Annales scientifiques de l'É.N.S.

Gaston Darboux

Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les transformations des surfaces à courbure totale constante

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 465-490
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__465_0>

SUR LA

DÉFORMATION DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ

ET SUR LES

TRANSFORMATIONS DES SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE,

PAR M. GASTON DARBOUX [1].

I.

Dans la séance du 23 janvier 1899, M. C. Guichard a fait connaître quelques propositions élégantes relatives à la déformation des surfaces de révolution du second degré. Ces propositions font dépendre la détermination des surfaces applicables sur un ellipsoïde de révolution, celle des surfaces qui sont applicables sur le paraboloïde de révolution, et même sur le paraboloïde plus général qui a une seule génératrice rectiligne tangente au cercle de l'infini. Les théorèmes de M. Guichard réalisent donc un progrès, puisqu'ils rattachent l'étude de la déformation de quadriques, ayant cette fois leur centre à distance finie, à celle de la déformation de la sphère, sur laquelle on a, comme on sait, obtenu un grand nombre de résultats intéressants. Je voudrais, dans ce travail, montrer que les propositions générales données dans mes *Leçons sur la théorie des surfaces* conduisent, par leur simple application, aux théorèmes de M. Guichard. Les considérations très directes et très simples par l'emploi desquelles on obtient ces théorèmes conduisent même à un résultat plus étendu et montrent qu'on peut rattacher à la déformation de la sphère, non seulement la

---

(1) Extrait du Tome CXXVIII des *Comptes rendus*, séances du 27 mars 1899, p. 760; du 4 avril 1899, p. 854; du 17 avril 1899, p. 953 et du 24 avril 1899, p. 1018.

déformation des surfaces de révolution du second degré, mais aussi celle de quadriques plus générales assujetties à l'unique condition *d'être tangentes en un point au cercle de l'infini*. On sait que les surfaces de révolution doivent être tangentes en deux points en ce cercle. Les surfaces que je considère peuvent encore être définies par la propriété suivante : Tandis que les quadriques générales ont leur élément linéaire réductible à la forme

$$ds^2 = (u - v)\left[\frac{du^2}{u^2\,\Delta\left(\frac{1}{u}\right)} - \frac{dv^2}{v^2\,\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}\right],$$

où $\Delta(s)$ désigne un polynome du troisième degré *à racines distinctes*, les surfaces dont nous rattachons la déformation à celles de la sphère sont celles pour lesquelles $\Delta(s)$ a une racine double. L'élément linéaire correspondant, on le voit tout de suite, peut être réel; il convient, par conséquent, à une infinité de surfaces réelles. La recherche dont je vais faire connaître le principe aura donc nécessairement ses applications dans le domaine réel.

Considérons d'abord une surface (Θ) applicable sur une quadrique (Q) de révolution, et envisageons le mouvement, étudié pour la première fois par Ribaucour, dans lequel la quadrique (Q) roule sur (Θ), les deux surfaces étant toujours en contact par leurs points correspondants. Parmi les propositions relatives à ce mouvement, je rappellerai la suivante (n^os 925 et suiv.) (¹) :

Lorsque la surface (Q) *roule sur* (Θ), *un plan* (Π), *invariablement lié à* (Q), *coupe le plan de contact de* (Θ) *et de* (Q) *suivant une droite* (d) *qui engendre une congruence. Les développables de cette congruence correspondent aux courbes du système conjugué commun à* (Θ) *et à* (Q); *et les points focaux de la droite* (d) *se trouvent sur les tangentes aux deux courbes de ce système conjugué commun qui passent par le point de contact* M *de* (Θ) *et de* (Q).

En particulier, si le plan (Π) *est isotrope, la droite* (d) *demeure normale à une famille de surfaces parallèles dont les lignes de courbure cor-*

(¹) Les numéros de renvoi se rapporteront toujours à mes *Leçons*.

respondent aux courbes du système conjugué commun; les deux centres de courbure situés sur (d) *sont à la rencontre des deux tangentes conjuguées communes à* (Θ) *et à* (Q), *menées au point de contact* M. *De plus, toute droite isotrope située dans le plan* (Π) *et entraînée dans son mouvement coupe la droite* (d) *en un point* a *qui décrit précisément une des surfaces normales à la droite.*

Appliquons ce théorème au cas particulier, que nous avons en vue, où (Q) est une quadrique de révolution. Par les deux sommets A, A′, situés sur l'axe de révolution, passent quatre génératrices rectilignes de la surface, et ces génératrices, deux à deux parallèles, (d) et (d_1) en A, (d') et (d'_1) en A′, sont isotropes. Soient a, a', a_1, a'_1 les quatre points où ces génératrices coupent le plan tangent commun en M. Les droites parallèles (d), (d') se trouvent dans un plan isotrope (Π) passant par l'axe AA′; de même les droites (d_1), (d'_1) se trouvent dans le second plan isotrope (Π_1) passant par le même axe. D'après la proposition précédente, a, a' décriront des surfaces (a), (a') normales à la droite aa'; et de même a_1, a'_1 décriront des surfaces (a_1), (a'_1) normales à la droite a_1, a'_1. Nous allons montrer que ces quatre surfaces (a), (a'), (a_1), (a'_1) ont leur courbure moyenne constante et égale à $\frac{1}{AA'}$, ce qui est l'un des théorèmes de M. Guichard.

Remarquons en effet que les quatre points a, a', a_1, a'_1, se trouvant sur des génératrices rectilignes de (Q), doivent nécessairement se placer sur la section de (Q) par le plan tangent en M. Donc les droites aa'_1, $a'a_1$ se croisent en M et sont les deux génératrices rectilignes de (Q) situées dans le plan tangent commun.

D'autre part, d'après la proposition rappelée plus haut, les centres de courbures ε, ε_1 des surfaces normales à aa' sont situés sur deux tangentes $M\varepsilon$, $M\varepsilon_1$ conjuguées communes à (Q) et à (Θ). Puisqu'elles sont conjuguées par rapport à (Q), elles le sont nécessairement par rapport aux génératrices Ma, Ma'. Donc *les deux segments* $\varepsilon\varepsilon_1$ *et* aa' *se divisent harmoniquement*. Cette propriété suffit : *Si deux surfaces parallèles divisent harmoniquement le segment formé par leurs centres de courbure principaux, elles ont leur courbure moyenne constante et égale à l'inverse de la distance invariable qui sépare deux de leurs points pris sur la même normale commune.*

Ici il est très aisé de voir que aa' est égal à l'axe focal AA'. En effet les deux droites isotropes (d) et (d') sont parallèles et situées dans le plan isotrope (II). Donc la distance de deux points pris respectivement sur les deux droites sera constante quels que soient ces deux points et, en particulier, elle sera égale à AA'.

