$

Les constantes  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ont pour valeur

$$B_i = -\varphi_i(0) = -\frac{K_1}{\alpha^5}, \quad C_i = \frac{\alpha}{2} \frac{K_1}{\alpha^5},$$

$$D_i = \frac{K_1}{\alpha^5} \frac{\alpha^2(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b}, \quad A_i = \frac{K_1}{\alpha^5} \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b}.$$

D'où l'expression de  $Y_i$ ,

$$Y_i = \frac{K_1}{\alpha^5} \left\{ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y + y \left[ \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\alpha^2(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} \operatorname{ch} \alpha y \right] \right\}$$

Dans ce cas et celui d'une façon générale où  $p$  est indépendant de  $x$ ,  $\int_0^a p \sin \frac{i\pi x}{a} dx$  est nul pour des valeurs paires de  $i$ , le second membre de l'équation qui définit  $Y_i$  et la solution particulière sont nuls, ainsi que les coefficients  $A_i, B_i, C_i, D_i$ , la solution disparaît.

Nous n'avons qu'à considérer les valeurs impaires de  $i$ .

En multipliant  $Y_i$  par  $\sin \frac{i\pi x}{a}$  et faisant la somme en donnant à  $i$  les valeurs impaires 1, 3, 5, ... on aura  $w$  exprimé par une série simple

$$w = \sum \sin \frac{i\pi x}{a} \frac{K_1}{\alpha^5} \left\{ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ \left. + y \left[ \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\alpha^2(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} \operatorname{ch} \alpha y \right] \right\}.$$

7. *Calcul de la flèche de courbure.* — Supposons pour simplifier que la plaque soit carrée

$$b = a.$$

Le point central a pour coordonnées

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2},$$

la valeur  $f$  que prend  $\wp$  sera

$$f = \sum_i \frac{K_1}{\alpha^i} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \left[ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} i\pi)(i\pi - 2 \operatorname{sh} i\pi)}{2 \operatorname{sh}^2 i\pi} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{4} \frac{1 - \operatorname{ch} i\pi}{\operatorname{sh} i\pi} \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right].$$

Remarquons que

$$\frac{i\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{4} \frac{1 - \operatorname{ch} i\pi}{\operatorname{sh} i\pi} \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2}$$

s'écrit

$$\frac{i\pi}{4 \operatorname{sh} i\pi} \left( \operatorname{sh} i\pi \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} - \operatorname{ch} i\pi \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} + \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right),$$

qui est nul d'après le développement de  $\operatorname{ch} \left( i\pi - \frac{i\pi}{2} \right)$ .

Le premier terme de la série correspondant à  $i = 1$  s'écrira

$$\frac{15 p \alpha^4}{4 E I \pi^2} \left[ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \pi)(\pi - 2 \operatorname{sh} \pi)}{2 \operatorname{sh}^2 \pi} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \right].$$

A l'aide des *Tables des fonctions hyperboliques* (1), calculons sa valeur.

En remarquant que

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} = 2,301, \quad \operatorname{sh} \pi = 11,546,$$

$$\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} = 2,509, \quad \operatorname{ch} \pi = 11,589,$$

on a, pour la valeur de la parenthèse,

$$0,314,$$

---

(1) Je me suis servi des *Tables* de Hoüel, édition 1866, Gauthier-Villars, et du *Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik* von Dr W. Laska, édition 1888, p. 94, erste Lieferung.

et nous avons une première approximation de la flèche de courbure en prenant

$$f = w_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \circ,314.$$

Avant de calculer le second terme de la série correspondant à  $i = 3$ , comparons le résultat que nous venons d'obtenir avec celui qu'a trouvé Navier.

Dans son Mémoire inédit de 1820 (1), Navier a trouvé pour le déplacement  $w$  l'expression représentée par la série double

$$w = \frac{24p}{\pi^6 \alpha_1 \varepsilon'^3} \sum_{m'=1}^{m'=\infty} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \frac{1}{m' n'} \frac{\sin \frac{m' \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b}}{\left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2}\right)^2},$$

où  $m'$ ,  $n'$  sont des nombres impairs, où  $\varepsilon'$  représente la demi-épaisseur de la plaque et  $\alpha_1$  un coefficient qui, rapproché du coefficient  $E$  que nous avons employé, a pour valeur

$$\alpha_1 = \frac{16}{15} E, \quad \text{or} \quad I = \frac{8\varepsilon'^3}{12},$$

donc  $w$  peut s'écrire

$$w = \frac{15p}{EI\pi^6} \sum_{m'=1}^{m'=\infty} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \frac{1}{m' n'} \frac{\sin \frac{m' \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b}}{\left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2}\right)^2}.$$

Cette série est assez rapidement convergente. Navier se borne à prendre le premier terme correspondant aux valeurs  $m' = 1$ ,  $n' = 1$ .

On obtient ainsi

$$f_1 = \frac{15pa^4 b^4}{EI\pi^6} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{(a^2 + b^2)^2},$$

en supposant la plaque carrée le déplacement du centre sera

$$f_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \frac{1}{\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \circ,318.$$

(1) Voir *Théorie de l'Élasticité des corps solides*, Clebsch et Saint-Venant, p. 747, édition 1883.

Cette valeur est supérieure de 0,004 à celle que nous fournit la méthode de M. Maurice Lévy, qui adopte le développement

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

En se bornant au premier terme, on a

$$Y_1 \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Or

$$Y_1 \left( \frac{a}{2} \right)$$

a pour expression

$$Y_1 \left( \frac{a}{2} \right) = \frac{15\rho}{4\text{EI}\pi^5} \sum_j \frac{1}{j^7} \frac{\sin j^7 \frac{\pi}{2}}{\left( \frac{1}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2}.$$

Navier au lieu de prendre la série  $\sum_j$  en entier n'en considère que le premier terme correspondant à  $j=1$  et néglige le second correspondant à  $j=3$ , terme qui est négatif et égal à  $-\frac{15\rho a^4}{4\text{EI}\pi^5} 0,004$ . Dans la méthode de M. Maurice Lévy cette série est considérée en entier et a été calculée, ce qui nous permet d'affirmer que nous obtenons par cette dernière méthode une valeur plus rapidement approchée.

Si l'on tient compte des deux premiers termes de la série double de Navier, on obtient pour valeur de la flèche

$$f_1 = \frac{15\rho a^4}{4\text{EI}\pi^5} 0,314.$$

Calculons maintenant le second terme du développement de M. Lévy correspondant à  $i=3$ .

On a

$$\text{sh} \frac{3\pi}{2} = 55,635, \quad \text{sh} 3\pi = 6191,5080,$$

$$\text{ch} \frac{3\pi}{2} = 55,644, \quad \text{ch} 3\pi = 6191,5088$$

et par suite la valeur de la parenthèse, dans l'expression de ce second

terme, sera

$$-\frac{1}{3^5} \frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5} \left[ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} 3\pi)(3\pi - 2 \operatorname{sh} 2\pi)}{2 \operatorname{sh}^2 3\pi} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} \right],$$

ou 1,004; en divisant par  $\frac{1}{3^5}$  nous avons pour la valeur du second terme de la série

$$-\frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5} 0,004.$$

Donc la valeur de la flèche de courbure sera

$$f = \frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5} (0,314 - 0,004),$$

ou

$$f = \frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5} 0,310.$$

Nous ne calculerons pas le troisième terme : il est d'un ordre, quant à son facteur numérique, supérieur à celui des dix-millièmes.

8. *Vérification expérimentale.* — Le dispositif que j'ai employé pour vérifier par l'expérience les résultats précédents est des plus simples.

Une cuve carrée V (*fig. 2*) est fermée par une membrane de caoutchouc bien mince  $cc'$ , sur cette membrane on place la plaque élastique  $cc'$  à étudier et au-dessus de la plaque vient se fixer solidement à la cuve un cadre rigide. Ce cadre a intérieurement 10<sup>cm</sup> de côté, il a été doublé en cuivre rouge de 1<sup>mm</sup> d'épaisseur pour éviter toute déformation. La pression se fait à l'intérieur de la cuve en comprimant de l'air à l'aide du manomètre ABC. Vu les faibles pressions à exercer on a remplacé dans le manomètre le mercure par l'eau. Deux échelles graduées placées le long des deux branches du manomètre permettent de lire la pression exercée.

Sous l'influence de cette pression, la plaque vient appuyer sur l'arête vive du cadre et se bombe. Il restait à mesurer le déplacement du centre de la plaque. Pour cela j'ai rendu solidaire du centre une tige  $ab$  dont l'une des extrémités  $a$  vient buter sur un levier  $aom$  qui porte en  $m$  un petit miroir. J'ai disposé devant le miroir une source

lumineuse L et un réticule horizontal M. L'image de ce fil après réflexion sur le miroir  $m$  se fait en  $r$  sur une règle graduée R. C'est le déplacement sur cette règle de la tache  $r$  que l'on a à suivre quand on fait varier la pression à l'intérieur de la cuve.

La *fig. 1* montre le dispositif de l'expérience, et la *fig. 2* une coupe détaillée de l'appareil.

Fig. 1.

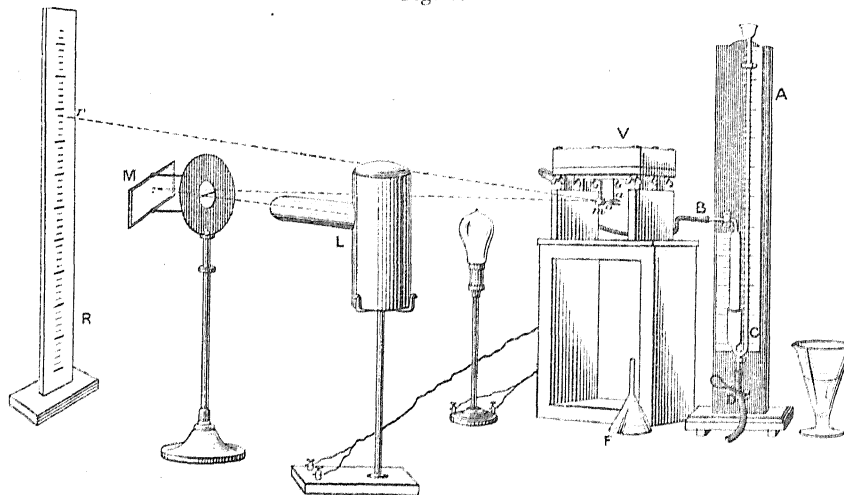
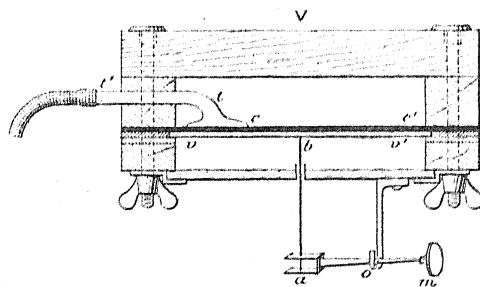


Fig. 2.



$cc'$ , plaque de verre;  $cc'$ , enveloppe en caoutchouc;  $tl$ , tube amenant dans l'enveloppe l'air comprimé du manomètre.

Dans les expériences, la distance de la règle R à l'axe de rotation  $o$  du levier était de  $109^{\text{cm}}$ ; le bras de levier  $oa$  avait  $2^{\text{cm}}$ .

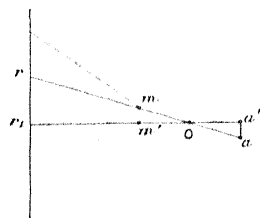
Lorsque le levier  $aom$  tourne d'un angle  $\alpha$ , le rayon lumineux

réfléchi tourne d'un angle  $2\alpha$ , il en résulte que le déplacement de l'image sur la règle est le double de la tangente de l'angle  $\alpha$  de rotation du levier. Comme  $\alpha$  est très petit, on peut avec une approximation suffisante prendre l'arc au lieu de la tangente. Le petit bras de levier  $ao$  ayant  $0^m,02$ , en désignant par  $x$  le déplacement vertical de  $a$  extrémité de la tige et  $d$  le déplacement de l'image sur la règle R, on a par la similitude des triangles  $aoa'$ ,  $r_1or$  (*fig. 3*)

$$x = \frac{d}{109}.$$

J'ai pris une plaque de verre carrée, de  $0^m,10$  de côté et d'épaisseur moyenne  $0^{mm},73$  (verre extra-mince); l'expérience m'a montré que le

Fig. 3.



déplacement  $d$  sur la règle, pour une augmentation de pression  $\delta p = 1^{gr}$ , est de  $1^{mm},97$  et, par suite, le déplacement  $x$  du point  $a$  est  $0^{mm},018$ .

La flèche étant une fonction linéaire de la pression, l'accroissement de la flèche, correspondant à une augmentation de pression de  $10^{gr}$  par centimètre carré, serait  $0^{mm},18$ .

Ces résultats d'expériences sont conformes à ceux que donne l'analyse.

Nous avons trouvé, en effet,

$$f = \frac{15 \rho a^4}{4 E I \pi^3} 0,310$$

ou, en mettant en évidence l'épaisseur  $\epsilon$  de la plaque,

$$f = \frac{45 \rho a^4}{E \epsilon^3 \pi^3} 0,310$$



et pour  $p = 1^{\text{sr}}$ , en prenant (1)

$$E = 7 \times 10^8, \quad \varepsilon = \frac{7^3}{10^3} \text{centimètres,}$$

on a

$$f = 0^{\text{mm}}, 017,$$

et pour une augmentation de pression de  $10^{\text{sr}}$  par centimètre carré,  $0^{\text{mm}}, 17$ .

