ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. ZAREMBA

Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u + \xi u + f = 0$ et sur les fonctions harmoniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 427-464

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__427_0>

SUR

L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

$\Delta u + \xi u + f = 0$

ET SUR

LES FONCTIONS HARMONIQUES,

PAR M. S. ZAREMBA.

I. — Introduction.

1. On sait que diverses questions de la Physique mathématique conduisent au problème suivant :

Déterminer une fonction u des coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point variable, vérifiant dans toute l'étendue d'un domaine (D) limité par une surface fermée donnée (S) l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u + \xi u + f = 0,$$

où f est une fonction donnée des variables x, y, z, où ξ est un paramètre indépendant de ces variables, et où l'on a posé, conformément à l'usage,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1}$$

sachant, en outre, que la fonction u doit satisfaire à la condition aux limites

$$\frac{du}{dN} = hu, \tag{2}$$

où $\frac{du}{dN}$ représente la dérivée de la fonction u, prise suivant la normale intérieure à la surface (S), h étant une constante donnée, réelle et non négative.

Le but de ce travail est de résoudre le problème précédent et d'étudier la fonction u considérée comme fonction du paramètre ξ. Nous ferons voir qu'à ce point de vue la fonction u est une fonction méromorphe qui n'a que des pôles simples, et qui admet pour résidus correspondant à ces pôles des fonctions remarquables de x, y, z, appelées *fonctions harmoniques* par M. Poincaré. Enfin, nous étudierons le problème du développement d'une fonction arbitrairement donnée en une série, procédant suivant les fonctions harmoniques. Ce problème joue, on le sait, un grand rôle en Physique mathématique.

La méthode dont nous allons faire usage n'est qu'une application des idées exposées par M. Poincaré dans son Mémoire fondamental sur les équations de la Physique mathématique (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894), application rendue possible grâce à une nouvelle méthode d'intégration de l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0.$$

Cette méthode sera l'objet du Chapitre suivant.

II. — Sur l'équation $\Delta v + \xi v = 0$.

2. Je consacre ce numéro à la définition de certaines notations et à l'énoncé d'hypothèses qui seront conservées dans toute l'étendue de ce travail. Nous emploierons les symboles (D) et (S) dans le sens qui leur a été donné dans l'Introduction; nous supposerons que la surface (S), qui peut d'ailleurs se composer de plusieurs nappes fermées entièrement séparées, admet en chacun de ses points un plan tangent parfaitement déterminé et qu'elle jouit, en outre, d'une propriété que l'on peut énoncer ainsi : plaçons l'origine O des coordonnées en un point quelconque de la surface (S), dirigeons l'axe des z suivant la normale, et séparons par une courbe fermée (Σ) une petite portion (S′) de la surface (S) du reste de cette surface; nous supposerons que, quelle que soit la position du point O sur la surface (S), il sera possible de disposer de la courbe (Σ) de façon que les circonstances sui-

vantes se présentent à la fois : la portion de surface (S′) sera simplement connexe et contiendra le point O, une parallèle à l'axe des z ne peut rencontrer (S′) qu'en un seul point, la courbe (Σ) a pour projection orthogonale sur le plan des (x, y) un cercle de centre O dont le rayon est indépendant de la position du point O sur la surface (S), si $z = f(x, y)$ est l'équation de la portion de surface (S′), la fonction $f(x, y)$ admettra des dérivées jusqu'au second ordre inclusivement, et les valeurs absolues de ces dérivées seront inférieures à un nombre positif fixe indépendant de la position du point O sur la surface (S); enfin, les différences

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \left[x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}\right]$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \left[x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}\right]$$

seront chacune inférieures en valeur absolue au produit d'un nombre positif indépendant de la position du point O sur la surface (S), par l'expression $x^2 + y^2$.

Cela posé, soit (x', y', z') un point variable assujetti à rester sur la surface (S) et σ une fonction des coordonnées x', y', z' de ce point. Désignons par (Γ) un arc de courbe tracé sur la surface (S) admettant en chacun de ses points un rayon de courbure différent de zéro, et concevons que le point (x', y', z') se déplace le long de cet arc. On pourra alors considérer la fonction σ comme une fonction de la longueur de l'arc que décrit le point (x', y', z'), et elle pourra, considérée ainsi, admettre une dérivée.

Nous représenterons cette dérivée, quand elle existera, par le symbole $\frac{\partial \sigma}{\partial \eta}$. Si la dérivée en question existe pour tout arc tel que l'arc (Γ), et si son module reste constamment inférieur à un nombre positif fixe C′, nous dirons que la fonction σ admet des dérivées premières, et que C′ est une limite supérieure des modules de ces dérivées.

Considérons maintenant une fonction $F(x, y, z)$, supposons que cette fonction existe dans tout l'espace, prenons pour origine des coordonnées un point O situé sur la surface (S), dirigeons l'axe des z suivant la normale intérieure et faisons tendre le point (x, y, z) vers le point O, mais de façon qu'il reste constamment à l'intérieur ou constamment à l'extérieur de cette surface.

Nous représenterons les limites des quantités $F(x, y, z)$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$, en supposant que ces limites existent, par $(F)_i$ et $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$ dans le premier cas, et par $(F)_e$ et $\left(\frac{dF}{dN}\right)_e$ dans le second; lorsqu'aucune ambiguïté ne sera à redouter, nous écrirons simplement F et $\frac{dF}{dN}$ au lieu d'écrire $(F)_i$ et $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$.

D'après les conventions faites plus haut les dérivées des fonctions $(F)_i$, $(F)_e$, $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$, $\left(\frac{dF}{dN}\right)_e$ par rapport à un arc tracé sur la surface (S), seront représentées par les symboles

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(F)_i, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(F)_e, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_i, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_e;$$

pour plus de simplicité nous écrirons

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_i \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_e$$

au lieu d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(F)_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \eta}(F)_e,$$

et lorsqu'un malentendu sera impossible, nous remplacerons le symbole $\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_i$ par l'expression $\frac{\partial F}{\partial \eta}$.

Nous désignerons par μ celle des déterminations de la racine carrée de $-\xi$, ξ étant le paramètre qui figure dans l'équation (1), dont la partie réelle est positive, par m le module de μ et nous poserons, en mettant en évidence les parties réelles et imaginaires de ξ et de μ,

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \alpha + \beta i, \\ \mu &= a + bi. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Nous aurons donc

$$\left\{\begin{aligned} \mu^2 &= (a+bi)^2 = -\xi = -\alpha - \beta i, \\ m^2 &= a^2 + b^2 \;\; = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$a > 0. \tag{5}$$

3. Soient σ une fonction continue de la position d'un point variable P assujetti à rester sur la surface (S), ds l'élément de surface relatif au point P et r la distance de ce point à un point quelconque (x, y, z) de l'espace. Posons

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \tag{6}$$

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \sigma \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \tag{7}$$

où l'indice (S) indique que l'intégration doit être étendue à toute la surface (S).

Nous aurons à nous appuyer constamment sur diverses propriétés des fonctions Φ et ψ que définissent les équations précédentes; la démonstration de ces propriétés n'offrant aucune difficulté, nous nous bornerons à les énoncer.

On a

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e = -\sigma; \tag{8}$$

si l'on désigne par C une limite supérieure du module de la fonction σ, on pourra trouver une constante positive A, dépendant uniquement de la surface (S), telle que l'on ait à la fois

$$|\Phi(x, y, z)| < \frac{A}{a} C, \tag{9}$$

$$\left|\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i + \frac{1}{2}\sigma\right| < A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) C, \tag{10}$$

$$\left|\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e - \frac{1}{2}\sigma\right| < A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) C, \tag{11}$$

$$\left|(\psi)_i - \frac{1}{2}\sigma\right| < A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) C, \tag{12}$$

$$|\psi(x, y, z)| < \frac{A\,m}{a} C, \tag{13}$$

si la fonction σ admet des dérivées premières, les dérivées

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta},\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e,\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\Phi}{dN}\right)_i,\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_i \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_e$$

existeront et l'on aura, en désignant par C′ une limite supérieure des modules des dérivées premières de la fonction σ, et en supposant que la constante A soit convenablement choisie, en dehors des inégalités déjà écrites, les inégalités suivantes

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right| < \frac{A}{a}C' + A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right)C, \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right)C' + A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3}\right)C,\\ &\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right)C' + A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3}\right)C;\end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_i - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right)C' + A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3}\right)C,\\ &\left|\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_e + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right)C' + A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3}\right)C;\end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$|D\Phi| < \frac{A}{a}C' + \left[A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\right]C, \tag{17}$$

où le symbole DΦ représente l'une quelconque des dérivées premières de la fonction Φ.

