ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MÉRAY

Sur la théorie des intervalles binaires et des intégrales doubles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 193-238

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__193_0>

SUR LA

THÉORIE DES INTERVALLES BINAIRES

ET

DES INTÉGRALES DOUBLES,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. Quoique fort simples et sans grande nouveauté, les considérations suivantes me paraissent jeter une certaine lumière sur des points encore assez obscurs de la doctrine des fonctions de deux variables : elles précisent, dans un sens exclusivement analytique, les notions sur l'intérieur d'une aire, son extérieur, son signe même, sur les deux sens de parcours assignables à son contour, etc., que la Géométrie de situation laissait fort vagues; elles rapprochent tout à fait la conception des intégrales doubles de celle des intégrales définies simples (*Cf.* 227* *et suiv.*) (¹). Comme pour ces dernières déjà (*Cf.* 235*), il n'y a plus maintenant, quand il s'agit d'établir l'existence d'une intégrale double, à faire les frais d'un raisonnement spécial, dont la conclusion laisse ignorer tout moyen de calculer sa valeur (17, *inf.*); la démonstration de la règle à suivre pour transformer une intégrale double par un changement des variables devient d'une simplicité intuitive (19, *inf.*).

Le point de vue où je me place comporte essentiellement une sorte d'intégration indéfinie, par une paire de fonctions de deux variables, d'une seule fonction de cette sorte, donnée comme déterminant diffé-

(¹) Par des numéros affectés ainsi de un, deux, trois, quatre astérisques, je ferai ici des renvois aux diverses parties de mes *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (Paris, 1894-1898, Gauthier-Villars et fils).

rentiel de deux fonctions inconnues (17, 19, *inf.*), et aussi la collation au *triangle analytique*, parmi les *intervalles binaires* (7, *inf.*), d'un rôle primordial, ressemblant beaucoup à celui du segment rectiligne pour le cas d'une seule variable. Déjà un tel emploi du triangle avait été esquissé en quelques points de mon Ouvrage cité (108***), (35****). Je ne parle ici que de quantités réelles, en présumant toutefois qu'une extension aux quantités imaginaires n'offrirait pas de grandes difficultés.

Des choses analogues se passent dans les *mondes ternaire, quaternaire,* ... (espaces à 3, 4, ... dimensions); mais elles ne sont pas assez difficiles à apercevoir pour que j'aille ici au delà de cette allusion; j'y reviendrai peut-être.

2. Je suivrai un exemple donné mille fois, en facilitant et imageant le langage analytique par des locutions empruntées au vocabulaire de la Géométrie plane, dont les tracés, d'ailleurs, aideront beaucoup à l'intelligence de ce que je vais exposer.

Un *point analytique primaire, binaire, ternaire,* ... est l'ensemble x_1, ou (x_1, y_1), ou (x_1, y_1, z_1), ou ..., de valeurs particulières (ici réelles) attribuées arbitrairement à un système x, ou (x, y), ou (x, y, z), ou ... de 1, ou 2, ou 3, ou ... variables indépendantes conçues toujours dans le même ordre; ces quantités sont les *coordonnées* de ce point. Deux points *coïncident* ou sont *distincts,* selon que les ensembles de leurs coordonnées $(x_1, y_1, \ldots)$ et $(x_2, y_2, \ldots)$ sont composés, ou non, des mêmes quantités.

Une *figure* h^{aire} est un groupe de points h^{aires} (même en nombre illimité), aux coordonnées desquels telles ou telles conditions ont été imposées. Elle est *limitée,* quand on peut assigner une constante positive λ, au-dessous de laquelle se maintiennent numériquement sans cesse les différences des coordonnées homonymes de deux points quelconques de la figure; dans ce cas, on peut dire que les *h dimensions* de la figure sont toutes *inférieures* à λ. Dans le cas contraire, la figure est *illimitée*. Un point se *déplace* quand l'une au moins de ses coordonnées vient à changer de valeur.

3. Deux points primaires (2) x_1, x_2 délimitent un *intervalle* (pri-

maire) *franc*, dont ils sont les *extrémités*, qui est *vanescent* ou *invanescent*, selon que ces points coïncident ou non, selon, en d'autres termes, que le déterminant

$$\text{(1)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} (= x_2 - x_1)$$

est $= 0$ ou $\neq 0$. Si l'on ne distingue rien de plus, l'intervalle est *absolu*.

Mais si, comme nous le ferons presque toujours, on a égard à l'ordre dans lequel les deux points sont considérés (ordre indifférent dans le cas seulement où il y a vanescence), leur intervalle est *qualifié*. Les notations $\}x_1x_2\{$, $\}x_2x_1\{$ sont alors distinctes et correspondent aux deux *directions opposées* qui sont assignables à l'intervalle pour le faire cesser d'être absolu : la première *va de* x_1 *à* x_2, l'autre de x_2 à x_1.

Un point indéterminé x est *intérieur* à l'intervalle quand les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

sont d'un même signe (l'un d'eux $= 0$, à la rigueur), *extérieur* quand ils offrent des signes contraires.

La *mesure* de (l'intérieur de) l'intervalle $\}x_1x_2\{$ est, par définition, la valeur du déterminant (1). Elle est $= 0$, quand il y a vanescence; autrement, l'une des deux directions assignables à l'intervalle (supposé absolu auparavant) rend sa mesure positive, et on la dit *positive;* la direction opposée est la *négative*. Le signe de la mesure est le *signe* de l'intervalle.

Deux semblables intervalles sont *contigus*, si quelque extrémité de l'un coïncide avec quelqu'une de l'autre. Quand les extrémités en coïncidence appartiennent à ces intervalles avec des noms différents (*première, seconde*), les deux autres extrémités portent forcément des noms différents aussi et délimitent par suite un troisième intervalle franc qualifié qui est dit la *somme topographique* des deux proposés; d'où la définition de la somme topographique d'intervalles francs donnés en nombre quelconque (dans des contiguïtés convenables), somme ayant pour mesure évidente la somme analytique de celle des intervalles additionnés.

La *décomposition* de l'intervalle $|x_1 x_2|$ en (la somme de) deux autres s'opère par l'introduction de quelque intervalle vanescent $[x_0 x_0]$, ou *coupure au point* x_0, puis par le dédoublement de cette coupure et la formation des intervalles $|x_1 x_0|$, $|x_0 x_2|$, qui sont contigus de manière à reproduire le proposé par leur addition topographique. En décomposant ces nouveaux intervalles à leur tour, puis ceux qu'on a formés de cette manière, et ainsi de suite, en poussant l'opération plus ou moins loin, on arrive à une décomposition additive quelconque de l'intervalle proposé en plusieurs autres.

Quand on s'impose la condition que les nouveaux intervalles soient tous d'un même signe, ce signe est forcément celui du proposé, et les coupures, comme tout point intérieur à l'un des intervalles partiels, sont nécessairement à l'intérieur aussi de l'intervalle primitif : de là provient en majeure partie l'importance qui s'attache à l'intérieur d'un intervalle bien plus qu'à son extérieur. A parler plus proprement, une décomposition de ce genre est une *division* de l'intervalle; on peut s'arranger de manière que les dimensions des parties (2) soient toutes inférieures à telle quantité positive qu'il aura plu de choisir.

Marcher sur l'intervalle $|x_1 x_2|$ dans sa direction, c'est, après l'avoir divisé d'une manière ou d'une autre, passer mentalement de x_1, sa première extrémité, à x', seconde extrémité de la division commençant en x_1, puis de x' à x'' autre extrémité de la division qui part de x', et ainsi de suite, jusqu'à x_2 où l'on s'arrête, etc.; nous ne nous appesantissons pas sur la *soustraction*, qui est l'opération inverse de l'addition des intervalles.