Nous trouvons, par l'expérience, une flèche supérieure pour  $\delta p = 1$  de  $\frac{1}{1000}$  de millimètre à celle que donne le calcul.

Ce faible écart est facile à expliquer, si l'on remarque que la condition supposée dans l'analyse d'une plaque d'épaisseur constante est difficile à satisfaire; et nous avons vu le rôle important que joue l'épaisseur.

Une autre cause d'erreur provient de la difficulté qu'il y a d'obtenir une application intime des bords de la plaque sur le cadre. Je l'ai surmontée dans une certaine mesure en observant seulement les variations de flèches, c'est-à-dire à partir du moment où, la plaque supportant déjà une pression initiale, j'étais assuré qu'elle appuyait sur ses bords.

Ceci, joint au défaut d'isotropie que peut présenter la plaque, suffit à justifier la faible divergence que nous constatons entre le calcul et l'expérience.

Remarquons que le dispositif que j'ai employé pourrait servir à déterminer le coefficient d'élasticité  $E$ .

On déduit, en effet,

$$E = \frac{4^5 p a^4}{f \varepsilon^3 \pi^3} 0,310;$$

les quantités  $p, f$  sont mesurées par l'expérience, et  $a, \varepsilon$  ont été préalablement déterminées.

---

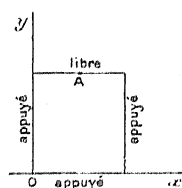
(1) Voir *Aide-mémoire de l'Ingénieur* de Cl. de Laharpe, édition 1900, ou celui de Huguenin.

CHAPITRE III.

PLAQUE DONT TROIS BORDS SONT APPUYÉS, LE QUATRIÈME ÉTANT LIBRE.

9. Nous avons jusqu'ici examiné, en nous servant de l'expression indiquée par M. Maurice Lévy pour  $w$ , le cas où la plaque rectangulaire était appuyée par ses quatre bords, afin de comparer les résultats obtenus à ceux qui sont donnés par la méthode indiquée par Navier.

Fig. 4.



Supposons maintenant que la plaque soit appuyée sur trois bords, le quatrième étant libre. Soit

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a},$$

l'expression du déplacement normal d'un point du feuillet moyen.

Il résulte de l'expression même de  $w$  que

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad x = a$$

et, par suite, les bords  $x = 0, x = a$  seront simplement appuyés. Supposons que le bord  $y = 0$  soit aussi appuyé et que le bord  $y = b$  soit libre.

On doit avoir

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad Y_i = 0, \quad Y_i'' = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( 7 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{pour } y = b,$$

conditions qui, dans le développement adopté pour  $w$ , donnent

$$(2) \quad 4 Y_i'' - \alpha^2 Y_i = 0, \quad 4 Y_i''' - 7 \alpha^2 Y_i' = 0 \quad \text{pour } y = b$$

en posant

$$\alpha = \frac{i\pi}{a}.$$

On a vu dans le Chapitre précédent que  $Y_i$  est l'intégrale générale de l'équation

$$Y_i^{(4)} - 2 \alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15}{8EIa} \int_0^a p \sin \alpha x dx$$

et a pour expression, en désignant par  $\varphi_i(y)$  une solution particulière,

$$Y_i = \varphi_i(y) + A_i \operatorname{sh} \alpha y + B_i \operatorname{ch} \alpha y + y(C_i \operatorname{sh} \alpha y + D_i \operatorname{ch} \alpha y).$$

On déduit

$$\begin{aligned} Y_i' &= \varphi_i'(y) + \operatorname{sh} \alpha y (\alpha B_i + C_i) \\ &\quad + \operatorname{ch} \alpha y (\alpha A_i + D_i) + \alpha y (C_i \operatorname{ch} \alpha y + D_i \operatorname{sh} \alpha y), \\ Y_i'' &= \varphi_i''(y) + \operatorname{sh} \alpha y (\alpha^2 A_i + 2 \alpha D_i) \\ &\quad + \operatorname{ch} \alpha y (\alpha^2 B_i + 2 \alpha C_i) + \alpha^2 y (C_i \operatorname{sh} \alpha y + D_i \operatorname{ch} \alpha y), \\ Y_i''' &= \varphi_i'''(y) + \operatorname{sh} \alpha y (\alpha^3 B_i + 3 \alpha^2 C_i) \\ &\quad + \operatorname{ch} \alpha y (\alpha^3 A_i + 3 \alpha^2 D_i) + \alpha^3 y (C_i \operatorname{ch} \alpha y + D_i \operatorname{sh} \alpha y). \end{aligned}$$

Les conditions (1)

$$Y_i = 0, \quad Y_i'' = 0 \quad \text{pour } y = 0,$$

donnent

$$\begin{aligned} \varphi_i(0) + B_i &= 0, \\ \varphi_i''(0) + \alpha^2 B_i + 2 \alpha C_i &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} B_i &= -\varphi_i(0), \\ C_i &= \frac{1}{2\alpha} [\alpha^2 \varphi_i(0) - \varphi_i''(0)]. \end{aligned}$$

Les conditions (2) explicitées donnent les équations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} 3\alpha \operatorname{sh} \alpha b A_i + (3\alpha b \operatorname{ch} \alpha b + 8 \operatorname{sh} \alpha b) D_i + 3\alpha \operatorname{ch} \alpha b B_i \\ \quad + (3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b + 8 \operatorname{ch} \alpha b) C_i + \frac{4}{\alpha} \varphi_i''(b) - \alpha \varphi_i(b) = 0, \\ 3\alpha \operatorname{ch} \alpha b A_i + (3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b - 5 \operatorname{ch} \alpha b) D_i + 3\alpha \operatorname{sh} \alpha b B_i \\ \quad + (3\alpha b \operatorname{ch} \alpha b - 5 \operatorname{sh} \alpha b) C_i - \frac{4}{\alpha^2} \varphi_i'''(b) + 7\varphi_i'(b) = 0. \end{cases}$$

Ces quatre équations détermineront  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  dès que l'on connaîtra la fonction  $\varphi_i(y)$ .

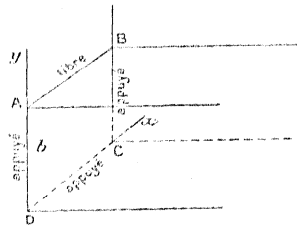
Particularisons pour cela la fonction  $p$  qui représente la charge par unité de surface, et prenons avec M. Maurice Lévy

$$p = \Pi(b - y)$$

qui représente la pression que supporte une vanne de hauteur  $b$ .

Le côté AB est libre, les trois autres BC, CD, AD sont appuyés sur un cadre.

Fig. 5.



Il est facile de voir que l'intégrale particulière  $\varphi_i(y)$  est alors

$$\varphi_i(y) = \frac{15\Pi}{4EI\alpha^3} (b - y).$$

Et, par suite, les équations précédentes donnent pour les constantes  $B_i$ ,  $C_i$

$$B_i = -\frac{15\Pi b}{4EI\alpha^3}, \quad C_i = \frac{15\Pi b}{8EI\alpha^3}.$$

En remarquant que

$$\varphi_i(b) = 0, \quad \varphi_i'(b) = 0, \quad \varphi_i''(b) = 0$$

et que

$$\varphi'_i(b) = -\frac{15\Pi}{4EI a \alpha^3},$$

les équations (I) deviennent

$$\begin{aligned} 3\alpha \operatorname{sh} \alpha b A_i + (3\alpha b \operatorname{ch} \alpha b + 8 \operatorname{sh} \alpha b) D_i &= -\frac{15\Pi b}{4EI a \alpha^3} \left( \operatorname{ch} \alpha b + \frac{3}{2} \alpha b \operatorname{sh} \alpha b \right), \\ 3\alpha \operatorname{ch} \alpha b A_i + (3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b - 5 \operatorname{ch} \alpha b) D_i \\ &= \frac{15\Pi b}{4EI a \alpha^3} \left( \frac{11}{2} \operatorname{sh} \alpha b - \frac{3}{2} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b + \frac{7}{\alpha b} \right). \end{aligned}$$

D'où l'on tire facilement

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{15\Pi b}{4EI a \alpha^3} \frac{44 \operatorname{sh}^2 \alpha b + 21 \operatorname{ch} \alpha b + \frac{56}{\alpha b} \operatorname{sh} \alpha b - 5 \operatorname{ch}^2 \alpha b - \frac{9}{2} \alpha^2 b^2}{3\alpha(3\alpha b + 13 \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b)}, \\ D_i &= -\frac{15\Pi b}{4EI a \alpha^3} \frac{\frac{11}{2} \operatorname{sh}^2 \alpha b + \frac{7}{\alpha b} \operatorname{sh} \alpha b + \operatorname{ch}^2 \alpha b}{3\alpha b + 13 \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de  $Y_i$

$$Y_i = \varphi_i(y) + A_i \operatorname{sh} \alpha y + B_i \operatorname{ch} \alpha y + y(C_i \operatorname{sh} \alpha y + D_i \operatorname{ch} \alpha y),$$

ces quantités par leurs valeurs, on aura le déplacement normal du point  $x, y$  du feuillet moyen exprimé par la série simple

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}$$

où l'on prendra pour  $i$  les valeurs impaires 1, 3, 5, ...

10. *Cas où la charge est uniformément répartie sur la plaque.* — Dans ce cas,  $p$  est constant.

L'intégrale particulière  $\varphi_i(y)$  est elle-même une constante

$$\varphi_i(y) = \frac{15p}{4EI a \alpha^3}.$$

Les valeurs de  $B_i$  et de  $C_i$  sont

$$B_i = -\frac{15p}{4EI a \alpha^3}, \quad C_i = \frac{15p}{4EI a \alpha^3} \frac{\alpha}{2}.$$

En remplaçant dans les équations (I), qui expriment la liberté du côté  $y = b$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  par leurs valeurs et remarquant que  $\varphi_i'(b)$ ,  $\varphi_i''(b)$ ,  $\varphi_i'''(b)$  sont nuls, on obtient, pour déterminer  $A_i$  et  $D_i$ , les équations

$$3\alpha \operatorname{sh} \alpha b A_i + (3\alpha b \operatorname{ch} \alpha b + 8 \operatorname{sh} \alpha b) D_i = \frac{15\rho}{4EI\alpha^3} (1 - \operatorname{ch} \alpha b - \frac{3}{2} \alpha b \operatorname{sh} \alpha b),$$

$$3\alpha \operatorname{ch} \alpha b A_i + (3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b - 5 \operatorname{ch} \alpha b) D_i = \frac{15\rho}{4EI\alpha^3} (\frac{11}{2} \operatorname{sh} \alpha b - \frac{3}{2} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b);$$

d'où l'on déduit en résolvant

$$A_i = -\frac{15\rho}{4EI\alpha^3} \frac{3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b + \frac{3}{2} \alpha^2 b^2 + 5 - 5 \operatorname{ch} \alpha b - 3\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b}{3\alpha(3\alpha b + 13 \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b)},$$

$$D_i = \frac{15\rho}{4EI\alpha^3} \frac{\operatorname{ch} \alpha b - \operatorname{ch}^2 \alpha b - \frac{11}{2} \operatorname{sh}^2 \alpha b}{3\alpha b + 13 \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b}.$$

En sorte que  $Y_i$  aura pour expression

$$Y_i = \frac{15\rho}{4EI\alpha^3} \left[ 1 - \frac{3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b + \frac{3}{2} \alpha^2 b^2 - 5 \operatorname{ch} \alpha b - 3\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b + 5}{3(3\alpha b + 13 \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b)} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ \left. + \frac{\alpha y}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \frac{\operatorname{ch} \alpha b - \operatorname{ch}^2 \alpha b - \frac{11}{2} \operatorname{sh}^2 \alpha b}{3\alpha b + 13 \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b} \operatorname{ch} \alpha y \right].$$

On aura le déplacement  $w$  du point  $x, y$  du feuillet moyen en prenant

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}$$

pour les valeurs de  $i = 1, 3, 5, \dots$

Cherchons en particulier le déplacement du centre de la plaque que nous supposons carrée.

Alors

$$b = a, \quad x = y = \frac{a}{2}.$$

On a, pour  $Y_i$ ,

$$Y_i = \frac{15\rho a^3}{4EI\pi^3 i^3} \left[ 1 - \frac{3i\pi \operatorname{sh} i\pi + \frac{3}{2} i^2 \pi^2 - 5 \operatorname{ch} i\pi - 3\alpha \operatorname{sh}^2 i\pi + 5}{3(3i\pi + 13 \operatorname{sh} i\pi \operatorname{ch} i\pi)} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right. \\ \left. + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} i\pi - \operatorname{ch}^2 i\pi - \frac{11}{2} \operatorname{sh}^2 i\pi}{3i\pi + 13 \operatorname{sh} i\pi \operatorname{ch} i\pi} \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right].$$

Considérons le premier terme de la série  $\sum_i Y_i \sin \frac{i\pi}{2}$  correspondant à  $i = 1$  et calculons sa valeur; on a

$$Y_1 = \frac{15\rho a^4}{4EI\pi^3} \left[ 1 - \frac{3\pi \operatorname{sh} \pi + \frac{3}{2}\pi^2 - 5 \operatorname{ch} \pi - 39 \operatorname{sh}^2 \pi + 5}{3(3\pi + 13 \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi)} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} \pi - \operatorname{ch}^2 \pi - \frac{11}{2} \operatorname{sh}^2 \pi}{3\pi + 13 \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi} \right].$$

Or, en remplaçant  $\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{sh} \pi$ ,  $\operatorname{ch} \pi$ , par les valeurs que j'ai indiquées dans le Chapitre précédent, on a

$$\frac{\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} = 1,807, \quad - \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \frac{3\pi \operatorname{sh} \pi + \frac{3}{2}\pi^2 - 5 \operatorname{ch} \pi - 39 \operatorname{sh}^2 \pi + 5}{3(3\pi + 13 \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi)} = + 2,236, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} \pi - \operatorname{ch}^2 \pi - \frac{11}{2} \operatorname{sh}^2 \pi}{3\pi + 13 \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi} = - 1,928, \quad 1 - \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} = - 1,509,$$

et, par suite, en rassemblant les termes

$$Y_1 = \frac{15\rho a^4}{4EI\pi^3} 0,606.$$

Mais calculons le deuxième terme de la série, correspondant à  $i = 3$ .