Nous simplifierons sensiblement le langage dans les numéros qui vont suivre en introduisant un nombre positif θ tel que, sous la condition

$$\frac{m^2}{a^3} \leqq \theta, \tag{18}$$

on ait

$$A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2} + \frac{m^2}{a^3}\right) \leqq \frac{1}{8}; \tag{19}$$

on aura alors aussi

$$A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) < \frac{1}{8}; \tag{20}$$

l'existence du nombre θ résulte immédiatement de l'inégalité $m \geqq a$.

Cela posé, si l'inégalité (18) est satisfaite, les inégalités (10), (11), (12), (15) et (16) nous donneront

$$\left|\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i + \frac{1}{2}\sigma\right| < \frac{1}{8}C, \tag{21}$$

$$\left|\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e - \frac{1}{2}\sigma\right| < \frac{1}{8}C, \tag{22}$$

$$\left|\quad(\psi)_i \quad - \frac{1}{2}\sigma\right| < \frac{1}{8}C; \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < \frac{1}{8}(C'+C),\\ &\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < \frac{1}{8}(C'+C); \end{aligned}\right. \tag{24}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_i - \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < \frac{1}{8}(C'+C),\\ &\left|\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_e + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < \frac{1}{8}(C'+C). \end{aligned}\right. \tag{25}$$

4. Proposons-nous de déterminer une fonction φ vérifiant dans toute l'étendue du domaine (D) l'équation

$$\Delta\varphi + \zeta\varphi = 0 \tag{26}$$

et satisfaisant à la condition aux limites

$$\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i = \varpi, \tag{27}$$

ϖ étant une fonction continue donnée de la position d'un point variable assujetti à rester sur la surface (S). Posons, à cet effet,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r}\varpi\, ds,\\ \varphi_{k+1} &= \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r}\left(\frac{d\varphi_k}{dN}\right)_e ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Je dis que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \tag{29}$$

sera convergente et aura pour somme la fonction demandée φ toutes les fois que l'inégalité (18) sera satisfaite. En effet, la chose résulte immédiatement des inégalités (21) et (22) et de l'équation (8), qui conduit aux relations

$$\left(\frac{dv_1}{dN}\right)_i - \left(\frac{dv_1}{dN}\right)_e = \varpi,$$

$$\left(\frac{dv_{k+1}}{dN}\right)_i - \left(\frac{dv_{k+1}}{dN}\right)_e = -\left(\frac{dv_k}{dN}\right)_e \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

5. Voici maintenant quelques conséquences de la solution qui vient d'être exposée. La fonction v, définie par les équations (26) et (27), peut être représentée en supposant toujours que l'inégalité (18) soit satisfaite par la formule

$$(30) \qquad v = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{e^{-\mu r}}{r}\,\sigma\, ds,$$

où σ est une fonction convenablement déterminée de la position d'un point variable assujetti à rester sur la surface (S). Désignons par Ω une limite supérieure du module de la fonction ϖ, nous aurons

$$(31) \qquad |\sigma| < \frac{8}{3}\Omega,$$

et le théorème exprimé par l'inégalité (9) nous donnera

$$(32) \qquad |v| < \frac{8}{3}\frac{A}{a}\Omega.$$

Supposons que la fonction ϖ admette des dérivées premières et soit Ω' une limite supérieure de leurs modules, la fonction σ admettra aussi les dérivées premières, et l'on aura

$$(33) \qquad \left|\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}\right| < \frac{8}{9}\Omega + \frac{8}{3}\Omega';$$

il suffit, pour le voir, de se reporter aux théorèmes exprimés par les inégalités (24). Cela posé, on déduira aisément des inégalités (31), (33) et (17), en tenant compte de l'inégalité (20),

$$(34) \qquad |Dv| < \frac{8}{3}\frac{A}{a}\Omega' + \left(\frac{8}{9}\frac{A}{a} + \frac{5}{3}\right)\Omega,$$

où Dv représente l'une quelconque des dérivées premières de la fonction v.

6. Cherchons à déterminer une fonction w, vérifiant dans toute l'étendue du domaine (D) l'équation

$$\Delta w + \xi w = 0 \tag{35}$$

et satisfaisant à la condition aux limites

$$\left(\frac{dw}{dN}\right)_i = h(w)_i + \varpi, \tag{36}$$

où ϖ représente une fonction donnée de la position d'un point variable assujetti à rester sur la surface (S). Je supposerai que la fonction ϖ admet des dérivées premières et je me bornerai à considérer les valeurs du paramètre ξ, pour lesquelles l'inégalité (18) est satisfaite.

Essayons, à l'exemple de M. Poincaré, de développer la fonction w en une série, procédant suivant les puissances entières et positives du paramètre h, auquel nous ne donnerons, pour plus de simplicité, que des valeurs *réelles* et *non négatives*, et posons en conséquence

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k h^k. \tag{37}$$

Nous aurons, en supposant provisoirement que ce développement soit possible,

$$\Delta w_k + \xi w_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{38}$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dw_0}{dN} = \varpi, \\ &\frac{dw_k}{dN} = w_{k-1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{39}$$

La méthode exposée au n° 4 permettra de calculer de proche en proche toutes les fonctions w_0, w_1, w_2, ... Désignons par Ω, δ_k, Ω' et δ'_k les maxima respectifs des modules des fonctions ϖ, w_k et de leurs dérivées premières. Les inégalités (32) et (34) nous donneront

$$
(40)\qquad \begin{cases} \delta_0 < \dfrac{8}{3}\dfrac{A}{a}\Omega, \\ \delta_k < \dfrac{8}{3}\dfrac{A}{a}\delta_{k-1}, \end{cases}
$$

$$
(41)\qquad \begin{cases} \delta'_0 < \dfrac{8}{3}\dfrac{A}{a}\Omega' + \left(\dfrac{8}{9}\dfrac{A}{a} + \dfrac{5}{3}\right)\Omega, \\ \delta'_k < \dfrac{8}{3}\dfrac{A}{a}\delta'_{k-1} + \left(\dfrac{8}{9}\dfrac{A}{a} + \dfrac{5}{3}\right)\delta_{k-1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}
$$

Il est aisé de déduire de ces inégalités que, sous la condition

$$
(42)\qquad \frac{8}{3}\frac{A}{a}h < 1
$$

la série (37) sera convergente et que la somme w de cette série admettra des dérivées premières dans toute l'étendue du domaine (D). Nous pouvons donc affirmer qu'en vertu des équations (39) la condition (36) sera vérifiée. Reste à s'assurer si l'équation (35) sera réellement vérifiée. Il suffit de remarquer, à cet effet, que la somme w de la série (37) peut être représentée par la formule

$$
w = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \omega \frac{e^{-\mu r}}{r}\, ds,
$$

où ω représente une fonction convenablement choisie de la position d'un point variable sur la surface (S). La chose est une conséquence immédiate de ce qui a été dit au début du n° 5; j'ajoute qu'une application facile de l'inégalité (31) permettrait de calculer une limite supérieure du module de la fonction ω. En résumé, on voit que nous savons résoudre le problème énoncé au début du présent numéro, quel que soit h, pourvu que le paramètre ξ soit choisi de façon que les inégalités (18) et (42) soient satisfaites.