Parfois il est commode de dire que tous les points x sont intérieurs à l'*intervalle* franc et illimité dans les deux sens, que la totalité de l'*axe des x* peut être censée constituer.

4. Le monde binaire est d'une nature plus complexe; nous allons y entrer, pour ne plus en sortir.

Un point (binaire) (x, y) se meut sur une *ligne*, quand la variation de ses coordonnées consiste à ne prendre que des valeurs de la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \tag{2}$$

où $\varphi(t)$, $\chi(t)$ sont des fonctions déterminées (réelles, ne dégénérant pas toutes deux en des constantes) d'une seule variable auxiliaire t (ne prenant aussi que des valeurs réelles). La substitution, à t, d'une nouvelle variable τ, par la relation $t = \omega(\tau)$, dans laquelle ω est la caractéristique d'une fonction arbitraire, change les formules (2) en une infinité d'autres qui *représentent* toujours la même ligne, c'est-à-dire qui font retrouver les mêmes points. Quand les fonctions $\varphi(t)$, $\chi(t)$ sont toutes deux linéaires (ou peuvent le devenir par un des changements de variables mentionnés ci-dessus) la ligne est une *droite*.

Si t_1, t_2 sont deux valeurs inégales de t, les points de la ligne (2) qui correspondent à des valeurs de t tombant à l'intérieur de l'intervalle (primaire) $\}t_1 t_2\{$ (2) sont dits *tomber* aussi à l'*intérieur de l'arc* de la ligne considérée qui a pour *extrémités* les points $x_1 = \varphi(t_1)$, $y_1 = \chi(t_1)$ et $x_2 = \varphi(t_2)$, $y_2 = \chi(t_2)$.

L'arc en question est *ordinaire*, quand, pour toutes les valeurs de t qui sont intérieures à l'intervalle $\}t_1 t_2\{$, $\varphi(t)$, $\chi(t)$ sont deux fonctions olotropes (139* *et suiv.*) dont les dérivées premières ne s'évanouissent jamais en même temps. Comme alors ces deux fonctions sont en particulier finies, l'arc ne peut être qu'une figure limitée (2). *Nous ne considérerons jamais ici que des arcs ordinaires*. Tel est, évidemment toujours, l'arc de la droite qui contient à la fois les points (x_1, y_1), (x_2, y_2) (unique, quand ces points sont distincts), ou *segment rectiligne*. Ce segment est la *corde* de tout arc ayant les mêmes extrémités.

A des points de division marqués arbitrairement sur l'intervalle $\}t_1 t_2\{$ (3), correspondent, sur l'arc, des points qui le *divisent* aussi en arcs partiels; et, comme il s'agit d'un arc ordinaire, *on peut certainement faire en sorte que les deux dimensions de chacun de ces derniers soient inférieures à toute quantité positive préalablement assignée*.

On *marche* sur l'arc, dans la *direction* allant de $(x_1 y_1)$ à $(x_2 y_2)$ par exemple, en y considérant successivement les points correspondant à ceux de l'intervalle $\}t_1 t_2\{$ par lesquels y fait passer une marche exécutée de t_1 à t_2 (*loc. cit.*). La considération de l'intervalle $\}t_2 t_1\{$, de signe contraire à celui de $\}t_1 t_2\{$, conduit semblablement à la notion de la marche de direction *opposée*, encore concevable sur le même arc; elle va de $(x_2 y_2)$ à $(x_1 y_1)$.

5. Un *chemin* est la figure que l'on forme en rangeant, dans un ordre déterminé,

$$(3) \qquad \{1\},\quad \{2\},\quad \ldots,\quad \{k-1\},\quad \{k\},$$

des points arbitrairement choisis, puis en imaginant des arcs quelconques (empruntés à des lignes distinctes ou identiques), ayant respectivement pour extrémités le premier de ces points et le second, celui-ci et le troisième, ..., le pénultième et le dernier. Ces arcs sont les *côtés* du chemin; les points (3) en sont les *soudures* (ou *sommets*), mais spécialement les *extrémités* $\{1\}$ et $\{k\}$, plus particulièrement les points intermédiaires $\{2\}$, $\{3\}$, ..., $\{k-1\}$.

On peut *marcher* sur le chemin *dans deux sens opposés :* 1° de $\{1\}$ à $\{k\}$, en marchant de $\{1\}$ à $\{2\}$ sur le premier côté, puis de $\{2\}$ à $\{3\}$ sur le second, ..., puis enfin de $\{k-1\}$ à $\{k\}$; 2° de $\{k\}$ à $\{1\}$, en passant de $\{k\}$ à $\{k-1\}$ sur le dernier côté, puis de $\{k-1\}$ à $\{k-2\}$ sur l'avant-dernier, ..., puis enfin de $\{2\}$ à $\{1\}$ (4).

Quand deux chemins ont un point commun, autre qu'une même extrémité, on dit qu'ils s'y *rencontrent*. Un chemin est *noué* ou *dénoué*, selon qu'il est décomposable, ou non, en deux parties qui se rencontrent.

Un chemin est *polygonal* (ou *brisé*), quand tous ses côtés sont de simples segments rectilignes.

6. Un chemin est *ouvert,* quand ses deux extrémités sont distinctes, *fermé* quand elles coïncident. Dans ce dernier cas, on fait abstraction de ses extrémités, puisqu'on peut adopter, tout aussi bien pour elles, un même autre quelconque de ses points, et on le nomme plus simplement un *contour* (*absolu*). Un contour est *impropre,* quand il est décomposable en plusieurs chemins ouverts dont deux quelconques coïncident; il est *propre,* s'il ne présente pas cette dégénérescence.

On *décrit* un contour, par une sorte de *rotation,* en marchant sur sa totalité, à partir de et jusqu'à un même point pris pour l'une et l'autre de ses deux extrémités à la fois. Quand le contour est impropre, chaque partie du chemin ouvert dont il est la répétition est parcourue autant de fois dans une direction que dans la direction opposée, et les diverses rotations possibles sont indistinctes dans leurs sens. Mais, quand il est propre, l'opération peut s'exécuter dans un *sens de rotation* ou dans le sens *opposé*, selon qu'elle comporte, sur un côté déterminé du contour, une marche d'un sens ou de l'autre (4).

La *qualification* d'un contour propre (auparavant absolu) consiste à le considérer comme devant être décrit dans un sens de rotation déterminé et un nombre de fois donné; nous ne considérerons habituellement que des contours qualifiés. Un contour à décrire un certain nombre de fois dans un sens, et ce même contour à décrire autant de fois dans le sens inverse sont *opposés*.

Un contour dénoué (5), partant propre, et à décrire une seule fois dans un sens donné, est indécomposable en plusieurs contours qualifiés, et je le nommerai un *anneau*. Mais, quand il est noué, il est toujours décomposable en plusieurs anneaux; quand il est impropre, il est décomposable d'une infinité de manières en contours impropres, composés chacun d'un chemin à parcourir une fois dans un sens, puis une autre fois dans le sens opposé, c'est-à-dire en anneaux impropres ou *coupures* (*Cf.* 3 *et* 9, *inf.*).

7. En thèse générale, un ou plusieurs contours qualifiés (quelquefois des chemins illimités) délimitent un *intervalle* (binaire), dont leur ensemble constitue l'*enceinte*.

A certains égards, un intervalle doit être considéré comme n'étant pas modifié par l'adjonction à son enceinte de coupures quelconques (6), ni par la suppression de chemins pouvant être assemblés en anneaux de ce genre. On peut ainsi, à volonté, ou bien *unifier* l'enceinte d'un intervalle, en l'amenant à ne comprendre qu'un seul contour, ou bien la *réduire*, en y supprimant toute coupure, ce qui la ramène à n'être composée que d'anneaux propres (multiples s'il y a lieu) dont deux quelconques ne sont pas opposés.