Le terme  $Y_3$  devra être multiplié par  $\sin \frac{3\pi}{2}$ , c'est-à-dire par  $- 1$ .

La valeur de  $w$  limitée à ses deux premiers termes sera

$$w = Y_1 - Y_3.$$

Or

$$Y_3 = \frac{15\rho a^4}{4EI\pi^3} \frac{1}{243} \left[ 1 - \frac{9\pi \operatorname{sh} 3\pi + \frac{27}{2}\pi^2 - 5 \operatorname{ch} 3\pi - 39 \operatorname{sh}^2 3\pi + 5}{3(9\pi + 13 \operatorname{sh} 3\pi \operatorname{ch} 3\pi)} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} 3\pi - \operatorname{ch}^2 3\pi - \frac{11}{2} \operatorname{sh}^2 3\pi}{9\pi + 13 \operatorname{sh} 3\pi \operatorname{ch} 3\pi} \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} \right].$$

En remplaçant  $\operatorname{sh} \frac{3\pi}{2}$ ,  $\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}$ ,  $\operatorname{sh} 3\pi$ ,  $\operatorname{ch} 3\pi$  par leurs valeurs et effectuant les calculs, on a

$$\frac{3\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} = 131,07606, \quad - \frac{9\pi \operatorname{sh} 3\pi + \frac{27}{2}\pi^2 - 5 \operatorname{ch} 3\pi - 39 \operatorname{sh}^2 3\pi + 5}{3(9\pi + 13 \operatorname{sh} 3\pi \operatorname{ch} 3\pi)} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} = 55,644, \\ \frac{3\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} 3\pi (1 - \operatorname{ch} 3\pi) - \frac{11}{2} \operatorname{sh}^2 3\pi}{9\pi + 13 \operatorname{sh} 3\pi \operatorname{ch} 3\pi} \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} = - 131,0725, \quad 1 - \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} = - 54,644.$$

En rassemblant les termes on a pour valeur de la parenthèse 1,0036 et, en divisant par  $i^5$ , c'est-à-dire 243, on a 0,0041.

On a donc

$$Y_3 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,004.$$

En se limitant à ces deux premiers termes, la valeur du déplacement du point  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{a}{2}$  sera donc

$$f = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,602.$$

La flèche est dans ce cas plus forte que si la plaque était appuyée sur ses quatre bords, nous avons vu en effet qu'alors elle a pour valeur

$$f' = \frac{15pa^4}{4EI\pi^4} 0,310.$$

Le rapport de  $f$  à  $f'$  est approximativement celui de 2 à 1.

Calculons maintenant le déplacement du point A (fig. 4), milieu du côté libre, les coordonnées de ce point sont

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = a.$$

La valeur de  $Y_i$  sera

$$Y_i = \frac{15pa^4}{4EIi^5\pi^5} \left[ 1 - \frac{3i\pi \operatorname{sh} i\pi + \frac{9}{2}i^2\pi^2 - 5\operatorname{ch} i\pi - 39\operatorname{sh}^2 i\pi + 5}{3(3i\pi + 13\operatorname{sh} i\pi \operatorname{ch} i\pi)} \operatorname{sh} i\pi - \operatorname{ch} i\pi + \frac{i\pi}{2} \operatorname{sh} i\pi + i\pi \frac{\operatorname{ch} i\pi - \operatorname{ch}^2 i\pi - \frac{11}{2}\operatorname{sh}^2 i\pi}{3i\pi - 13\operatorname{sh} i\pi \operatorname{ch} i\pi} \operatorname{ch} i\pi \right].$$

Ce développement se déduit de celui que nous venons de trouver en remplaçant  $\operatorname{sh} \frac{i\pi}{2}$ ,  $\operatorname{ch} \frac{i\pi}{2}$  par  $\operatorname{sh} i\pi$ ,  $\operatorname{ch} i\pi$ .

Les coefficients ont été déjà calculés pour  $i = 1$  et  $i = 3$ . En remplaçant, on a, pour valeur de  $Y_i$ , 0,919, correspondant à  $i = 1$ , et 0,004 pour  $i = 3$ .

Borné aux deux premiers, le déplacement du point A a pour valeur

$$w = Y_1 - Y_3 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,915,$$

environ une fois et demie le déplacement du centre.



11. *Vérification expérimentale.* — Nous pouvons, en modifiant légèrement le cadre qui nous a servi dans le cas où la plaque était complètement appuyée sur ses bords, faire la vérification dans le cas actuel. A cet effet, la feuillure en cuivre qui double le cadre en bois a une ouverture rectangulaire dont l'une des dimensions a 3<sup>mm</sup> de plus que l'autre; de cette façon, en faisant glisser la plaque qui nous a servi, elle se trouve appuyée sur trois bords et a son quatrième libre.

1<sup>o</sup> En disposant ensuite l'expérience comme précédemment, par de simples lectures nous avons le déplacement du centre correspondant à une variation de pression  $\delta p$ .

J'ai observé, en me servant de la même plaque de verre, que, pour une variation de pression  $\delta p = 10^6$ , l'image lumineuse se déplace sur la règle de 3<sup>mm</sup>,8; par suite la variation  $\delta f$  est  $\frac{3^{\text{mm}},8}{109}$ , c'est-à-dire 0<sup>mm</sup>,035 et, pour une pression de 10<sup>6</sup> par centimètre carré, l'on aurait 0<sup>mm</sup>,35.

Ce résultat est conforme à celui que donne le calcul. Nous avons trouvé, en effet,

$$f = \frac{45 p a^4}{E \varepsilon^3 \pi^3} 0,602;$$

en faisant  $p = 1$ , et en remplaçant  $a$ ,  $E$ ,  $\varepsilon$  par leurs valeurs, on a

$$\delta f = 0^{\text{mm}},033$$

qui diffère seulement de  $\frac{2}{1000}$  de millimètre de celle que donne l'expérience.

2<sup>o</sup> Une autre vérification intéressante est de chercher le rapport des deux accroissements de la flèche dans le cas où la même plaque est appuyée sur ses quatre bords et celui où elle a un bord libre.

Le calcul donne

$$\frac{\delta f'_{1 \text{ bord libre}}}{\delta f_4 \text{ bords appuyés}} = \frac{602}{310} \quad \text{ou} \quad 1,942.$$

Par l'expérience nous avons

$$\frac{0,035}{0,018} = 1,944.$$

3° J'ai aussi déterminé expérimentalement la variation du déplacement du milieu du côté libre. J'ai dû modifier un peu le dispositif en faisant appuyer la tige, qui fait tourner le levier, au milieu du côté libre, et j'ai constaté que, pour une variation de pression  $\delta p = 1$ , l'image lumineuse se déplace sur la règle de  $5^{\text{mm}},7$ . Comme l'axe de rotation du levier a été reculé sur la planchette de  $2^{\text{cm}}$ , on a pour déplacement réel du milieu du côté libre

$$\frac{5^{\text{mm}},7}{111} \text{ ou } 0^{\text{mm}},051.$$

Nous avons trouvé que le déplacement du centre de la plaque correspondant à la même pression  $\delta p = 1$  était  $0^{\text{mm}},035$ .

Le rapport de ces deux déplacements est  $\frac{51}{35}$  ou  $1,46$ .

Or le calcul nous donne pour valeur de ce rapport  $\frac{915}{602}$ , c'est-à-dire  $1,52$ . J'ai indiqué, dans le cas où la plaque était simplement appuyée sur ses quatre bords, les raisons des faibles écarts entre le calcul et l'observation.

## CHAPITRE IV.

PLAQUE DONT TROIS BORDS SONT APPUYÉS ET LE QUATRIÈME ENCASTRÉ.

12. Dans ce cas, les constantes  $B_i, C_i$  ayant la même valeur que précédemment les équations qui déterminent  $A_i, D_i$  sont alors

$$Y_i = 0, \quad Y'_i = 0, \quad \text{pour } y = b,$$

ou, en explicitant,

$$\begin{aligned} \varphi_i(b) + A_i \operatorname{sh} \alpha b + B_i \operatorname{ch} \alpha b + b(C_i \operatorname{sh} \alpha b + D_i \operatorname{ch} \alpha b) &= 0, \\ \varphi'_i(b) + (\alpha B_i + C_i) \operatorname{sh} \alpha b + (\alpha A_i + D_i) \operatorname{ch} \alpha b + \alpha b(C_i \operatorname{ch} \alpha b + D_i \operatorname{sh} \alpha b) &= 0 \end{aligned}$$

ou, en ordonnant et remplaçant  $B_i, C_i$  par les valeurs

$$B_i = -\varphi_i(o), \quad C_i = -\frac{1}{2\alpha} [\varphi_i''(o) - \alpha^2 \varphi_i(o)],$$

on a

$$\begin{aligned} A_i \operatorname{sh} \alpha b + D_i b \operatorname{ch} \alpha b &= -\varphi_i(b) + \varphi_i(o) \left( \operatorname{ch} \alpha b - \frac{b\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha b \right) + \frac{b}{2\alpha} \varphi_i''(o) \operatorname{sh} \alpha b, \\ (1) \quad \alpha A_i \operatorname{ch} \alpha b + D_i (\operatorname{ch} \alpha b + \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) \\ &= -\varphi_i'(b) + \frac{\alpha}{2} \varphi_i(o) (\operatorname{sh} \alpha b - b\alpha \operatorname{ch} \alpha b) + \varphi_i''(o) \frac{1}{2\alpha} (\operatorname{sh} \alpha b + b\alpha \operatorname{ch} \alpha b). \end{aligned}$$

Supposons que la pression  $p$  soit constante, c'est-à-dire que la charge soit uniformément répartie sur la plaque. Nous aurons

$$\varphi_i(y) = \frac{15p}{4EI\alpha^3} = \frac{K_1}{\alpha^3};$$

par suite,

$$B_i = -\frac{K_1}{\alpha^3}, \quad C_i = \frac{\alpha}{3} \frac{K_1}{\alpha^3}.$$

Les équations (1) deviennent

$$\begin{aligned} A_i \operatorname{sh} \alpha b + D_i b \operatorname{ch} \alpha b &= \frac{K_1}{\alpha^3} \left( \operatorname{ch} \alpha b - \frac{b\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha b - 1 \right), \\ \alpha A_i \operatorname{ch} \alpha b + D_i (\operatorname{ch} \alpha b + \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) &= \frac{K_1}{\alpha^3} \frac{\alpha}{2} (\operatorname{sh} \alpha b - b\alpha \operatorname{ch} \alpha b) \end{aligned}$$

et donnent pour  $A_i$  et  $D_i$  les valeurs suivantes :

$$A_i = \frac{K_1}{2\alpha^3} \frac{2\alpha b \operatorname{sh} \alpha b - 2 \operatorname{ch}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 + 2 \operatorname{ch} \alpha b}{\alpha b - \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b}, \quad D_i = \frac{K_1}{2\alpha^3} \frac{\alpha(1 - \operatorname{ch} \alpha b)^2}{\alpha b - \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b},$$

et, par suite, on a l'expression de  $Y_i$

$$\begin{aligned} Y_i &= \frac{K_1}{\alpha^3} \left\{ 1 + \frac{\alpha b \operatorname{sh} \alpha b - \operatorname{ch}^2 \alpha b - \frac{\alpha^2 b^2}{2} + \operatorname{ch} \alpha b}{\alpha b - \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ &\quad \left. + y \left[ \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\alpha(1 - \operatorname{ch} \alpha b)^2}{2(\alpha b - \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b)} \operatorname{ch} \alpha y \right] \right\} \end{aligned}$$

et le déplacement  $w$  du point de coordonnées  $x, y$  sera exprimé par

une série simple

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}$$

où  $i$  prendra seulement des valeurs impaires.

13. *Application.* — Supposons que la plaque soit carrée,  $b = a$ , et calculons le déplacement du centre de la plaque de coordonnées  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{a}{2}$ .