7. Considérons dans le domaine (D) deux points (x_0, y_0, z_0) et (x, y, z) et soit r leur distance. Nous appellerons, avec M. Poincaré, *fonction de Green généralisée* ou même simplement *fonction de Green* la fonction $G(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ qui, considérée comme fonction des

variables x, y, z, jouit des propriétés suivantes : elle vérifie dans toute l'étendue du domaine (D), exception faite du point (x_0, y_0, z_0), l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta G + \xi G = 0; \tag{43}$$

dans le voisinage du point (x_0, y_0, z_0), la différence

$$G - \frac{1}{4\pi r}$$

reste finie et continue; enfin cette fonction satisfait à la condition aux limites

$$\frac{dG}{dN} = hG. \tag{44}$$

Posons

$$G = \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r} + g(x_0, y_0, z_0, x, y, z),$$

on aura, dans toute l'étendue du domaine (D),

$$\Delta g + \xi g = 0,$$

et l'on s'assurera que la fonction g peut être calculée par la méthode exposée au numéro précédent. Proposons-nous de déterminer une limite supérieure de l'intégrale

$$I = \int_{(D)} |G(x_0, y_0, z_0, x, y, z)|^2 d\tau, \tag{45}$$

où $d\tau$ représente l'élément de volume relatif au point (x, y, z) et où l'indice (D) indique que l'intégration doit être étendue à tout le domaine (D).

Mettons en évidence les parties réelle et imaginaire de la fonction G et posons à cet effet

$$G(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = G_1(x_0, y_0, z_0, x, y, z) + iG_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z),$$

les équations (3), (43) et (44) nous donneront, en tenant compte de la réalité de h,

$$(46)\qquad \begin{cases} \Delta G_1 + \alpha G_1 - \beta G_2 = 0, \\ \Delta G_2 + \alpha G_2 + \beta G_1 = 0 \end{cases}$$

et

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{dG_1}{dN} = h G_1, \\ \dfrac{dG_2}{dN} = h G_2. \end{cases}$$

Décrivons du point (x_0, y_0, z_0) comme centre une petite sphère (Σ), appelons (D') la partie du domaine (D) qui se trouve à l'extérieur de la sphère (Σ) et appliquons aux fonctions G_1 et G_2 et au domaine (D') le théorème de Green, puis faisons tendre vers zéro le rayon de la sphère (Σ). Il viendra, en remarquant que dans le voisinage du point x_0, y_0, z_0 la fonction $G_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ reste finie et continue et que ses dérivées premières sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$,

$$(48)\qquad I = \int_{(D)} (G_1^2 + G_2^2)\, d\tau = \frac{G_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)}{\beta}.$$

Nous avons à évaluer la quantité $G_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)$. Considérons à cet effet un point (x_1, y_1, z_1) situé dans le domaine (D), appelons r_1 la distance de ce point au point (x, y, z) et envisageons la fonction

$$\frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1}.$$

Décrivons des points (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1), comme centres deux petites sphères (Σ_0) et (Σ_1) et soit (D'') la partie du domaine (D) extérieur à ces deux sphères. Cela posé, appliquons aux fonctions G_2 et $\frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1}$ et au domaine (D'') le théorème de Green et faisons ensuite tendre vers zéro les rayons des sphères (Σ_0) et (Σ_1). Il viendra, en tenant compte de la deuxième des équations (46), de la deuxième des équations (47) et de l'équation

$$\Delta \frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1} + \xi \frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1} = 0,$$

ainsi que des remarques faites plus haut au sujet de la fonction G_2 et de ses dérivées premières

$$(49)\quad G_2(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = \frac{\beta}{4\pi}\int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}(G_1 - iG_2)\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} G_2 \frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\,ds - \frac{h}{4\pi}\int_{(S)} G_2 \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\,ds.$$

Désignons par M le maximum de la valeur absolue de la fonction $G_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ lorsque le point (x, y, z) décrit la surface (S) et faisons tendre le point (x_1, y_1, z_1) vers un point (x', y', z') situé sur la surface (S). Il viendra, en tenant compte des théorèmes exprimés par les inégalités (9) et (12),

$$(50)\quad G_2(x_0, y_0, z_0, x', y', z') = \frac{\beta}{2\pi}\int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}(G_1 - iG_2)\,d\tau + 2\lambda' A\left(\frac{1}{a} + \frac{m}{a^2}\right) M + 2\lambda'' \frac{Ah}{a} M,$$

où λ' et λ'' sont deux facteurs imaginaires dont les modules sont inférieurs à l'unité.

Je rappelle, avant d'aller plus loin, une inégalité due à M. Schwarz et que j'énonce tout de suite sous la forme générale sous laquelle nous aurons souvent l'occasion de l'appliquer. Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n$, $2n$ fonctions *réelles* des variables x, y, z définies chacune dans toute l'étendue du domaine (D) et posons

$$L = \int_{(D)} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2\,d\tau,$$

$$L' = \int_{(D)} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k'^2\,d\tau,$$

$$K = \int_{(D)} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \varphi'_k\,d\tau,$$

on aura

$$(51)\quad K^2 \leqq LL'.$$

Pour reconnaître l'exactitude de cette inégalité, il suffit de remarquer que la forme quadratique

$$t^2 L + 2tt' K + t'^2 L',$$

où t et t' sont des variables réelles, peut-être représentée par une intégrale ne pouvant jamais prendre une valeur négative.

Revenons maintenant à l'équation (50) et proposons-nous d'estimer par excès le module de l'intégrale qui figure au second membre de l'équation (50). Nous avons, eu égard à la définition énoncée au moyen de la seconde des équations (3)

$$(52) \qquad \left| \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} (G_1 - i G_2)\, d\tau \right| < \int_{(D)} \frac{e^{-a r_1}}{2\pi r_1} \sqrt{G_1^2 + G_2^2}\, d\tau.$$

J'applique au second membre de cette inégalité l'inégalité (51) en faisant dans ce but $n = 1$, $\varphi_1 = \dfrac{e^{-ar_1}}{2\pi r_1}$ et $\varphi'_1 = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}$, et j'étends l'intégration dans l'intégrale

$$\int \frac{e^{-2ar_1}}{4\pi^2 r_1^2} d\tau$$

à tout l'espace au lieu de la borner au domaine (D). Je trouve ainsi, en me reportant à l'équation (45),

$$(53) \qquad \left(\int_D \frac{e^{-ar_1}}{2\pi r_1} \sqrt{G_1^2 + G_2^2}\, d\tau \right)^2 < \frac{I}{2\pi a}.$$

Pour éviter des complications inutiles, supposons que le paramètre ξ soit choisi de façon que l'inégalité

$$(54) \qquad \frac{Ah}{a} \leqq \frac{1}{8}$$

soit satisfaite en même temps que l'inégalité (18). Cela posé, choisissons sur la surface (S) le point (x', y', z'), de manière que la valeur absolue de la fonction $G_2(x_0, y_0, z_0, x', y', z')$ soit précisément égale à M. L'équation (50) nous donnera, en tenant compte des inégalités (52), (53), (54) et (20)

$$(55) \qquad M^2 < \frac{2 I \beta^2}{\pi a}.$$

Il est aisé de voir que l'équation (49) reste exacte même si l'on fait coïncider le point (x_1, y_1, z_1) avec le point (x_0, y_0, z_0); pour le voir il suffit de remplacer les deux sphères (Σ_0) et (Σ_1) qui nous ont servi à l'établir par une sphère unique ayant le point (x_0, y_0, z_0) pour centre. Nous pouvons donc écrire

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} &G_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)\\ &\quad = \frac{\beta}{4\pi}\int_{(D)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}(G_1 - iG_2)\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} G_2 \frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\,ds - \frac{h}{4\pi}\int_{(S)} G_2 \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\,ds. \end{aligned}\right.$$

Il est aisé d'estimer par excès le module de chaque terme du second membre de cette équation : on trouve d'abord, en raisonnant comme nous l'avons fait sur l'intégrale qui figure au second membre de l'équation (50),

$$(57)\qquad \left|\int \frac{e^{-\mu r_1}}{4\pi r_1}(G_1 - iG_2)\,d\tau\right|^2 < \frac{1}{8\pi a};$$

il vient ensuite, en faisant usage des inégalités (9) et (13),

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\frac{h}{4\pi}\int_S G_2 \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\,ds\right| < \frac{Ah}{a}\,M,\\ &\left|\frac{h}{4\pi}\int_S G_2 \frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\,ds\right| < \frac{Am}{a}\,M. \end{aligned}\right.$$

Les équations (48) et (56) conduisent, en tenant compte des inégalités (55), (57) et (58), à la conclusion suivante : Lorsque le paramètre ξ est choisi de façon que les inégalités (18) et (54) soient satisfaites, il existe un nombre constant positif B tel que l'on ait

$$(59)\qquad I < B\,\frac{m^2}{a^3}.$$

III. — Intégration de l'équation $\Delta u + \xi u + f = 0$.

8. Proposons-nous de calculer la fonction u définie au n° 1. Le cas où la fonction donnée $f(x, y, z)$ serait une fonction complexe de la forme $f_1 + if_2$ se ramène manifestement au cas où cette fonction est

réelle, nous supposerons donc que $f(x, y, z)$ est une fonction réelle. Je dis que le problème est possible et que nous saurons le résoudre si ξ est choisi de façon que les inégalités (18) et (54) soient vérifiées, pourvu que la fonction $f(x, y, z)$ admette des dérivées premières continues dans toute l'étendue du domaine (D).