Deux intervalles sont *contigus*, quand leurs enceintes ainsi réduites ont en commun un point ou davantage, la contiguïté ayant lieu *par des points isolés*, ou *par des chemins*, suivant les circonstances.

L'*addition topographique* de plusieurs intervalles consiste à prendre le nouvel intervalle dont l'enceinte comprend tous les contours qui appartiennent à celles des intervalles donnés, puis à unifier ou à réduire cette enceinte comparée (*Cf.* 3).

On *soustrait topographiquement* un intervalle d'un autre, en ajoutant à celui-ci l'intervalle dont l'enceinte est formée par les contours respectivement opposés à ceux de l'enceinte du premier.

On *décompose* un intervalle en plusieurs autres, en formant ces derniers, avec ou sans introduction de coupures à dédoubler, de manière que leur combinaison par voie d'addition topographique (de soustraction, quelquefois aussi) reproduise le proposé. Plus bas (8, IV, *inf.*), nous parlerons de la *division topographique* (*Cf.* 3).

8. Parmi les intervalles auxquels sont applicables les notions ci-après, les plus remarquables sont ceux dont l'enceinte se réduit à un seul anneau, soit propre, soit dégénérant en une coupure (6), et que je nommerai *francs*. En outre, je dirai *vanescents* ceux de la deuxième espèce (déchus en quelque sorte du caractère *binaire* pour redevenir *primaires*), parce que leurs mesures sont toujours $= 0$ (*inf. passim*) et qu'ils sont négligeables dans l'addition ou la soustraction topographiques; *invanescents* ceux de la première, pour les motifs contraires.

I. Le plus intéressant des intervalles francs est le *triangle*, dont le contour a pour soudures (sommets) trois points donnés

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \tag{4}$$

pour côtés, les trois segments rectilignes qui unissent ces points pris successivement deux à deux. Effectivement, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

est $= 0$, les points (4), les côtés par suite, tombent sur quelque même droite, et le contour n'est qu'une coupure, le triangle est vanescent. Si le même déterminant est $\neq 0$, il est impossible que deux côtés aient commun un point autre que leur soudure, par suite que le contour soit noué. Ce contour, à décrire une seule fois dans l'un et l'autre sens, est un anneau propre, et le triangle est invanescent.

Dans ce dernier cas, l'adjonction d'un quatrième point indéterminé (x, y) permet de décomposer le déterminant (5) en la somme de ces trois-ci :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix},$$

qui, dès lors, ne peuvent s'évanouir tous à la fois. Cela posé, le point (x, y) est *situé :*

1° *A l'intérieur* du triangle, quand ces déterminants sont tous $\neq 0$ et d'un même signe;

2° *Sur* l'anneau, ou bien encore à l'intérieur du triangle par extension, quand l'un d'eux s'évanouit, les deux autres n'offrant pas des signes contraires;

3° *A l'extérieur* du même triangle, quand deux de ces déterminants sont de signes contraires.

La moitié du déterminant (5) est, par définition, la *mesure* (de l'intérieur) du triangle, pour la description de son anneau qui fait rencontrer les sommets dans l'ordre circulaire (4) où nous les avons écrits. Comme la valeur du déterminant ne fait que changer de signe quand on change l'ordre circulaire de ses lignes, la substitution, à la direction considérée, de la direction opposée, donnera un autre intervalle triangulaire, de mesure numériquement égale, mais de signe contraire, à celle du triangle primitif. D'où la distinction possible des triangles invanescents, en triangles *positifs* et en triangles *négatifs*. Sur un anneau triangulaire propre, mais de direction non dénommée, celle qui rend le triangle positif est dite *positive* (ou *directe*) l'autre *négative* (ou rétrograde).

Le développement du déterminant (5) donne à la mesure du triangle la forme importante

$$\tag{6} \tfrac{1}{2}[(x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1) + (x_1y - y_1x_2)],$$

où sont séparées les parties afférentes aux divers côtés et à leurs directions.

II. Un anneau polygonal $\{P\}$, une simple coupure polygonale, délimitent un intervalle *polygonal franc,* invanescent ou vanescent. Dans le premier cas, on prouve sans difficulté : 1° que *l'intervalle est décomposable d'une infinité de manières en la somme d'un nombre limité de triangles invanescents, offrant tous un certain même signe;* 2° que *ce signe ne varie pas avec le mode de décomposition;* 3° que, *si pour une décomposition, un point donné tombe à l'intérieur d'un triangle partiel, il se comporte de la même manière pour toutes les autres décompositions;* 4° et enfin, que *si le même point est extérieur à tous les triangles d'une décomposition, il l'est aussi à tous ceux d'une autre quelconque* (1).

Le point considéré sera dit *intérieur* ou *extérieur* à l'intervalle polygonal dont il s'agit, selon qu'il se trouvera le cas 3° ou 4° ci-dessus.

La *mesure* (de l'intérieur) du même intervalle est la somme analytique de celle des triangles d'un même signe dont il est la somme topographique. En mettant toutes ces dernières sous la forme (6), remarquant que, pour deux triangles partiels, les parties de leurs anneaux éventuellement communes ont des directions opposées [puisque la réduction de la somme topographique de tous les triangles ne laisse subsister dans son enceinte que l'anneau donné $\}P\{$ (7)], on trouve, pour cette mesure, l'expression

$$(7)\quad \tfrac{1}{2}[(x^{(1)}y^{(2)}-y^{(1)}x^{(2)})+(x^{(2)}y^{(3)}-y^{(2)}x^{(3)})+\ldots+(x^{(k)}y^{(1)}-y^{(k)}x^{(1)})],$$

(1) Dans cet énoncé, comme dans la définition connexe de la mesure de l'intervalle, le lecteur pourrait croire, de primo abord, à une omission portant sur la condition, pour les triangles partiels, d'être indéfiniment extérieurs les uns aux autres, de plus contigus deux à deux par toutes les parties de leurs côtés qui n'appartiennent pas à l'anneau. Mais elle n'est qu'apparente, car cette double condition leur est imposée, *ipso facto,* par celle, pour leurs anneaux, d'avoir des qualifications identiques et de ne laisser, pour enceinte réduite de leur somme topographique, que l'anneau polygonal donné, à parcourir une seule fois dans la direction à lui assignée.

Cette observation et d'autres du même genre me paraissent justifier ma préoccupation constante de *qualifier* tous les contours propres, et aussi ma définition de l'addition topographique à laquelle on a pu imputer une certaine bizarrerie. Pour manier les intervalles primaires, il a bien fallu, déjà, imposer un ordre déterminé (c'est à cela que la direction d'un contour fait pendant), aux valeurs particulières de la variable unique, dont l'ensemble leur fait une enceinte.

Des coupures dont les lèvres ont été empruntées d'une manière convenable à des droites menées par les diverses soudures de l'anneau, *parallèlement à l'un des axes* (VI, *inf.*), découpent l'intervalle polygonal $\}P\{$ en quelques triangles et des *trapèzes* francs que des coupures *diagonales* résolvent à leur tour en triangles. On obtient ainsi une décomposition de l'intervalle $\}P\{$, qui est conforme à notre énoncé et d'où il est facile de passer à toutes les autres.

où (x, y) affectées des accents $1, 2, 3, \ldots, k$ représentent les coordonnées des soudures rangées dans l'ordre de succession où on les rencontre, quand on décrit l'anneau $\{P\}$ (dans la direction voulue). Ce résultat est bien indépendant du mode de décomposition de l'intervalle en triangles.

Quand l'intervalle est vanescent, sa mesure est $= 0$, parce que les termes de l'expression (7) se détruisent évidemment deux à deux.

Quand il est invanescent, il est *positif* ou *négatif*, selon le signe de sa mesure qui est alors $\neq 0$, comme somme des mesures de triangles invanescents d'un même signe.