On a

$$f = \sum_i \frac{15\rho a^4}{4EI\pi^5 i^5} \sin \frac{i\pi}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha b \operatorname{sh} \alpha b - \operatorname{ch}^2 \alpha b + \operatorname{ch} \alpha b - \frac{\alpha^2 b^2}{2}}{\alpha b - \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ \left. + \frac{\alpha y}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\alpha y}{2} \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)^2}{\alpha b - \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b} \operatorname{ch} \alpha y \right]$$

ou

$$f = \sum_i \frac{15\rho a^4}{4EI\pi^5 i^5} \sin \frac{i\pi}{2} \left[ 1 + \frac{i\pi \operatorname{sh} i\pi - \operatorname{ch}^2 i\pi + \operatorname{ch} i\pi - \frac{i^2 \pi^2}{2}}{i\pi - \operatorname{sh} i\pi \operatorname{ch} i\pi} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right. \\ \left. + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{4} \frac{(1 - \operatorname{ch} i\pi)^2}{i\pi - \operatorname{sh} i\pi \operatorname{ch} i\pi} \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right].$$

Calculons le premier terme de la série correspondant à  $i = 1$ , nous aurons

$$\frac{15\rho a^4}{4EI\pi^5} \left[ 1 + \frac{\pi \operatorname{sh} \pi - \operatorname{ch}^2 \pi + \operatorname{ch} \pi - \frac{\pi^2}{2}}{\pi - \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \frac{(1 - \operatorname{ch} \pi)^2}{\pi - \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \right]$$

Si l'on remplace  $\operatorname{sh} \pi$ ,  $\operatorname{ch} \pi$ ,  $\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}$  par les valeurs calculées précédemment, on trouve

$$\frac{1}{2} \frac{\pi(2 \operatorname{sh} \pi - \pi) + 2 \operatorname{ch} \pi(1 - \operatorname{ch} \pi)}{\pi - \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} = 1,608, \quad - \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} = -2,509, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} = 1,807, \quad \frac{\pi}{4} \frac{(1 - \operatorname{ch} \pi)^2}{\pi - \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} = -1,690.$$

En rassemblant les termes, la valeur du crochet sera

$$0,216.$$

Si l'on se bornait au premier terme de la série, la valeur de la flèche de courbure serait

$$f = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,216.$$

Mais calculons le deuxième terme de la série correspondant à  $i = 3$ ; comme  $\sin \frac{i\pi}{3} = -1$ , on aura

$$-\frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \frac{1}{243} \left[ 1 + \frac{3\pi \operatorname{sh} 3\pi - \operatorname{ch}^2 3\pi + \operatorname{ch} 3\pi - \frac{9\pi^2}{2}}{3\pi - \operatorname{sh} 3\pi \operatorname{ch} 3\pi} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} \right. \\ \left. + \frac{3\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \frac{(1 - \operatorname{ch} 3\pi)^2}{3\pi - \operatorname{sh} 3\pi \operatorname{ch} 3\pi} \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} \right].$$

En remplaçant  $\operatorname{sh} 3\pi$ ,  $\operatorname{ch} 3\pi$ ,  $\operatorname{sh} \frac{3\pi}{2}$ ,  $\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}$  par les valeurs déjà calculées, on a

$$\frac{1}{2} \frac{3\pi(2\operatorname{sh} 3\pi - 3\pi) + 2\operatorname{ch} 3\pi(1 - \operatorname{ch} 3\pi)}{3\pi - \operatorname{sh} 3\pi \operatorname{ch} 3\pi} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} = 55,524, \quad -\operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} = -55,644, \\ \frac{3\pi}{4} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} = 131,094, \quad \frac{3\pi}{4} \frac{(1 - \operatorname{ch} 3\pi)^2}{3\pi - \operatorname{sh} 3\pi \operatorname{ch} 3\pi} \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} = -130,980.$$

D'où la valeur de la parenthèse sera 0,994. Nous devons diviser encore par  $i^5$ , c'est-à-dire 243, ce qui donne pour la valeur du second terme de la série

$$-\frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,004,$$

et par suite la valeur de la flèche de courbure sera dans ce cas :

$$f = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,212.$$

Elle est plus faible que si la plaque était appuyée sur ses quatre bords.

## CHAPITRE V.

PLAQUE DONT DEUX BORDS OPPOSÉS SONT LIBRES ET LES DEUX AUTRES BORDS APPUYÉS.

14. Nous allons examiner le cas où la plaque a deux bords libres et voir que ce cas correspond à celui du maximum du déplacement du milieu de la plaque.

Les conditions au contour qui déterminent les constantes arbitraires  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  de l'intégrale générale de l'équation qui définit  $Y_i$  sont

$$4Y_i'' - \alpha^2 Y_i = 0, \quad 4Y_i''' - 7\alpha^2 Y_i' = 0 \quad \text{pour les deux bords } y = 0 \text{ et } y = b,$$

ce qui nous donne quatre équations pour déterminer  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ . En remplaçant  $Y_i$ ,  $Y_i'$ ,  $Y_i''$ ,  $Y_i'''$  par leurs valeurs qui ont été calculées Chapitre III, simplifiant et supposant la charge uniformément répartie sur la plaque, ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} 3\alpha B_i + 8C_i &= \alpha \varphi_i(0), & 3\alpha A_i &= 5D_i, \\ 3\alpha \operatorname{sh} \alpha b A_i + (3\alpha b \operatorname{ch} \alpha b + 8 \operatorname{sh} \alpha b) D_i \\ &+ 3\alpha \operatorname{ch} \alpha b B_i + (3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b + 8 \operatorname{ch} \alpha b) C_i &= \alpha \varphi_i(0), \\ 3\alpha \operatorname{ch} \alpha b A_i + (3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b - 5 \operatorname{ch} \alpha b) D_i \\ &+ 3\alpha \operatorname{sh} \alpha b B_i + (3\alpha b \operatorname{ch} \alpha b - 5 \operatorname{sh} \alpha b) C_i &= 0. \end{aligned}$$

En tirant  $D_i = \frac{3\alpha}{5} A_i$ ,  $C_i = \frac{\alpha}{8} \varphi_i(0) - \frac{3\alpha}{8} B_i$  des deux premières et portant dans les deux dernières on a

$$\begin{aligned} \frac{A_i}{5} (39 \operatorname{sh} \alpha b + 9\alpha^2 b \operatorname{ch} \alpha b) - B_i \frac{9\alpha b}{8} \operatorname{sh} \alpha b &= \varphi_i(b) - \frac{\varphi_i(0)}{8} (3\alpha b \operatorname{sh} \alpha b + 8 \operatorname{ch} \alpha b), \\ A_i \frac{9\alpha^2 b}{5} \operatorname{sh} \alpha b + \frac{B_i}{8} (39\alpha \operatorname{sh} \alpha b - 9\alpha^2 b \operatorname{ch} \alpha b) &= \frac{\alpha \varphi_i(0)}{8} (5 \operatorname{sh} \alpha b - 3\alpha b \operatorname{ch} \alpha b), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit pour  $A_i$  et  $B_i$  les valeurs

$$A_i = \frac{5\varphi_i(0)(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{39 \operatorname{sh} \alpha b - 9\alpha b}, \quad B_i = \frac{3\varphi_i(0)(65 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 9\alpha^2 b^2 - 24\alpha b \operatorname{sh} \alpha b)}{39^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 81\alpha^2 b^2},$$

et, par suite,

$$C_i = \frac{3\alpha \varphi_i(0) \operatorname{sh} \alpha b}{39 \operatorname{sh} \alpha b - 9\alpha b}, \quad D_i = \frac{3\alpha \varphi_i(0) (1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{39 \operatorname{sh} \alpha b - 9\alpha b}.$$

Or

$$\varphi_i(b) = \varphi_i(0) = \frac{15 p \alpha^4}{4 \operatorname{EI} i^5 \pi^5};$$

en remplaçant dans l'expression de  $Y_i$ ,

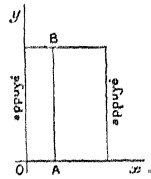
$$Y_i = \varphi_i(y) + A_i \operatorname{sh} \alpha y + B_i \operatorname{ch} \alpha y + y(C_i \operatorname{sh} \alpha y + D_i \operatorname{ch} \alpha y), \quad \varphi_i, A_i, B_i, C_i, D_i,$$

par ces valeurs, on obtient

$$Y_i = \frac{15 p \alpha^4}{4 \operatorname{EI} i^5 \pi^5} \left[ 1 + \frac{5(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{39 \operatorname{sh} \alpha b - 9\alpha b} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{3(13 \times 5 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 9\alpha^2 b^2 - 24\alpha b \operatorname{sh} \alpha b)}{39^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 81 \alpha^2 b^2} \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ \left. + y \left( \frac{9\alpha(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{39 \operatorname{sh} \alpha b - 9\alpha b} \operatorname{ch} \alpha y + \frac{3\alpha \operatorname{sh} \alpha b}{39 \operatorname{sh} \alpha b - 9\alpha b} \operatorname{sh} \alpha y \right) \right]$$

Par raison de symétrie la valeur du déplacement  $w$  sera la même en deux points A et B (*fig. 6*) situés sur les deux côtés libres sur une parallèle aux côtés appuyés, c'est-à-dire correspondant à une même valeur de  $x$

Fig. 6.



Il est d'ailleurs facile de le vérifier :

On a

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

Calculons la valeur de  $Y_i$  aux deux points A et B. Nous aurons, pour le point A,

$$Y_i(0) = \frac{16 p \alpha^4}{4 \operatorname{EI} i^5 \pi^5} \left( 1 + \frac{195 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 27 \alpha^2 b^2 - 72 \alpha b \operatorname{sh} \alpha b}{39^2 \operatorname{sh}^2 \alpha b - 81 \alpha^2 b^2} \right),$$

si l'on remplace  $y$  par  $b$  dans  $Y_i(y)$  on a, pour le point B,

$$Y_i(b) = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \frac{1716\text{sh}^2\alpha b - 108\alpha^2 b^2 - 72\alpha b\text{sh}\alpha b}{39^2\text{sh}^2\alpha b - 81\alpha^2 b^2}$$

qui est la même expression que celle de  $Y_i(0)$ .

Cela étant, le déplacement d'un point situé sur l'un ou l'autre des côtés libres de la plaque et correspondant à une abscisse  $x$  sera

$$w = \sum_i \frac{15pa^4}{4EI\pi^5 i^5} \frac{1716\text{sh}^2\alpha b - 108\alpha^2 b^2 - 72\alpha b\text{sh}\alpha b}{39^2\text{sh}^2\alpha b - 81\alpha^2 b^2} \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

15. *Application.* — Comme application numérique supposons la plaque carrée  $b = a$  et calculons le déplacement du centre de la plaque de coordonnées  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{a}{2}$ .

En tenant compte de ces hypothèses, le premier terme du développement de  $w$  correspondant à  $i = 1$  sera

$$Y_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \left[ 1 + \frac{10(1 - \text{ch}\pi) + 3\pi\text{sh}\pi}{2(39\text{sh}\pi - 9\pi)} \text{sh} \frac{\pi}{2} + \frac{6(65\text{sh}^2\pi - 9\pi^2 - 24\pi\text{sh}\pi) + 3\pi(1 - \text{ch}\pi)(39\text{sh}\pi + 9\pi)}{2(39^2\text{sh}^2\pi - 81\pi^2)} \text{ch} \frac{\pi}{2} \right].$$

Si l'on y remplace  $\text{sh}\pi$ ,  $\text{ch}\pi$ ,  $\text{sh} \frac{\pi}{2}$ ,  $\text{ch} \frac{\pi}{2}$  par les valeurs trouvées précédemment on obtient

$$Y_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,998.$$

On trouverait de même le terme correspondant à  $i = 3$ ,

$$Y_3 = -\frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,004.$$

Par suite, en se bornant à ces deux premiers termes, le déplacement du centre de la plaque a pour valeur

$$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,994.$$

Calculons maintenant le déplacement du milieu d'un côté libre. Pour



ce point  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = a$ , par suite, la valeur du déplacement est

$$f' = \sum_i \frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5 i^5} \frac{1716 \operatorname{sh}^2 i \pi - 108 i^2 \pi^2 - 72 i \pi \operatorname{sh} i \pi}{39 \operatorname{sh}^2 i \pi - 81 i^2 \pi^2} \sin \frac{i \pi}{2}.$$

Le premier terme de la série correspondant à  $i = 1$  sera

$$\frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5} \frac{1716 \operatorname{sh}^2 \pi - 108 \pi^2 - 72 \pi \operatorname{sh} \pi}{39 \operatorname{sh}^2 \pi - 81 \pi^2}$$

en remplaçant les quantités par leurs valeurs numériques on a

$$f'_1 = \frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5} 1,114.$$

En calculant de même le second terme de série correspondant à  $i = 3$ , on aurait

$$f'_3 = - \frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5} 0,004,$$

d'où la valeur du déplacement du milieu d'un bord libre est

$$\frac{15 p a^4}{4 E I \pi^5} 1,110.$$

Ce déplacement est plus grand que celui du centre. La ligne médiane de la plaque qui joint les milieux des côtés libres s'infléchit donc au centre pour se relever sur les bords. La forme que prend la surface de la plaque est à courbures opposées et rappelle celle d'une voile rectangulaire de navire gonflée par le vent et fixée par deux côtés opposés à deux vergues.

Nous trouvons dans ce cas, pour le déplacement du centre, la plus grande valeur; cela devait être, car des six cas que nous examinons, celui-ci correspond au maximum de degré de liberté de la plaque.

On peut à l'aide de l'appareil qui nous a déjà servi vérifier ces résultats, il suffit de prendre la plaque de 0<sup>m</sup>,10 de longueur sur deux bords et 0<sup>m</sup>,103 pour les deux autres. De cette façon elle sera appuyée sur deux autres côtés et aura les deux autres libres par rapport au cadre.

CHAPITRE VI.

PLAQUE ENCASTRÉE LE LONG DE DEUX BORDS OPPOSÉS ET APPUYÉE SUR LES DEUX AUTRES.