Avant d'établir les autres théorèmes relatifs aux quadriques de révolution, je ferai remarquer que le raisonnement précédent conduit à une généralisation évidente. Si l'on suppose que la quadrique (Q) soit tangente en un seul point au cercle de l'infini, elle aura encore deux génératrices rectilignes isotropes parallèles situées dans un plan isotrope. Ce seront les deux génératrices (d), (d') situées dans le plan isotrope qui est tangent à la surface en son point de contact avec le cercle de l'infini. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Quand une quadrique (Q) *tangente en un seul point au centre de l'infini roule sur une surface applicable* (Θ), *les deux génératrices isotropes qui passent par le point de contact de la quadrique et du cercle de l'infini coupent le plan de contact suivant deux points a, a' qui décrivent des surfaces normales à aa' et de courbure moyenne constante $\frac{1}{aa'}$. Par suite, d'après un théorème de M. Bonnet, le milieu c de aa', qui se trouve sur la droite isotrope passant par le centre de* (Q) *et son point de contact avec le cercle de l'infini, décrit une surface (c) dont la courbure totale est constante et égale à $\frac{4}{\overline{aa'}^2}$.*

Le lien que cette proposition établit entre la surface (Θ) résultant de la déformation de la quadrique (Q) et la surface à courbure totale constante (c) nous permet d'affirmer que, si l'on cherche à déterminer les surfaces applicables sur la quadrique (Q), la principale difficulté du problème se ramènera à la détermination des surfaces à courbure totale constante telles que (c). Supposons, en effet, que l'on se donne la surface (c); le plan tangent à la surface (Θ) devra passer par la normale à la surface (c), et les droites qui joignent le point de contact de ce plan tangent aux deux centres de courbure principaux de (c) devront être des tangentes conjuguées de (Θ); de plus, les courbes de (Θ) tangentes à ces deux droites devront correspondre aux lignes de courbure de (c). Voilà une première propriété qui, on le reconnaît aisément, fait dépendre la détermination de (Θ) de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. Si l'on exprime ensuite que (Θ) est applicable sur la quadrique (Q), on obtiendra d'autres conditions qui, venant s'ajouter à la première, feront dépendre la détermination de (Θ), lorsque (c) sera donnée, d'un système d'équations aux dérivées partielles dont l'intégration ne pourra introduire que des constantes arbitraires. C'est ce système d'équations aux dérivées partielles que nous allons former.

Au Chapitre XIII du Livre VIII de nos *Leçons*, nous avons donné les moyens de définir analytiquement le roulement d'une surface (Q) sur une surface applicable (Θ). Si l'on pose

$$x_1 = u, \qquad y_1 + iz_1 = v, \qquad y_1 - iz_1 = 2w, \tag{1}$$

l'équation de la surface (Q) relative à des axes qui lui seront invariablement liés pourra être prise sous la forme

$$w = f(u, v), \tag{2}$$

et si l'on désigne, suivant l'usage, par p, q les dérivées partielles de w, l'élément linéaire de (Q), celui par suite de (Θ), sera donné par la formule

$$ds_1^2 = du^2 + 2p\,du\,dv + 2q\,dv^2. \tag{3}$$

Désignons par x, y, z les coordonnées par rapport à des axes fixes du point de contact de (Θ) et de (Q); ce seront des fonctions de u, v.

Cherchons à déterminer la surface (c) décrite par le point c, où la droite isotrope

$$x_1 = 0, \qquad y_1 + iz_1 = 0,$$

invariablement liée à (Q), vient couper le plan tangent commun à (Θ) et à (Q). Les coordonnées X, Y, Z de c seront données (1067) par les formules

$$\left\{\begin{aligned} X &= x - u\frac{\partial x}{\partial u} - v\frac{\partial x}{\partial v},\\ Y &= y - u\frac{\partial y}{\partial u} - v\frac{\partial y}{\partial v},\\ Z &= z - u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v},\end{aligned}\right. \tag{4}$$

d'où l'on déduira sans peine que les cosinus-directeurs C, C', C'' de la normale en c à (c) ont pour expressions

$$(5) \qquad C = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad C' = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad C'' = \frac{\partial z}{\partial u}.$$

De là il résultera facilement que si X, Y, Z, C, C', C'' sont donnés en fonctions de u, v, les coordonnées x, y, z seront définies par des équations telles que les suivantes :

$$(6) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = C, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\int \frac{dX + u\,dC}{v}.$$

Cela posé, nous allons exprimer d'abord que la surface (c) est à courbure totale constante, et nous supposerons, pour la facilité des calculs, que cette valeur constante de la courbure est égale à -1.

Pour déterminer les lignes de courbure et les rayons de courbure de (c), il suffit de répéter les calculs du n° 1068. Les équations d'Olinde Rodrigues

$$(7) \qquad dX + \rho\,dC = 0, \qquad dY + \rho\,dC' = 0, \qquad dZ + \rho\,dC'' = 0,$$

nous donneront ici

$$(8) \qquad d\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\rho - u}{v}\, d\frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

et elles ne différeront des équations (19) du n° 1068 que par la substitution de $\frac{\rho - u}{\rho}$ à ρ. En effectuant la même substitution dans l'équation (25) du même numéro, on aura donc entre les deux rayons de courbure ρ, ρ_1 de (c) la relation

$$(9) \qquad r(\rho - u)(\rho_1 - u) - v(\rho + \rho_1 - 2u)s + v^2 t = 0,$$

où r, s, t désignent les dérivées secondes de w par rapport à u et à v.

Pour que cette équation se réduise à la suivante

$$(10) \qquad \rho\rho_1 = -1,$$

il faut que l'on ait

$$ur + vs = 0,$$
$$u^2 r + 2uvs + v^2 t = r.$$

L'intégration de ces équations simultanées n'offre aucune difficulté et nous conduit aux valeurs suivantes de w, p, q :

$$w = b\frac{u^2+1}{2v} + hu + h'v + k, \tag{11}$$

$$p = b\frac{u}{v} + h, \qquad q = -\frac{b}{2v^2} - \frac{bu^2}{2v^2} + h', \tag{12}$$

valeurs où b, h, h', k désignent quatre constantes arbitraires. La première de ces équations peut être écrite avec les coordonnées rectangulaires x_1, y_1, z_1 et elle prend la forme

$$\left\{\begin{aligned} & y_1^2 + z_1^2 - bx_1^2 - 2h(y_1+iz_1)x_1 \\ & \quad - 2h'(y_1+iz_1)^2 - 2k(y_1+iz_1) - b = 0, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

d'où il résulte que la surface (Q) est une quadrique assujettie à la seule condition d'être tangente en un point au cercle de l'infini. C'est le résultat que nous avions annoncé plus haut ([1]).

II.

