Annales scientifiques de l’É.N.S.

H. Padé

Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d’introduction à la théorie des fractions continues algébriques

Annales scientifiques de l’É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 395-426

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__395_0>

MÉMOIRE

SUR LES

DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES

DE

LA FONCTION EXPONENTIELLE,

POUVANT SERVIR D'INTRODUCTION

A LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES,

PAR M. H. PADÉ.

INTRODUCTION.

En écrivant ce Mémoire, j'ai eu un double but : d'abord donner, avec les préliminaires indispensables, la démonstration du théorème sur la convergence des réduites de la fonction exponentielle, que j'ai fait connaître dans une Note présentée par M. Appell à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 26 septembre 1898; ensuite présenter, sous une forme aisément accessible et avec les modifications assez profondes que m'ont suggérées de nouvelles réflexions, un ensemble des résultats que j'ai obtenus et publiés dans des Mémoires antérieurs, dont le premier, le plus important, a paru il y a déjà plus de neuf ans, et relatifs à la théorie des fractions continues algébriques.

Du premier point, je ne dirai rien, sinon que le théorème dont il s'agit donne un exemple simple et complet de ce que l'on peut s'attendre à rencontrer dans l'étude de cas plus difficiles, étude qui jettera, sans doute, un jour nouveau sur la question, devenue à l'ordre du jour, de la légitimité de l'emploi, dans le calcul, des séries divergentes.

Je voudrais, au contraire, insister ici davantage sur le second point, pour dégager, aussi complètement que possible, le sens que j'attribue maintenant à cette théorie des fractions continues algébriques dont, naguère encore, M. Poincaré disait qu'elle est une « sorte de *terra incognita* » dont « la carte est encore presque blanche (¹) » et dont je crois avoir maintenant aperçu l'ensemble.

La première notion à acquérir est celle des *fractions rationnelles approchées* ou *réduites* attachées à une série entière donnée. Ce sont des fractions rationnelles irréductibles spéciales $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$, formant une suite à double entrée, et dont chacune est parfaitement déterminée, par une certaine condition d'approximation, quand on fixe le couple de nombres entiers positifs ou nuls (μ, ν), ou le point du plan de coordonnées entières positives ou nulles, auquel elle doit correspondre. Cette loi de correspondance est univoque et réciproque dans le cas général; quand on sort de ce cas, elle demeure toujours réciproque, mais elle n'est plus nécessairement univoque : à une même fraction $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ peuvent correspondre plusieurs points du plan; ces points emplissent un carré dont les côtés sont parallèles aux axes.

On peut extraire de la suite à double entrée des réduites des suites à simple entrée ou *successions* donnant lieu à des lois de récurrence remarquables. Pour une telle succession,

$$A,\quad B,\quad C,\quad \ldots,\quad H,\quad K,\quad L,\quad \ldots,$$

les numérateurs et les dénominateurs de trois réduites H, K, L consécutives quelconques sont liés par des formules de la forme

$$\begin{aligned} \alpha U_{\mu,\nu} + a U_{\mu',\nu'} &= U_{\mu'',\nu''}, \\ \alpha V_{\mu,\nu} + a V_{\mu',\nu'} &= V_{\mu'',\nu''}, \end{aligned}$$

où α est un monome à coefficient et exposant différent de zéro, et a un polynome à terme constant différent de zéro. Dans le cas général, une telle succession s'obtient en prenant dans le plan des points successifs A, B, C, ..., simplement *contigus* et *progressants*, le premier A

(¹) *Journal de l'École Polytechnique*, 60ᵉ Cahier, p. 137-161; 1890. Notice sur Halphen.

demeurant arbitraire. En dehors de ce cas, le choix est plus compliqué et se déduit de la loi de correspondance entre les réduites et les points du plan.

Il y a, dans le cas général, trois *dispositions* de successions de points A, B, C, ..., qui donnent naissance à des lois de récurrence *régulières;* c'est-à-dire telles que α conserve toujours le même degré, ainsi que a, quelles que soient les trois réduites consécutives de la succession que l'on considère.

A chaque succession de fractions A, B, C, ..., correspond une fraction continue qui a ces fractions pour réduites et qui met en évidence les éléments α et a des formules de récurrence qui lient ces fractions.

Aux dispositions qui donnent, dans le cas général, les lois de récurrence régulières, correspondent des fractions continues régulières. A chacune des trois dispositions correspond une infinité de fractions continues régulières différentes, puisque la première fraction A de la succession demeure entièrement arbitraire.

C'est parmi ces fractions continues régulières que se trouvent toutes les fractions continues qui ont été données, antérieurement à mes recherches, pour diverses fonctions. Pour la fonction exponentielle, par exemple, de la triple infinité de celles qui existent, on en avait obtenu cinq; c'est la fonction pour laquelle on en avait obtenu le plus. Les deux fractions continues de Jacobi et Halphen, à propos desquelles M. Poincaré s'est exprimé comme je l'ai rapporté plus haut, sont deux des fractions continues régulières correspondant au radical développé $\sqrt{X}$, où X est un polynome de quatrième degré.

Ainsi les fractions continues antérieurement connues pour une fonction quelconque ne sont que des fractions, en très petit nombre et très spéciales, prises parmi les fractions continues régulières, en nombre infini, attachées à la fonction; celles-ci elles-mêmes ne sont que des cas particuliers de fractions continues plus générales obtenues en détachant des successions convenables de réduites de l'ensemble doublement infini des réduites de la fonction.

On aperçoit ainsi, je crois, sous un tout autre point de vue, ce que peut et doit être la théorie des fractions continues algébriques; on voit qu'elle est dominée par la notion de l'ensemble des fractions rationnelles approchées de la fonction; de plus près, par celle des fractions continues générales formées par des successions convenables de réduites; de plus près encore, par celle des successions qui donnent des fractions continues régulières; on voit que l'étude de la convergence d'une fraction continue spéciale, comme celle de Gauss, à laquelle se sont attachés M. Thomé et Riemann; comme celle de Jacobi, à laquelle s'est attaché Halphen; comme celles qu'a considérées Laguerre, n'est que l'étude de la convergence d'une succession spéciale de réduites et que, dès lors, cette question de la convergence se pose immédiatement pour la suite à double entrée des réduites considérée dans son ensemble.

De ces notions nouvelles, de cet enchaînement d'idées, je donne, dans les pages qui suivent, par la fonction exponentielle, un exemple simple et lumineux. Je me suis plus préoccupé de bien mettre en évidence les idées que je viens d'exposer, que d'entrer dans le détail de démonstrations faciles ou que l'on trouvera dans d'autres Mémoires. J'aurais pu ajouter aux résultats en donnant, par exemple, les équations différentielles des termes des réduites, les expressions des quotients complets qui terminent les fractions régulières, etc.; mais là n'était pas le but de ce travail et ces résultats trouveront leur place dans un nouveau Mémoire se rapportant à l'application à un cas autre que celui de la fonction exponentielle des idées fondamentales ici exposées.

Lille, le 21 mars 1899.

I. — Les réduites de la fonction exponentielle.

1. Étant donnés deux nombres μ, ν, égaux ou inégaux, pris dans la suite 0, 1, 2, 3, 4, ..., il existe une fraction rationnelle

$$\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$$

dont le dénominateur est de degré μ, le numérateur de degré ν, et dont le développement en série suivant les puissances ascendantes de x coïncide jusqu'au terme en $x^{\mu+\nu}$ inclusivement avec celui de e^x.

Parmi toutes les fractions dont les degrés des termes sont au plus égaux respectivement à μ et ν, la fraction $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ est la seule qui, pour les valeurs infiniment petites de x, représente e^x avec une aussi grande approximation; nous lui donnons le nom de *fraction rationnelle approchée,* ou, plus brièvement, et pour des raisons qui apparaîtront bientôt, de *réduite de* e^x *relative au couple* (μ, ν).

Par la démonstration que nous allons donner, non seulement nous établirons l'existence de la fraction, mais nous obtiendrons encore les expressions explicites de ses termes.