16. Déterminons les constantes arbitraires  $A_i, B_i, C_i, D_i$  de la fonction  $Y_i$  par la condition d'encastrement des deux côtés  $y = 0, y = b$ . Pour cela il est nécessaire que  $Y_i = 0, Y'_i = 0$  pour ces valeurs de  $y$ . Ou en explicitant,

$$Y_i = \varphi_i(y) + A_i \operatorname{sh} \alpha y + B_i \operatorname{ch} \alpha y + y(C_i \operatorname{sh} \alpha y + D_i \operatorname{ch} \alpha y),$$

$$Y'_i = \varphi'_i(y) + \operatorname{sh} \alpha y (\alpha B_i + C_i) + \operatorname{ch} \alpha y (\alpha A_i + D_i) + \alpha y (C_i \operatorname{ch} \alpha y + D_i \operatorname{sh} \alpha y),$$

on a pour déterminer  $A_i, B_i, C_i, D_i$  les quatre équations

$$B_i = -\varphi_i(0), \quad D_i = -\varphi'_i(0) - \alpha A_i,$$

$$A_i (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) + C_i b \operatorname{sh} \alpha b = b \varphi'_i(0) \operatorname{ch} \alpha b + \varphi_i(0) \operatorname{ch} \alpha b - \varphi_i(b),$$

$$A_i \alpha^2 b \operatorname{sh} \alpha b - C_i (\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b)$$

$$= -\alpha \varphi_i(0) \operatorname{sh} \alpha b - \varphi'_i(0) \operatorname{ch} \alpha b - \alpha b \varphi'_i(0) \operatorname{sh} \alpha b + \varphi'_i(b),$$

d'où l'on tire après simplification

$$A_i = \frac{[\alpha b \varphi_i(b) - \varphi_i(0) \operatorname{sh} \alpha b] \operatorname{ch} \alpha b - [b \varphi'_i(b) - \varphi_i(b)] \operatorname{sh} \alpha b - \alpha b [b \varphi'_i(0) + \varphi_i(0)]}{\alpha^2 b^2 - \operatorname{sh}^2 \alpha b},$$

$$C_i = \frac{\varphi'_i(0) (\alpha b - \operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) - \alpha \varphi_i(0) \operatorname{sh}^2 \alpha b + \varphi'_i(b) (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) + \varphi_i(b) \alpha^2 b \operatorname{sh} \alpha b}{\alpha^2 b^2 - \operatorname{sh}^2 \alpha b}.$$

Ces formules permettront de connaître les valeurs des constantes dès que la fonction  $\varphi_i(y)$  sera déterminée.

Examinons, en particulier, le cas où la plaque supporte une charge uniformément répartie. Alors  $p$  est une constante. On a vu que la fonction  $\varphi_i(y)$  est alors constante

$$\varphi_i(y) = \frac{15p}{4EI\alpha^5} \quad \text{ou} \quad \frac{15pa^4}{4EI^5\pi^5},$$

il suit que

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(b) = \frac{15pa^4}{4EIi^5\pi^5}$$

et que

$$\varphi'_i(0) = \varphi'_i(b) = 0.$$

Les formules précédentes se simplifient et l'on a

$$B_i = -\frac{15pa^4}{4EIi^5\pi^5}, \quad A_i = \frac{15pa^4}{4EIi^5\pi^5} \frac{\operatorname{ch}\alpha b - 1}{\alpha b + \operatorname{sh}\alpha b}, \quad C_i = \frac{15pa^4}{4EIi^5\pi^5} \frac{\alpha \operatorname{sh}\alpha b}{\alpha b + \operatorname{sh}\alpha b},$$

$$D_i = -\alpha A_i = -\frac{15pa^4}{4EIi^5\pi^5} \frac{\alpha(\operatorname{ch}\alpha b - 1)}{\alpha b + \operatorname{sh}\alpha b},$$

et par suite l'expression de  $Y_i$  est

$$Y_i = \frac{15pa^4}{4EIi^5\pi^5} \left[ 1 + \frac{\operatorname{ch}\alpha b - 1}{\alpha b + \operatorname{sh}\alpha b} \operatorname{sh}\alpha y - \operatorname{ch}\alpha y \right. \\ \left. + \alpha y \left( \frac{\operatorname{sh}\alpha b}{\alpha b + \operatorname{sh}\alpha b} \operatorname{sh}\alpha y - \frac{\operatorname{ch}\alpha b - 1}{\alpha b + \operatorname{sh}\alpha b} \operatorname{ch}\alpha y \right) \right],$$

et par suite le déplacement du point  $x, y, 0$  de la plaque sera

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

17. *Application.* — Calculons le déplacement du centre de la plaque en la supposant carrée.

Dans ces conditions

$$b = a, \quad x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2},$$

et l'on a

$$w = \sum_i \frac{15pa^4}{4EIi^5\pi^5} \left[ 1 + \frac{\operatorname{ch}i\pi - 1}{i\pi + \operatorname{sh}i\pi} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right. \\ \left. + \frac{i\pi}{2} \left( \frac{\operatorname{sh}i\pi}{i\pi + \operatorname{sh}i\pi} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} - \frac{\operatorname{ch}i\pi - 1}{i\pi + \operatorname{sh}i\pi} \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right) \right] \sin \frac{i\pi}{2}.$$

Remarquons que la quantité que multiplie  $\frac{i\pi}{2}$  est nulle, car l'on a

$$\operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} = \operatorname{ch} \left( i\pi - \frac{i\pi}{2} \right) = \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \operatorname{ch} i\pi - \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} \operatorname{sh} i\pi,$$

on a donc

$$w = \sum_i \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \left( 1 + \frac{\operatorname{ch} i\pi - 1}{i\pi + \operatorname{sh} i\pi} \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} \right) \sin \frac{i\pi}{2}.$$

Considérant le premier terme de la série correspondant à  $i = 1$ , on aura

$$w_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \left( 1 + \frac{\operatorname{ch} \pi - 1}{\pi + \operatorname{sh} \pi} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \right),$$

et en remplaçant les fonctions hyperboliques par les valeurs déjà trouvées on aura

$$\frac{\operatorname{ch} \pi - 1}{\pi + \operatorname{sh} \pi} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} = 1,646, \quad \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} = 2,509;$$

la valeur de  $w_1$  sera donc

$$w_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,137.$$

Calculons le second terme de la série correspondant à  $i = 3$ . Ce terme étant multiplié par  $\sin \frac{3\pi}{2}$  sera négatif.

Il a pour expression

$$w_3 = - \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \frac{1}{243} \left( 1 + \frac{\operatorname{ch} 3\pi - 1}{3\pi + \operatorname{sh} 3\pi} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2} \right)$$

et pour valeur

$$w_3 = - \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,003.$$

Par suite, la valeur du déplacement du centre de la plaque sera

$$w = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,134.$$

Il est inutile de calculer le troisième terme de la série, car la série étant rapidement convergente, ce terme n'influerait pas sur les millièmes trouvés.

## CHAPITRE VII.

PLAQUE AYANT DEUX BORDS OPPOSÉS APPUYÉS, UN LIBRE ET UN ENCASTRÉ.

18. Examinons enfin le cas où la plaque a un bord libre et le bord opposé encasté, les deux autres étant toujours appuyés.

Soient

$$y = 0$$

l'équation du bord libre, et

$$y = b$$

celle du bord encasté.

En supposant la charge uniformément répartie sur la plaque, les équations qui déterminent les constantes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  sont, dans ce cas,

$$3B_i\alpha + 8C_i = \alpha\varphi_i(0),$$

$$3\alpha A_i = 5D_i,$$

qui expriment la liberté du côté  $y = 0$ , et

$$Y_i = 0 \quad \text{et} \quad Y_i' = 0 \quad \text{pour} \quad y = b,$$

ou

$$\varphi_i(b) + A_i \operatorname{sh} \alpha b + B_i \operatorname{ch} \alpha b + b(C_i \operatorname{sh} \alpha b + D_i \operatorname{ch} \alpha b) = 0,$$

$$\varphi_i'(b) + (\alpha B_i + C_i) \operatorname{sh} \alpha b + (\alpha A_i + D_i) \operatorname{ch} \alpha b + \alpha b(C_i \operatorname{ch} \alpha b + D_i \operatorname{sh} \alpha b) = 0,$$

qui expriment l'encastement du bord  $y = b$ .

On tire des deux premières, pour  $C_i$  et  $D_i$ , les valeurs

$$C_i = \frac{\alpha\varphi_i(0)}{8} - \frac{3\alpha}{8}B_i, \quad D_i = \frac{3\alpha}{5}A_i.$$

En portant dans les deux dernières, on a, après simplification pour déterminer  $A_i$  et  $B_i$ , les deux équations

$$A_i(40 \operatorname{sh} \alpha b + 24 \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) + B_i(40 \operatorname{ch} \alpha b - 15 \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) = -5 \varphi_i(0)(8 + \alpha b \operatorname{sh} \alpha b),$$

$$A_i(64 \operatorname{ch} \alpha b + 24 \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) + B_i(25 \operatorname{sh} \alpha b - 15 \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) = -5 \varphi_i(0)(\alpha b \operatorname{ch} \alpha b + \operatorname{sh} \alpha b).$$

En résolvant, on a, pour les constantes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ , les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} A_i &= \varphi_i(0) \frac{5\alpha b + 5\operatorname{ch}\alpha b \operatorname{sh}\alpha b - 25\operatorname{sh}\alpha b + 15\alpha b \operatorname{ch}\alpha b}{25\operatorname{sh}^2\alpha b - 64\operatorname{ch}^2\alpha b - 9\alpha^2 b^2}, \\ B_i &= \varphi_i(0) \frac{64\operatorname{ch}\alpha b + 24\alpha b \operatorname{sh}\alpha b - 5\operatorname{sh}^2\alpha b - 3\alpha^2 b^2}{25\operatorname{sh}^2\alpha b - 64\operatorname{ch}^2\alpha b - 9\alpha^2 b^2}, \\ C_i &= \frac{\alpha \varphi_i(0)}{8} \frac{40\operatorname{sh}^2\alpha b - 64\operatorname{ch}^2\alpha b - 192\operatorname{ch}\alpha b - 72\alpha b \operatorname{sh}\alpha b}{25\operatorname{sh}^2\alpha b - 64\operatorname{ch}^2\alpha b - 9\alpha^2 b^2}, \\ D_i &= 3\alpha \varphi_i(0) \frac{\alpha b + \operatorname{sh}\alpha b \operatorname{ch}\alpha b - 5\operatorname{sh}\alpha b + 3\alpha b \operatorname{ch}\alpha b}{25\operatorname{sh}^2\alpha b - 64\operatorname{ch}^2\alpha b - 9\alpha^2 b^2}, \end{aligned}$$

et, par suite, en remplaçant dans  $Y_i$ ,

$$Y_i = \varphi_i(y) + A_i \operatorname{sh}\alpha y + B_i \operatorname{ch}\alpha y + y(C_i \operatorname{sh}\alpha y + D_i \operatorname{ch}\alpha y),$$

on aura le déplacement du point  $x, y$  exprimé par la série simple

$$w = \sum_i Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

19. *Application.* — Supposons, comme précédemment, la plaque carrée  $a = b$  et cherchons le déplacement du centre de la plaque en nous bornant aux deux premiers termes de la série qui donne  $w$ .

On aura

$$f = Y_1 \left( \frac{a}{2} \right) - Y_3 \left( \frac{a}{2} \right).$$

Si l'on remplace, dans les expressions des constantes, les fonctions hyperboliques qui y figurent par les valeurs déjà calculées, on trouve que ces constantes ont pour valeur

$$\begin{aligned} A_i &= -\varphi_i(0) \times 0,176, & B_i &= -\varphi_i(0) \times 0,171, \\ \frac{a}{2} C_i &= \varphi_i(0) \times 0,297, & \frac{a}{2} D_i &= -\varphi_i(0) \times 0,166. \end{aligned}$$

Par suite,

$$Y_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} \left( 1 - 0,176 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} - 0,171 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} + 0,297 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} - 0,166 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \right),$$

d'où

$$Y_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^5} 0,433.$$

Le calcul de  $Y_3$  donnerait

$$-\frac{15pa^4}{4EI\pi^3} 0,003,$$

d'où la valeur du déplacement du centre sera, en se bornant aux deux premiers termes,

$$\frac{15pa^4}{4EI\pi^3} 0,430.$$

Le déplacement du milieu du côté libre s'obtiendra en faisant

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = 0.$$

Dans ce cas, le premier terme de la série donnera

$$Y_1 = \frac{15pa^4}{4EI\pi^3} (1 - 0,171) \quad \text{ou} \quad \frac{15pa^4}{4EI\pi^3} 0,829.$$

Remarquons que le déplacement du centre et celui du milieu du côté libre sont, dans ce cas, respectivement plus petits que les déplacements du centre et du milieu du côté libre dans le cas où la plaque a le bord opposé au côté libre simplement appuyé sur ses bords.

Nous avons trouvé en effet, dans ce cas, au facteur  $\frac{15pa^4}{4EI\pi^3}$  près, 0,602 pour le déplacement du centre, et 0,915 pour le milieu du côté libre.

20. *Surface d'équilibre élastique de la plaque.* — En désignant par  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  les valeurs des constantes arbitraires pour  $i = 1$  de  $Y_i$ , qui ont été déterminées dans chacun des six cas examinés, l'équation de la surface de la plaque est, en se bornant au premier terme,

$$z = [\varphi_1(y) + A_1 \operatorname{sh} \alpha y + B_1 \operatorname{ch} \alpha y + y(C_1 \operatorname{sh} \alpha y + D_1 \operatorname{ch} \alpha y)] \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Dans le cas particulier où la charge est uniformément répartie, nous avons vu que  $\varphi$  est une constante.