Sur un anneau polygonal, l'inversion du sens de rotation change le signe, mais non la valeur numérique de la mesure de l'intervalle franc dont il est l'enceinte : le sens *positif* (ou *direct*) est celui des deux qui rend l'intervalle positif; le sens *négatif* (ou *rétrograde*) est l'autre.

III. Un anneau qualifié $\{C\}$ et *curviligne*, c'est-à-dire dont quelque côté ne se réduit pas à un segment rectiligne, est l'enceinte d'un intervalle *curviligne* franc, de plus *vanescent* quand l'anneau n'est qu'une coupure, *invanescent* quand il est propre.

Un arc (toujours ordinaire) étant donné, on prouve aisément que, *s'il est dénoué* (5), *on peut assigner une quantité positive* λ *assez petite pour que toute division de cet arc en parties de dimensions inférieures à* λ *donne des arcs partiels dont les cordes soient les côtés d'un chemin brisé, également dénoué*.

On en conclut ce qui suit : *Un anneau propre curviligne* $\{C\}$ *étant donné, on peut assigner une quantité positive* λ *assez petite pour obtenir toujours, par la division de ses côtés en parties de dimensions inférieures à* λ, *des arcs dont les cordes forment un contour polygonal* $\{P_\lambda\}$ *dénoué aussi, un anneau, par conséquent, après choix fait pour sa direction de celle qui place ses soudures dans l'ordre où la description du contour* $\{C\}$ *les fait rencontrer; et le signe de l'intervalle polygonal franc, invanescent, qui a* $\{P_\lambda\}$ *pour anneau, est indépendant du mode de division du contour* $\{C\}$. Si enfin on fait tendre λ vers 0, *ce dernier intervalle variera sans doute, mais en finissant par conserver, soit constamment à son intérieur, soit constamment à son extérieur, tout point fixe donné* (*ailleurs que sur l'anneau* $\{C\}$ *lui-même*).

De la dernière partie de cette proposition résulte immédiatement la définition des points soit *intérieurs* (ils comprennent ceux de l'anneau), soit *extérieurs* à l'intervalle curviligne considéré. On a ensuite la suivante :

La mesure variable de l'intervalle polygonal franc qui a pour enceinte l'anneau $\{P_\lambda\}$ *tend, quel que soit le mode de variation de ce dernier, vers une limite déterminée.*

Car, en supposant l'expression (7) construite de manière à fournir la mesure de cet intervalle polygonal, et à cause de

$$x^{(i)}\,y^{(i+1)} - y^{(i)}\,x^{(i+1)} = x^{(i)}\,\Delta y^{(i)} - y^{(i)}\,\Delta x^{(i)},$$

où $\Delta x^{(i)} = x^{(i+1)} - x^{(i)}$, $\Delta y^{(i)} = y^{(i+1)} - y^{(i)}$, la quantité $\sum_1^2 (x\,\Delta y - y\,\Delta x)$ représentant la partie de cette expression, afférente à la portion de l'anneau polygonal $\{P_\lambda\}$ qui est inscrite dans le premier côté de l'anneau curviligne $\{C\}$, a évidemment pour limite invariable, ceci en vertu de la propriété sommatoire des intégrales définies simples (235*), l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [\varphi(t)\,\chi'(t) - \chi(t)\,\varphi'(t)]\,dt,$$

que nous écrirons plus simplement

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{S}_1^2\,(x\,dy - y\,dx). \tag{8}$$

La totalité de l'expression (7) a donc pour limite, également invariable,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{S}_{\{C\}}\,(x\,dy - y\,dx), \tag{9}$$

somme des intégrales analogues à (8), calculées sur les divers côtés de $\{C\}$, parcourus chacun dans le sens voulu par la direction attribuée à cet anneau.

La *mesure* de l'intervalle curviligne franc, ayant cet anneau pour enceinte, est, par définition, la valeur de l'expression (9). Quand l'intervalle est vanescent, la mesure est encore nulle; quand il est invanescent, elle a un certain signe *par lequel nous qualifierons toujours l'intervalle lui-même.*

Enfin, sur un anneau curviligne absolu, la direction *positive* (ou *directe*) sera toujours celle dont le choix rend positif l'intervalle enceint par ce contour, et la direction *négative* (ou *rétrograde*) sera l'opposée de celle-ci.

Pour abréger, et bien que l'expression (9) ne soit qu'une *somme* de plusieurs intégrales définies impliquant des fonctions différentes, on la nomme encore l'*intégrale définie de la différentielle* $x\,dy - y\,dx$, *prise sur l'anneau* $\{C\}$ (dans le sens attribué à celui-ci).

On peut dire que la totalité du *plan des xy* est un intervalle franc illimité, à l'intérieur duquel tombent tous les points (x, y).

IV. Deux points marqués arbitrairement sur l'anneau d'un intervalle franc (invanescent) le divisent en deux chemins dirigés, formant toujours deux anneaux (qualifiés) quand on les assemble respectivement d'une manière convenable avec les deux lèvres d'une coupure résultant de la duplication, en sens inverse, d'un chemin quelconque tracé de l'un à l'autre des points dont il s'agit. L'intervalle considéré se trouve alors décomposé *additivement* (7) en les deux autres que les nouveaux anneaux délimitent; et la répétition indéfinie de la même opération sur ces nouveaux intervalles, sur ceux qu'elle en fait naître ensuite, conduit à toutes les décompositions possibles de l'intervalle primitif (*Cf.* 3).

On a exécuté une *division* de l'intervalle, si l'on s'est arrangé de manière que tous les produits de la décomposition soient d'un même signe, partant de celui de l'intervalle primitif. On remarquera qu'*alors tout point appartenant à une des coupures à pratiquer, ou bien intérieure à l'un des intervalles partiels, est essentiellement intérieur à l'intervalle proposé;* d'où l'importance marquée de l'intérieur d'un intervalle franc, relativement à son extérieur (*Cf.* 3).

On peut, et cela d'une infinité de manières, faire en sorte que les dimensions des intervalles partiels soient toutes inférieures à une quantité positive choisie à volonté, en traçant même arbitrairement tant de coupures que l'on voudra (à l'intérieur de l'intervalle donné).

V. Un intervalle franc (invanescent) jouit de la propriété très importante d'être *connexe*, c'est-à-dire que, deux points ayant été marqués arbitrairement dans son intérieur, on peut toujours tracer de l'un à l'autre quelque chemin dont tous les points soient aussi intérieurs au même intervalle.

Pour un intervalle polygonal, la chose est rendue visible par sa division en triangles disposés de manière que les points considérés appartiennent à l'ensemble de leurs enceintes; car ces triangles étant d'un même signe, les points de leurs enceintes sont tous intérieurs à l'intervalle considéré (IV), et quelques parties de ces enceintes, à choisir convenablement, s'assemblent évidemment en un chemin (au moins) ayant pour extrémités les points dont il s'agit. Ensuite, elle s'étend immédiatement à un intervalle curviligne, par la considération de l'intervalle polygonal variable $\{P_\lambda\}$ de l'alinéa III, construit dans des conditions à comprendre dans son intérieur les deux points considérés.

VI. Des droites *parallèles,* l'une à l'*axe des* x, l'autre à l'*axe des* y, ont pour équations, la première

$$x = t, \qquad y = y_1,$$

l'autre

$$x = x_1, \qquad y = t,$$

et se rencontrent toujours en (x_1, y_1).

L'*orthorhombe* est le plus simple des intervalles *dentelés,* en nommant ainsi ceux qui ont une enceinte polygonale, décomposable en segments rectilignes, parallèles tantôt à un axe, tantôt à l'autre. Son enceinte a pour soudures quatre points de la forme

$$(10) \qquad (x^{(1)}, y^{(1)}), \quad (x^{(2)}, y^{(1)}), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}), \quad (x^{(1)}, y^{(2)}),$$

et ses côtés unissent chaque soudure à la suivante, la dernière à la première.