Pour déterminer la quadrique (Q), nous supposerons que la surface (c) ait été rapportée à ses lignes de courbure. Si α et β désignent les paramètres de ces lignes, on sait (n° 805) que l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} & dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \cos^2\omega\, d\alpha^2 + \sin^2\omega\, d\beta^2, \\ & dC^2 + dC'^2 + dC''^2 = \sin^2\omega\, d\alpha^2 + \cos^2\omega\, d\beta^2, \\ & \rho = -\cot\omega, \qquad \rho_1 = \operatorname{tang}\omega, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega\cos\omega. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

De plus, comme on a

$$\left\{\begin{aligned} -dX &= \rho\frac{\partial C}{\partial\alpha}\partial\alpha + \rho_1\frac{\partial C}{\partial\beta}\partial\beta, \\ -dY &= \rho\frac{\partial C'}{\partial\alpha}d\alpha + \rho_1\frac{\partial C'}{\partial\beta}d\beta, \\ -dZ &= \rho\frac{\partial C''}{\partial\alpha}d\alpha + \rho_1\frac{\partial C''}{\partial\beta}d\beta, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

([1]) Séance du 27 mars 1899.

les seconds membres de ces équations seront des différentielles exactes; en exprimant les conditions d'intégrabilité, on aura donc des équations telles que la suivante :

$$(15)' \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \cot\omega \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial C}{\partial\alpha} + \operatorname{tang}\omega \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial C}{\partial\beta} = 0.$$

Ces points étant rappelés, remplaçons dX et dC par leurs expressions dans la formule qui donne $\frac{\partial x}{\partial v}$. On aura

$$(16) \qquad d\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u-\rho}{v}\frac{\partial C}{\partial\alpha}d\alpha - \frac{u-\rho_1}{v}\frac{\partial C}{\partial\beta}\partial\beta.$$

En exprimant la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u-\rho}{v}\frac{\partial C}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u-\rho_1}{v}\frac{\partial C}{\partial\beta}\right)$$

et comparant à l'équation (15)', on sera conduit aux deux équations

$$(17) \qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{v}\right) = \rho\frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u}{v}\right) = \rho_1\frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial\alpha},$$

auxquelles on peut, en introduisant p à la place de $\frac{u}{v}$ et posant $\frac{-1}{v} = \eta$, donner la forme

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial\beta} &= b\cot\omega\frac{\partial\eta}{\partial\beta}, \\ \frac{\partial p}{\partial\alpha} &= -b\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Exprimons maintenant que la surface (Θ) est applicable sur (Q) c'est-à-dire admet l'élément linéaire donné par la formule (3). Nous aurons les équations

$$(19) \qquad \mathrm{S}\, C\frac{\partial x}{\partial v} = p, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 2q,$$

où q aura son expression donnée par la formule (12) qui devient

$$(20) \qquad q = -\frac{b\eta^2}{2} - \frac{(p-h)^2}{2b} + h'.$$

En différentiant la première des équations (19), on aura les deux suivantes

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \alpha}=\frac{\partial p}{\partial \alpha},\qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \beta}=\frac{\partial p}{\partial \beta},$$

qui, jointes à celle d'où elles sont déduites, détermineront $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$. On aura ainsi

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial v} &= p\,\mathrm{C}+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \beta}\frac{\partial p}{\partial \beta},\\
\frac{\partial y}{\partial v} &= p\,\mathrm{C}'+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial \beta}\frac{\partial p}{\partial \beta},\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= p\,\mathrm{C}''+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}''}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}''}{\partial \beta}\frac{\partial p}{\partial \beta},
\end{aligned}\right.$$

et, en portant ces expressions dans la seconde des équations (19), il viendra

$$(22)\qquad \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^2+\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)^2=2q-p^2=-\frac{(p-h)^2}{b}-p^2+2h'-b\eta^2.$$

Cette équation, jointe aux deux (18), permettra de déterminer les deux fonctions p et η. Ces deux fonctions étant connues, on aura u et v; puis x, y, z s'obtiendront par les formules telles que les suivantes :

$$\begin{aligned}
dx &= -\frac{\mathrm{C}}{b\eta}\,dp+\left[\left(p+\frac{p-h}{b}\right)\mathrm{C}+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \beta}\frac{\partial p}{\partial \beta}\right]\frac{d\eta}{\eta^2},\\
dy &= -\frac{\mathrm{C}'}{b\eta}\,dp+\left[\left(p+\frac{p-h}{b}\right)\mathrm{C}'+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial \beta}\frac{\partial p}{\partial \beta}\right]\frac{d\eta}{\eta^2},\\
dz &= -\frac{\mathrm{C}''}{b\eta}\,dp+\left[\left(p+\frac{p-h}{b}\right)\mathrm{C}''+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}''}{\partial \alpha}\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{\partial \mathrm{C}''}{\partial \beta}\frac{\partial p}{\partial \beta}\right]\frac{d\eta}{\eta^2}.
\end{aligned}$$

On pourrait facilement démontrer que p ou η doivent satisfaire à deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, étudier plus complètement le système des trois équations (18) et (22). Dans ce qui va suivre, je m'attacherai spécialement au cas où Q est de révolution et j'étudierai la seconde proposition que nous devons à M. Guichard.

Si, de chaque point d'une surface donnée comme centre, on décrit une sphère de rayon variable, ce rayon étant déterminé par exemple en fonction des coordonnées curvilignes qui fixent sur la surface la position de son centre, on sait que la sphère admet une enveloppe à deux nappes et qu'elle touche cette enveloppe en deux points placés symétriquement par rapport au plan tangent de la surface décrite par le cercle. M. Beltrami a remarqué que, si cette surface se déforme en entraînant les différentes positions de la sphère, les points de contact de celles-ci avec leur enveloppe demeurent invariables, quelle que soit la déformation. D'autres propriétés relatives à ces enveloppes de sphères doivent être rappelées. Dans beaucoup de recherches de Géométrie, il importe de savoir si les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut nécessairement (n^{os} 473 et 480) qu'il existe sur la surface des centres un système conjugué tel que l'équation ponctuelle relative à ce système conjugué admette comme solutions particulières, en même temps que x, y, z, les deux fonctions

$$R \quad \text{et} \quad x^2+y^2+z^2-R^2.$$

Alors, sur les deux nappes, les lignes de courbure se correspondront mutuellement et correspondront aux courbes du système conjugué tracé sur la surface des centres.

D'après cela, si nous supposons que les deux nappes de l'enveloppe soient l'une et l'autre des sphères, comme toutes les courbes de la sphère sont lignes de courbure, on pourra dire que, sur la surface des centres (Q), l'équation ponctuelle relative à tout système conjugué admettra comme solutions particulières

$$x, \quad y, \quad z, \quad R \quad \text{et} \quad x^2+y^2+z^2-R^2.$$

C'est ce que l'on peut vérifier aisément, car le lieu des centres des sphères tangentes à deux sphères fixes est une quadrique de révolution; le rayon R de chaque sphère tangente est donc une fonction linéaire des coordonnées x, y, z de son centre, ainsi que $x^2+y^2+z^2-R^2$, d'après la propriété même du foyer.

Cela posé, supposons que (Q) se déforme en entraînant les sphères de rayon R. La surface déformée (Θ) admet avec (Q) un système conjugué commun; et d'après un remarquable théorème de M. Kœnigs, l'équation ponctuelle relative à ce système conjugué admettra comme solutions particulières

$$x, \quad y, \quad z, \quad x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad x^2+y^2+z^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2,$$

x_1, y_1, z_1 désignant les coordonnées du point de (Θ) qui correspond au point (x, y, z) de (Q).