2. On sait que, $F(z)$ désignant un polynome de degré n, on a

$$\int e^{zx} F(z)\, dz = e^{zx}\left[\frac{F(z)}{x} - \frac{F'(z)}{x^2} + \ldots + (-1)^n \frac{F^{(n)}(z)}{x^{n+1}}\right].$$

Prenons b et a pour limites de l'intégrale, il vient

$$e^{ax}\left[\frac{F(a)}{x} - \frac{F'(a)}{x^2} + \ldots + (-1)^n \frac{F^{n}(a)}{x^{n+1}}\right] - e^{bx}\left[\frac{F(b)}{x} - \ldots + (-1)^n \frac{F^{(n)}(b)}{x^{n+1}}\right] = \int_b^a e^{zx} F(z)\, dz,$$

d'où, en multipliant les deux membres par x^{n+1},

$$\alpha e^{ax} - \beta e^{bx} = x^{n+1}\int_b^a e^{zx} F(z)\, dz, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= F(a)\, x^n - F'(a)\, x^{n-1} + \ldots + (-1)^n F^{(n)}(a), \\ \beta &= F(b)\, x^n - F'(b)\, x^{n-1} + \ldots + (-1)^n F^{(n)}(b). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Déterminons les coefficients de $F(z)$ de telle sorte que α et β soient respectivement de degrés μ et ν; il faut satisfaire aux $2n - \mu - \nu$ équations

$$\left\{\begin{array}{llll} F(a) = 0, & F'(a) = 0, & \ldots, & F^{(n-\mu-1)}(a) = 0, \\ F(b) = 0, & F'(b) = 0, & \ldots, & F^{(n-\nu-1)}(b) = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Le nombre des inconnues dont on peut disposer étant n, on doit avoir

$$(n - \mu) + (n - \nu) \leqq n \qquad \text{ou} \qquad n \leqq \mu + \nu.$$

Le polynome $F(z)$ sera déterminé, à un facteur constant près, si l'on prend $n = \mu + \nu$, et l'on peut remarquer qu'alors le développement, suivant les puissances croissantes de x, du second membre de la formule (1) commence par un terme en $x^{\mu+\nu+1}$.

Le polynome $F(z)$ de degré $n = \mu + \nu$ qui satisfait aux équations (3) est

$$F(z) = (z-a)^{n-\mu}(z-b)^{n-\nu} = (z-a)^{\nu}(z-b)^{\mu};$$

multipliant alors les deux membres des formules (1) et (2) par $(-1)^n = (-1)^{\mu+\nu}$, et désignant par A et B les produits $(-1)^{\mu+\nu}\alpha$, $(-1)^{\mu+\nu}\beta$, on a les relations

$$\text{(4)} \qquad A e^{ax} - B e^{bx} = (-1)^{\mu+\nu} x^{\mu+\nu+1} \int_b^a e^{zx}(z-a)^{\nu}(z-b)^{\mu}\,dz,$$

$$A = F^{(\mu+\nu)}(a) - F^{(\mu+\nu-1)}(a)\,x + \ldots + (-1)^{\mu} F^{(\nu)}(a)\,x^{\mu},$$
$$B = F^{(\mu+\nu)}(b) - F^{(\mu+\nu-1)}(b)\,x + \ldots + (-1)^{\nu} F^{(\mu)}(b)\,x^{\nu}.$$

Les expressions explicites des coefficients de A et B se déduisent aisément des coefficients des développements de $F(z)$ suivant les puissances, soit de $z-a$, soit de $z-b$; les termes constants sont égaux à $(\mu+\nu)!$.

3. Faisons dans les formules précédentes $a = 1$ et $b = 0$, ce qui donne

$$F(z) = (z-1)^{\nu} z^{\mu};$$

désignons par $(\mu+\nu)!\,V_{\mu\nu}$ et $(\mu+\nu)!\,U_{\mu\nu}$ ce que deviennent alors les polynomes A et B; nous avons les formules suivantes

$$\text{(5)} \quad \left\{ \begin{aligned} & V_{\mu\nu} e^{x} - U_{\mu\nu} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{(\mu+\nu)!} x^{\mu+\nu+1} \int_0^1 e^{zx} z^{\mu}(z-1)^{\nu}\,dz, \\ & V_{\mu\nu} = 1 - \frac{\mu}{\mu+\nu}\frac{x}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}\frac{x^2}{1.2} - \ldots \\ & \qquad + (-1)^{\mu} \frac{\mu(\mu-1)\ldots 2.1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots(\nu+2)(\nu+1)}\frac{x^{\mu}}{\mu!}, \\ & U_{\mu\nu} = 1 + \frac{\nu}{\mu+\nu}\frac{x}{1} + \frac{\nu(\nu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}\frac{x^2}{1.2} + \ldots \\ & \qquad + \frac{\nu(\nu-1)\ldots 2.1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots(\mu-2)(\mu+1)}\frac{x^{\nu}}{\nu!}. \end{aligned} \right.$$

La fraction $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ *est la réduite de* e^x *relative au couple* (μ, ν).

En effet, d'abord ses termes sont de degrés μ et ν; la première des formules (5) montre ensuite que, pour x infiniment petit, la différence $e^x - \frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ est infiniment petite d'ordre $\mu + \nu + 1$, ce qui équivaut à dire que le développement de la fraction suivant les puissances ascendantes de x coïncide avec celui de e^x jusqu'au terme de degré $\mu + \nu$ inclusivement; enfin, nous allons montrer que, si une fraction rationnelle irréductible $\frac{U}{V}$ possède cette dernière propriété, les degrés de V et U étant au plus égaux à μ et ν, cette fraction est identique à $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$.

4. Mais d'abord nous devons faire voir que *les polynomes* $U_{\mu\nu}$, $V_{\mu\nu}$ *sont premiers entre eux*.

Pour cela nous aurons recours aux polynomes analogues $U_{\mu+1,\nu+1}$, $V_{\mu+1,\nu+1}$ relatifs au couple $(\mu+1, \nu+1)$. Pour ces polynomes, la différence

$$V_{\mu+1,\nu+1}\, e^x - U_{\mu+1,\nu+1}$$

est infiniment petite d'ordre

$$(\mu+1) + (\nu+1) + 1 = \mu + \nu + 3.$$

Considérons alors la différence

$$V_{\mu\nu} U_{\mu+1,\nu+1} - U_{\mu\nu} V_{\mu+1,\nu+1};$$

c'est un polynome de degré égal à $\mu + \nu + 1$; mais elle est identique à

$$V_{\mu+1,\nu+1}[V_{\mu\nu} e^x - U_{\mu\nu}] - V_{\mu\nu}[V_{\mu+1,\nu+1} e^x - U_{\mu+1,\nu+1}],$$

et les ordres infinitésimaux, $\mu + \nu + 1$, $\mu + \nu + 3$, des quantités entre crochets montrent qu'elle est infiniment petite d'ordre $\mu + \nu + 1$, le terme principal étant, au signe près, le même que celui de $V_{\mu\nu} e^x - U_{\mu\nu}$; elle se réduit donc à un monome de degré $\mu + \nu + 1$, et l'on a identiquement, en désignant par h une constante différente de zéro,

$$V_{\mu\nu} U_{\mu+1,\nu+1} - U_{\mu\nu} V_{\mu+1,\nu+1} = h x^{\mu+\nu+1}.$$

De là résulte bien que $V_{\mu,\nu}$ et $U_{\mu,\nu}$ sont premiers entre eux, puisqu'ils ne sauraient admettre d'autre diviseur commun qu'une puissance de x, et que tous deux ont un terme constant égal à l'unité.

5. Revenons maintenant à la démonstration de l'identité des fractions $\frac{U}{V}$ et $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$.

L'expression

$$\left(e^x - \frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}\right) - \left(e^x - \frac{U}{V}\right) = \frac{U}{V} - \frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}} = \frac{UV_{\mu,\nu} - VU_{\mu,\nu}}{VV_{\mu,\nu}},$$

différence de deux infiniment petits dont le premier est d'ordre $\mu + \nu + 1$, et le second d'ordre au moins égal, est infiniment petite de cet ordre au moins. Le polynome $UV_{\mu,\nu} - VU_{\mu,\nu}$, étant de degré $\mu + \nu$ au plus, doit donc être identiquement nul, d'où se déduit, puisque les fractions $\frac{U}{V}$ et $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ sont toutes deux irréductibles, que U et V ne peuvent être que les produits, par une même constante, de $U_{\mu,\nu}$ et $V_{\mu,\nu}$; c'est ce qu'il restait à démontrer pour établir que $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ est bien la réduite (μ, ν) de e^x.