Les valeurs de  $x$  et  $y$  qui rendent  $z$  maximum sont données par les équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

la première explicitée donne

$$(1) \quad \cos \frac{\pi x}{\alpha} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\alpha}{2},$$

$x$  devant varier seulement de 0 à  $\alpha$ .

Donc le maximum a lieu sur la ligne médiane de la plaque parallèle aux côtés appuyés, résultat à prévoir par raison de symétrie. La deuxième équation donne

$$(2) \quad \operatorname{sh} \alpha y (B_1 \alpha + C_1 + \alpha y D_1) + \operatorname{ch} \alpha y (A_1 \alpha + D_1 + \alpha y C_1) = 0,$$

équation transcendante qui donnera la valeur de  $y$  correspondant au maximum de  $z$ , car les conditions, relatives au maximum,  $z''_{xy} - z''_{x^2} z''_{y^2} > 0$ ,  $z''_{x^2} < 0$  sont satisfaites. Cette valeur de  $y$  dépendra de  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , c'est-à-dire des conditions au contour des deux bords  $y = 0$ ,  $y = b$ .

Nous pouvons voir, en particulier, que lorsque la plaque est supposée appuyée sur ses quatre bords, la valeur de  $y$  correspondante est  $y = \frac{\alpha}{2}$ , en supposant la plaque carrée, comme nous l'avons fait.

Nous avons trouvé, en effet, dans le Chapitre II, pour les constantes, à un facteur constant près, les valeurs

$$A_1 = \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b \alpha - 2 \operatorname{sh} \alpha b)}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha b}, \quad B_1 = -1, \quad C_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad D_1 = \frac{\alpha(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2 \operatorname{sh} \alpha b};$$

par suite, l'équation (2) devient, en y en remplaçant  $y$  par  $\frac{\alpha}{2}$ ,

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\pi}{4} \frac{(1 - \operatorname{ch} \pi)}{\operatorname{sh} \pi} - \frac{1}{2} \right] + \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{(1 - \operatorname{ch} \pi)(\pi - \operatorname{sh} \pi)}{2 \operatorname{sh}^2 \pi} + \frac{\pi}{4} \right] = 0.$$

Or le calcul direct montre que le premier facteur a pour valeur numérique  $-2,807$ , le deuxième facteur  $+2,810$ ; donc le premier membre est  $0,003$ , si l'on tenait compte du terme correspondant à  $i = 3$ . Dans le développement de  $z$ , la valeur de  $\frac{\partial z}{\partial y}$  pour  $y = \frac{\alpha}{2}$  serait encore plus voisine de zéro.

Donc  $y = \frac{\alpha}{2}$  est bien racine de l'équation  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$  lorsqu'on suppose la plaque tous bords appuyés.



Les sections de la surface, par des plans parallèles au plan des  $xz$ , ont pour équations

$$y = \lambda, \quad z = A \sin \frac{\pi x}{a};$$

la constante  $A$  dépend de la valeur  $\lambda$  et des conditions au contour des bords  $y = 0$ ,  $y = b$ .

*Tableau résumant les résultats.*

Le Tableau suivant permet de comparer les valeurs des flèches de courbure d'une même plaque carrée supportant une charge uniformément répartie sur sa surface et dont les conditions au contour sont différentes.

Conditions au contour.	Valeur de $\sum_i Y_i \sin \frac{i\pi}{2}$ au facteur $\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ près.		Flèche de courbure.	
	$i = 1.$	$i = 3.$		
2 bords appuyés, 2 bords opposés encastrés...	0,137	— 0,003	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 0,134	
3 bords appuyés, 1 encastré.....	0,216	— 0,004	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 0,212	
4 bords appuyés.....	0,314	— 0,004	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 0,310	
2 bords appuyés, 1 encastré, 1 libre. {	Centre de la plaque...	0,433	— 0,003	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 0,430
	Milieu du bord libre...	0,829	— 0,004	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 0,825
3 bords appuyés, 1 bord libre. {	Centre de la plaque...	0,606	— 0,004	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 0,602
	Milieu du bord libre...	0,919	— 0,004	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 0,915
2 bords appuyés, 2 bords libres. {	Centre de la plaque...	0,998	— 0,004	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 0,994
	Milieu du bord libre...	1,114	— 0,004	$\frac{15pa^4}{4EI\pi^5}$ 1,110

Pour une même plaque carrée, on voit que la valeur des flèches de courbure va en croissant avec le degré de liberté de la plaque.

## DEUXIÈME PARTIE.

PLAQUE APPUYÉE SUR SES QUATRE BORDS. CHARGE QUELCONQUE.  
APPLICATION DE L'IDENTITÉ DES DEUX DÉVELOPPEMENTS A LA SOMMATION  
DE QUELQUES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

21. Dans cette deuxième Partie, nous allons expliciter la fonction  $p$  qui représente la charge et calculer séparément  $Y_i$  et  $Y_{1i}$ , et montrer que ces expressions sont identiques terme à terme. J'ai choisi les cas assez généraux où la charge est représentée soit par une fonction linéaire en  $y$ , un polynome quelconque en  $x$  et  $y$ , une constante, soit par une fonction sinusoïdale ou exponentielle.

En se plaçant à un point de vue analytique, je montrerai qu'on peut au contraire profiter de l'identité de  $Y_i$  et  $Y_{1i}$ , qui a été démontrée dans le Chapitre I de la première Partie, et en déduire la sommation des séries  $Y_{1i}$

$$Y_{1i} = \sum_j \Lambda_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b},$$

où  $\Lambda_{ij}$  est une fonction de  $j$  qui dépend de la fonction arbitraire représentant la charge. On a vu en effet que la détermination de  $Y_{1i}$  nous a donné, à un facteur  $C$  près ( $C$  ne dépendant pas de  $j$ ),

$$(1) \quad Y_{1i} = C \sum_j \frac{\int_0^a \int_0^b p \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy}{\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{j\pi y}{b}.$$

Quant à la fonction  $Y_i$ , nous en aurons l'expression en remplaçant dans

$$\varphi_i(y) + A_i \operatorname{sh} \alpha y + B_i \operatorname{ch} \alpha y + y(C_i \operatorname{sh} \alpha y + D_i \operatorname{ch} \alpha y),$$

$\varphi_i(y)$  et les constantes  $A_i, B_i, C_i, D_i$  par les valeurs qui ont été indiquées dans le second Chapitre. Et cette dernière expression sera la valeur de la série (1).

La fonction  $p$  est arbitraire, d'où quelque variété dans les séries que l'on peut ainsi calculer, mais on doit toutefois choisir  $p$  de façon à déterminer l'intégrale définie qui figure dans (1) et à pouvoir déterminer facilement l'intégrale particulière  $\varphi_i(\gamma)$  de l'équation qui définit  $Y_i$ .

---

## CHAPITRE I.

### PLAQUE APPUYÉE SUR SES QUATRE BORDS.

CAS OU LA FONCTION QUI REPRÉSENTE LA CHARGE EST LINÉAIRE EN  $\gamma$ .

---

22. Nous avons vu que  $\varphi_i(\gamma)$  désignant une intégrale particulière de l'équation du quatrième ordre qui définit  $Y_i$ , les valeurs des constantes arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale sont données par les formules

$$B_i = -\varphi_i(0), \quad C_i = -\frac{1}{2\alpha} [\varphi_i''(0) - \alpha^2 \varphi_i(0)], \quad D_i = \frac{\psi_i(0) \operatorname{ch} \alpha b - \psi_i(b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b},$$

$$A_i = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha b} [\varphi_i(0) \operatorname{ch} \alpha b - \varphi_i(b)] + \frac{b}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} [\psi_i(b) \operatorname{ch} \alpha b - \psi_i(0)],$$

où

$$\psi_i(z) = \varphi_i''(z) - \alpha^2 \varphi_i(z).$$

Supposons tout d'abord que la charge  $p$  soit une fonction linéaire de  $\gamma$ . Ce cas sera réalisé dans la pratique si, après avoir percé une fenêtre rectangulaire dans la paroi verticale d'un vase rempli de liquide, on ferme cette ouverture par une plaque simplement appuyée sur les bords de la fenêtre et maintenue par la pression du liquide.

Soit  $p = A\gamma$  la charge.

Uniquement pour la simplification des calculs, je choisis la fonction  $p$  de façon que la fonction  $\varphi_i(\gamma)$  qui en résulte soit telle que  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\varphi_i''(0) = 0$ . Mais le raisonnement serait le même si ces conditions n'étaient pas remplies.

On a pour  $\varphi_i(y)$  l'expression  $\frac{15\Lambda}{4EI\alpha^3}y$ , et par suite

$$B_i = 0, \quad C_i = 0, \quad D_i = \frac{15\Lambda b}{4EI\alpha^3} \frac{\alpha}{2\operatorname{sh}\alpha b},$$

$$A_i = -\frac{15\Lambda b}{4EI\alpha^3} \frac{2\operatorname{sh}\alpha b + b\alpha \operatorname{ch}\alpha b}{2\operatorname{sh}^2\alpha b}.$$

L'expression de  $Y_i$  sera donc

$$Y_i = \frac{15\Lambda}{4EI\alpha^3} \left[ y - \frac{b}{2\operatorname{sh}^2\alpha b} (2\operatorname{sh}\alpha b + b\alpha \operatorname{ch}\alpha b) \operatorname{sh}\alpha y + \frac{\alpha b y}{2\operatorname{sh}\alpha b} \operatorname{ch}\alpha y \right].$$

Si l'on multiplie par  $\sin \frac{i\pi x}{a}$  et qu'on fasse la somme des résultats en donnant à  $i$  les valeurs impaires 1, 3, 5, ..., on aura  $w$  qui peut s'écrire

$$w = \sum_i \frac{15\Lambda}{4EI\alpha^3} \left[ y - \frac{b}{2\operatorname{sh}^2\alpha b} (2\operatorname{sh}\alpha b + b\alpha \operatorname{ch}\alpha b) \operatorname{sh}\alpha y + \frac{\alpha b}{2\operatorname{sh}\alpha b} y \operatorname{ch}\alpha y \right] \sin \frac{i\pi x}{a}.$$

C'est l'expression du déplacement vertical d'un point  $x, y$  du feuillet moyen  $z = 0$ .

Calculons maintenant le développement que donne la méthode de Navier.

Le calcul du coefficient  $\Lambda_{ij}$  donne

$$\Lambda_{ij} = \frac{(-1)^{j+1} 15.2\Lambda b}{4EI j \pi^6 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2},$$

et par suite

$$Y_{ii} = \sum_j \Lambda_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b} = \frac{15\Lambda b.2}{4EI i \pi^6} \sum_j \frac{(-1)^{j+1}}{j \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{j\pi y}{b}.$$

Si nous tenons compte de ce que  $Y_i = Y_{ii}$ , nous avons après simplification

$$\sum_i \frac{(-1)^{j+1}}{j \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{j\pi y}{b} = \frac{\pi^2 a^4}{4b i^3} \left[ \frac{2y}{i\pi} - \frac{b}{i\pi \operatorname{sh}^2 \frac{i\pi b}{a}} \left( 2\operatorname{sh} i\pi \frac{b}{a} + \frac{bi\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{i\pi b}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{i\pi y}{a} + \frac{by}{a} \frac{\operatorname{ch} \frac{i\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi b}{a}} \right]$$

Nous avons ainsi au moyen de transcendentes l'expression de la série qui figure dans le premier membre.

23. *Sommation de la série.* — Mais arrivons directement à cette sommation.

Posons, pour simplifier l'écriture,  $\frac{bi}{a} = m$ ,  $\frac{\pi y}{b} = x$ .

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad \text{s'écrira} \quad -b^4 \sum_i \frac{(-1)^j}{j(m^2 + j^2)^2} \sin jx.$$

Calculons donc la suite

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n(a^2 + n^2)^2} \sin nx.$$

On sait que l'on a

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \dots$$

Posons

$$y = \frac{x}{2a^2} - \frac{\sin x}{1(a^2 + 1^2)} + \frac{\sin 2x}{2(a^2 + 2^2)} + \dots + (-1)^n \frac{\sin nx}{n(a^2 + n^2)} + \dots$$

on a

$$y'' = \frac{1^2 \sin x}{1(a^2 + 1^2)} - \frac{2^2 \sin 2x}{2(a^2 + 2^2)} + \dots - (-1)^n \frac{n^2 \sin nx}{n(a^2 + n^2)} + \dots$$

par suite

$$a^2 y - y'' = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} - \dots$$

Le second membre est nul d'après le développement de  $\frac{x}{2}$ .