Comme, d'après la remarque précédente, elle doit admettre encore les solutions R et $x^2+y^2+z^2-R^2$, elle admettra donc la solution

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2$$

qui est la différence de deux des solutions précédentes. Si nous retenons uniquement les solutions particulières

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad R, \quad x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2,$$

nous serons conduits au théorème suivant :

De chaque point d'une quadrique de révolution (Q) *comme centre, décrivons les sphères* (S) *qui sont tangentes à une sphère fixe ayant pour centre l'un des foyers et, par suite, à une autre sphère fixe ayant pour centre l'autre foyer. Si la quadrique roule sur une surface applicable* (Θ) *en entraînant les sphères* (S), *l'enveloppe de celle de ces sphères qui a son centre au point de contact de* (Θ) *et de* (Q) *est une surface sur les deux nappes de laquelle les lignes de courbure se correspondent toujours et correspondent aux courbes du système conjugué commun à* (Θ) *et à* (Q).

Cette propriété est, on peut le dire, caractéristique; elle ne convient qu'aux déformées des quadriques de révolution; le raisonnement permet de l'établir sans peine. En effet, le système conjugué commun à (Q) et à (Θ) variant nécessairement lorsqu'on change la surface (Θ) sur laquelle roule la surface donnée Q, on peut affirmer que

$$R \quad \text{et} \quad x^2+y^2+z^2-R^2$$

devront être des solutions particulières de l'équation ponctuelle relative à une infinité de systèmes conjugués; cela ne peut arriver que si R et $x^2+y^2+z^2-R^2$ sont des fonctions linéaires à coefficients constants de x, y, z; on est ainsi conduit, par l'élimination de R, à mettre l'équation de la surface (Q) sous la forme

$$x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz+d)^2=a'x+b'y+c'z+d,$$

qui définit une quadrique de révolution.

La réciproque que nous venons d'établir nous conduit maintenant à la conséquence suivante :

Revenons à la proposition primitive dans laquelle les quatre points déjà définis a, a', a_1, a'_1 décrivent des surfaces à courbure moyenne constante (a), (a'), (a_1), (a'_1) dont les lignes de courbure correspondent au système conjugué commun à (Θ) et à (Q) et, par conséquent, se correspondent mutuellement. Les deux droites aa', $a_1a'_1$ étant dans les plans isotropes qui se coupent suivant AA′, vont précisément se rencontrer au point M′ où l'axe AA′ de la surface (Q) rencontre le plan tangent en M; le point M′, comme on sait, décrit la surface (Θ') qui est *complémentaire* de (Θ) (n^{os} 748 et suiv.) et qui est, elle aussi, applicable sur une surface de révolution. Or, si du point M′ comme centre, avec $M'a$ et $M'a'$ comme rayons, on décrit deux sphères, ces deux sphères ont évidemment pour enveloppes, la première les surfaces (a) et (a_1) auxquelles elle est tangente en a et a_1, la seconde les surfaces (a') et (a'_1) auxquelles elle est tangente en a_1 et a'_1. Comme, sur ces surfaces, les lignes de courbure se correspondent, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si l'on déforme une quadrique de révolution (Q) *de manière qu'elle devienne une surface* (Θ), *la surface* (Θ) *aura pour complémentaire une surface* (Θ') *qui, elle aussi, sera applicable sur une quadrique de révolution* (Q′).

Si l'on place cette quadrique (Q′) de manière qu'elle soit tangente en M′ à (Θ') et qu'elle roule sur (Θ'), les rayons vecteurs qui vont à ses foyers seront Ma, Ma_1 et, par suite, ces foyers seront les points a, a'_1 ou a_1, a', car on a

$$Ma-Ma'_1=Ma-Ma'=a'a=AA';$$

et, d'un autre côté, aa'_1 étant la portion de génératrice comprise entre les plans tangents aux sommets de (Q) est constamment égale au double de la distance focale. Donc (Q′) *est identique à* (Q).

On peut placer la quadrique Q′ de part et d'autre du plan tangent à (Θ') en M′. Dans l'une des positions, les pionts a, a'_1 sont les foyers; dans l'autre, les foyers sont a_1, a'.

En transportant ce théorème de (Q′) à (Q), on a la seconde proposition de M. Guichard :

Si une quadrique de révolution (Q) *est déformée de manière à se transformer en une surface* (Θ), *on peut faire rouler* (Q) *de deux manières différentes sur* (Θ), *soit intérieurement, soit extérieurement. Soit* M *un point de* (Θ). *Considérons les deux positions de* Q *tangentes en* M *à* (Θ). *Pour l'une d'elles, les foyers seront les points* F, F′; *pour l'autre, ce seront les symétriques de* F, F′ *par rapport au plan tangent en* M. *Les quatre surfaces* (F), (F′), (f), (f') *décrites par les points* F, F′, f, f' *auront leur courbure moyenne constante et de valeur* $\frac{1}{2a}$, a *étant la moitié de l'axe focal. Par suite les surfaces* (γ), (γ') *décrites par les milieux* γ, γ' *des droites* Ff', F′f *auront leur courbure totale constante et égale à* $\frac{1}{a^2}$.

Car il est évident, d'après ce qui précède, que Ff' est la normale commune en F et f' aux deux surfaces (F), (f'), de même que F′f est la normale commune aux deux surfaces (F′), (f).

Dans l'article suivant, je démontrerai ces propositions par une voie géométrique toute différente et je montrerai que, en ce qui concerne les surfaces à courbure constante, elles ne donnent pas de méthode de transformation distincte de celles que MM. Bianchi et Bäcklund ont fait connaître depuis longtemps [1].

III.

Dans les deux articles précédents, j'ai établi par la Géométrie les propositions que M. Guichard a fait connaître relativement à la déformation des quadriques de révolution. Ces propositions conduisent naturellement à des méthodes de transformation des surfaces à courbure constante; il importe de savoir si ces méthodes sont réellement nou-

---

[1] Séance du 4 avril 1899.

velles ou si elles peuvent se rattacher à celles qui ont été données autrefois par MM. Bianchi et Bäcklund. Les démonstrations suivantes vont nous permettre de répondre très directement à cette question.