En effet, désignons par r la distance des points (x, y, z) et (x', y', z') et soit $d\tau$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z'). Posons

$$u = w + \frac{1}{4\pi}\int_{D} \frac{e^{-\mu r}}{r} f(x', y', z')\, d\tau,$$

on s'assurera aisément que le calcul de la fonction w dépend du problème traité dans la section précédente et que toutes les conditions requises pour que la méthode qui y est exposée soit applicable seront remplies. On verra en même temps que la fonction u admettra des dérivées premières qui resteront finies et continues même dans le voisinage de la surface (S). Sachant que la fonction u existe, on prouvera par une application facile du théorème de Green que cette fonction sera donnée par la formule

$$u = \int_{(D)} f(x', y', z')\, G(x, y, z, x', y', z')\, d\tau, \tag{60}$$

où G représente la fonction de Green généralisée, définie dans la section précédente.

Pour étendre la solution à toutes les valeurs possibles de ξ il nous faut pouvoir exprimer une limite supérieure des modules des dérivées premières de u, dans le cas où la solution que nous venons d'indiquer est applicable, au moyen du maximum de la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$.

A cet effet, désignons comme plus haut par r la distance des points (x, y, z) et (x', y', z') et par $d\tau$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z); soit, en outre, dans le cas où le point (x', y', z') viendrait sur la surface (S), ds l'élément de surface relatif à ce point. Une application facile du théorème de Green nous donnera, en tenant compte de l'équation (2),

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_{(D)} f(x', y', z')\frac{e^{-\mu r}}{r}\, ds + \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} u\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\, ds - \frac{h}{4\pi}\int_{(S)} u\frac{e^{-\mu r}}{r}\, ds. \tag{61}$$

Reportons-nous aux notations définies au n° 2. Les dérivées premières de la fonction u étant, comme nous l'avons déjà fait remarquer, finies et continues, même dans le voisinage de la surface (S), la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ existera et sera une fonction continue des éléments dont elle dépend. Cela posé, l'équation (61) nous donne, en nous appuyant sur les inégalités (14) et (16),

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(D)} f(x', y', z')\frac{e^{-\mu r}}{r}\,d\tau \\ &\quad + 2\lambda_1\left[A\left(\frac{1}{a}+\frac{m}{a^2}\right)H' + A\left(\frac{1}{a}+\frac{m}{a^2}+\frac{m^2}{a^3}\right)H\right] \\ &\quad + 2\lambda_2\left[\frac{Ah}{a}H' + A\left(\frac{1}{a}+\frac{m}{a^2}\right)hH\right], \end{aligned}\right.$$

où l'on a désigné par H le maximum du module de la fonction u sur la surface (S), par H′ le maximum du module de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, par λ_1 et λ_2 des facteurs imaginaires dont les modules sont chacun inférieurs à l'unité. Je choisis le point et l'arc auquel se rapporte $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ de façon que le module de cette quantité atteigne son maximum H′ et je rappelle que, à raison des conditions auxquelles satisfait le paramètre ξ, les inégalités (19), (20) et (54) seront satisfaites. L'équation (62) donnera

$$(63)\qquad H' < \frac{1}{\pi}\left|\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(D)} f(x', y', z')\frac{e^{-\mu r}}{r}\,d\tau\right| + \frac{1}{2}H(1+h).$$

Soit F le maximum de la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$, on trouvera aisément

$$(64)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(D)} f(x', y', z')\frac{e^{-\mu r}}{r}\,d\tau\right| < 4\left(\frac{1}{a}+\frac{m}{a^2}\right)F.$$

D'ailleurs, la formule (60) et l'inégalité (59) nous donnent, en faisant une application convenable de l'inégalité (51),

$$(64^a)\qquad |u|^2 < B\frac{m^2}{a^3}\int_{(D)} f^2\,d\tau.$$

Les inégalités (63), (64) et (64^a) conduisent à cette conséquence qu'il existera un nombre positif B_1 ne dépendant que du choix du paramètre ξ et de h tel que l'on ait

$$H' < B_1 F. \tag{64^b}$$

Désignons, pour un moment, par $\chi(x, y, z)$ le second terme du second membre de l'équation (61). On verra aisément, en tenant compte des inégalités (64^a) et (64^b) et en s'appuyant sur la première des inégalités (16), que l'inégalité

$$\left| \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} \right)_i \right| < B_2 F, \tag{64^c}$$

où B_2 représente un facteur analogue au facteur B_1, qui figure dans l'inégalité (64^b), aura lieu.

Cela posé, on n'éprouvera aucune difficulté à conclure de l'équation (61), de l'équation (2) et des inégalités (10) et (64^a) qu'il existera un facteur positif B_3 analogue aux facteurs B_1 et B_2 tel que l'on ait

$$\left| \frac{d\chi}{dN} \right| < B_3 F. \tag{64^d}$$

Les inégalités (64^c) et (64^d) nous montrent que, si l'on désigne par χ_1 l'une quelconque des dérivées premières de la fonction χ, l'on aura, en donnant au symbole $(\chi_1)_i$ le sens fixé par les définitions posées au n° 2,

$$| (\chi_1)_i | < B_4 F, \tag{65}$$

où l'on a posé

$$B_4 = \sqrt{B_2^2 + B_3^2}.$$

Supposons maintenant que le paramètre ξ ait une valeur *réelle* et *négative*. Je dis que l'inégalité (65) entraînera l'inégalité plus générale

$$|\chi_1| < B_4 F. \tag{66}$$

En effet, il résulte de la définition même des fonctions χ et χ_1 que χ_1 satisfera à l'équation

$$\Delta \chi_1 + \xi \chi_1 = 0.$$

Or, puisque ξ a une valeur réelle et négative, la valeur absolue de la fonction χ_1 ne peut atteindre son maximum que sur la surface (S), ce qui démontre notre assertion.

Il est très aisé de conclure maintenant de l'équation (61), de l'inégalité (17) et des inégalités (64^b) et (66) la proposition suivante :

Lorsque le paramètre ξ satisfait aux conditions (18) *et* (54) *et lorsque, de plus, il a une valeur* réelle *et* négative, *l'inégalité suivante*

$$|Du| < B'F, \tag{67}$$

où Du représente l'une quelconque des dérivées premières de la fonction u, F le maximum de la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$ et B' un nombre positif ne dépendant que des valeurs de ξ et h, sera vérifiée.

Il serait aisé d'étendre ce théorème au cas où ξ ne serait pas un nombre réel et où il ne serait assujetti qu'à satisfaire aux conditions (18) et (54), mais cette extension ne nous sera pas utile.