6. Il résulte de cette étude que les réduites de e^x forment une suite à double entrée dont les termes correspondent, d'une manière univoque et réciproque, à tous les couples (μ, ν) de nombres égaux ou inégaux pris dans la suite $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

A ces couples de nombres correspond, dans un plan rapporté à deux axes Ox et Oy rectilignes rectangulaires, l'ensemble des points de coordonnées entières positives ou nulles; nous regarderons chaque réduite (μ, ν) comme correspondant au point de coordonnées μ, ν. Les points $(0, \nu)$, situés sur l'axe des y, correspondent alors aux polynomes successifs

$$1, \quad 1 + \frac{x}{1}, \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2}, \quad \ldots,$$

approchés de e^x.

Cette représentation joue un rôle important dans ce qui suit. Les points (μ, ν) sont placés sur un système de droites parallèles à la droite $x+y=0$; si l'on numérote ces droites à partir de celle qui passe par l'origine, en donnant à celle-ci le numéro 0, et aux suivantes, dans l'ordre où elles se présentent successivement, les numéros 1, 2, 3, ..., la droite dont le numéro est k contient les points représentatifs des réduites qui donnent l'approximation $k+1$ et ne contient que ces points; ce sont les *droites d'égale approximation*.

Une réduite sera dite *plus avancée* qu'une autre quand l'approximation qu'elle donne sera plus grande; son point représentatif est alors sur une droite d'égale approximation plus éloignée de l'origine; nous le dirons aussi *plus avancé* que le point représentatif de l'autre réduite.

II. — Les formules de récurrence.

A. — Les algorithmes généraux.

7. Les termes des réduites peuvent se calculer de proche en proche par des formules de récurrence que nous allons maintenant faire connaître.

Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer (n° 4) que le déterminant formé par les termes des deux réduites relatives aux couples (μ, ν), $(\mu+1, \nu+1)$ se réduisait à un monome. Considérons plus généralement celles qui correspondent aux couples (μ, ν), (μ', ν') et évaluons les degrés extrêmes du déterminant

$$\Delta = V_{\mu\nu} U_{\mu'\nu'} - U_{\mu\nu} V_{\mu'\nu'}.$$

Le degré du terme de plus haut degré est égal au plus grand des deux nombres $\mu+\nu'$, $\nu+\mu'$, si ces nombres sont inégaux; égal ou inférieur à ces nombres, s'ils sont égaux.

Pour évaluer le degré du terme de moindre degré, nous mettrons Δ sous la forme

$$V_{\mu'\nu'}(V_{\mu\nu} e^x - U_{\mu\nu}) - V_{\mu\nu}(V_{\mu'\nu'} e^x - U_{\mu'\nu'});$$

les développements en séries entières des quantités entre parenthèses commencent par des termes en $x^{\mu+\nu+1}$ et $x^{\mu'+\nu'+1}$; donc le degré du terme de moindre degré sera égal au plus petit des nombres $\mu+\nu+1$, $\mu'+\nu'+1$, si ces nombres sont inégaux; égal ou supérieur à ces nombres, s'ils sont égaux. En particulier, si la réduite (μ', ν') est plus avancée que la réduite (μ, ν), le terme de moindre degré est de degré $\mu+\nu+1$, car alors $\mu+\nu+1$ est plus petit que $\mu'+\nu'+1$; c'est ce qui a lieu dans les hypothèses suivantes.

Supposons que le couple (μ', ν') soit l'un des trois couples

$$(\mu+1, \nu), \quad (\mu, \nu+1), \quad (\mu+1, \nu+1).$$

Le degré du terme de moindre degré de Δ est $\mu+\nu+1$; c'est aussi évidemment le degré du terme de plus grand degré pour chacun des deux premiers couples, car alors les nombres $\mu+\nu'$, $\mu'+\nu$ sont inégaux et le plus grand est égal à $\mu+\nu+1$; c'est enfin encore le cas pour le troisième couple, comme nous l'avons établi directement (n° 4); donc

Le déterminant $\Delta = V_{\mu\nu}U_{\mu'\nu'} - U_{\mu\nu}V_{\mu'\nu'}$, *dans chacun des trois cas où le couple* (μ', ν') *est l'un des couples*

$$(\mu+1, \nu), \quad (\mu, \nu+1), \quad (\mu+1, \nu+1), \tag{6}$$

se réduit à un monome de la forme $hx^{\mu+\nu+1}$, *où* h *est une constante différente de zéro.*

Remarquons que rien ne prouve que ce soient là les seuls couples (μ', ν') pour lesquels Δ se réduise à un monome.

8. Considérons maintenant trois réduites correspondant aux trois couples (μ, ν), (μ', ν'), (μ'', ν'') et posons

$$\begin{cases} \alpha V_{\mu\nu} + a V_{\mu'\nu'} = V_{\mu''\nu''}, \\ \alpha U_{\mu\nu} + a U_{\mu'\nu'} = U_{\mu''\nu''}; \end{cases} \tag{7}$$

on déduit de là

$$\alpha = \frac{V_{\mu''\nu''}U_{\mu'\nu'} - U_{\mu''\nu''}V_{\mu'\nu'}}{V_{\mu\nu}U_{\mu'\nu'} - U_{\mu\nu}V_{\mu'\nu'}}, \qquad a = \frac{V_{\mu\nu}U_{\mu''\nu''} - U_{\mu\nu}V_{\mu''\nu''}}{V_{\mu\nu}U_{\mu'\nu'} - U_{\mu\nu}V_{\mu'\nu'}},$$

en sorte que, dans le cas général, α et a sont des fractions rationnelles. Mais supposons que (μ', ν') soit l'un des trois couples (6), et que la réduite (μ'', ν'') soit plus avancée que la réduite (μ, ν): alors le dénominateur Δ se réduit à un monome $hx^{\mu+\nu+1}$ et les deux numérateurs à des polynomes dont le degré le moins élevé est *supérieur* à $\mu+\nu+1$ pour le premier, *égal* à $\mu+\nu+1$ pour le second; α et a sont alors des polynomes dont le premier s'annule avec x, tandis que le second a un terme constant différent de zéro.

Si le couple (μ'', ν'') est lui-même l'un des trois couples

$$(\mu'+1, \nu'), \quad (\mu', \nu'+1), \quad (\mu'+1, \nu'+1),$$

le numérateur de α se réduit lui-même à un monome de degré égal à $\mu'+\nu'+1$, et, par suite, α est un monome de degré

$$(\mu'+\nu'+1)-(\mu+\nu+1),$$

égal, par conséquent, à un ou à deux. Quant à a, il est un binome du premier degré ou une constante, puisque son degré ne peut surpasser les nombres

$$\begin{aligned} \nu+\mu''-(\mu+\nu+1) &= \mu''-\mu-1, \\ \mu+\nu''-(\mu+\nu+1) &= \nu''-\nu-1, \end{aligned}$$

et que les différences $\mu''-\mu$, $\nu''-\nu$ sont au plus égales à deux.

9. La position du point représentatif (μ', ν') d'une réduite *relativement* à celui (μ, ν) d'une autre réduite est caractérisée par les deux différences $\mu'-\mu$, $\nu'-\nu$ des coordonnées. Dire que le couple (μ', ν') est l'un des trois couples (6), c'est dire que la position relative du point représentatif correspondant, par rapport au point (μ, ν), est caractérisée par l'un des trois couples de différences

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (1,1). \tag{8}$$

Considérons alors trois points H, K, L, tels que la position relative de K par rapport à H, aussi bien que la position relative de L par rapport à K, soient caractérisées par l'un de ces trois couples; les réduites correspondantes que, pour abréger, nous appellerons aussi H, K, L, satisfont à toutes les conditions supposées dans le dernier alinéa du numéro précédent; donc

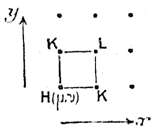
Les termes de trois réduites H, K, L, *dès qu'elles correspondent à trois points* H (μ, ν), K (μ', ν'), L (μ'', ν'') *tels que, le premier étant quelconque,* *la position relative de chacun des deux autres soit, par rapport au précédent, caractérisée par l'un des trois couples de différences* (8), *sont liés par les formules de récurrence* (7), *où* α *désigne un monome à coefficient et exposant différent de zéro, et* a *un polynome à terme constant différent de zéro.*

Les degrés de ces éléments α et a sont donnés avec précision, pour tous les cas qui peuvent se présenter, par les Tableaux suivants. Dans la première ligne sont donnés les degrés de α et de a; au-dessous, la première colonne, où figure o,o, indique la réduite H; les positions relatives des réduites suivantes K et L *par rapport à* H sont alors données par les couples de nombres de la seconde et de la troisième colonne; à chaque Tableau, enfin, est adjoint un schéma des positions dans le plan des points représentatifs H, K, L.