Soit (Q) une quadrique de révolution; nous désignerons comme précédemment par A, A', F, F' les sommets et les foyers, réels ou imaginaires, situés sur l'axe de révolution, et nous désignerons aussi par $2a$ et $2c$ les longueurs AA', FF'. Si (Θ) désigne une surface applicable sur (Q), on peut définir, nous l'avons vu, deux roulements distincts de (Q) sur (Θ). Pour un même point M de (Θ), les deux positions de (Q) relatives à ces deux roulements touchent l'une et l'autre en M la surface (Θ) et sont symétriques par rapport au plan tangent en ce point. Si donc F, F' sont les positions des deux foyers de (Q) pour l'un de ces roulements, les positions de ces mêmes foyers relatives à l'autre roulement seront les symétriques f, f' de F, F' par rapport au plan de contact en M; et, de plus, les droites Ff', $F'f$, égales l'une et l'autre à $2a$, se couperont en M et y feront des angles égaux avec le plan de contact. Rappelons que, d'après une démonstration déjà donnée, les différentes positions de l'une de ces droites, de Ff' par exemple, seront normales aux surfaces (F), (f') décrites par les points F, f'. Nous savons également, d'après une proposition déjà rappelée, que si, par l'axe AA' de révolution, on mène un plan isotrope (II) la section du plan de contact en M par ce plan (II) sera une droite aa' normale en a, a' aux deux surfaces (a), (a') décrites par les deux points a, a' où les génératrices rectilignes isotropes de (Q) situées dans le plan (II) rencontrent le plan de contact. Le théorème de M. Guichard consiste en ceci : *les quatre surfaces* (a), (a'), (F), (f') *ont leur courbure moyenne constante et égale à* $\frac{1}{2a}$. Voici comment on peut obtenir par un seul raisonnement l'ensemble de cette proposition :

Envisageons le tétraèdre $aa'Ff'$; il est facile de démontrer que, dans la suite du roulement, *ce tétraèdre demeure invariable de forme.*

En effet, nous avons vu déjà que les arêtes opposées $\overline{aa'}$ et $\overline{Ff'}$ sont, l'une et l'autre, constantes et égales à $2a$. D'autre part, la distance de tout point H de l'axe à la droite isotrope Aa étant égale à HA, on a

$$\overline{Fa} = \overline{AF} = a - c, \qquad \text{et de même} \qquad \overline{Fa'} = a + c.$$

Pour raison de symétrie, on aura de même

$$\overline{a'f'} = \overline{a'\mathrm{F}'} = a - c, \qquad \overline{af'} = \overline{a\mathrm{F}'} = a + c.$$

Le tétraèdre proposé, ayant toutes ses arêtes constantes, est donc invariable de forme, comme nous l'avions annoncé. Mais il a beaucoup d'autres propriétés. D'abord, si l'on considère l'une quelconque de ses faces, elle est formée avec trois arêtes dont les longueurs sont respectivement $a - c$, $a + c$, $2a$. L'une de ces arêtes étant égale à la somme des deux autres, *chacune des faces du tétraèdre est dans un plan isotrope*. J'ai, autrefois, dans mon enseignement, appelé l'attention sur les tétraèdres de cette nature qui sont circonscrits au cercle de l'infini et jouent le rôle le plus essentiel dans l'étude des propriétés métriques des figures. Mais le tétraèdre $aa'\mathrm{F}f'$ que nous rencontrons ici a encore une autre propriété. Comme ses arêtes opposées sont deux à deux égales, il est nécessairement de ceux qui sont formés avec quatre sommets non contigus d'un parallélépipède rectangle, deux arêtes opposées du tétraèdre étant deux diagonales non parallèles situées dans deux faces opposées de ce parallélépipède.

Il suit de là que, si l'on joint le milieu c de aa' au milieu γ de $\mathrm{F}f'$ la droite $c\gamma$ sera la perpendiculaire commune à aa' et à $\mathrm{F}f'$. Il est aisé de calculer par la Géométrie élémentaire la distance $c\gamma$ et l'angle des droites aa', $\mathrm{F}f'$. On trouve ainsi

$$\overline{c\gamma} = bi, \qquad \cos\left(\widehat{aa', \mathrm{F}f'}\right) = \frac{c}{a},$$

b étant l'axe non focal de la quadrique (Q).

Or, comme a, a' décrivent des surfaces normales à la droite aa', le point c, milieu de aa', décrit une surface (c) normale à la même droite; et, pour la même raison, le milieu γ décrit une surface (γ) normale à $\mathrm{F}f'$. La ligne $c\gamma$ étant perpendiculaire commune à aa' et $\mathrm{F}f'$, on voit que les surfaces (c), (γ) sont dans la relation suivante : 1° la droite $c\gamma$ qui joint les points correspondants est une tangente commune aux deux surfaces; 2° les points de contact de cette droite avec les deux surfaces sont à une distance invariable bi; 3° les plans tangents aux deux surfaces respectivement en c et γ, qui se coupent suivant $c\gamma$, font entre eux un angle constant dont le cosinus est $\frac{c}{a}$. Donc, d'après un théorème de M. Bäcklund, démontré et généralisé au n° 812 de mes *Leçons*, *les deux surfaces ont, l'une et l'autre, leur courbure totale constante et égale à* $\frac{1}{a^2}$, et l'on passe de l'une à l'autre par l'une de ces transformations dont on doit la découverte à M. Bäcklund. On déduit immédiatement de là, en appliquant une remarque d'Ossian Bonnet, que *les surfaces* (a), (a'), (F), (f'), *respectivement parallèles aux deux précédentes, ont leur courbure moyenne constante et égale à* $\frac{1}{2a}$, ce qui est le théorème de M. Guichard.

La proposition que nous venons de rappeler de M. Bäcklund peut d'ailleurs se mettre sous une forme qui conduit plus rapidement encore au résultat précédent. On peut l'énoncer comme il suit :

Lorsque deux droites invariablement liées l'une à l'autre peuvent se déplacer de manière à demeurer respectivement normales à deux surfaces distinctes en deux points qui demeurent, chacun à une distance invariable du pied de la perpendiculaire commune, les points où l'une quelconque d'entre elles (d) *est coupée par les deux plans isotropes qui contiennent l'autre* (d') *décrivent des surfaces normales à la droite* (d); *la courbure* moyenne *de ces surfaces est constante et égale à* $\frac{i \sin\alpha}{2\delta}$, α *désignant l'angle et* δ *la plus courte distance des deux droites. Les pieds de cette plus courte distance sur les deux droites décrivent des surfaces qui sont aussi respectivement normales aux deux droites et dont la courbure* totale *a pour valeur constante* $-\frac{\sin^2\alpha}{\delta^2}$.

En appliquant la proposition mise sous cette forme au cas qui nous occupe, on voit immédiatement que les surfaces (F), (f'), (a), (a') décrites par les points F, f', a, a' ont leur courbure moyenne constante et égale à $\frac{1}{2a}$, tandis que les points c, γ décrivent des surfaces (c), (γ) dont la courbure totale est égale à $\frac{1}{a^2}$.

La démonstration précédente offre le grand avantage de montrer dans quelles relations sont les quatre surfaces à courbure totale constante qui figurent dans le théorème de M. Guichard. Aux surfaces (c), (γ) il faut, en effet, associer la surface (γ') décrite par le milieu γ'

de $F'f$ et la surface (c') décrite par le milieu de la droite désignée précédemment par $a_1 a'_1$, droite qui se trouve dans le second plan isotrope (Π_1) passant par AA'. Les points γ, γ' sont dans le plan méridien de (Q) et en ligne droite avec son centre; les points c et c' sont symétriques par rapport à ce méridien.