Si l'on a

$$x^{(1)} = x^{(2)}, \qquad \text{ou bien} \qquad y^{(1)} = y^{(2)},$$

le contour est impropre, l'intervalle vanescent. Si non, et si ce contour n'est pas répété, on a évidemment affaire à un anneau. Si, enfin, on attribue à cet anneau la direction marquée par l'ordre (10) de succession des soudures, l'intervalle est franc, et, pour sa mesure, la réduction de l'expression (7) conduit au résultat très simple

$$(x^{(2)} - x^{(1)})(y^{(2)} - y^{(1)}),$$

produit des facteurs numériquement égaux à

$$|x^{(2)} - x^{(1)}|, \quad |y^{(2)} - y^{(1)}|,$$

dimensions de l'orthorhombe. Les points intérieurs sont ici ceux pour lesquels les points primaires x et y sont respectivement intérieurs aux intervalles primaires $\{x^{(1)}x^{(2)}\}$, $\{y^{(1)}y^{(2)}\}$.

Un intervalle franc $\{\mathfrak{z}\}$, quand il est dentelé, est évidemment décomposable en un nombre limité d'orthorhombes de son signe, dont les dimensions sont inférieures à telle quantité positive qu'on aura voulu choisir. Quand il n'est pas dentelé, une pareille décomposition est impossible; mais, *appelant* θ *une quantité positive arbitraire, on peut tout au moins assigner un intervalle dentelé* $\{\mathfrak{z}_0\}$, *franc aussi et de même signe, partant susceptible de la décomposition dont il s'agit, qui ébauche le proposé à* θ *près par excès, tel, veux-je dire, que tout point intérieur à* $\{\mathfrak{z}\}$ *le soit aussi à* $\{\mathfrak{z}_0\}$, *et que, pour tout point* (x, y) *intérieur à celui-ci, quelque point* (x_0, y_0) *intérieur à l'autre donne à la fois*

$$|x - x_0| \leqq \theta, \qquad |y - y_0| \leqq \theta;$$

et, quand θ *tend vers* o, *la mesure de* $\{\mathfrak{z}_0\}$ *a celle de* $\{\mathfrak{z}\}$ *pour limite.* Mais, malgré l'utilité dont sera pour nous la première partie de cette proposition, j'en supprime la démonstration à cause de sa facilité et de quelques longueurs.

VII. Les considérations précédentes procurent une démonstration catégorique d'une proposition dont le pendant géométrique n'a résulté jusqu'ici que de constatations empiriques : *un contour qualifié qui, à partir d'une figure initiale consistant en un simple anneau, se déforme progressivement sous la seule condition de ne jamais se nouer* (7) *ne peut être amené en coïncidence avec aucun autre anneau dont la qualification serait opposée à celle du premier.*

Puisque le contour reste exempt de nœuds, il se réduit sans cesse à un anneau variable qui demeure propre, qui enceint par suite un intervalle franc dont la mesure ne s'évanouit jamais. Or, de quelque manière que l'on introduise des paramètres p, q, ... dans les éléments de cet anneau variable (coordonnées de ses soudures, fonctions caractérisant ses côtés), mais ce à titre olotrope, puisque le calcul des fonctions non olotropes est encore inconnu et le sera vraisemblablement toujours, la mesure de l'intervalle enceint devient, d'après la nature de l'expression (9), une fonction olotrope de p, q, ... Il est donc impossible que cette fonction change de signe puisqu'elle ne peut s'évanouir (22**).

9. L'addition topographique de plusieurs intervalles francs (invanescents) et de signes identiques conduit à un nouvel intervalle qui peut ne plus être franc, mais auquel un point donné est dit *intérieur* quand il l'est à quelqu'un des intervalles proposés, *extérieur* quand il l'est à tous ceux-ci, et dont la mesure, somme analytique de celles des proposés, est calculable par le procédé expliqué ci-dessus (8, III).

Quand ces derniers sont tous contigus deux à deux par des chemins, le résultat de leur addition est encore connexe (8, V) parce que les chemins de contiguïté s'assemblent en coupures que la réduction fait disparaître. Si l'enceinte réduite est formée par des anneaux qui ne se rencontrent pas, les intervalles proposés sont tous *extérieurs* les uns aux autres, en ce sens qu'aucun point ne peut être intérieur à plus d'un d'entre eux; en d'autres termes, ils ne se recouvrent pas, les uns les autres, leur somme est *indupliquée.* Si non, ils se recouvrent plus ou moins, et la discussion de leur somme exige des moyens analogues à ceux que l'on emploie dans l'étude des *surfaces de Riemann.* Nos anneaux impropres (6) ne diffèrent pas, au fond, des coupures de cette théorie; c'est pourquoi ce nom leur a été conservé.

Les intervalles francs demeurent les principaux à considérer, parce qu'ils sont irréductibles à d'autres dont la nature serait plus simple, et qu'ils reproduisent, par voie d'addition ou de soustraction, tous les intervalles imaginables.

10. Une fonction réelle $f(x, y)$ des deux variables réelles x, y est *olotrope* dans un intervalle donné $\{\mathfrak{I}\}$ (auquel la notion d'intérieur est applicable), quand il existe deux quantités positives invariables δ_x, δ_y, ce sont les *olomètres* de la fonction dans cet intervalle, telles que

$f(x+h, y+k)$ soit développable en une série entière en h, k, chaque fois que le point (x, y) est intérieur à l'intervalle et que les valeurs numériques des accroissements h, k sont inférieures à δ_x, δ_y.

Pour tout orthorhombe (8, VI) intérieur à l'intervalle $|\mathfrak{I}|$, dont les sommets seraient (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2), cette définition ne donne pas autre chose que ce que j'ai nommé une fonction de variables *quelconques*, olotrope avec les mêmes olomètres δ_x, δ_y, sur les segments des axes de leurs premiers éléments, limités par les points x_1 et x_2, y_1 et y_2 (*Cf.* 139* *et suiv.*).

Si enfin l'on prend $\theta < \delta_x$ et $< \delta_y$, $f(x, y)$ est encore olotrope dans tout intervalle dentelé ébauchant $|\mathfrak{I}|$ à θ près par excès (*loc. cit.*), mais avec des olomètres égaux seulement à $\delta_x - \theta$, $\delta_y - \theta$; c'est ce que montre un raisonnement tout semblable à celui du n° 142*.

11. Une fonction *localement olotrope* dans le même intervalle $|\mathfrak{I}|$ supposé maintenant connexe (9), avec les *olomètres* δ_x, δ_y, n'est que la quantité variable $\psi(x, y)$ dont la valeur $\psi(x_k, y_k)$ en (x_k, y_k), point quelconque intérieur à l'intervalle, se calcule par le procédé suivant :

1° prendre à l'intérieur de $[\mathfrak{I}]$ un premier point (x_0, y_0) invariable, puis, à volonté, d'autres formant avec celui-ci et (x_k, y_k) la suite

$$(11) \qquad (x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_{k-1}, y_{k-1}), \quad (x_k, y_k),$$

où l'on ait toujours, pour deux termes consécutifs,

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta_x, \qquad |y_{i+1} - y_i| < \delta_y,$$

ce qui est possible puisque l'intervalle est supposé connexe;

2° dans une série entière indéterminée, à deux variables x, y,

$$(12) \qquad \alpha_0 + \alpha_{1,0}\frac{\mathrm{x}}{1} + \alpha_{0,1}\frac{\mathrm{y}}{1} + \ldots + \alpha_{m,n}\frac{\mathrm{x}^m}{1.2\ldots m}\,\frac{\mathrm{y}^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

attribuer aux coefficients $\ldots, \alpha_{m,n}, \ldots,$ des valeurs numériques

$$(13) \qquad a_{0,0}, \quad a_{1,0}, \quad a_{0,1}, \quad \ldots, \quad a_{m,n}, \quad \ldots,$$

arbitrairement choisies sous la seule condition de lui faire acquérir des rayons de convergence au moins égaux à δ_x, δ_y, puis former la première série

$$(14)\qquad \psi_0(x, y) = a_{0,0} + a_{1,0}\frac{x - x_0}{1} + a_{0,1}\frac{y - y_0}{1} + \ldots;$$