Donc  $y$  est l'intégrale de l'équation différentielle

$$y'' - a^2 y = 0,$$

intégrale qui est

$$y = A e^{ax} + B e^{-ax}.$$

Déterminons les constantes A et B. Or  $y$  est nul pour  $x = 0$ , on doit donc avoir  $A = -B$ , d'où

$$y = A(e^{ax} - e^{-ax}) \quad \text{ou} \quad y = 2A \operatorname{sh} ax.$$

Pour  $x = \pi$ ,

$$y = \frac{\pi}{2a^2}, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{\pi}{4a^2} \frac{1}{\operatorname{sh} a\pi},$$

et par suite

$$y = \frac{\pi}{2a^2} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2a^2} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}.$$

Cela étant, considérons la série

$$Z = \frac{x}{2a^2} - \frac{\sin x}{1(a^2 + 1^2)^2} + \frac{\sin 2x}{2(a^2 + 2^2)^2} - \dots + (-1)^n \frac{\sin nx}{n(a^2 + n^2)^2} + \dots,$$

dont nous voulons effectuer la sommation. On a

$$Z'' = \frac{1^2 \sin x}{(a^2 + 1^2)^2} - \frac{2^2 \sin 2x}{2(a^2 + 2^2)^2} + \dots - (-1)^n \frac{n^2 \sin nx}{n(a^2 + n^2)^2} + \dots,$$

on tire

$$a^2 Z - Z'' = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{1(a^2 + 1^2)} + \frac{\sin 2x}{2(a^2 + 2^2)} + \dots + (-1)^n \frac{\sin nx}{n(a^2 + n^2)} + \dots,$$

mais on a vu que

$$-\frac{\sin x}{a^2 + 1^2} + \frac{\sin 2x}{2(a^2 + 2^2)} - \frac{\sin 3x}{3(a^2 + 3^2)} - \dots + (-1)^n \frac{\sin nx}{n(a^2 + n^2)} = y - \frac{x}{2a^2},$$

c'est-à-dire  $A(e^{ax} - e^{-ax}) - \frac{x}{2a^2}$ . Donc la valeur de la série que nous nous proposons de calculer sera celle de l'intégrale de l'équation

$$a^2 Z - Z'' = \frac{x}{2} + A(e^{ax} - e^{-ax}) - \frac{x}{2a^2},$$

équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec second membre.

Posons

$$u = Z - \frac{x}{2a^2},$$

on a

$$u' = Z' - \frac{1}{2a^2}, \quad u'' = Z'',$$

l'équation devient

$$u'' - a^2 u = \frac{x}{2a^2} - A(e^{ax} - e^{-ax}),$$

qui intégrée donne pour  $u$

$$u = B e^{ax} + C e^{-ax} - \frac{x}{2a^2} - \frac{\Lambda x}{2a} (e^{ax} + e^{-ax}) + \frac{\Lambda}{4a^2} (e^{ax} - e^{-ax}).$$

Remarquons que  $u$  s'annule en même temps que  $x$ , donc  $B + C = 0$  et  $u$  peut s'écrire

$$u = B(e^{ax} - e^{-ax}) - \frac{x}{2a^2} - \frac{\Lambda x}{2a} (e^{ax} + e^{-ax}) + \frac{\Lambda}{4a^2} (e^{ax} - e^{-ax}).$$

Pour déterminer la constante  $B$ , faisons  $x = \pi$  et remarquons que  $u$  est nul, nous aurons

$$B = \frac{1}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} \left( \frac{\pi^2}{4a^2} \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} + \frac{3\pi}{8a^2} \right),$$

et par suite on a pour valeur de  $u$

$$u = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} \left( \frac{\pi^2}{4a^2} \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} + \frac{\pi}{2a^2} \right) - \frac{x}{2a^2} - \frac{\pi x}{4a^2} \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}};$$

mais, d'après sa définition,

$$u = Z - \frac{x}{2a^2} = \sum \frac{(-1)^n}{n(\alpha^2 + n^2)^2} \sin nx.$$

Reprenons dans cette identité les variables primitives  $y$  et  $i$ , nous aurons

$$\sum_j \frac{(-1)^{j+1}}{j \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{j\pi y}{b} \\ = \frac{\pi^2 a^4}{4b^2 i^3} \left[ \frac{2y}{i\pi} - \frac{b}{i\pi \operatorname{sh}^2 \frac{i\pi b}{a}} \left( 2 \operatorname{sh} \frac{i\pi b}{a} + i\pi \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{i\pi b}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{i\pi y}{a} + \frac{by}{a} \frac{\operatorname{ch} \frac{i\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi b}{a}} \right],$$

qui est la formule que nous avons déjà trouvée par simple identification de  $Y_i$  et  $Y_{ii}$ .

La question se présente ainsi sous deux faces. Si l'on tient compte

des conclusions de la première partie de ce travail, c'est-à-dire de l'identité de  $Y_i$  et de  $Y_{ii}$ , on arrive à la valeur de certains développements en séries. Si, au contraire, l'on effectue directement la sommation de ces séries, on établit pour le cas examiné cette identité.

24. *Application.* — En supposant la plaque carrée, calculons le déplacement du centre de la plaque lorsque la pression est fonction linéaire de  $y$ .

On a, pour  $Y_i$ , l'expression dans le cas général

$$Y_i = \frac{15\Lambda}{4EI\alpha^5} \left[ y - \frac{b}{2\text{sh}^2\alpha b} (2\text{sh}\alpha b + b\alpha \text{ch}\alpha b) \text{sh}\alpha y + \frac{\alpha b y}{2\text{sh}\alpha b} \text{ch}\alpha y \right],$$

faisons  $y = \frac{a}{2}$ ,  $\alpha = b$ , on aura

$$Y_i = \frac{15\Lambda\alpha^4}{4EI\pi^5 i^5} \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\text{sh}^2 i\pi} (2\text{sh}i\pi + i\pi \text{ch}i\pi) \text{sh} \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{2\text{sh}i\pi} \text{ch} \frac{i\pi}{2} \right].$$

Calculons les deux premiers termes de la série  $\sum Y_i \sin \frac{i\pi x}{a}$  correspondant aux valeurs  $i = 1$ ,  $i = 3$ . La valeur de  $w$  sera, en se bornant à ces termes,

$$w = Y_1 - Y_3.$$

Or

$$Y_1 = \frac{15\Lambda\alpha^4}{4EI\pi^5} \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\text{sh}^2\pi} (2\text{sh}\pi + \pi \text{ch}\pi) \text{sh} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\text{sh}\pi} \text{ch} \frac{\pi}{2} \right].$$

En remplaçant  $\text{sh}\pi$ ,  $\text{ch}\pi$ ,  $\text{sh} \frac{\pi}{2}$  par les valeurs trouvées précédemment on a

$$-\frac{1}{\text{sh}^2\pi} (2\text{sh}\pi + \pi \text{ch}\pi) \text{sh} \frac{\pi}{2} = -1,027, \quad \frac{\pi}{2\text{sh}\pi} \text{ch} \frac{\pi}{2} = 0,341.$$

La valeur de  $Y_1$  sera par suite, en posant

$$P = \Lambda \frac{a}{2},$$

qui représente la valeur de la charge le long de la ligne  $y = \frac{a}{2}$ ,

$$Y_1 = \frac{15P\alpha^4}{4EI\pi^5} 0,314.$$



On a de même

$$Y_3 = \frac{15P\alpha^4}{4EI\pi^3} \frac{1}{3^3} \left[ 1 - \frac{1}{\text{sh}^2 3\pi} (2 \text{sh} 3\pi + 3\pi \text{ch} 3\pi) \text{sh} \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2 \text{sh} 3\pi} \text{ch} \frac{3\pi}{2} \right].$$

En remplaçant  $\text{sh} 3\pi$ ,  $\text{ch} 3\pi$ ,  $\text{sh} \frac{3\pi}{2}$ ,  $\text{ch} \frac{3\pi}{2}$  par leurs valeurs on obtient

$$- \frac{1}{\text{sh}^2 3\pi} (2 \text{sh} 3\pi + 3\pi \text{ch} 3\pi) \text{sh} \frac{3\pi}{2} = -0,125, \quad \frac{3\pi}{2 \text{sh} 3\pi} \text{ch} \frac{3\pi}{2} = 0,042.$$

La valeur de  $Y_3$  sera par suite

$$Y_3 = \frac{15P\alpha^4}{4EI\pi^3} \frac{0,917}{243} \quad \text{ou} \quad \frac{15P\alpha^4}{4EI\pi^3} 0,0037,$$

et la valeur du déplacement sera

$$w = \frac{15P\alpha^4}{4EI\pi^3} 0,311.$$

Nous voyons ainsi que la valeur de la flèche est sensiblement la même que si la plaque était uniformément pressée avec la charge  $P$  que supporte l'horizontale menée par le centre, charge moyenne.

---

## CHAPITRE II.

### CALCUL DES DEUX DÉVELOPPEMENTS DANS LE CAS OU LA CHARGE EST UNIFORMÉMENT RÉPARTIE SUR LA PLAQUE.

---

25. Examinons maintenant, comme l'a fait Navier, le cas où la charge est uniformément répartie, c'est-à-dire où  $p$  a une valeur constante. Ces conditions se présentent dans la pratique, par exemple pour le fond horizontal d'un vase de section rectangulaire contenant un liquide, ce fond ne faisant pas corps avec le vase, mais étant constitué par une plaque reposant sur une saillie du pourtour.

La pression  $p$  sur un élément  $\sigma$  sera  $\sigma h d$ ,  $h$  désignant la hauteur du liquide,  $d$  son poids spécifique.

La solution particulière  $\varphi_i(y)$  de l'équation différentielle du quatrième ordre qui donne  $Y_i$  sera dans ce cas une constante

$$\varphi_i(y) = \frac{15\rho}{4EI\alpha^5} \quad \text{ou} \quad \frac{k_1}{\alpha^5}$$

en posant, pour abrégier l'écriture,

$$k_1 = \frac{15\rho}{4EI\alpha}.$$

Les valeurs des constantes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  s'expriment en fonction de  $\varphi_i(y)$  et ont pour valeur

$$\begin{aligned} B_i &= -\varphi_i(0) = -\frac{k_1}{\alpha^5}, & C_i &= \frac{k_1}{\alpha^5} \frac{\alpha}{2}, \\ D_i &= \frac{k_1}{\alpha^5} \frac{\alpha^2(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b}, & A_i &= \frac{k_1}{\alpha^5} \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b}; \end{aligned}$$

d'où l'expression de  $Y_i$

$$\begin{aligned} Y_i &= \frac{k_1}{\alpha^5} \left\{ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ &\quad \left. + y \left[ \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\alpha^2(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} \operatorname{ch} \alpha y \right] \right\}. \end{aligned}$$

En multipliant par  $\sin \frac{i\pi x}{a}$  et faisant la somme en donnant à  $i$  les valeurs impaires 1, 3, 5, ..., on aura  $\omega$ .

Cela étant, calculons le coefficient  $A_{ij}$  de Navier et, par suite,  $Y_{1i}$ . L'identification avec  $Y_i$  va nous conduire à la sommation d'une série un peu différente de celle que nous avons rencontrée dans le Chapitre précédent.

On a

$$A_{ij} = \frac{4}{ab} \frac{15}{16EI} \frac{1}{\pi^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} P \int_0^a \sin \alpha x \, dx \int_0^b \sin \frac{j\pi y}{b} \, dy.$$

Les deux intégrales qui figurent dans le second nombre sont nulles

pour  $i$  ou  $j$  pairs et égales à  $\frac{2a}{i\pi}$ ,  $\frac{2b}{j\pi}$  pour  $i$  et  $j$  impairs, seules valeurs que nous considérerons en les désignant par  $i'$ ,  $j'$ .

Alors

$$A_{i'j'} = \frac{4k_1}{\alpha\pi^5} \frac{1}{j' \left( \frac{i'^2}{a^2} + \frac{j'^2}{b^2} \right)^2},$$

et par suite on a

$$Y_{i'} = \sum_{j'} A_{i'j'} \sin \frac{j'\pi y}{b} = \frac{4k_1}{\alpha\pi^5} \sum_{j'} \frac{\sin \frac{j'\pi y}{b}}{j' \left( \frac{i'^2}{a^2} + \frac{j'^2}{b^2} \right)^2}.$$

D'où, en identifiant  $Y_i$  et  $Y_{i'}$ , la relation

$$\sum_{j'} \frac{\sin \frac{j'\pi y}{b}}{j' \left( \frac{i'^2}{a^2} + \frac{j'^2}{b^2} \right)^2} = \frac{\pi^5}{4\alpha^5} \left\{ 1 + \operatorname{sh} \alpha y \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(\alpha^2 b - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} - \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ \left. + y \left[ \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \operatorname{ch} \alpha y \frac{\alpha^2(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} \right] \right\},$$

qui donne la sommation de la série.

26. *Sommation de la série.* — Nous allons maintenant chercher à sommer directement cette série, et en retrouvant la valeur ci-dessus nous démontrerons que  $Y_i$  et  $Y_{i'}$  sont identiques terme à terme.