Le quadrilatère $\gamma c \gamma' c'$ est un losange gauche dont les quatre côtés ont pour longueur commune bi; deux faces consécutives de ce losange, $c\gamma c'$, $\gamma c' \gamma'$ par exemple, se coupent sous un angle constant, dont le cosinus est $\frac{c}{a}$, et la tangente au méridien de (Q) qui passe en M est la perpendiculaire commune aux diagonales cc', $\gamma\gamma'$ de ce losange. Quand il se déplace en se déformant, chacun de ses sommets décrit une surface de courbure constante $\frac{1}{a^2}$, tangente aux deux côtés du losange qui se croisent en ce sommet. On passe de la surface décrite par l'un des sommets à la surface décrite par le sommet contigu à l'aide d'une transformation de Bäcklund. Au reste, ce losange est un cas particulier d'un quadrilatère gauche ayant des propriétés analogues et décrit par M. Bianchi dans l'étude approfondie que nous lui devons de la transformation de Bäcklund.

Les résultats que nous venons d'établir ont été obtenus en partant d'une quadrique de révolution (Q). Si l'on prend comme point de départ l'une des surfaces à courbure constante, (γ) par exemple, on est conduit au théorème suivant :

Étant donnée une surface (γ) à courbure totale constante, faisons-en dériver deux autres à courbure constante et égale, (c), (c'), par deux transformations de Bäcklund différentes l'une de l'autre et assujetties à l'unique condition que les angles constants sous lesquels les plans tangents en c et c' à (c) et à (c') coupent le plan tangent en γ à (γ) soient égaux et de sens contraires. *Ces plans tangents se couperont suivant une droite passant par γ; il y aura évidemment sur cette droite un point γ', et un seul, tel que*

$$\gamma' c = \gamma' c' = \gamma c = \gamma c',$$

c'est-à-dire tel que le quadrilatère gauche $\gamma' c \gamma c'$ soit un losange. Ce point γ' décrira, lui aussi, une surface à courbure constante (γ'), de même courbure que les premières et tangente aux deux côtés $c\gamma'$, $c'\gamma'$

du losange qui se croisent en γ'. *On peut construire deux sphères, l'une* (S) *tangente en* γ, γ' *aux deux surfaces* (γ), (γ'), *l'autre* (S') *touchant en* c *et* c' *les deux surfaces* (c), (c'). *Ces sphères sont, par suite, tangentes l'une et l'autre aux côtés du losange. Leurs centres décrivent respectivement deux surfaces* (Θ), (Θ') *qui sont complémentaires et applicables sur la même quadrique de révolution* (Q). *L'axe non focal de* (Q) *est égal au côté du losange multiplié par* $2i$, *et son excentricité* $\frac{c}{a}$ *est le cosinus de l'angle constant sous lequel se coupent deux faces consécutives quelconques* $c\gamma c'$, $\gamma c'\gamma'$ *du losange.*

La proposition précédente ne résulte pas immédiatement de tout ce qui précède; mais on peut l'établir complètement, soit par l'Analyse, soit par la Géométrie. Voici la démonstration géométrique :

La partie de l'énoncé relative à la surface (γ') résulte immédiatement, nous l'avons déjà remarqué, des propriétés de la transformation de Bäcklund signalées par M. Bianchi. Soient maintenant M, M' les centres des sphères (S), (S'). La ligne MM' est évidemment la plus courte distance des diagonales cc' et $\gamma\gamma'$ du losange. Le point M, qui est à l'intersection des normales en γ, γ' aux surfaces (γ), (γ'), décrit la surface (Θ) dont le plan tangent contient à la fois MM', les deux normales en c, c' aux surfaces (c), (c') et bissecte, par conséquent, l'angle $\gamma M \gamma'$. De même la surface (Θ') décrite par le point M' a pour plan tangent le plan $\gamma M \gamma'$. Les plans tangents aux deux surfaces (Θ), (Θ') sont donc rectangulaires et se coupent suivant MM'. Il résulte de là que ces deux surfaces sont complémentaires, c'est-à-dire qu'elles constituent les deux nappes de la développée d'une troisième surface dont la normale serait MM'. Il reste à démontrer que l'une de ces surfaces, (Θ) par exemple, est applicable sur une quadrique de révolution (Q).

A cet effet, construisons sur la figure tous les points que nous avions considérés précédemment : a, a', a_1, a'_1, F, f', F', f', placés respectivement sur les normales aux surfaces (c), (c'), (γ), (γ'), les deux points F, F' étant accouplés par la condition de se trouver dans les mêmes plans isotropes menés par les normales aux surfaces (c), (c'), et de même a, a'_1 et a', a_1 devant se trouver respectivement dans les mêmes plans isotropes menés par les normales aux surfaces (γ),

(γ'). Si l'on désigne par bi le côté du losange, c'est-à-dire la plus courte distance des normales en c et γ aux surfaces (c), (γ), et par $\frac{c}{a}$ le cosinus de l'angle que forment ces deux droites, on retrouvera, pour les distances mutuelles des points a, a', F, f, ... les valeurs qui ont été données plus haut. En particulier, le tétraèdre $aa'\mathrm{F}f'$ aura pour faces des plans isotropes et la distance FF′ sera égale à $2c$.

Considérons le cercle normal en c, c', aux surfaces (c), (c'). Comme, *sur ces surfaces, les lignes de courbure se correspondent*, ce cercle engendrera un système cyclique (n° 476 des *Leçons*) et, comme l'un des foyers de ce cercle est le milieu O de FF′, comme FF′ est l'intersection des plans isotropes tangents en c et en c' à ce cercle, il résulte de la proposition fondamentale relative aux systèmes cycliques (n^os^ 936 et suiv.) que *les points* O, F, F′ *seront invariablement liés à une surface* (Q) *applicable sur* (Θ) *et roulant sur* (Θ). Cette surface (Q) étant le lieu du point M, dans le système mobile, sera donc décrite par le centre M d'une sphère (S) qui restera tangente à deux sphères fixes de rayon a ayant pour centres respectivement les points F, F′. Par suite, (Q) sera une quadrique de révolution admettant les points F, F′ pour foyers et dont l'axe de révolution sera égal à $2a$. C'est le théorème qu'il s'agissait d'établir.

Il me reste à montrer comment on peut vérifier par l'Analyse et traduire en formules les résultats que nous a fournis la Géométrie [1].

IV.

Soit (γ) une surface de courbure constante négative et égale à -1. L'élément linéaire de cette surface rapportée à ses lignes de courbure sera déterminé par la formule

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \sin^2\omega\, dv^2, \tag{1}$$

donnée au n° 805 de mes *Leçons*, où la fonction ω doit vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \sin\omega\cos\omega. \tag{2}$$

[1] Séance du 17 avril 1899.