3° dans la même série (12) prendre

$$\alpha_{m,n} = \psi_0^{(m,n)}(x_1, y_1)$$

et former la deuxième série

$$(15)\qquad \psi_1(x, y) = \psi_0(x_1, y_1) + \psi_0^{(1,0)}(x_1, y_1)\frac{x - x_1}{1} + \psi_0^{(0,1)}(x_1, y_1)\frac{y - y_0}{1} + \ldots;$$

4° toujours dans la même série (12), faire

$$\alpha_{m,n} = \psi_1^{(m,n)}(x_2, y_2)$$

et former la troisième série

$$(16)\qquad \psi_2(x, y) = \psi_1(x_2, y_2) + \ldots + \psi^{(m,n)}(x_2, y_2)\frac{(x - x_2)^m}{1.2\ldots m}\frac{(y - y_2)^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

5° et ainsi de suite, jusqu'à une dernière série

$$(17)\qquad \psi_{k-1}(x, y) = \psi_{k-2}(x_{k-1}, y_{k-1}) + \ldots + \psi_{k-2}^{(m,n)}(x_{k-1}, y_{k-1})\frac{(x - x_{k-1})^m}{1.2\ldots m}\frac{(y - y_{k-1})^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

tout ceci sous la supposition expresse que les séries (15), (16), ..., (17) admettent toutes, comme (14), des rayons de convergence au moins égaux à δ_x, δ_y;

6° prendre enfin

$$\psi(x_k, y_k) = \psi_{k-1}(x_k, y_k),$$

plus généralement

$$\psi^{(m,n)}(x_k, y_k) = \psi_{k-1}^{(m,n)}(x_k, y_k).$$

Bien que les données de cet algorithme soient les quantités invariables (x_0, y_0), (13) et (x_k, y_k), bien que les premières ayant été une fois fixées, la valeur du résultat dépende de celles de x_k, y_k, il va de soi qu'elle peut dépendre encore des termes intermédiaires de la suite (11), autrement dit du chemin polygonal *suivi dans l'intervalle* $\{\mathfrak{z}\}$ pour *aller* ainsi du point (x_0, y_0) au point (x_k, y_k).

Quand les valeurs de $\psi(x, y)$ et de toutes ses dérivées se trouvent ne dépendre en rien de la forme du chemin tracé de (x_0, y_0) à (x, y), point quelconque intérieur à l'intervalle considéré, cette quantité est *monodrome* dans cet intervalle et ne diffère que par un mode de génération spécial, d'une véritable fonction donnée olotrope dans l'intervalle.

Quand il en est autrement, cette expression n'est pas même une fonction, cela tout au moins relativement à la totalité de l'intervalle. Mais, en raisonnant exactement comme aux n^{os} 172* et suivants, on prouve que, *si l'intervalle* $\{\mathfrak{z}\}$ *est franc* (8), *la quantité* $\psi(x, y)$ *ne peut y être localement olotrope sans y être en même temps monodrome, sans s'y réduire par suite à une véritable fonction olotrope.* Et, comme tout intervalle connexe qui n'est pas franc peut, évidemment, être divisé en d'autres qui le sont tous, les valeurs prises par notre quantité $\psi(x, y)$ dans chacun de ces derniers, considéré isolément à l'exclusion des autres, appartiennent tout aussi bien à de véritables fonctions, chacune olotrope dans l'un de ces intervalles partiels; d'où le nom de *fonction* conservé à $\psi(x, y)$, même pour la totalité de l'intervalle $\{\mathfrak{z}\}$.

Inversement, la conception simultanée de plusieurs fonctions

$$f_1(x, y), \quad f_2(x, y), \quad \ldots,$$

qui, dans des intervalles connexes, d'un même signe, et contigus par des chemins, $\{\mathfrak{z}^{(1)}\}$, $\{\mathfrak{z}^{(2)}\}$, ... sont olotropes, avec les paires d'olomètres $(\delta_x^{(1)}, \delta_y^{(1)})$, $(\delta_x^{(2)}, \delta_y^{(2)})$, ..., et dont deux consécutives quelconques, en quelque point de contiguïté des intervalles correspondants, prennent, elles-mêmes et leurs dérivées semblables de tous ordres, des valeurs numériques égales, équivaut en tout à celle de quelque fonction unique $f(x, y)$, localement *olotrope* dans la somme topographique

$$\{\mathfrak{z}^{(1)}\} + \{\mathfrak{z}^{(2)}\} + \ldots,$$

avec des olomètres δ_x, δ_y égaux, l'un δ_x à la plus petite des quantités $\delta_x^{(1)}$, $\delta_x^{(2)}$, ..., l'autre δ_y au moindre terme de la suite $\delta_y^{(1)}$, $\delta_y^{(2)}$, ...

12. Considérons maintenant deux fonctions de x, y, savoir

$$U(x,y), \quad V(x,y),$$

l'une et l'autre olotropes à l'intérieur d'un même intervalle $\{\mathfrak{z}\}$ franc et invanescent, avec les olomètres communs δ_x, δ_y, et le point (u, v) dont les coordonnées sont données par les formules

$$(18) \qquad u = U(x,y), \qquad v = V(x,y),$$

point que nous dirons *correspondre* à (x, y), ainsi que toute figure formée par des points (u, v) à celle que constituent les points (x, y) dont ils ont été ainsi déduits.

Quand les dérivées premières de $U(x,y)$, $V(x,y)$ sont, toutes quatre, identiquement nulles, ces fonctions dégénèrent en certaines constantes C, D, le point (u, v) reste immobile en (C, D), de quelque manière que (x, y) se meuve à l'intérieur de $\{\mathfrak{z}\}$, les équations (18) entre les inconnues x, y sont, soit impossibles quand (u, v) ne coïncide pas avec (C, D), soit doublement indéterminées quand le contraire a lieu. En d'autres termes, *à l'intervalle* $\{\mathfrak{z}\}$, *pour* (x, y), *correspond, pour* (u, v) *l'intervalle bi-vanescent que le seul point* (C, D) *peut être censé constituer.*

Quand, ces dérivées n'étant pas toutes identiquement nulles, le déterminant différentiel de $U(x,y)$, $V(x,y)$,

$$(19) \qquad \mathfrak{D}(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{dU}{dx} & \dfrac{dU}{dy} \\ \dfrac{dV}{dx} & \dfrac{dV}{dy} \end{vmatrix}$$

jouit de cette propriété dans l'intervalle considéré, l'une des fonctions U, V, la seconde par exemple, se réduit certainement à quelque fonction composée finie $\Omega(U)$ de l'autre (314*); et, quand (x, y) décrit un arc ordinaire $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, son correspondant en décrit un de même genre, si toutefois la dérivée de la première des fonctions composées de t,

$$(20) \qquad U[\varphi(t), \chi(t)], \quad V[\varphi(t), \chi(t)],$$

ne s'annule pas dans l'intervalle primaire où t varie, car ces deux fonctions sont, d'autre part, toutes deux olotropes. En ce cas, et à cause de $V(x,y) = \Omega[U(x,y)]$, cette dernière ligne, dont les équations peuvent être écrites $u = s$, $v = \Omega(s)$, est *absolument indépendante de la première;* en d'autres termes, *à l'intervalle* $\{\mathfrak{Z}\}$ *tout entier, ne correspond que l'intervalle une seule fois vanescent, constitué par la ligne en question.* (Pour un tracé du premier arc qui réduirait la première des fonctions (20) à quelque constante C, la seconde ligne dégénérerait en $u = C$, $v = \Omega(C)$, c'est-à-dire en un simple point.) Les équations (18), entre les inconnues x, y, sont impossibles quand le point (u, v) n'est pas sur la ligne $u = s$, $v = \Omega(s)$, et simplement indéterminées quand il tombe sur elle.