Posons, pour abrégier,

$$\frac{bi}{a} = m, \quad x = \frac{\pi y}{b}.$$

La somme

$$\sum_i \frac{\sin \frac{j\pi y}{b}}{j \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} \quad \text{s'écrit} \quad b^4 \sum_i \frac{\sin jx}{j(m^2 + j^2)^2}.$$

Nous avons déjà calculé dans le Chapitre I :

$$\sum_i \frac{(-1)^j \sin jx}{j(m^2 + j^2)^2}.$$

En explicitant on reconnaît immédiatement que

$$(2) \quad \frac{1}{2} \left[ \sum_j \frac{\sin jx}{j(m^2 + j^2)^2} - \sum_j \frac{(-1)^j \sin jx}{j(m^2 + j^2)^2} \right] = \sum_{j'} \frac{\sin j'x}{j'(m^2 + j'^2)^2},$$

$j$  prenant des valeurs 1, 2, 3, 4, 5, ... et  $j'$  seulement les valeurs impaires 1, 3, 5, .... Pour calculer la série qui figure dans le second membre nous sommes conduits à calculer la valeur de la suite

$$\sum_j \frac{\sin jx}{j(m^2 + j^2)^2}.$$

En posant

$$z = \sum_j \frac{\sin jx}{j(m^2 + j^2)},$$

on a

$$z'' = - \sum_j \frac{j^2 \sin jx}{j(m^2 + j^2)}, \quad \text{d'où} \quad z'' - m^2 z = - \sum_j \frac{\sin jx}{j} = \frac{x - \pi}{2}.$$

En intégrant cette équation et en déterminant les constantes d'intégration comme on l'a déjà indiqué, on a, pour  $z$ , l'expression

$$z = \frac{\pi - x}{2m^2} + \frac{\pi}{2m^2 \operatorname{sh} m\pi} \operatorname{sh} m(x - \pi).$$

Si l'on désigne par  $u$  la suite

$$\sum_j \frac{\sin jx}{j(m^2 + j^2)^2},$$

on aura

$$u'' = - \sum_j \frac{j^2 \sin jx}{j(j^2 + m^2)^2},$$

et, par suite,  $u$  sera l'intégrale générale de l'équation linéaire à coefficients constants :

$$-u'' + m^2 u = \sum_j \frac{\sin jx}{j(m^2 + j^2)} = z$$

ou

$$(1) \quad u'' - m^2 u = \frac{x - \pi}{2m^2} - \frac{\pi}{2m^2 \operatorname{sh} m\pi} \operatorname{sh} m(x - \pi).$$

L'intégrale de cette équation sans second membre est

$$u = A e^{mx} + B e^{-mx}.$$

En déterminant l'intégrale de l'équation non dépourvue de son second membre par la méthode de la variation des constantes, on trouve ainsi :

$$A = A_1 + \frac{1}{4m^3} \int (x - \pi) e^{-mx} dx - \frac{\pi}{4m^3 \operatorname{sh} m\pi} \int e^{-mx} \operatorname{sh} m(x - \pi) dx,$$

$$B = B_1 - \frac{1}{4m^3} \int (x - \pi) e^{mx} dx + \frac{\pi}{4m^3 \operatorname{sh} m\pi} \int e^{mx} \operatorname{sh} m(x - \pi) dx.$$

En effectuant ces quadratures et en remplaçant A et B par leurs valeurs on a, pour l'intégrale générale de l'équation (1),

$$u = A_1 e^{mx} + B_1 e^{-mx} + \frac{\pi - x}{2m^4} + \frac{\pi}{8m^4 \operatorname{sh} m\pi} \operatorname{sh} m(x - \pi) - \frac{\pi}{4m^3 \operatorname{sh} m\pi} x \operatorname{ch} m(x - \pi).$$

Déterminons les constantes  $A_1$ ,  $B_1$  en écrivant que  $u$  est nul pour  $x = 0$  et  $x = \pi$ . On trouve ainsi

$$A_1 = \frac{2\pi^2 m + 3\pi e^{-m\pi} \operatorname{sh} m\pi}{16m^4 \operatorname{sh}^2 m\pi},$$

$$B_1 = -\frac{2\pi^2 m + 3\pi e^{m\pi} \operatorname{sh} m\pi}{16m^4 \operatorname{sh}^2 m\pi}.$$

En portant dans la valeur de  $u$  nous aurons, après réduction,

$$u = \frac{\pi - x}{2m^4} + \operatorname{sh} mx \left( \frac{\pi^2 m}{4m^4 \operatorname{sh}^2 m\pi} + \frac{\pi \operatorname{ch} m\pi}{2m^4 \operatorname{sh} m\pi} \right) - \frac{\pi}{2m^4} \operatorname{ch} mx - \frac{\pi}{4m^3 \operatorname{sh} m\pi} x \operatorname{ch} m(x - \pi);$$

c'est l'expression de  $\sum_j \frac{\sin jx}{j(m^2 + j^2)^2}$ .

On a trouvé précédemment

$$\sum_j \frac{(-1)^j \sin jx}{j(m^2 + j^2)^2} = -\frac{x}{2m^4} + \pi \operatorname{sh} mx \left( \frac{\pi m \operatorname{ch} m\pi + 2 \operatorname{sh} m\pi}{4m^4 \operatorname{sh}^2 m\pi} \right) - \frac{\pi x \operatorname{ch} mx}{4m^3 \operatorname{sh} m\pi}.$$

En portant dans la relation (2) les valeurs de ces séries, on a

$$\sum_j \frac{\sin j'x}{j'(m^2 + j'^2)^2} = \frac{\pi}{4m^4} + \operatorname{sh} mx \frac{\pi(1 - \operatorname{ch} m\pi)(\pi m - 2 \operatorname{sh} m\pi)}{2 \times 4m^4 \operatorname{sh}^2 m\pi} - \frac{\pi}{4m^4} \operatorname{ch} mx$$

$$+ \frac{\pi m x}{2 \times 4m^4} \left( \operatorname{ch} mx \frac{1 - \operatorname{ch} m\pi}{\operatorname{sh} m\pi} + \operatorname{sh} mx \right),$$

et en revenant aux variables primitives  $m\pi = \alpha b$ ,  $mx = \alpha y$  on a pour valeur de cette série

$$\frac{\pi^5}{4\alpha^4 b^4} \left\{ 1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \alpha b)(\alpha^2 b - 2\alpha \operatorname{sh} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y - \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ \left. + y \left[ \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{\alpha^2(1 - \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} \operatorname{ch} \alpha y \right] \right\},$$

si l'on multiplie par  $b^4$  on a l'expression de la série

$$\sum_i \frac{\sin \frac{j'\pi y}{b}}{j' \left( \frac{j'^2}{a^2} + \frac{j'^2}{b^2} \right)^2}$$

que l'on se proposait de calculer. Cette expression est celle que nous avons trouvée par identification. Ce qui démontre à nouveau que  $Y_i$  est identique à  $Y_{ii}$ .

### CHAPITRE III.

27. *Cas où la pression  $p$  est représentée par un polynome.* — Dans un Travail que je me bornerai ici à indiquer à cause des longs développements de calcul qu'il nécessite, j'ai cherché à calculer  $Y_i$  et  $Y_{ii}$  lorsque la pression  $p$  est représentée par un polynome. J'ai choisi pour simplifier un polynome de degré  $2p + 1$ , impair en  $y$ .

Comme je l'ai indiqué dans ces conditions  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\varphi_i''(0) = 0$  et j'ai montré directement l'identité terme à terme de  $Y_i$  et  $Y_{ii}$ .

Le calcul des coefficients  $A_{ij}$  de Navier a nécessité le calcul d'intégrales définies du type

$$H_q = \int_0^b y^q \sin \frac{j\pi y}{b} dy.$$

J'ai pu trouver directement l'expression générale de ces intégrales définies.

En supposant, comme cela est démontré au premier Chapitre, que  $Y_i$  et  $Y_{,i}$  sont identiques, j'ai pu obtenir la sommation de la série

$$\sigma_{2,p+1} = \sum_i \frac{(-i)^j \sin \frac{j\pi y}{b}}{j^{2p+1} \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2}.$$

Pour exposer la méthode que j'ai suivie, j'examinerai seulement ici le cas où  $p$  est du troisième degré en  $y$ .

Soit

$$p = a_3 y^3 + a_1 y.$$

La solution particulière  $\varphi_i(y)$  de l'équation différentielle

$$Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = kp,$$

en posant

$$k = \frac{15}{8EIa} \int_0^a \sin \frac{i\pi x}{a} dx,$$

sera du même degré que  $p$ .

Posons donc

$$\varphi_i(y) = k(b_3 y^3 + b_1 y),$$

en substituant et identifiant on reconnaît que les coefficients  $b_3, b_1$  ont pour valeur

$$b_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha^4}, \quad b_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha^4} + 2 \cdot 3! \frac{\alpha_3}{\alpha^6},$$

par suite

$$\varphi_i(y) = k \left[ \frac{\alpha_3}{\alpha^4} y^3 + \left( \frac{\alpha_1}{\alpha^4} + 2 \cdot 3! \frac{\alpha_3}{\alpha^6} \right) y \right].$$

En tenant compte que  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\varphi_i''(0) = 0$  nous pouvons calculer les coefficients  $A_i, D_i$ ; quant à  $B_i, C_i$  ils sont nuls. On a, par suite,

$$Y_i = \varphi_i(y) + \frac{b\varphi_i''(b) \operatorname{ch} \alpha b - \varphi_i(b) (2\alpha \operatorname{sh} \alpha b + b\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha b)}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y \\ + \frac{\alpha^2 \varphi_i(b) - \varphi_i''(b)}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} y \operatorname{ch} \alpha y.$$

Pour démontrer que  $Y_i$  et  $Y_{,i}$  sont identiques, il suffit de remarquer que ces expressions sont linéaires et homogènes par rapport aux coefficients  $\alpha_3, \alpha_1$ . Nous allons chercher le coefficient de  $\alpha_3$  dans  $Y_i$  et

dans  $Y_{1i}$ . Le calcul a été déjà fait pour  $a_1$  lorsque l'on a supposé que la fonction  $p$  était représentée par  $p = A\gamma$ .

Le coefficient de  $a_3$  dans  $\varphi_i(\gamma)$  sera  $k\left(\frac{\gamma^3}{\alpha^4} + 2.3!\frac{\gamma}{\alpha^6}\right)$ , dans  $\varphi_i(b)$   $k\left(\frac{b^3}{\alpha^4} + 2.3!\frac{b}{\alpha^6}\right)$ , dans  $\varphi_i''(b)$  ce sera  $k3!\frac{b}{\alpha^4}$ .

Donc le coefficient de  $a_3$  dans  $Y_i$  sera, au facteur  $k$  près,

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & 2.3!\frac{\gamma}{\alpha^6} + \frac{\gamma^3}{\alpha^4} + \left[ 3!\frac{b^2}{\alpha^4} \frac{\operatorname{ch} \alpha b}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha \gamma \right. \\ & \quad - \left( \frac{b^3}{\alpha^4} + 2.3!\frac{b}{\alpha^6} \right) (2\alpha \operatorname{sh} \alpha b + b\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha b) \frac{\operatorname{sh} \alpha \gamma}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} \left( \frac{b^3}{\alpha^2} + 3!\frac{b}{\alpha^4} \right) \gamma \operatorname{ch} \alpha \gamma \right]. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, cherchons maintenant le coefficient de  $a_3$  dans  $Y_{1i}$  défini par  $\sum A_{ij} \sin \frac{j\pi\gamma}{b}$ .

Ce coefficient sera évidemment

$$\frac{2k}{b\pi^4} \sum_j \frac{H_3}{\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{j\pi\gamma}{b},$$

en désignant par  $H_3$  l'intégrale  $\int_0^b \gamma^3 \sin \frac{j\pi\gamma}{b} d\gamma$  qui a pour valeur

$$(-1)^j \left( 3! \frac{b^4}{j^3 \pi^3} - \frac{b^4}{j\pi} \right).$$

En remplaçant, nous avons pour coefficient de  $a_3$  dans  $Y_{1i}$ , au facteur  $k$  près,

$$(2) \quad 2.3! \frac{b^3}{\pi^7} \sum_j \frac{(-1)^j \sin \frac{j\pi\gamma}{b}}{j^3 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right)^2} - \frac{2b^3}{\pi^5} \sum_j \frac{(-1)^j \sin \frac{j\pi\gamma}{b}}{j \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right)^2}.$$

En égalant les expressions (1) et (2) nous obtenons la sommation de la série

$$\sigma_3 = \sum_j \frac{(-1)^j \sin \frac{j\pi\gamma}{b}}{j^3 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right)^2},$$

car la série  $\sigma_1$  a été déjà calculée précédemment.



En remplaçant  $\sigma_1$  par son expression dans l'égalité de (1) et (2) nous avons la relation

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{(-1)^j \sin \frac{j\pi y}{b}}{j^3 \left( \frac{j^2}{\alpha^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} \\ &= \pi^7 \left( \frac{y}{b^3 \alpha^6} - \frac{y}{3! 2 b \alpha^4} + \frac{y^3}{3! 2 b^3 \alpha^4} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2 b^2 \alpha^6} \frac{4\alpha \operatorname{sh} \alpha b + b \alpha^2 \operatorname{ch} \alpha b}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha b} \operatorname{sh} \alpha y + \frac{1}{2 \alpha^4 b^2} \frac{1}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha b} y \operatorname{ch} \alpha y \right). \end{aligned}$$

Nous remarquons en terminant que l'expression (2) est une relation linéaire en  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$ ; si l'on prenait pour  $p$  un polynôme de degré  $2p + 1$  on aurait une expression linéaire en  $\sigma_{2p+1}, \sigma_{2p-1}, \dots, \sigma_1$  dont on connaît la valeur : c'est là une formule qui permet de calculer  $\sigma_{2q+1}$  quand l'on connaît les sommes précédentes, ici nous avons pu calculer  $\sigma_3$  connaissant  $\sigma_1$ .

La même méthode conduit à la sommation des séries de la forme

$$\sum_j \frac{(-1)^j j}{(\alpha^2 \mp j^2)(m^2 + j^2)^2} \sin jx,$$

suivant que l'on prend pour la fonction  $p$

$$\Lambda \sin \lambda y \quad \text{ou} \quad \Lambda \operatorname{sh} \lambda y.$$

On peut d'ailleurs, comme vérification, calculer directement la valeur de ces séries. Je me borne ici à indiquer ces résultats analytiques.