(9)

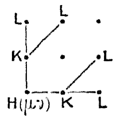
1,0.

$$0,0\left\{\begin{array}{l} 0,1\ \}\ 1,1 \\ 1,0\ \}\ 1,1 \end{array}\right.$$



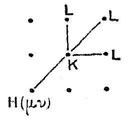
1,1.

$$0,0\left\{\begin{array}{l} 0,1\left\{\begin{array}{l}0,2\\1,2\end{array}\right. \\ 1,0\left\{\begin{array}{l}2,0\\2,1\end{array}\right. \end{array}\right.$$



2,1 (ou 0).

$$0,0\ \}\ 1,1\left\{\begin{array}{l}1,2\\2,1\\2,2\end{array}\right.$$



On voit, par le troisième Tableau, que le degré de a est égal à un ou à zéro : le seul cas où il soit égal à zéro est celui où H, K, L sont trois points placés sur la droite $x = y$.

10. Considérons une succession ou suite linéaire de points représentatifs A, B, C, ..., H, K, L, ..., tels que chacun d'eux ait, par rapport au précédent, une position relative définie par l'un des trois couples (8), ou, ce qui revient au même, tels que trois points consécutifs quelconques H, K, L affectent toujours dans le plan l'une des dispositions figurées dans les Tableaux précédents. La suite correspondante de réduites sera telle que l'on aura, entre les termes de trois réduites consécutives quelconques, des relations de récurrence de la nature de celles qui viennent d'être examinées. On conçoit dès lors que le calcul de l'une quelconque des réduites de cette suite puisse, en tenant compte de l'ordre de l'approximation qu'elle doit donner et des degrés, fixés par les Tableaux précédents, que doivent avoir les éléments α et a, se faire par un calcul de proche en proche en partant des deux premières réduites A, B de la succession. C'est un point sur lequel nous reviendrons plus loin (n° 12).

B. — Les algorithmes réguliers.

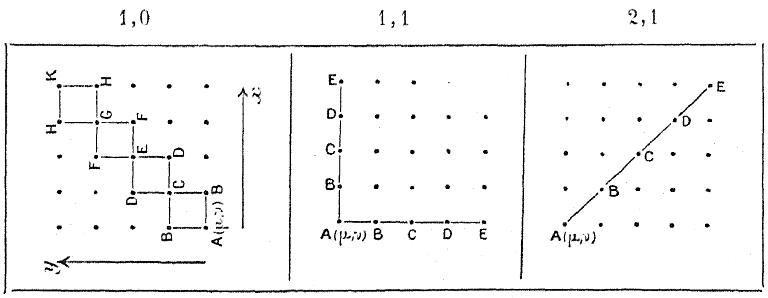
11. Nous disons que le calcul de proche en proche que nous venons d'indiquer est *régulier*, si les monomes α successifs ont le même degré, ainsi que les polynomes a.

D'après cela, *en se limitant à des successions de points représentatifs de la nature de celles considérées précédemment*, et en écartant le cas très spécial, signalé à la fin du n° 9, où trois des points consécutifs de la succession se trouveraient sur la bissextrice $x=y$, trois algorithmes réguliers sont seuls possibles; ils correspondent à des degrés de α et a égaux à 1 et 0 pour le premier, 1 et 1 pour le second, 2 et 1 pour le troisième.

On découvre sans peine, au moyen des Tableaux (9), comment doit être formée la succession des points représentatifs pour donner naissance à chacun de ces algorithmes.

Le premier s'obtient par une succession résultant d'accroissements égaux à l'unité, donnés alternativement aux coordonnées x, y; le se-

(10)



cond est obtenu pour une succession de points sur une parallèle à l'un des axes; enfin le troisième pour une succession de points sur une parallèle à la droite $x = y$. Ces résultats sont figurés dans les Tableaux ci-dessus (10) qui correspondent aux Tableaux (9).

On doit supposer, dans le troisième Tableau, μ différent de ν.

12. Nous ne nous arrêterons pas à examiner maintenant en détail comment, au moyen des résultats obtenus, l'on peut effectivement calculer les termes d'une réduite quelconque, par un calcul de proche en proche, en partant de deux réduites calculées *a priori*. Dans le cas actuel de la fonction exponentielle, un tel moyen n'offre, en effet, qu'un intérêt théorique, puisque l'expression générale de la réduite nous est connue. On pourra, sur ce sujet, se reporter à un Mémoire *Sur la généralisation des fractions continues algébriques*, IIe Partie, Chap. III (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, 1894).

III. — Les fractions continues.

A. — Les fractions continues générales.

13. Les successions de fractions A, B, C, ..., que nous avons introduites dans le Chapitre précédent (n° 10), sont formées par les réduites successives de certaines fractions continues à termes rationnels, et c'est à cette propriété des fractions $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ que se rattache le nom de *réduites* que nous leur avons attribué.

Les lois de récurrence (7) sont précisément celles qui expriment la *loi de formation* des réduites d'une fraction continue où les numérateurs partiels seraient égaux à α, et les dénominateurs partiels égaux à a. Si donc les deux premières réduites d'une fraction continue sont justement les fractions A et B, et que les numérateurs et dénominateurs partiels qui interviennent pour la formation des réduites suivantes soient les α et a relatifs au calcul de proche en proche des fractions C, D, ..., H, K, L, ..., en partant des deux fractions A, B, les réduites de la fraction continue seront justement les fractions A, B, C, ..., H, K, L, ...

En dehors de la partie de la fraction continue qui donne A et B, on voit que *tous les numérateurs partiels sont des monomes à coefficient et ex-*

posant différents de zéro, et les dénominateurs partiels des polynomes à terme constant différent de zéro. En raison du rôle considérable joué par ces fractions continues dans la théorie de l'approximation d'une fonction par des fractions rationnelles, je les distinguerai par une qualification spéciale dont l'origine sera expliquée plus loin (n° 24); je les appellerai des fractions continues *holoïdes*. D'après cette définition, on voit que :

A toute succession de points représentatifs A, B, C, ..., *de la nature de celles étudiées précédemment, correspond une fraction continue holoïde dont les réduites successives sont précisément les fractions* A, B, C, ..., *et qui met en évidence les éléments des formules de récurrence qui servent au calcul de proche en proche des fractions de cette suite.*

Selon que la suite de points représentatifs sera limitée ou illimitée, on aura une fraction continue correspondante limitée ou illimitée.

B. — Les fractions continues régulières.

14. Les plus élégantes de ces fractions continues sont données par les successions de points représentatifs qui conduisent aux algorithmes réguliers (n° 11). Elles ont tous leurs numérateurs partiels du même degré, ainsi que tous leurs dénominateurs partiels; et, selon les degrés de ces éléments, elles se rangent en trois catégories figurées par le Tableau suivant

	I	II	III
α	1	1	2
a	0	1	1

qui fait connaître les degrés des α et des a dans chacune d'elles.

Le calcul effectif des quantités α et a pour une fraction appartenant à l'une quelconque de ces trois catégories se fait au moyen des formules (7), par identification, après qu'on a remplacé les U et les V par leurs expressions (5). Avant de transcrire ici les résultats du calcul, nous devons, pour arriver à donner aux fractions continues leur plus parfait caractère de régularité, faire encore quelques remarques.

15. On peut faire usage de deux formes différentes de fractions continues, à savoir :

$$(\mathrm{I}) \qquad a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \cfrac{\alpha_4}{a_4 + \ldots}}},$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \ldots}}}$$

Si nous désignons par $U_{\mu\nu}$ et $V_{\mu\nu}$ les deux termes de la première réduite A, par $U_{\mu'\nu'}$ et $V_{\mu'\nu'}$ ceux de la seconde B et que l'on fasse usage de la forme (I), on aura

$$a_1 = \frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}, \qquad \alpha_2 = \frac{V_{\mu\nu} U_{\mu'\nu'} - U_{\mu\nu} V_{\mu'\nu'}}{V_{\mu\nu}}, \qquad a_2 = V_{\mu'\nu'}.$$

La fraction $\frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}}$ étant irréductible, le caractère général des éléments α et a dans les fractions continues holoïdes ne sera conservé pour les premiers éléments de la fraction que si $V_{\mu\nu}$ se réduit à une constante, ce qui exige que μ soit nul, et correspond à un point représentatif situé sur l'axe des y. Ainsi, quand la suite des points représentatifs A, B, C, ... commence par un point situé sur l'axe des y, c'est la forme (I) de fraction continue qu'il convient d'adopter pour que les éléments aient, dès les premiers, le caractère général des éléments d'une fraction continue holoïde.