9. Pour calculer la fonction u dans le cas où le paramètre ξ a une valeur pour laquelle la légitimité de la méthode du numéro précédent n'est pas établie, changeons dans l'équation (1) ξ en $\xi + \zeta$ et cherchons à développer la fonction u suivant les puissances entières et positives de ζ. Essayons à cet effet de poser

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \zeta^j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots); \tag{68}$$

il faudra avoir

$$\begin{cases} \Delta u_0 + \xi u_0 + f \quad = 0, \\ \Delta u_j + \xi u_j + u_{j-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{69}$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{du_j}{dN} = h u_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{70}$$

Donnons à ξ, dans les équations (69), une valeur *réelle* et *négative*. Nous aurons, comme le montrent les formules (3) et (4),

$$\begin{cases} \mu = a = m, \\ \mu^2 = a^2 = m^2 = -\xi. \end{cases} \tag{71}$$

Le nombre réel et positif h étant donné, choisissons m assez grand pour que les inégalités (18) et (54) soient satisfaites. La méthode exposée au numéro précédent permettra de calculer toutes les fonctions $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Calculons le rayon de convergence de la série (68). Considérons à cet effet, en nous inspirant du célèbre Mémoire de M. Schwarz sur les surfaces minima, les intégrales

$$(72) \qquad W_{j,j'} = W_{j',j} = \int_{(D)} u_j u_{j'}\, d\tau.$$

Le théorème de Green permet de déduire des équations (69) et (70) les relations suivantes :

$$W_{j-1,0} = \int_{(D)} f u_j\, d\tau,$$

$$W_{j,j'} = W_{j+1,\, j'-1}.$$

Si donc l'on pose

$$(73) \qquad W_{p-1} = \int_{D} u_p f\, d\tau \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

l'on aura

$$(74) \qquad W_{j,j'} = W_{j+j'},$$

Je pose pour la symétrie des notations

$$(75) \qquad W_{-2} = \int_{D} f^2\, d\tau.$$

Les intégrales W_p seront toutes réelles à cause de la réalité des fonctions u_j qui, elle-même, est une conséquence de la réalité du paramètre ξ et de la fonction f. On pourra, par conséquent, appliquer à ces intégrales l'inégalité (51). On trouve

$$(76) \qquad W^2_{2t-1} < W_{2t-2} W_{2t} \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots).$$

On déduit des équations (69) et (70), en tenant compte de (71),

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{2t-1} &= \int_{(D)} \left[\left(\frac{\partial u_t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_t}{\partial z}\right)^2 + m^2 u_t^2 \right] d\tau + h \int_{(S)} u_t^2\, ds, \\ W_{2t} &= \int_{(D)} \left(\frac{\partial u_{t+1}}{\partial x} \frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial u_{t+1}}{\partial y} \frac{\partial u_t}{\partial y} + \frac{\partial u_{t+1}}{\partial z} \frac{\partial u_t}{\partial z} + m^2 u_{t+1} u_t \right) d\tau \\ &\quad + h \int_{(S)} u_{t+1} u_t\, ds. \end{aligned} \right.$$

La première des équations précédentes nous montre que les W_p d'indice impair sont tous positifs, et comme il en est évidemment ainsi des W_p lorsque p est pair, on voit que les W_p sont tous *positifs*. Une généralisation facile de l'inégalité (51) permet de déduire des équations (77) les inégalités suivantes :

$$W_{2t}^2 < W_{2t+1} W_{2t-1} \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{78}$$

On déduit encore de la première des équations (77), en se rappelant que l'on a

$$W_{2t} = \int_{(D)} u_t^2 \, d\tau,$$

l'inégalité

$$W_{2t-1} < m^2 W_{2t}, \tag{79}$$

Il résulte des inégalités (76), (78) et (79) que la suite

$$\frac{W_{-1}}{W_{-2}}, \quad \frac{W_0}{W_{-1}}, \quad \frac{W_1}{W_0}, \quad \ldots \tag{80}$$

sera croissante et convergente et que la limite $\frac{1}{R}$ de cette suite sera au plus égale à $\frac{1}{m^2}$.

Le théorème exprimé par l'équation (60) nous donne

$$u_0 = \int_{(D)} f G \, d\tau,$$
$$u_j = \int_{(D)} u_{j-1} G \, d\tau \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

d'où, en s'appuyant sur l'inégalité (51) et en se reportant à l'équation (45),

$$|u_j|^2 < 1 W_{2j-2} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{81}$$

Il est aisé de conclure de là que le rayon de convergence de la série (68) est au moins égal à R en désignant, comme tout à l'heure, par $\frac{1}{R}$ la limite de la suite (80). D'ailleurs, on s'assurera très aisément que le rayon de convergence de la série (68) ne peut être plus grand que R. Il résulte de tout cela que le rayon de convergence de la série (68) est précisément égal à R.

Je dis que la somme u de la série (68) admet des dérivées premières par rapport aux variables x, y, z pourvu que le module de ζ soit inférieur au rayon du cercle de convergence de la série. En effet, dans les conditions où nous nous sommes placés, il est permis d'appliquer le théorème exprimé par l'inégalité (67); ce théorème nous donne, en tenant compte de l'inégalité (81) après y avoir changé j en $j-1$,

$$|\mathrm{D}u_j| < \mathrm{B}'\sqrt{\mathrm{IW}_{2j-4}},$$

où $\mathrm{D}u_j$ représente la dérivée première de u_j par rapport à l'une quelconque des variables x, y, z. L'inégalité précédente prouve que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{i=0}^{\infty}\zeta^j \mathrm{D}u_j$$

est égal à celui de la série (68) et cela démontre l'exactitude de notre assertion.

La proposition que nous venons de démontrer permet d'affirmer en s'appuyant sur les équations (70) que la fonction u, somme de la série (68), satisfera à la condition aux limites

$$\frac{du}{d\mathrm{N}} = hu.$$

Reste à démontrer que la fonction u satisfera à l'équation (1) dans toute l'étendue du domaine (D). Considérons, pour nous assurer qu'il en est ainsi, une fonction $\varphi(x, y, z)$ satisfaisant aux équations suivantes

$$\Delta\varphi + \xi\varphi + \zeta u + f = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{d\mathrm{N}} = h\varphi.$$

Cette fonction existera et pourra être calculée par la méthode exposée au numéro précédent, car ξ a, par hypothèse, une valeur qui rend possible l'application de la méthode et la fonction $\zeta u + f$ admettra, d'après ce que nous venons de voir, des dérivées premières par rapport aux variables x, y, z.

Dès lors nous aurons

$$\varphi = \int_{(D)} (\zeta u + f)\,G\,d\tau;$$

or il résulte de la façon même dont les fonctions $u_0, u_1, u_2, \ldots$ ont été calculées que l'on aura

$$u = \int_{(D)} (\zeta u + f)\,G\,d\tau;$$

on aura donc

$$\varphi = u,$$

ce qui achève de prouver que la fonction u jouira de toutes les propriétés voulues pourvu que le module de ζ soit inférieur au rayon de convergence de la série (68).

10. On établira sans aucune difficulté, en s'appuyant sur les résultats démontrés au numéro précédent et en se laissant guider par les paragraphes IV et V du beau Mémoire de M. Poincaré *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894) les théorèmes suivants :

La constante h ayant une valeur donnée réelle et non négative, la fonction u définie par les équations (1) *et* (2), *considérée comme fonction du paramètre ξ sera une fonction méromorphe n'admettant que des pôles simples situés dans le plan de la variable complexe ξ sur l'axe des quantités réelles. Désignons par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ces pôles et par $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ les résidus correspondants. Ces résidus seront des fonctions des variables x, y, z satisfaisant dans toute l'étendue du domaine* (D) *aux équations*

$$\Delta\psi_j + \xi_j\psi_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

et remplissant les conditions aux limites

$$\frac{d\psi_j}{dN} = h\psi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

On prouvera ensuite, en continuant à suivre M. Poincaré, le théorème fondamental que voici :

Le domaine (D) *et la constante réelle et non négative h donnent lieu* *à une suite infinie de nombres réels non decroissants*

$$(82) \qquad k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots$$

à laquelle correspond terme à terme une suite infinie de fonctions

$$(83) \qquad U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots$$

satisfaisant aux équations

$$(84) \qquad \begin{cases} \Delta U_j + k_j U_j = 0, \\ \dfrac{dU_j}{dN} = h U_j, \\ \displaystyle\int_{(D)} U_j^2 \, d\tau = 1, \\ \displaystyle\int_{(D)} U_j U_{j'} \, d\tau = 0 \qquad (j \neq j'), \end{cases}$$

le nombre k_1 sera positif, sauf dans le cas où $h = 0$, cas où ce nombre est nul; il existera un nombre positif L *tel que l'on ait*

$$(85) \qquad k_j > L j^{\frac{2}{3}} \qquad (j = 2, 3, \ldots);$$

enfin, quelle que soit la fonction donnée $f(x, y, z)$, les pôles $\xi_1, \xi_2, \ldots$ de la fonction u définie par les équations (1) *et* (2) *feront partie de la suite* (82) *et chacun des résidus correspondants sera une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de fonctions prises dans la suite* (83).