La transformation que nous devons à M. Bäcklund sera définie, comme on sait (n° 809), de la manière suivante :

Désignons par m et n deux constantes liées par la relation

$$m^2+n^2=1, \tag{3}$$

et définissons un angle θ par les deux équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} m\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) &= \sin\theta\cos\omega - n\cos\theta\sin\omega,\\ m\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right) &= -\cos\theta\sin\omega + n\sin\theta\cos\omega, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

qui sont toujours compatibles et admettent une intégrale commune avec une constante arbitraire toutes les fois que ω satisfait à l'équation (2). Cela posé, si nous construisons le trièdre (T) formé par les tangentes aux lignes de courbure et la normale de la surface, le point c, dont les coordonnées relatives à ce trièdre sont données par les formules

$$x=m\cos\theta,\qquad y=m\sin\theta,\qquad z=0, \tag{5}$$

décrira une surface (c) qui aura, elle aussi, une courbure constante et égale à -1 et dont le plan tangent en c aura pour équation

$$x\sin\theta - y\cos\theta + \frac{n}{m}z = 0. \tag{6}$$

Ce plan tangent passe donc par la droite $c\gamma$ et fait avec le plan des xy, c'est-à-dire avec le plan tangent de (γ) en γ, un angle dont le cosinus est n et le sinus m. Quant à l'élément linéaire de la surface (γ), il sera donné par la formule

$$ds^2=\cos^2\theta\,du^2+\sin^2\theta\,dv^2. \tag{7}$$

Définissons maintenant un autre angle θ' par les équations

$$\left\{\begin{aligned} m\left(\frac{\partial\theta'}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) &= \sin\theta'\cos\omega + n\cos\theta'\sin\omega,\\ m\left(\frac{\partial\theta'}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right) &= -\cos\theta'\sin\omega - n\sin\theta'\cos\omega, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

qui ne diffèrent des équations (4) que par le changement de n en $-n$. Le point c' qui aura pour coordonnées

$$x' = m\cos\theta', \qquad y' = m\sin\theta', \qquad z' = 0, \tag{9}$$

décrira une surface (c') à courbure constante -1, dont le plan tangent en c' aura pour équation

$$x\sin\theta' - y\cos\theta' - \frac{n}{m}z = 0. \tag{10}$$

Ce plan qui contiendra la droite $c'\gamma$ fera avec le plan tangent de (γ) un angle dont le sinus sera $-m$ et le cosinus n. Cet angle sera donc égal et de sens contraire à celui que fait avec le plan des xy le plan tangent à la première surface (c). En d'autres termes, les plans tangents aux deux surfaces (c), (c') seront symétriques par rapport au plan normal de (γ) qui fait avec l'axe des x l'angle $\frac{\theta+\theta'}{2}$.

Pour reconstituer le losange $\gamma c \gamma' c'$ dont il a été question dans l'article précédent, il faut déterminer sur la ligne d'intersection des plans (6) et (10) un point γ' dont les distances à c et à c' soient égales à m. Ce point γ' se déterminera donc sans difficulté et ses coordonnées seront définies par les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} x''^2 + y''^2 + z''^2 &= 2\frac{m\cos\sigma'}{\cos\sigma}x'', \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= 2\frac{m\cos\sigma'}{\sin\sigma}y'', \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= -2n\cot\sigma'\ z'', \end{aligned}\right. \tag{11}$$

où l'on a posé

$$\sigma = \frac{\theta+\theta'}{2}, \qquad \sigma' = \frac{\theta-\theta'}{2},$$

et qui sont vérifiées par les coordonnées, toutes nulles, de γ, aussi bien que par celles de γ'. On en tire aisément les valeurs suivantes :

$$\frac{x''}{\cos\sigma} = \frac{y''}{\sin\sigma} = \frac{nz''}{-m\sin\sigma'} = \frac{2mn^2\cos\sigma'}{n^2\cos^2\sigma' + \sin^2\sigma'} \tag{12}$$

de x'', y'', z''. Mais il y a intérêt à conserver la forme des équations (11).

D'après un théorème de M. Bianchi qu'il est inutile de démontrer de nouveau ici, la surface (γ') décrite par le point γ' dérive des surfaces (c) ou (c') à l'aide d'une transformation de Bäcklund, *de sorte qu'elle correspond point par point aux surfaces* (c), (c') *et par suite à la surface* (γ) *avec conservation des lignes asymptotiques et des lignes de courbure*. Ce dernier résultat peut d'ailleurs s'établir indépendamment du théorème de M. Bianchi et de la manière suivante :

Proposons-nous de déterminer les systèmes cycliques formés de cercles normaux à la surface (γ). En appliquant les formules données aux nos 481 et suivants de mes *Leçons,* on verra que ces systèmes sont définis par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &X^2+Y^2+Z^2+\frac{2\cos\omega}{\dfrac{\partial\log\lambda}{\partial u}}X=0,\\ &X^2+Y^2+Z^2+\frac{2\sin\omega}{\dfrac{\partial\log\lambda}{\partial v}}Y=0,\\ &X^2+Y^2+Z^2+\frac{2\lambda}{\mu+\rho}Z=0,\end{aligned}\right. \tag{13}$$

où λ et μ sont définis par les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\cot\omega\frac{\partial\mu}{\partial u},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=-\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\mu}{\partial v}. \tag{14}$$

Les deux premières équations (13) définissent le cercle (C) qui engendre le système cyclique, la troisième définit une sphère (S); cette sphère est tangente à (γ) et coupe le cercle (C) en un second point γ_0 qui décrit une surface normale au cercle. De sorte que l'enveloppe à deux nappes de la sphère (S) se compose des surfaces décrites par les points γ et γ_0, et, sur ces deux nappes, *les lignes de courbure se correspondent.*

Or les équations (13) deviennent identiques aux équations (11) si l'on pose

$$\mu+\rho=\frac{\lambda}{n}\operatorname{tang}\sigma',\qquad \frac{\partial\log\lambda}{\partial u}=-\frac{1}{m}\frac{\cos\sigma\cos\omega}{\cos\sigma'},\qquad \frac{\partial\log\lambda}{\partial v}=-\frac{1}{m}\frac{\sin\sigma\sin\omega}{\cos\sigma'},$$

et il est aisé de reconnaître que ces équations ne sont pas incompatibles et permettent de déterminer λ et $\mu + \rho$. La condition d'intégrabilité relative à $\log\lambda$ se vérifiera même très aisément si l'on met les équations (4) et (8) sous la forme suivante :

$$(15)\quad \begin{cases} m\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}+\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\right)=\sin\sigma(\quad\cos\sigma'\cos\omega+n\sin\sigma'\sin\omega), \\ m\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\right)=\cos\sigma(-\cos\sigma'\sin\omega+n\sin\sigma'\cos\omega); \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} m\dfrac{\partial\sigma'}{\partial u}=\cos\sigma(\sin\sigma'\cos\omega-n\cos\sigma'\sin\omega), \\ m\dfrac{\partial\sigma'}{\partial v}=\sin\sigma(\sin\sigma'\sin\omega+n\cos\sigma'\cos\omega), \end{cases}$$

qui fait mieux apparaître les deux fonctions σ, σ'.

Il est donc établi que la surface (γ') correspond à (γ) avec conservation des lignes de courbure; pour montrer que les lignes asymptotiques se correspondent aussi sur les deux surfaces, il faut calculer l'élément linéaire de (γ') à l'aide de la formule donnée au n° 482; on trouvera que, si l'on définit une variable ω' par la relation

$$(17)\quad \operatorname{tang}\frac{\omega-\omega'}{2}=-n\cot\sigma',$$

cette fonction ω' vérifiera encore les quatre équations (4) et (8) où n serait remplacé par $-n$ et ω par ω'; et l'élément linéaire de (γ') aura pour expression

$$(18)\quad ds^2=\cos^2\omega'\,du^2+\sin^2\omega'\,dv^2.$$

De là il résulte que les lignes asymptotiques de (γ'), définies par les équations

$$u\pm v=\text{const.},$$

correspondent à celles de la surface (γ).