En adoptant une fraction continue de la forme (II), on a

$$1 = U_{\mu\nu}, \qquad a_1 = V_{\mu\nu}, \qquad \alpha_2 = -\frac{V_{\mu\nu} U_{\mu'\nu'} - U_{\mu\nu} V_{\mu'\nu'}}{U_{\mu\nu}}, \qquad a_2 = \frac{U_{\mu'\nu'}}{U_{\mu\nu}}.$$

Elle convient particulièrement pour une succession de points A, B, C, ... dont le premier se trouve sur l'axe Ox; car alors $\nu = 0$, $U_{\mu\nu}$ se réduit à l'unité, et, dès les premiers éléments, la fraction continue a les caractères des fractions continues holoïdes. En résumé :

Les formes (I) *et* (II) *de fractions continues sont plus particulière-*

ment adaptées, au point de vue qui nous occupe de la plus parfaite régularité : la première, à une succession de points représentatifs dont le premier est sur l'axe des y; la seconde, à une succession de points représentatifs dont le premier est sur l'axe des x.

Nous parviendrons donc aux formules les plus parfaites en faisant commencer la suite régulière des points représentatifs par un point de l'axe des y ou des x, et en prenant alors, suivant le cas, une fraction continue de la forme (I) ou de la forme (II).

Il convient enfin encore de noter ce point de détail que, pour les fractions continues de la première catégorie, si l'on veut que les éléments a_2 soient, comme tous les dénominateurs partiels suivants, des constantes, il faut que les *deux* premiers points représentatifs soient, l'un et l'autre, ou sur l'axe des x, ou sur l'axe des y.

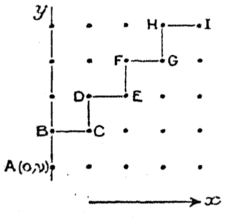
Les seules fractions continues, entièrement régulières, dès le début, sont celles de ces fractions qui partent de l'origine des coordonnées.

16. Voici maintenant le Tableau des fractions continues régulières. Nous avons annexé à chacune d'elles le schéma qui montre comment progressent dans le plan les points représentatifs de leurs réduites successives.

I. — *Fractions de la première catégorie.*

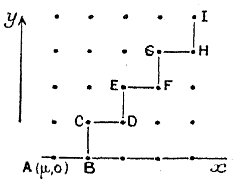
(α)

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\cfrac{\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}}{1-\cfrac{\frac{(\nu+1)x}{(\nu+1)(\nu+2)}}{1+\cfrac{\frac{x}{(\nu+2)(\nu+3)}}{1-\cfrac{\frac{(\nu+2)x}{(\nu+3)(\nu+4)}}{1+\cfrac{\frac{2x}{(\nu+4)(\nu+5)}}{1-\ldots}}}}}$$



$$(\nu=0,1,2,3,\ldots).$$

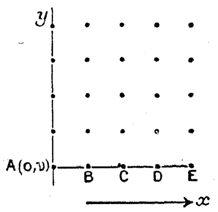
(β)
$$\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1}+\cfrac{x^2}{2!}-\ldots+\cfrac{(-1)^{\mu}x^{\mu}}{\mu!}+\cfrac{\cfrac{(-1)^{\mu+1}x^{\mu+1}}{(\mu+1)!}}{1+\cfrac{\cfrac{(\mu+1)x}{(\mu+1)(\mu+2)}}{1-\cfrac{\cfrac{x}{(\mu+2)(\mu+3)}}{1+\cfrac{\cfrac{(\mu+2)x}{(\mu+3)(\mu+4)}}{1-\cfrac{\cfrac{2x}{(\mu+4)(\mu+5)}}{1+\ldots}}}}}}$$



$$(\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

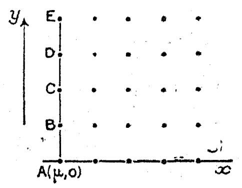
II. — *Fractions de la seconde catégorie.*

)
$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{\nu}}{\nu!}+\cfrac{\cfrac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}}{1-\cfrac{x}{\nu+1}+\cfrac{\cfrac{x}{(\nu+1)(\nu+2)}}{1-\cfrac{x}{\nu+2}+\cfrac{\cfrac{2x}{(\nu+2)(\nu+3)}}{1-\cfrac{x}{\nu+3}+\cfrac{\cfrac{3x}{(\nu+3)(\nu+4)}}{1-\cfrac{x}{\nu+4}+\ldots}}}}$$



$$(\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

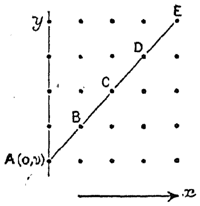
$$\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1}+\cfrac{x^2}{2!}-\ldots+\cfrac{(-1)^{\mu}x^{\mu}}{\mu!}+\cfrac{\cfrac{(-1)^{\mu+1}x^{\mu+1}}{(\mu+1)!}}{1+\cfrac{x}{\mu+1}-\cfrac{\cfrac{x}{(\mu+1)(\mu+2)}}{1+\cfrac{x}{\mu+2}-\cfrac{\cfrac{2x}{(\mu+2)(\mu+3)}}{1+\cfrac{x}{\mu+3}-\cfrac{\cfrac{3x}{(\mu+3)(\mu+4)}}{1+\cfrac{x}{\mu+4}-\ldots}}}}}$$



$$(\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

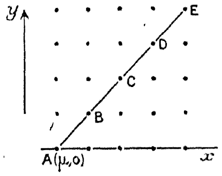
III. — *Fractions de la troisième catégorie.*

$$(\varepsilon)\qquad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\cfrac{\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}}{1-\frac{\nu x}{\nu(\nu+2)}+\cfrac{\frac{1(\nu+1)x^2}{(\nu+1)(\nu+2)^2(\nu+3)}}{1-\frac{\nu x}{(\nu+2)(\nu+4)}+\cfrac{\frac{2(\nu+2)x^2}{(\nu+3)(\nu+4)^2(\nu+5)}}{1-\frac{\nu x}{(\nu+4)(\nu+6)}+\cfrac{\frac{3(\nu+3)x^2}{(\nu+5)(\nu+6)^2(\nu+7)}}{1-\frac{\nu x}{(\nu+6)(\nu+8)}+\ldots}}}}$$



$$[\nu=(0), 1, 2, 3, 4, \ldots].$$

$$(\zeta)\qquad \cfrac{1}{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^\mu x^\mu}{\mu!}+\cfrac{\frac{(-1)^{\mu+1}x^{\mu+1}}{(\mu+1)!}}{1+\frac{\mu x}{\mu(\mu+2)}+\cfrac{\frac{1(\mu+1)x^2}{(\mu+1)(\mu+2)^2(\mu+3)}}{1+\frac{\mu x}{(\mu+2)(\mu+4)}+\cfrac{\frac{2(\mu+2)x^2}{(\mu+3)(\mu+4)^2(\mu+5)}}{1+\frac{\mu x}{(\mu+4)(\mu+6)}+\cfrac{\frac{3(\mu+3)x^2}{(\mu+5)(\mu+6)^2(\mu+7)}}{1+\frac{\mu x}{(\mu+6)(\mu+8)}+\ldots}}}}}$$



$$[\mu=(0), 1, 2, 3, 4, \ldots].$$

En faisant $\nu = 0$ dans (ε) et $\mu = 0$ dans (ζ), on obtient deux fractions continues régulières qui ne rentrent dans aucune des trois catégories précédentes. Ces deux fractions, qui ont les mêmes réduites, à savoir, celles qui correspondent aux points successifs de la bissectrice $x = y$, sont deux fractions exceptionnelles se rapportant aux cas exclus à la fin des n^{os} 9 et 11.

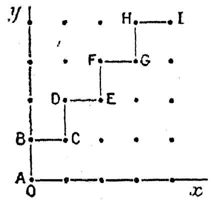
C. — Historique.