J'ajoute que ce qui vient d'être dit au sujet de la fonction u implique seulement que la fonction $f(x, y, z)$ admet des dérivées premières finies et continues dans toute l'étendue du domaine (D), mais n'exige nullement que cette fonction soit réelle; elle peut être une fonction complexe de la forme $f_1(x, y, z) + i f_2(x, y, z)$, f_1 et f_2 représentant des fonctions réelles.

On n'aura pas manqué de remarquer que l'hypothèse que h soit une constante réelle et non négative n'est pas indispensable pour la démonstration des résultats principaux énoncés ci-dessus. Nous avons cru devoir adopter cette hypothèse parce que le cas où h serait négatif ne semble pas présenter un grand intérêt au point de vue des applications et parce que, d'autre part, l'hypothèse que nous avons faite au sujet de h nous a permis d'introduire quelques simplifications de détails.

Nous donnerons, avec M. Poincaré, le nom de *fonctions harmoniques* aux fonctions (83) et nous dirons que la suite (82) est la suite des nombres caractéristiques correspondants.

IV. — Décomposition de la fonction u en éléments simples.

11. Soit toujours u la fonction définie par les équations (1) et (2), $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ les pôles de cette fonction regardée comme fonction du paramètre ξ et $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ les résidus correspondants; soit en outre $p_0, p_1, \ldots$ une suite croissante de nombres entiers convenablement déterminés. Je me propose de démontrer que l'on aura

$$u = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=p_t+1}^{p_{t+1}} \frac{\psi_j}{\xi - \xi_j}. \tag{86}$$

Je vais, dans ce but, établir le lemme suivant :

Il est possible de définir dans le plan de la variable imaginaire ξ une suite infinie de contours fermés (C_1), (C_2), (C_3), … enveloppant chacun l'origine, tels que la distance de l'origine au contour (C_t) croisse indéfiniment en même temps que l'indice t et tels enfin que le module de l'intégrale curviligne

$$\int_{(C_t)} \frac{u\, d\xi}{\xi - \eta}, \tag{87}$$

où η représente un nombre complexe indépendant de la variable d'intégration, ait zéro pour limite lorsque l'indice t croît indéfiniment.

Reportons-nous à cet effet aux notations définies par les équations (3) et (4) et envisageons, dans le plan de la variable ξ, la courbe (C) lieu du point qui a ξ pour affixe lorsque ce paramètre varie de façon que l'équation suivante soit satisfaite

$$\frac{m^3}{a^4} = \gamma, \tag{88}$$

où γ représente une constante positive assez petite pour que l'inégalité

$$\frac{m^3}{a^4} \leqq \gamma \tag{89}$$

entraîne à la fois les deux inégalités (18) et (54). La courbe (C) partage le plan de la variable ξ en deux régions (R) et (R′). Soit (R) celle d'entre elles qui est caractérisée par l'inégalité (89).

Cela posé, je rappelle que les pôles ξ_1, ζ_2, ξ_3, ... font tous partie de la suite (82), et comme les termes de cette suite satisfont à l'inégalité (85), nous aurons *a fortiori*

$$\xi_j > \mathrm{L} j^{\frac{2}{3}}.$$

Il suit de là que l'on pourra former une suite infinie de nombres positifs croissants

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots, \tag{90}$$

tels que l'on ait

$$\xi_{p_t+1}^{\frac{3}{2}} - \xi_{p_t}^{\frac{3}{2}} > \mathrm{L}^{\frac{3}{2}} \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots),$$

d'où

$$\xi_{p_t+1} - \xi_{p_t} > \frac{\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2(\xi_{p_t+1} + \xi_{p_t})}}. \tag{91}$$

J'appelle K_t et K'_t les points de l'axe des quantités réelles dans le plan de la variable ξ qui ont ξ_{p_t} et ξ_{p_t+1} pour abscisses, et je mène par le point B_t, milieu du segment $\mathrm{K}_t\mathrm{K}'_t$, la parallèle à l'axe des ordonnées. Cette parallèle rencontrera la courbe (C), définie par l'équation (88) en deux points B''_t et B'_t; soit B'_t celui de ces points dont l'ordonnée est positive.

Décrivons dans le plan de la variable ξ, en prenant l'origine O des coordonnées pour centre, un arc de cercle limité par les points B'_t et B''_t et situé tout entier dans la région (R) du plan, caractérisée par l'inégalité (89); soit M_t le point d'intersection de cet arc de cercle avec l'axe des nombres réels. J'appelle (C_t) le contour $\mathrm{B}'_t\mathrm{M}_t\mathrm{B}''_t\mathrm{B}_t\mathrm{B}'_t$ et je dis que les contours (C_1), (C_2), ... ainsi définis jouissent de la propriété voulue.

12. Il résulte de la définition du nombre γ, second membre de l'équation (88) et de celle de la région (R), que lorsque le point qui a ξ pour affixe sera situé dans la région (R) ou sur sa frontière (C), l'inégalité (59) aura lieu. Par conséquent, la formule (60) nous donnera

$$|u|^2 < \mathrm{B}\frac{m^2}{a^3}\int_{(\mathrm{D})}|f|^2\,d\tau.$$

Il résulte de cette formule que le module de u a zéro pour limite lorsque le point qui a ξ pour affixe s'éloigne indéfiniment sans sortir de la région (R). Cela prouve que le module de l'intégrale curviligne

$$\int_{\overparen{\mathrm{B}'_t\mathrm{M}_t\mathrm{B}''_t}}\frac{u\,d\xi}{\xi-\eta}, \tag{92}$$

étendue à l'arc de cercle $\mathrm{B}'_t\mathrm{M}_t\mathrm{B}''_t$ a zéro pour limite lorsque l'indice t croît indéfiniment.

13. Il nous reste à démontrer que l'intégrale rectiligne

$$\int_{\overline{\mathrm{B}''_t\mathrm{B}_t\mathrm{B}'_t}}\frac{u\,d\xi}{\xi-\eta} \tag{92^a}$$

a zéro pour limite lorsque l'indice t croît indéfiniment. Pour cela, il suffira évidemment de faire voir qu'il en est ainsi de l'intégrale

$$\int_{\overline{\mathrm{B}_t\mathrm{B}'_t}}\frac{u\,d\xi}{\xi-\eta} = \mathfrak{z}^{(t)}. \tag{92^b}$$

Cherchons une limite supérieure du module de la fonction u lorsque le point qui a ξ pour affixe se trouve dans la région (R′) du plan. Pour y arriver, reportons-nous à la série (68). Au n° 9, nous n'avons établi la légitimité du développement représenté par cette série que dans le cas où le paramètre ξ, dans les formules (69), a une valeur réelle et négative assez grande en valeur absolue; nous avons supposé en outre que la fonction $f(x, y, z)$ est réelle. Mais les résultats établis au n° 10 nous permettent d'abandonner ces hypothèses : que la fonction $f(x, y, z)$ soit réelle ou complexe, la série (68) sera convergente, représentera la fonction u et son rayon de convergence sera égal à la distance du point qui a ξ pour affixe à celui des pôles de la fonction u qui en est le plus voisin. Cela posé, mettons en évidence les parties réelle et imaginaire de chacune des fonctions u_0, u_1, u_2, ... et de la fonction f en posant

$$f = f_1 + i f_2,$$
$$u_j = \mathrm{P}_j + i \mathrm{Q}_j.$$

Les équations (69) et (70) donneront, en tenant compte de la première des équations (3),

$$(93)\qquad \begin{cases} \Delta \mathrm{P}_0 + \alpha \mathrm{P}_0 - \beta \mathrm{Q}_0 + f_1 = 0, \\ \Delta \mathrm{Q}_0 + \alpha \mathrm{Q}_0 + \beta \mathrm{P} + f_2 = 0, \\ \Delta \mathrm{P}_j + \alpha \mathrm{P}_j - \beta \mathrm{Q}_j + \mathrm{P}_{j-1} = 0 \\ \Delta \mathrm{Q}_j + \alpha \mathrm{Q}_j + \beta \mathrm{P}_j + \mathrm{Q}_{j-1} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(94)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{P}_j}{d\mathrm{N}} = h \mathrm{P}_j \\ \dfrac{d\mathrm{Q}_j}{d\mathrm{N}} = h \mathrm{Q}_j \end{cases} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$(95)\qquad \begin{cases} \mathfrak{J}_{-1} = \displaystyle\int_{(\mathrm{D})} |f|^2 \, d\tau = \int_{(\mathrm{D})} (f_1^2 + f_2^2) \, d\tau, \\ \mathfrak{J}_j = \displaystyle\int_{(\mathrm{D})} |u_j|^2 \, d\tau = \int_{(\mathrm{D})} (\mathrm{P}_j^2 + \mathrm{Q}_j^2) \, d\tau \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Le théorème de Green nous donne, en tenant compte des équations (94),