Quand enfin le déterminant (19) ne peut prendre la valeur o dans l'intervalle $\{\mathfrak{Z}\}$, *l'arc décrit par* (u, v) *est nécessairement ordinaire*, puisqu'alors les équations numériques

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\chi'(t) = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

entraîneraient

$$\varphi'(t) = \chi'(t) = 0,$$

fait incompatible avec la qualité ordinaire supposée à l'arc décrit par (x,y); et si celui-ci vient à se déformer, l'autre ne peut rester invariable, ce que la proposition suivante va nous permettre de constater implicitement.

13. *Quand le déterminant* $\mathfrak{D}(x,y)$ *ne peut s'évanouir dans l'intervalle* $\{\mathfrak{Z}\}$ *(franc, invanescent), il y conserve un signe constant, et l'on peut assigner une quantité positive* α *assez petite pour qu'un intervalle franc, de dimensions inférieures à* α, *son intérieur et son extérieur, aient respectivement pour objets correspondants un intervalle franc, de même signe ou de signe contraire selon que le signe invariable de* $\mathfrak{D}(x,y)$ *est + ou —, l'intérieur de cet intervalle et son extérieur.*

I. *Dans l'intervalle* $\{\mathfrak{Z}\}$, *le déterminant* $\mathfrak{D}(x,y)$ *conserve un signe constant, et l'on y a toujours*

$$|\mathfrak{D}(x,y)| > \mathfrak{S}, \tag{21}$$

$\mathfrak{S}$ *représentant quelque constante positive.*

Si en (x_1, y_1), (x_2, y_2), points distincts et intérieurs à $\}\mathfrak{I}\{$, $\omega(x, y)$ pouvait prendre des signes contraires, le tracé entre ces points de quelque arc ordinaire $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, intérieur à l'intervalle, donnerait la fonction composée de t,

$$\omega[\varphi(t), \chi(t)],$$

qui serait olotrope de $t = t_1$ à $t = t_2$, qui prendrait des signes opposés en ces valeurs extrêmes, qui, par suite, s'évanouirait certainement pour quelque valeur t_0 de t, intérieure à cet intervalle primaire (22**). La fonction $\omega(x, y)$ prendrait donc au point $[\varphi(t_0), \chi(t_0)]$ la valeur o, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Considérons maintenant un intervalle dentelé $\}\mathfrak{I}_0\{$ ébauchant $\}\mathfrak{I}\{$ à θ près par excès (8, VI), θ ayant été pris au-dessous de δ_x, δ_y, en outre assez petit, ce qui est évidemment possible, pour que $\omega(x, y)$ ne s'évanouisse pas non plus dans cet autre intervalle. A l'intérieur de chacun des orthorhombes en nombre limité en lesquels l'intervalle $\}\mathfrak{I}_0\{$ peut être divisé, et cela d'après l'observation finale du n° 10, on peut assigner à la valeur numérique de $\omega(x, y)$, fonction olotrope ne pouvant par hypothèse y passer par o, des limites inférieures positives $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, ... (186*); il suffit donc de prendre la plus petite d'entre elles pour obtenir une quantité $\mathfrak{S}$ donnant lieu à l'inégalité (21).

II. Comme $\omega(x, y)$ ne peut s'évanouir dans l'intervalle dentelé $\}\mathfrak{I}_0\{$, les théorèmes des n^{os} 307*, 308* sont applicables aux fonctions implicites

$$x = \mathrm{X}(u, v), \qquad y = \mathrm{Y}(u, v),$$

qui définissent les équations simultanées

$$\mathrm{U}(x, y) - u = 0, \qquad \mathrm{V}(x, y) - v = 0,$$

cela sans restriction relativement à u, v, et pour les valeurs de (x, y) intérieures à un orthorhombe quelconque compris dans $\}\mathfrak{I}_0\{$, pour toutes celles, par suite, qui tombent dans cet intervalle dentelé, *a fortiori* dans l'intervalle $\}\mathfrak{I}\{$; en particulier, $\mathrm{X}(u, v)$, $\mathrm{Y}(u, v)$ sont localement olotropes (11), avec des olomètres au moins égaux à quelque quantité positive assignable β, pour toutes valeurs de u, v laissant le point $[\mathrm{X}(u, v), \mathrm{Y}(u, v)]$ intérieur à $\}\mathfrak{I}_0\{$.

Ceci permet, comme conclusion d'un raisonnement tout semblable à celui du n° 11**, d'affirmer que si (x, y) marche à pas suffisamment petits sur un chemin $\}1, 2\{_{x,y}$ tracé arbitrairement à l'intérieur de $\}\mathfrak{z}_0\{$, le point correspondant $[U(x, y), V(x, y)]$ lié à celui-ci par les relations (18), marche sur un correspondant $\}1, 2\{_{u,v}$, dont, inversement, le parcours par le point (u, v) fait mouvoir sur le premier chemin le point ayant $X(u, v)$, $Y(u, v)$ pour coordonnées.

Comme, enfin, on a

$$\Delta U = U(x + \Delta x, y + \Delta y) - U(x, y) = U_{1,0}(x, y, \Delta x, \Delta y)\,\Delta x + U_{0,1}(x, y, \Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$
$$\Delta V = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$U_{1,0}, \ldots, V_{0,1}$ représentant quatre fonctions olotropes de $x, y, \Delta x, \Delta y$, aux valeurs numériques desquelles on peut assigner des limites supérieures invariables pour tous les systèmes de valeurs de x, y coordonnées de points intérieurs à l'intervalle $\}\mathfrak{z}_0\{$, et de Δx, Δy ayant des valeurs numériques inférieures à quelque quantité positive prise assez petite (199* *et suiv.*), on peut assigner une quantité positive α telle, que pour de semblables valeurs de x, y et pour

$$|\Delta x| \leqq \alpha, \qquad |\Delta y| \leqq \alpha,$$

on ait toujours

$$|\Delta U| < \beta, \qquad |\Delta V| < \beta,$$

telle, par suite, que si le point (x, y) vient à se mouvoir arbitrairement dans un orthorhombe quelconque $\}\alpha\{$, de dimensions (α, α) et intérieur à $\}\mathfrak{z}_0\{$, le point correspondant (u, v) ne sorte pas d'un certain orthorhombe $\}\beta\{$ de dimensions $<(\beta, \beta)$. D'ailleurs, appelant (x_0, y_0) un point intérieur à l'orthorhombe $\}\alpha\{$, et (u_0, v_0) le point correspondant, les fonctions implicites $X(u, v)$, $Y(u, v)$ précisées par les conditions initiales $X(u_0, v_0) = x_0$, $Y(u_0, v_0) = y_0$ sont toutes deux véritablement olotropes, monodromes en particulier, dans l'orthorhombe $\}\beta\{$, puisque ses dimensions sont inférieures à l'olomètre commun β.

Il en résulte que si (x, y) vient à marcher sur un anneau quelconque $\}\mathfrak{a}\{$ tracé à l'intérieur de $\}\alpha\{$, (u, v) suivra un chemin $\}\mathfrak{b}\{$, non seulement fermé, ce qui est évident, mais dénoué aussi, se réduisant par suite à un anneau propre. La présence d'un nœud sur le chemin $\}\mathfrak{b}\{$ entraînerait en effet l'existence du même accident sur l'anneau $\}\mathfrak{a}\{$, puisque ce chemin est intérieur à un intervalle où les fonctions $X(u, v)$, $Y(u, v)$ sont monodromes, et que son parcours par le point (u, v) entraîne le point $[X(u, v). Y(u, v)]$ à décrire l'anneau $\{\alpha\}$.