17. Le nombre des fractions continues obtenues avant que j'aie fait connaître les formules générales du Tableau précédent est extrêmement restreint, car on n'en peut compter que *cinq;* encore peut-on dire que la fonction e^x est sûrement la fonction pour laquelle ce nombre est le plus grand. Ces cinq fractions continues ont été données l'une

par Euler, une autre par Gauss et les trois dernières par Lagrange [1]; deux appartiennent à la première catégorie, une à la seconde et deux à la troisième. Quatre des successions de points correspondantes partent de l'origine des coordonnées, la cinquième part du point (0,1). Pour bien fixer le caractère de généralité des formules données antérieurement, nous reproduirons ici ces cinq fractions continues, en indiquant pour chacune d'elles la succession correspondante des points représentatifs et le cas particulier des fractions du Tableau général auquel elle se rapporte.

I. — *Fractions de la première catégorie.*

$\nu = 0$ dans (α); Lagrange.



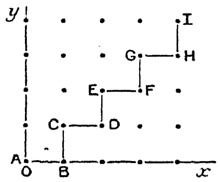
$$1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{5}\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{1}{5}\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{7}\frac{x}{2}}{1 - \ldots}}}}}}}$$

---

(1) Euler, *Introductio in Analysin infinitorum*, t. I, §§ 368-373. — Gauss, *Disquisitiones generales*, etc. (*Œuvres*, t. III, p. 123). — Lagrange, *Sur l'usage des fractions continues*, etc. (*Œuvres*, t. IV, p. 301).

$\mu = 0$ dans (β); GAUSS.

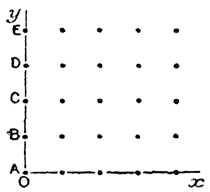
$$\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{3}x}{1-\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1-\cfrac{\frac{1}{10}x}{1+\cfrac{\frac{1}{10}x}{1-\dots}}}}}}}$$



II. — *Fraction de la seconde catégorie.*

$\mu = 0$ dans (δ); EULER.

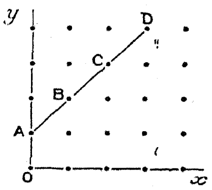
$$\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{x}{1}}{1+\frac{x}{1}-\cfrac{\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}-\cfrac{\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{3}-\cfrac{\frac{x}{4}}{1+\frac{x}{4}-\dots}}}}}$$



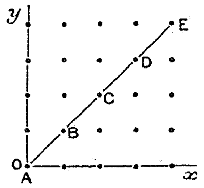
III. — *Fractions de la troisième catégorie.*

$\nu = 1$ dans (ε); LAGRANGE.

$$1+x+\cfrac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x}{1.3}+\cfrac{\frac{1}{9}\frac{x^2}{4}}{1-\frac{x}{3.5}+\cfrac{\frac{1}{25}\frac{x^2}{4}}{1-\frac{x}{5.7}+\cfrac{\frac{1}{49}\frac{x^2}{4}}{1-\frac{x}{7.9}+\dots}}}}$$



$\nu = 0$ dans (ε); LAGRANGE.



$$1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2} + \cfrac{\frac{1}{1.3}\frac{x^2}{4}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3.5}\frac{x^2}{4}}{1 + \cfrac{\frac{1}{5.7}\frac{x^2}{4}}{1 + \cfrac{\frac{1}{7.9}\frac{x^2}{4}}{1 + \ldots}}}}}$$

La dernière de ces fractions attire l'attention par ce fait qu'elle ne rentre pas effectivement dans la troisième catégorie, où les dénominateurs partiels doivent être du premier degré; mais c'est là un fait exceptionnel sur lequel nous avons déjà attiré l'attention (n° 16).

IV. — La convergence des réduites.

18. Le dénominateur $V_{\mu\nu}$ de la réduite (μ, ν) est (5)

$$V_{\mu\nu} = \sum_{h=0}^{h=\mu} (-1)^h \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-h+1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots(\mu+\nu-h+1)} \frac{x^h}{h!}.$$

L'identité

$$\frac{\mu - i}{\mu + \nu - i} = \frac{\mu}{\mu+\nu} - \frac{i\nu}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-i)}$$

montre que, si les deux entiers positifs μ et ν croissent indéfiniment, de telle sorte que le rapport $\frac{\nu}{\mu}$ tende vers une limite, nécessairement positive ou nulle, ω, la quantité $\frac{\mu-i}{\mu+\nu-i}$ tend vers $\frac{1}{\omega+1}$; le coefficient de $(-1)^h \frac{x^h}{h!}$ dans $V_{\mu\nu}$ tend vers $\frac{1}{(\omega+1)^h}$, et le $(h+1)^{\text{ième}}$ terme de $V_{\mu\nu}$ tend, par suite, vers

$$\frac{\left(-\frac{x}{\omega+1}\right)^h}{h!}.$$

En même temps, le nombre des termes de $V_{\mu,\nu}$ croît indéfiniment, et l'on peut ainsi présumer que $V_{\mu,\nu}$ tend vers une limite égale à la somme de la série

$$(\mathrm{S}) \qquad 1 - \frac{1}{1}\,\frac{x}{\omega+1} + \frac{1}{1.2}\,\frac{x^2}{(\omega+1)^2} - \frac{1}{1.2.3}\,\frac{x^3}{(\omega+1)^3} + \ldots,$$

c'est-à-dire à $e^{-\frac{x}{\omega+1}}$.

Pour établir cette proposition en toute rigueur, désignons par (a, b) un intervalle d'étendue finie, et par X un nombre positif plus grand à la fois que $|a|$ et $|b|$. Les valeurs absolues des termes de $V_{\mu,\nu}$ seront, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), inférieures aux termes de même rang de la série à termes positifs convergente

$$1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^3}{1.2.3} + \ldots;$$

si donc, ε étant un nombre positif quelconque, on choisit l'entier positif k de telle sorte que la somme de la série

$$\frac{X^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{X^{k+2}}{(k+2)!} + \ldots$$

soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{3}$, la somme, que nous désignerons par r_k, des termes du polynome $V_{\mu,\nu}$ qui suivent le terme en x^k aura un module inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$; de même aussi le reste, R_k, de la série (S) limitée au terme en x^k.

Soient maintenant s_k et S_k les sommes des $k+1$ premiers termes de $V_{\mu,\nu}$ et de la série (S), en sorte que

$$V_{\mu,\nu} = s_k + r_k,$$
$$e^{-\frac{x}{\omega+1}} = S_k + R_k.$$

Les nombres μ, ν croissant indéfiniment de telle sorte que le rapport $\frac{\nu}{\mu}$ tende vers la limite ω, chaque terme de s_k tend vers le terme correspondant de S_k; le polynome s_k tend donc vers le polynome S_k, et l'on peut déterminer un nombre positif A tel que, pour tous les couples de valeurs attribuées à μ et ν pour lesquels on a $\mu > A$ et $\nu > A$, la différence $S_k - s_k$ soit, quel que soit x appartenant à l'intervalle (a, b), plus petite, en valeur absolue, que $\frac{\varepsilon}{3}$. Mais on a alors, pour ces valeurs de x,

$$\left| e^{-\frac{x}{\omega+1}} - V_{\mu\nu} \right| = | S_k + R_k - s_k - r_k | \leqq | S_k - s_k | + | R_k | + | r_k | < \varepsilon,$$

ce qui établit que $V_{\mu\nu}$ a une limite, et que cette limite est $e^{-\frac{x}{\omega+1}}$; en outre, $V_{\mu\nu}$ tend uniformément vers cette limite dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire puisque a et b sont arbitraires dans tout intervalle d'étendue finie.

La démonstration s'applique directement au cas où $\omega = 0$; elle s'étend aisément au cas où le rapport $\frac{\nu}{\mu}$ grandirait indéfiniment. Enfin, on peut encore supposer qu'un seul des deux nombres μ, ν croisse indéfiniment; la limite de $V_{\mu\nu}$ est alors e^{-x} ou 1, suivant que c'est le nombre μ ou le nombre ν qui croît seul indéfiniment, et ces limites sont encore données par l'expression $e^{-\frac{x}{\omega+1}}$, en y faisant ω nul et infini.