$$\int_{(\mathrm{D})} (\mathrm{Q}_j \Delta \mathrm{P}_j - \mathrm{P}_j \Delta \mathrm{Q}_j) \, d\tau = 0,$$

$$\int_{(\mathrm{D})} (\mathrm{P}_{j-1} \Delta \mathrm{P}_j - \mathrm{P}_j \Delta \mathrm{P}_{j-1}) \, d\tau = 0,$$

$$\int_{(\mathrm{D})} (\mathrm{Q}_{j-1} \Delta \mathrm{Q}_j - \mathrm{Q}_{j-1} \Delta \mathrm{Q}_j) \, d\tau = 0,$$

d'où, à l'aide des équations (93),

$$\beta \mathfrak{I}_j = \int_{(D)} (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau, \tag{96}$$

$$\int_D P_{j-1}^2\, d\tau = \beta \int_{(D)} (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau + \int_{(D)} P_j P_{j-2}\, d\tau,$$

$$\int_D Q_{j-1}^2\, d\tau = \beta \int_{(D)} (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau + \int_{(D)} Q_j Q_{j-2}\, d\tau;$$

il vient, en ajoutant membre à membre les deux dernières équations,

$$\mathfrak{I}_{j-1} = \int_D [P_j (P_{j-2} - 2\beta Q_{j-1}) + Q_j (Q_{j-2} + 2\beta P_{j-1})]\, d\tau. \tag{97}$$

J'observe que les équations (96) et (97) restent exactes, même pour $j = 0$, pourvu que l'on convienne de remplacer P_{-1} et Q_{-1} par f_1 et f_2. Reportons-nous à l'inégalité (51), faisons $n = 2$ et posons

$$\varphi_1 = P_j, \qquad \varphi_2 = Q_j, \qquad \varphi'_1 = P_{j-2} - 2\beta Q_{j-1}, \qquad \varphi'_2 = Q_{j-2} + 2\beta P_{j-1},$$

l'équation (97) nous donnera

$$\mathfrak{I}_{j-1}^2 < \mathfrak{I}_j \left[\mathfrak{I}_{j-2} - 4\beta \int_{(D)} (Q_{j-1} P_{j-2} - Q_{j-2} P_{j-1})\, d\tau + 4\beta^2 \mathfrak{I}_{j-1} \right],$$

d'où, en changeant dans l'équation (96) j en $j-1$,

$$\mathfrak{I}_{j-1}^2 < \mathfrak{I}_j \mathfrak{I}_{j-2} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{98}$$

Faisons maintenant une seconde application de l'inégalité (51) pour $n = 2$ en posant

$$\varphi_1 = Q_j, \qquad \varphi_2 = P_j, \qquad \varphi'_1 = P_{j-1}, \qquad \varphi'_2 = -Q_{j-1};$$

l'équation (96) nous donnera

$$\beta^2 \mathfrak{I}_j^2 < \mathfrak{I}_j \mathfrak{I}_{j-1},$$

d'où

$$\beta^2 \mathfrak{I}_j < \mathfrak{I}_{j-1}. \tag{99}$$

Il résulte des inégalités (98) et (99) que la suite

$$(100)\qquad \frac{\mathfrak{I}_0}{\mathfrak{I}_{-1}},\quad \frac{\mathfrak{I}_1}{\mathfrak{I}_0},\quad \frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_1},\quad \ldots$$

sera croissante et convergente. Les équations

$$u_0 = \int_{(D)} f\,G\,d\tau,$$

$$u_j = \int_{(D)} u_{j-1}\,G\,d\tau$$

conduisent aux inégalités

$$|u_j|^2 < I\,\mathfrak{I}_{j-1},$$

d'où, en désignant par λ le module de ζ et en tenant compte de l'équation (68),

$$(101)\qquad |u| < I\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\sqrt{\mathfrak{I}_{j-1}}.$$

Cette inégalité prouve que le rayon de convergence l' de la série (68) est au moins égal au rayon de convergence l de la série

$$(102)\qquad \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\sqrt{\mathfrak{I}_{j-1}}.$$

Je dis que l'on a aussi

$$(103)\qquad l' \leqq l.$$

En effet, désignons par l'' une longueur satisfaisant à l'inégalité

$$(104)\qquad l'' < l',$$

mais d'ailleurs quelconque. Il résulte, de ce que le rayon de convergence de la série (68) est l', que l'on pourra trouver une certaine constante positive E telle que l'on ait

$$|u < \frac{E}{l''^j};$$

il existera donc aussi une constante E' telle que l'on ait

$$\mathfrak{z}_j < \frac{E'}{l''^{2j}};$$

donc le rayon de convergence de la série (102) sera au moins égal à l'', et l'on aura

$$l'' \leqq l. \tag{105}$$

On voit donc que l'inégalité (104) entraîne l'inégalité (105), si voisine de l' que soit la longueur l''.

Cela prouve que l'inégalité (103) aura lieu et nous pouvons, par conséquent, affirmer que l'on aura

$$l' = l. \tag{106}$$

D'ailleurs, $\frac{1}{l^2}$ n'est évidemment pas autre chose que la limite de la suite (100). Il est aisé de conclure de tout ce que nous avons dit et de l'inégalité (101) que l'on aura

$$|u| < \mathrm{I}\,\frac{\sqrt{\mathfrak{z}_{-1}}\,l}{l-\lambda}. \tag{107}$$

Désignons par $\xi^{(t)}$ l'affixe du point B'_t et, en nous reportant aux formules (3) et (4), désignons par α_t, β_t, m_t et a_t les valeurs que prennent les nombres α, β, m et a lorsque ξ reçoit la valeur $\xi^{(t)}$.

L'inégalité (107) nous donnera pour $\xi = \xi^{(t)}$, en tenant compte de l'inégalité (59),

$$|u| < \mathrm{B}\,\frac{m_t^2\, l_t}{a_t^3}\,\frac{\sqrt{\mathfrak{z}_{-1}}}{l_t-\lambda}, \tag{108}$$

où l_t représente la longueur $K_t B'_t$.

Faisons, dans l'intégrale (92^b), $\xi = \xi^{(t)} + \zeta = \xi^{(t)} + i\lambda$. Il viendra

$$\mathfrak{z}^{(t)} = -i\int_0^{\beta_t} \frac{u\,d\lambda}{\xi^{(t)} + i\lambda - \eta}.$$

On conclura facilement de cette formule en s'appuyant sur les inégalités (108) et (91), ainsi que sur l'équation

$$\frac{m_t^3}{a_t^4} = \gamma$$

qui résulte de ce que le point B'_t est situé sur la courbe définie par l'équation (88), que le module de l'intégrale $\mathfrak{J}^{(t)}$ tend vers zéro lorsque l'indice t croît indéfiniment. Par conséquent, l'intégrale curviligne (87) tend vers zéro lorsque l'indice t croît indéfiniment.

13. Voici le résultat qui découle immédiatement en vertu du théorème de Cauchy de la proposition que nous venons de démontrer : si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} F_0 &= \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\psi_j}{\eta - \xi_j}, \\ F_t &= \sum_{j=p_t+1}^{p_{t+1}} \frac{\psi_j}{\eta - \xi_j}, \end{aligned}\right. \tag{109}$$

la série

$$\sum_{t=0}^{\infty} F_t \tag{110}$$

sera convergente et aura u pour somme. Cela permet d'affirmer, en posant $p_0 = 0$, que la série

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=p_t+1}^{p_{t+1}} \frac{\psi_j}{\eta - \xi_j} \tag{111}$$

est convergente et qu'elle a pour somme la fonction u. Or cette série devient identique à la série (86) quand on y change η en ξ. Le théorème qu'il s'agissait d'établir est donc démontré.