La sphère (S), tangente en γ, γ' aux surfaces (γ), (γ'), a pour centre le point M de la normale à (γ) qui a pour coordonnées

$$(19)\quad x=y=0,\qquad z=-n\cot\sigma'.$$

Quand u et v varieront, les projections du déplacement de ce point seront données par les formules générales et seront

$$\mathrm{D}_x = \frac{m}{\cos\sigma\sin\sigma'}\frac{\partial\sigma'}{\partial u}du, \qquad \mathrm{D}_y = \frac{m}{\sin\sigma\sin\sigma'}\frac{\partial\sigma'}{\partial v}dv, \qquad \mathrm{D}_z = n\frac{d\sigma'}{\sin^2\sigma'}.$$

Elles permettront d'obtenir l'élément linéaire de la surface (Θ) décrite par le point M sous la forme

$$(20)\qquad ds^2 = \frac{\sin^2\sigma' + n^2\cos^2\sigma'}{\sin^4\sigma'}d\sigma'^2 + \frac{m^2}{\sin^2\sigma'}\left(\operatorname{tang}\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial u}du - \cot\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial v}dv\right)^2.$$

Comme on peut, en vertu des formules (15) et (16), poser

$$\operatorname{tang}\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial u}du - \cot\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial v}dv = dw,$$

on reconnaît dans l'équation précédente l'élément linéaire d'une surface de révolution qui est une quadrique (Q) dont l'axe de révolution a pour valeur $2i$, l'axe équatorial étant $2mi$.

Si l'on considérait de même la sphère (S′) tangente en c, c' aux surfaces (c), (c'), on verrait qu'elle a pour équation

$$(21)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2m\frac{\cos\sigma}{\cos\sigma'}x - 2m\frac{\sin\sigma}{\cos\sigma'}y - 2n\operatorname{tang}\sigma' z + m^2 = 0,$$

et que son centre M′ décrit une surface (Θ') complémentaire de (Θ) et applicable aussi sur (Q).

Au lieu de poursuivre la démonstration dans le détail, je préfère m'arrêter au point important et chercher ce que donnent les résultats précédents quand on les applique aux surfaces à courbure constante positive.

Pour obtenir une surface à courbure constante $\frac{1}{a^2}$, effectuons une transformation homothétique avec le rapport de similitude ai et remplaçons, dans la formule (1), u et ω par ui et ωi respectivement. L'élément linéaire de la surface (γ) deviendra

$$(22)\qquad ds^2 = a^2\cos^2\omega i\,du^2 - a^2\sin^2\omega i\,dv^2,$$

ω satisfaisant à l'équation

$$(23)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = i\sin\omega i\cos\omega i.$$

Remplaçons m et n par $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$; $2a$, $2b$, $2c$ seront les axes et la distance focale de la quadrique de révolution dans laquelle se transforme (Q). Les équations (4), (8) prendront les formes suivantes

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} b\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) &= \quad ai\sin\theta\cos i\omega - ci\cos\theta\sin\omega i,\\ b\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right) &= -a\cos\theta\sin i\omega + c\sin\theta\cos\omega i;\end{aligned}\right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} b\left(\frac{\partial\theta'}{\partial u}-\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) &= \quad ai\sin\theta'\cos i\omega + ci\cos\theta'\sin\omega i,\\ b\left(\frac{\partial\theta'}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right) &= -a\cos\theta'\sin i\omega - c\sin\theta'\cos\omega i,\end{aligned}\right.$$

et elles ne pourront déterminer pour θ et θ' que des valeurs imaginaires, de sorte que le losange $\gamma c\gamma' c'$ aura ses côtés et deux de ses sommets imaginaires; mais *le point* γ' *pourra être réel comme* γ. *Il en sera de même des points* M *et* M′ *qui décrivent les surfaces* (Θ), (Θ').

En effet, les équations qui définissent le point γ' sont ici

$$(26)\qquad x''^2+y''^2+z''^2=2\frac{ib\cos\sigma'}{\cos\sigma}x''=\frac{2ib\cos\sigma'}{\sin\sigma}y''=-2icz''\cot\sigma';$$

celles qui définissent le point M sont

$$(27)\qquad x=y=0,\qquad z=-ic\cot\sigma'.$$

Enfin le point M′ sera le centre de la sphère

$$(28)\qquad x^2+y^2+z^2-2bi\frac{\cos\sigma}{\cos\sigma'}x-2bi\frac{\sin\sigma}{\cos\sigma'}y-2ic\,\mathrm{tang}\,\sigma' z-b^2=0.$$

Supposons d'abord que la quadrique (Q) soit un ellipsoïde ayant pour grand axe a. Les constantes b et c seront réelles. Les équations (25) seront vérifiées si l'on y fait

$$\theta'=\theta_0+\pi,$$

θ_0 étant l'imaginaire conjuguée de θ. *Alors* $\mathrm{tang}\,\sigma'$, $\cos\sigma'$ *seront des quantités purement imaginaires, les surfaces* (γ'), (Θ), (Θ') *seront réelles* et la transformation de (γ) en (γ') s'obtiendra par la seule intégration du système (24).

Il en sera de même si (Q) est un hyperboloïde à deux nappes. Alors, bi sera réelle; on pourra prendre $\theta' = \theta_0$, et les équations (26) à (28) se présenteront encore sous forme réelle.

Dans le cas où (Q) serait un ellipsoïde aplati, les surfaces (c) et (c'), (γ) et (γ') seraient imaginaires conjuguées.

En résumé, le théorème de M. Guichard permet d'utiliser, pour la Géométrie des éléments réels, les transformations de MM. Bianchi et Bäcklund lorsque, appliquées aux surfaces à courbure positive, elles se présentent sous une forme nécessairement imaginaire.

Il existe, du reste, d'autres transformations réelles des surfaces à courbure constante qui utilisent d'une manière plus complète les transformations de MM. Bianchi et Bäcklund lorsqu'elles sont imaginaires. Il suffit, pour les obtenir, d'effectuer successivement deux transformations de Bäcklund, assujetties à l'unique condition d'être imaginaires conjuguées l'une de l'autre. Je laisserai ce sujet de côté pour le moment, afin de m'occuper des rapports qui existent entre la théorie des surfaces isothermiques et la déformation des quadriques les plus générales. Ces rapports, déjà signalés dans un cas particulier par M. Thybaut, ont leur origine dans la proposition suivante :

Si une quadrique générale (Q) *roule sur une surface applicable* (Θ), *les* 8 *points où les génératrices isotropes de* (Q) *coupent le plan de contact de* (Q) *et de* (Θ) *décrivent* 8 *surfaces isothermiques qui peuvent se grouper en quatre couples formés de surfaces ayant même représentation sphérique, ou en douze couples formés de surfaces normales à des cercles faisant partie d'un système cyclique* [1].

---

[1] Séance du 24 avril 1899.