Nous avons ainsi cette proposition :

Quand on attribue à μ et ν une succession de couples de valeurs telles que :

1° *L'un au moins des nombres μ, ν croisse indéfiniment;*

2° *Le rapport $\frac{\nu}{\mu}$ tende vers une limite ω ou croisse indéfiniment,*

le dénominateur $V_{\mu\nu}$ de la réduite (μ, ν) de e^x tend, quel que soit x, vers une limite; cette limite est $e^{-\frac{x}{\omega+1}}$; dans tout intervalle d'étendue finie, $V_{\mu\nu}$ tend uniformément vers sa limite.

19. Tout ce que nous venons de dire relativement au dénominateur $V_{\mu\nu}$ pourrait être répété pour le numérateur $U_{\mu\nu}$ de la réduite. Mais les formules (5) montrent que $U_{\mu\nu}$ se déduit de $V_{\mu\nu}$ par l'échange des lettres μ et ν et le changement de x en $-x$; en sorte que l'on peut conclure immédiatement de l'étude faite sur $V_{\mu\nu}$ que la proposition

finale s'applique à $U_{\mu\nu}$ avec cette seule modification que la limite, au lieu d'être $e^{-\frac{x}{\omega+1}}$, est $e^{\frac{x}{\frac{1}{\omega}+1}}$ ou $e^{\frac{\omega x}{\omega+1}}$.

Le quotient des deux limites est

$$\lim \frac{U_{\mu\nu}}{V_{\mu\nu}} = \frac{e^{\frac{\omega x}{\omega+1}}}{e^{-\frac{x}{\omega+1}}} = e^x,$$

et ceci subsiste même pour ω infini. Ainsi, dans les conditions indiquées par l'énoncé du théorème précédent :

La réduite (μ, ν) *de* e^x *tend, quel que soit* x, *vers une limite; cette limite est* e^x, *et, dans tout intervalle d'étendue finie, la réduite tend uniformément vers sa limite.*

20. Le rapport $\frac{\nu}{\mu}$ est le coefficient angulaire de la droite qui va de l'origine au point représentatif de la réduite (μ, ν). Quand $\frac{\nu}{\mu}$ tend vers une limite ou grandit indéfiniment, cette droite tend vers une position limite, et la suite des points représentatifs détermine une direction asymptotique. Soient p, q les paramètres directeurs de cette direction asymptotique. On peut résumer les résultats obtenus dans cet énoncé :

Pour une succession de points représentatifs déterminant une direction asymptotique (p, q), *les suites des dénominateurs et des numérateurs des réduites convergent vers des limites*

$$e^{-\frac{px}{p+q}}, \quad e^{\frac{qx}{p+q}}$$

dont le quotient est e^x; *dans tout intervalle d'étendue finie, la convergence est uniforme.*

V. — Généralisation.

21. Les résultats que nous avons obtenus dans ce qui précède peuvent être étendus à d'autres fonctions que la fonction exponentielle; je vais indiquer sommairement les points principaux de cette généra-

lisation, en renvoyant, pour la démonstration, aux Mémoires suivants désignés dans ce qui suit, pour abréger, par les lettres A, B, C.

A. *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. IX, 1892).

B. *Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles* (*Acta mathematica*, t. XVIII, 1894).

C. *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. X, 1894).

22. Étant donnée une fonction $y = f(x)$, régulière dans le voisinage de l'origine, et un couple de nombres entiers positifs ou nuls, (μ, ν), il y a, parmi toutes les fractions rationnelles irréductibles dont le dénominateur est au plus de degré μ, et le numérateur au plus de degré ν, une fraction qui, dans le voisinage de l'origine, représente la fonction y plus exactement que toutes les autres; c'est-à-dire telle que la différence entre la fonction y et elle-même soit, pour x infiniment petit, un infiniment petit d'ordre plus grand que la différence entre la fonction y et toute autre des fractions considérées (A, n° 4 et suiv.). C'est cette fraction spéciale, parfaitement déterminée quand μ et ν sont donnés, que nous nommons la *réduite* (μ, ν) de la fonction y.

Dans le cas général, les termes de la réduite (μ, ν) sont de degrés égaux à μ et ν respectivement, et l'ordre infinitésimal de la différence entre la fonction et la réduite est $\mu + \nu + 1$; je dis, d'une telle réduite, qu'elle est *normale*. C'est ainsi que les choses se passent dans le cas de la fonction exponentielle, quel que soit le couple (μ, ν): *toutes les réduites de e^x sont normales*. Mais il n'en est pas toujours ainsi : les degrés des termes de la réduite (μ, ν) peuvent être inférieurs à μ et ν, et l'ordre de l'approximation fournie peut être différent de $\mu + \nu + 1$; cet ordre, néanmoins, est toujours *plus grand* que la somme des degrés des termes de la fraction, et c'est là une propriété *caractéristique* des réduites de la fonction y; c'est-à-dire que, *dès que la différence entre la fonction y et une fraction irréductible est un infiniment petit d'ordre supérieur à la somme des degrés des termes de la fraction, cette fraction est une des réduites de la fonction* (A, n° 17). Une telle fraction correspond alors à un ou plusieurs couples : à un seul, quand l'ordre de l'approximation ne surpasse que d'une unité la somme des degrés des termes, et la réduite est alors normale; à plusieurs dans le cas contraire; le nombre des couples auxquels elle correspond est toujours égal au *carré* de la différence entre l'ordre de l'approximation fournie et la somme des degrés des termes.

Quand toutes les réduites de la fonction sont normales, les notions de *point représentatif* (μ, ν) et de *droite d'égale approximation* subsistent sans modification comme dans le cas de la fonction exponentielle. Il n'en va pas de même quand des réduites de la fonction sont anormales, car, comme une telle réduite correspond à plusieurs couples (μ, ν), il n'est plus vrai que tous les points représentatifs qui se trouvent sur une même parallèle à la droite $x + y = 0$ correspondent à des réduites donnant la même approximation. Pour conserver à ces droites leur caractère de ne passer que par des points représentatifs correspondant à la même approximation, il faut supprimer du plan certains de ces points. Cette suppression dépend de la loi suivant laquelle sont répartis dans le plan les points qui correspondent à une même réduite anormale. Cette loi, qui est cependant des plus simples, n'a pu être établie jusqu'ici que par une discussion assez pénible; elle consiste en ce que *tous les points représentatifs qui correspondent à une même réduite anormale emplissent un carré dont les côtés sont parallèles aux axes* (A, n° 26. Exemples, n° 7).

La réduite anormale considérée donne une approximation qui correspond à la droite d'égale approximation contenant la diagonale du carré, en sorte que l'on ne doit laisser subsister que ceux des points représentatifs qui sont sur cette diagonale; tous les autres points du carré *doivent* être supprimés, car, pour ceux placés du côté de l'origine, l'approximation est plus grande qu'il ne convient pour la droite d'égale approximation qui les contient, tandis que pour les autres elle est trop petite. Quand il s'agit de la représentation par leurs points représentatifs de réduites qui peuvent être anormales, *il faut toujours supposer cette suppression effectuée.*

23. Nous disons que deux couples de nombres (μ, ν), (μ', ν') sont *contigus* quand ni l'une ni l'autre des différences $|\mu' - \mu|$, $|\nu' - \nu|$ n'excède l'unité.

Nous disons de deux réduites normales ou anormales qu'elles sont *contiguës* quand il y a deux couples (μ, ν), (μ', ν') auxquels elles correspondent et qui soient contigus; mais il faut remarquer que les points (μ, ν), (μ', ν') peuvent être parmi les points supprimés du plan.

Nous pouvons alors énoncer ce théorème général vrai, que les réduites soient toutes normales ou non (A, nos 54 et suiv.):

Les termes d'une succession de réduites contiguës et de plus en plus avancées A, B, C, ..., H, K, L, ... *sont liés par des relations de récurrence de la forme* (7), *où* α *désigne un monome à coefficient et exposant différents de zéro, et* a *un polynome à terme constant différent de zéro.*

On pourra, par conséquent, obtenir ces réduites en partant des deux premières A, B par un calcul de proche en proche.