V. — Sur le développement d'une fonction arbitraire suivant les fonctions harmoniques.

14. Conservons les notations des sections précédentes et rappelons que, d'après ce que nous avons vu à la fin du Chapitre III, chacun des pôles ξ_1, ξ_2, ... de la fonction u est égal à un ou à plusieurs des nombres de la suite (82).

Soit $\xi_{p_t} = k_{q_t}$. On aura alors $\xi_{p_t+1} \geqq k_{q_t+1}$, mais on peut supposer que dans tous les cas $\xi_{p_t+1} = k_{q_t+1}$ à condition de faire $\psi_{p_t+1} = 0$ dans le cas où en réalité cette hypothèse ne serait pas exacte. C'est ce que nous allons faire afin de simplifier le langage. Faisons encore la convention $q_0 = 0$.

Cela posé, supposons que la fonction $f(x, y, z)$ admette dans toute l'étendue du domaine (D) des dérivées secondes continues et qu'elle vérifie, en outre, la condition aux limites

$$\frac{df}{dN} = hf. \tag{112}$$

Je me propose de démontrer qu'il sera possible de déterminer des facteurs constants A_1, A_2, A_3, ... tels que la série

$$\sum_{t=0}^{\infty} V_t, \tag{113}$$

où l'on a posé

$$V_t = \sum_{j=q_t+1}^{q_{t+1}} A_j U_j \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots), \tag{114}$$

soit uniformément convergente dans toute l'étendue du domaine (D) et qu'elle ait $f(x, y, z)$ pour somme.

On verra, en lisant le paragraphe que M. Poincaré a consacré à la méthode de Cauchy dans son Mémoire déjà cité sur les équations de la Physique mathématique, qu'il suffira, pour démontrer le théorème énoncé, de montrer que l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_t)} u\,d\xi, \tag{115}$$

ou (C_t) représente le contour défini dans la section précédente, a $-f(x, y, z)$ pour limite lorsque l'indice t croît indéfiniment.

15. Supposons que le point qui, dans le plan de la variable ξ a ξ pour affixe, se trouve dans la région (R) du plan, définie par l'inégalité (89), nous aurons

$$u = \int_{(D)} f\,G\,d\tau,$$

d'où, au moyen d'une application facile du théorème de Green et en tenant compte de l'équation (112),

$$u = -\frac{f}{\xi} - \frac{1}{\xi}\int_{(D)} G\,\Delta f\,d\tau,$$

ce qui donne

$$|u\xi + f|^2 < I\int_{(D)} |\Delta f|^2\,d\tau.$$

Il résulte de cette inégalité et de l'inégalité (59) que le module de l'expression $u\xi + f$ tend uniformément vers zéro lorsque le module de ξ croît indéfiniment sans que le point qui a ξ pour affixe sorte de la région (R) du plan. Par conséquent, l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overbrace{B'_t M_t B''_t}} u\,d\zeta,$$

a $-f(x, y, z)$ pour limite lorsque l'indice t croît indéfiniment. Il ne nous reste donc à prouver que ceci : l'intégrale rectiligne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{B''_t B_t B'_t}} u\,d\xi \tag{116}$$

a zéro pour limite lorsque l'indice t croît indéfiniment. Pour cela, il n'y a qu'à montrer qu'il en est ainsi de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{B_t B'_t}} u\, d\xi. \tag{117}$$

Considérons, comme dans le Chapitre précédent, les équations (69) et (70) et posons

$$\varphi_j = \Delta u_j.$$

Il résulte des hypothèses faites au sujet de la fonction $f(x, y, z)$ que les fonctions φ_j vérifieront les équations

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi_0 + \xi\varphi_0 + \Delta f = 0, \\ &\Delta\varphi_j + \xi\varphi_j + \varphi_{j-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

et satisferont aux conditions aux limites

$$\frac{d\varphi_j}{dN} = h\varphi_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$\begin{aligned} L_{-1} &= \int_{(D)} |\Delta f|^2\, d\tau, \\ L_j &= \int_{(D)} |\varphi_j|^2\, d\tau \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

La suite

$$\frac{L_0}{L_{-1}},\quad \frac{L_1}{L_0},\quad \frac{L_2}{L_1},\quad \ldots \tag{118}$$

sera croissante et convergente pour des raisons tout à fait analogues à celles qui permettent d'affirmer qu'il en est ainsi de la suite (100). D'ailleurs, il est aisé de s'assurer que les deux suites ont, pour une même valeur de ξ, une même limite. Considérons les suites (100) et (118) pour $\xi = \xi^{(t)}$, $\xi^{(t)}$ étant, comme dans le Chapitre précédent, l'affixe du point B'_t. Leur limite commune sera alors égale à $\frac{1}{l_t^2}$ et nous aurons

$$(119) \qquad L_{j-1} < \frac{L_{-1}}{l_t^{2j}}.$$

Faisons dans les équations (69) $\xi = \xi^{(t)}$. D'après ce que nous avons vu au numéro précédent on pourra trouver une constante positive C telle que l'on ait

$$(120) \qquad |u_0| < \frac{C}{|\xi^{(t)}|} = \frac{C}{m_t^2}.$$

D'ailleurs, l'équation

$$u_j = \int_{(D)} u_{j-1} G \, d\tau$$

nous donne

$$u_j = -\frac{u_{j-1}}{\xi^{(t)}} - \frac{1}{\xi^{(t)}} \int_{D} G \, \Delta u_{j-1} \, d\tau,$$

ou bien, puisque nous avons posé $\varphi_{j-1} = \Delta u_{j-1}$,

$$u_j = -\frac{u_{j-1}}{\xi^{(t)}} - \frac{1}{\xi^{(t)}} \int_{(D)} \varphi_{j-1} G \, d\tau,$$

d'où

$$|\xi^{(t)} u_j + u_{j-1}|^2 < I L_{j-1}.$$

Cette inégalité permettra, en s'appuyant sur les inégalités (120), (119) et (59), d'estimer par excès les modules des coefficients u_0, u_1, u_2, ... dans la série (68).

On obtiendra donc aussi une limite supérieure du module de la fonction u et l'on verra avec la plus grande facilité que l'intégrale (117) et, par conséquent, l'intégrale (116) tendent vers zéro lorsque l'indice t croît indéfiniment.

Donc, la fonction $f(x, y, z)$ sera développable en une série de la forme (113).

Sachant que la série (113) est uniformément convergente, il est aisé de déterminer les coefficients A_1, A_2, ... qui entrent dans l'expression des fonctions V_0, V_1, V_2, ... On trouve, en tenant compte des équations (84),

$$A_j = \int_{(D)} f\, U_j\, d\tau \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

16. Je désire montrer en terminant que nous pouvons maintenant résoudre le problème traité au n° 6 en nous affranchissant des restrictions relatives aux valeurs du paramètre ξ. Changeons dans l'équation (35) ξ en $\xi + \eta$ et posons

$$w = w' + \eta w'',$$

nous n'aurons qu'à déterminer les fonctions w' et w'' de façon qu'elles vérifient les équations

$$\begin{aligned}
&\Delta w' + \xi w' = 0,\\
&\Delta w'' + (\xi + \eta) w'' + w' = 0,\\
&\frac{dw'}{dN} = h w' + \varpi,\\
&\frac{dw''}{dN} = h w'';
\end{aligned}$$

or, en choisissant convenablement ξ, nous pourrons calculer w' par la méthode exposée au n° 6. Quant à w'', sa détermination dépend du problème qui a fait l'objet de la section III.

La fonction w étant calculée comme nous venons de le dire, si, en changeant de notations, on écrit ξ à la place de $\xi + \eta$, on trouvera que w, considéré comme fonction de ξ, jouit de propriétés analogues à celles de la fonction u. Dans le cas particulier où $h = 0$, on trouvera que la fonction w admettra pour pôle l'origine des coordonnées dans le plan de la variable ξ sauf dans le cas où l'on aurait

$$\int_{(S)} \varpi\, ds = 0.$$

Il résulte de là que, pour qu'il soit possible de déterminer une fonction V vérifiant, dans toute l'étendue du domaine (D), l'équation de Laplace et remplissant, en outre, la condition aux limites

$$\frac{dV}{dN} = \varpi,$$

il est non seulement nécessaire, mais suffisant, que la condition

$$\int_{(S)} \varpi \, ds = 0$$

soit satisfaite.