D'ailleurs, *les suites de réduites dont il est question dans le théorème précédent sont,* GÉNÉRALEMENT, *les seules qui donnent naissance à des lois de récurrence de la forme indiquée;* mais il peut se présenter des cas où des suites d'une autre nature donnent naissance à des lois de récurrence de même forme. Ce cas peut se présenter, alors même que toutes les réduites seraient normales et, de fait, il se présente pour la fonction exponentielle : la suite des réduites non contiguës de cette fonction correspondant aux couples

$$(11) \qquad (n, n), \quad (n+2, n+2) \quad (n+4, n+4), \quad \ldots$$

donne lieu à un algorithme, d'ailleurs régulier, où les éléments α sont des monomes du quatrième degré et les éléments a des binomes du second degré. Si nous ne l'avons pas rencontré, parmi les algorithmes réguliers, dans notre étude de la fonction exponentielle, cela tient à l'exposition synthétique que nous avons suivie, en écartant systématiquement tous les cas exceptionnels (A, n° 68).

Supposons que toutes les réduites soient normales. On peut alors chercher à constituer la suite des points représentatifs, A, B, C, ..., H, K, L, ..., de telle sorte que le calcul de proche en proche des réduites correspondantes soit régulier, c'est-à-dire tel que les monomes α aient tous le même degré, ainsi que les polynomes a (A, n° 57).

Deux des trois catégories de successions examinées dans le cas de la fonction exponentielle (n° 11) et remplissant une telle condition existent toujours et nécessairement *dès que toutes les réduites sont normales;* ce sont celles où les monomes α sont du premier degré. Les successions de la troisième catégorie, celles où α est du second degré, ne donnent un calcul régulier que *dans le cas général;* mais il ne suffit pas que toutes les réduites soient normales pour que l'on puisse affirmer que toutes ces successions, ou une partie seulement d'entre elles, donnent un calcul régulier; et c'est ainsi que se range sous un point de vue plus général le fait spécial, rencontré dans le cas de la fonction exponentielle, d'une succession devant donner un calcul régulier rentrant dans la troisième catégorie et que nous avons été obligé d'exclure systématiquement de nos considérations (nos 9, 11 et 16).

Dans le cas général, il n'y a pas, en dehors des trois catégories de successions de points qui viennent d'être signalés, de succession donnant un calcul de proche en proche régulier. Ainsi, la succession de points (11) qui, pour la fonction exponentielle, donne un calcul régulier, est absolument exceptionnelle et tient cette propriété de la nature propre de la fonction.

24. Aux successions de réduites que nous venons de considérer correspondent des fractions continues dont les éléments mettent en évidence les lois de récurrence par lesquelles sont liés leurs termes. Tout ce que nous avons dit, relativement aux fractions continues générales, à propos de la fonction exponentielle (n° 13), s'applique au cas général.

Les fractions continues ainsi obtenues appartiennent à la catégorie des fractions continues holoïdes, et c'est ici le lieu d'expliquer l'origine de cette qualification (B, n° 10). La définition précise de ces fractions est la suivante :

Une fraction continue HOLOÏDE *est une fraction continue dont toutes les réduites sont des fractions rationnelles approchées d'une même fonction, et dont tous les éléments, à l'exception de ceux relatifs aux deux premières réduites, sont des monomes à coefficient et exposant différent de zéro pour les numérateurs, des polynomes à terme constant différent de zéro pour les dénominateurs.*

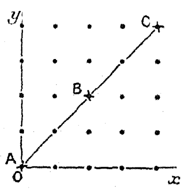
On démontre aisément que les réduites d'une telle fraction continue sont des fractions rationnelles irréductibles *de plus en plus* approchées de la fonction (A, n^{os} 43 et 56); et c'est là un caractère fondamental qu'elles ont en commun avec les *séries entières,* où les polynomes obtenus en limitant la série à ses termes successifs sont caractérisés par la condition d'être *de plus en plus* approchés de la fonction que représente la série.

Les théorèmes du numéro précédent peuvent être résumés alors dans cet énoncé :

Une succession de réduites contiguës et de plus en plus avancées donne naissance à une fraction continue holoïde, et, généralement, il n'y a que ces suites qui donnent naissance à une telle fraction.

Au cas où la fonction n'a que des réduites normales, les considérations développées à propos des fractions continues régulières (n° 14) sont applicables, et l'*on peut affirmer l'existence, dans le cas général, de trois catégories de fractions continues régulières.* Si l'on sait seulement, des réduites de la fonction, qu'elles sont toutes normales, sans plus, on ne peut affirmer que tout ou partie des fractions continues régulières de la troisième catégorie existent. Enfin, il peut y avoir d'autres fractions continues régulières correspondant aux cas exceptionnels signalés à la fin du numéro précédent; et je transcrirai ici, pour rendre complet le Tableau des fractions continues régulières relatives à l'exponentielle, les deux fractions régulières exceptionnelles qui s'y rapportent encore.

$$1+\cfrac{x}{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}-\cfrac{\dfrac{1}{1.3^2.5}\,\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{3.7}\,\dfrac{x^2}{2}-\cfrac{\dfrac{1}{5.7^2.9}\,\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{7.11}\,\dfrac{x^2}{2}-\cfrac{\dfrac{1}{9.11^2.13}\,\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{1}{11.15}\,\dfrac{x^2}{2}-\cdots}}}}$$



$$\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2}+\cfrac{x^2}{12}-\cfrac{\frac{1}{1.3^2.5}\frac{x^4}{4^2}}{1+\frac{1}{3.7}\frac{x^2}{2}-\cfrac{\frac{1}{5.7^2.9}\frac{x^4}{4^2}}{1+\frac{1}{7.11}\frac{x^2}{2}-\cfrac{\frac{1}{9.11^2.13}\frac{x^4}{4^2}}{1+\frac{1}{11.15}\frac{x^2}{2}-\dots}}}}}.$$

Les réduites de ces fractions très spéciales sont, comme l'indique le schéma unique qui s'y rapporte, celles qui correspondent aux couples

$$(0,0),\ (2,2),\ (4,4),\ \dots$$

25. Relativement à la convergence des réduites, et, plus spécialement, des fractions continues holoïdes qui correspondent à une fonction, je rappellerai que les travaux de M. Thomé et de Riemann sur la série hypergéométrique ont mis en évidence le fait, pour la fraction continue de Gauss, d'avoir un champ de convergence plus étendu que la série hypergéométrique. La fraction de Gauss n'étant qu'une fraction très particulière parmi toutes les fractions holoïdes attachées à la fonction hypergéométrique, on peut se demander par quel mécanisme se fait le passage de la divergence de la série à la convergence de la fraction continue, quand on considère une chaîne de fractions continues intermédiaires entre celle qui donne la série et la fraction de Gauss : c'est là une question intéressante où je suis occupé, et dont j'espère donner prochainement la solution.

Laguerre et Halphen ont montré qu'à une série convergente pouvait correspondre une fraction continue divergente. Si l'on rapproche ce fait de ce qui est relatif à la série hypergéométrique, et que l'on tienne compte de la notion maintenant acquise de la multiplicité des fractions continues holoïdes attachées à une fonction, on est amené à regarder ces faits comme des cas particuliers de cette proposition générale que, *parmi les fractions continues holoïdes qui correspondent à une fonction, les unes peuvent être convergentes, les autres divergentes.* De là peut se conclure une justification des règles élémentaires du calcul des séries pour le cas de séries divergentes (A, n° 59; B, n^{os} 6-8); mais la question appelle de nouvelles recherches.

26. Je terminerai en mentionnant l'extension que l'on peut faire de la théorie des fractions continues algébriques, ou mieux, des lois de récurrence analogues à celles que l'on considère dans cette théorie, au cas de plus de *deux* fonctions; car il est à remarquer que la recherche de la réduite (μ, ν) d'une fonction équivaut évidemment à la question suivante : étant données deux séries entières S et S', déterminer deux polynomes A et B, de degrés au plus égaux respectivement à μ et ν, tels que la quantité

$$AS + BS'$$

soit infiniment petite d'ordre au moins égal à $\mu + \nu + 1$. La formule (4) montre par quels polynomes est résolue la question quand S et S' sont deux exponentielles.

La généralisation consiste alors, étant données n séries entières $S_1, S_2, \ldots S_n$, à trouver n polynomes $A_1, A_2, \ldots A_n$, de degrés au plus égaux respectivement à $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$, tels que

$$A_1 S_1 + A_2 S_2 + \ldots + A_n S_n$$

soit infiniment petite d'ordre au moins égal à (C, II^e Partie).

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n + n - 1.$$

C'est à M. Hermite qu'est due cette notion de la généralisation de la théorie des fractions continues algébriques, et l'expression des polynomes A quand les séries S sont des exponentielles.