III. *En supposant le point (x, y) placé arbitrairement à l'intérieur de $\{\mathfrak{z}\}$, puis appelant h, k, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}_2$ des quantités indéterminées, sous la seule condition que les quatre dernières demeurent numériquement inférieures à quelque constante positive* Π *et donnent un déterminant*

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{m}_1 & \mathfrak{n}_1 \\ \mathfrak{m}_2 & \mathfrak{n}_2 \end{vmatrix} = \mathfrak{G},$$

qui remplit sans cesse la condition

$$|\mathfrak{G}| > \tau, \tag{22}$$

où τ représente quelque autre constante positive; en prenant ensuite

$$\begin{cases} \Delta_1 x = \mathfrak{m}_1 h, & \Delta_1 y = \mathfrak{n}_1 h, \\ \Delta_2 x = \mathfrak{m}_2 h, & \Delta_2 y = \mathfrak{n}_2 k, \end{cases} \tag{23}$$

puis posant

$$\begin{aligned} x + \Delta_1 x &= x_1, & y + \Delta_1 y &= y_1, \\ x + \Delta_2 x &= x_2, & y + \Delta_2 y &= y_2, \end{aligned}$$

on peut assigner deux quantités positives η, $\varkappa$ assez petites pour que, sous les simples conditions

$$|h| \leqq \eta, \qquad |k| \leqq \varkappa,$$

les signes (8, I) *des triangles*

$$\{0\ 1\ 2\}_{xy}, \tag{24}$$

de sommets (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), et

$$\{0\ 1\ 2\}_{uv}, \tag{25}$$

de sommets correspondants (u, v), (u_1, v_1), (u_2, v_2), soient toujours identiques quand $\mathfrak{D}(x, y)$ demeure positif, opposés quand ce déterminant reste négatif.

En conservant les notations (24), (25) pour les mesures des triangles considérés, et posant

$$\begin{aligned} u_1 - u &= U(x + \Delta_1 x, y + \Delta_1 y) - U(x, y) = \Delta_1 u, & v_1 - v &= \ldots = \Delta_1 v, \\ u_2 - u &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \Delta_2 u, & v_2 - v &= \ldots = \Delta_2 v, \end{aligned}$$

on a évidemment

$$(26)\qquad \{0\ 1\ 2\}_{xy} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}hk, \qquad \{0\ 1\ 2\}_{uv} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_1 v \\ \Delta_2 u & \Delta_2 v \end{vmatrix}.$$

Comme ensuite, pour $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ assez petits, et pour toute fonction olotrope $F(x, y)$, la formule de Taylor donne

$$\Delta F = \frac{dF}{dx}\Delta x + \frac{dF}{dy}\Delta y + F_{2,0}\Delta x^2 + F_{1,1}\Delta x\,\Delta y + F_{0,2}\Delta y^2,$$

où $F_{2,0}$, ... sont des fonctions olotropes de x, y, Δx, Δy (199*), un calcul facile conduit à

$$(27)\qquad \{0\ 1\ 2\}_{uv} = \mathfrak{D}(x, y)\{0\ 1\ 2\}_{xy}$$
$$+ \frac{1}{2}\Sigma\mathfrak{P}_{i_1,j_1,i_2,j_2}(x, y, \Delta_1 x, \Delta_1 y, \Delta_2 x, \Delta_2 y)\Delta_1 x^{i_1}\Delta_1 y^{j_1}\Delta_2 x^{i_2}\Delta_2 y^{j_2},$$

où la sommation s'étend à des termes, en nombre limité, dans chacun desquels $\mathfrak{P}_{i_1,\ldots}$ représente une fonction olotrope de x, y dans l'intervalle $\{\mathfrak{z}\}$, de $\Delta_1 x$, ... pour les valeurs numériquement assez petites de ces quatre accroissements, les exposants des mêmes accroissements ayant leurs sommes partielles $i_1 + j_1$, $i_2 + j_2$ égales à 1 au moins, leur somme totale égale à 3 ou à 4. Les substitutions (23) exécutées dans l'expression Σ donneront donc

$$(28)\qquad \Sigma = (\mathfrak{K}h + \mathfrak{H}k)hk,$$

où $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H}$ sont des fonctions évidemment olotropes : 1° de x, y, à l'intérieur de $\{\mathfrak{z}\}$; 2° de $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}_2$, quand leurs valeurs numériques sont inférieures à Π; 3° de h, k, quand leurs valeurs numériques tombent au-dessous de certaines quantités positives η', $\varkappa'$ prises suffisamment petites. Après quoi, la combinaison des formules (27), (28), (26) donnera

$$(29)\qquad \{0\ 1\ 2\}_{uv} = \left[\mathfrak{D}(x, y) + \frac{\mathfrak{K}h + \mathfrak{H}k}{\mathfrak{T}}\right]\{0\ 1\ 2\}_{xy}.$$

Si maintenant l'on appelle H, K les limites supérieures assignables aux valeurs numériques des fonctions $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H}$ pour les valeurs de x, y rendant le point (x, y) intérieur à $\{\mathfrak{z}\}$, pour celles de $\mathfrak{m}_1$, ..., $\mathfrak{n}_2$ qui sont numériquement inférieures à Π; pour celles, enfin, de h, k qui le sont à η', $\varkappa'$ (200*) (*Cf.* II), les quantités positives η, $\varkappa$, limitées par les quatre inégalités

$$\eta < \eta', \qquad \varkappa < \varkappa',$$

$$\eta < \frac{\mathfrak{I}\tau}{2\mathrm{H}}, \qquad \varkappa < \frac{\mathfrak{I}\tau}{2\mathrm{K}}, \tag{30}$$

satisferont à toutes les exigences de l'énoncé. Car en prenant $|h| \leqq \eta$, $|k| \leqq \varkappa$, et à cause de (22), (30), (21), on aura certainement

$$\left| \frac{\mathcal{H}h + \mathcal{K}k}{\mathfrak{G}} \right| < \frac{\mathrm{H}\eta + \mathrm{K}\varkappa}{\tau} < \mathfrak{I} < |\varpi(x, y)|,$$

ce qui assure à l'expression entre crochets dans la relation (29) le signe de $\varpi(x, y)$, et par suite aux triangles (24), (25) des signes identiques ou opposés selon que ce déterminant est positif ou négatif.

IV. Revenons maintenant à l'anneau $\{\alpha\}$ de l'alinéa II, et considérons dans son intérieur un point quelconque $(x^{(0)}, y^{(0)})$, dont nous nommerons $(u^{(0)}, v^{(0)})$ le correspondant. Inscrivons dans $\{\alpha\}$ un contour polygonal $\{P_\lambda\}$, dont les sommets auront naturellement pour correspondants ceux d'un contour polygonal $\{Q_\mu\}$ inscrit dans $\{\beta\}$, et, ce qui est évidemment possible (puisque μ tend vers zéro en même temps que λ), prenons λ assez petit (8, III) : 1° pour que ces contours soient tous deux des anneaux; 2° pour que le parcours de $\{\alpha\}$ par (x, y) et le parcours correspondant de $\{\beta\}$ par (u, v) fassent rencontrer les soudures de $\{P_\lambda\}$, $\{Q_\mu\}$ dans des ordres conférant à ces anneaux polygonaux les signes mêmes des anneaux curvilignes où ils ont été inscrits; 3° pour que $\{P_\lambda\}$ ait le point $(x^{(0)}, y^{(0)})$ à son intérieur.

Un raisonnement facile, mais fastidieux, que je supprime à cause de cela, montre que l'intervalle polygonal $\{P_\lambda\}$ peut être divisé en un nombre limité de triangles (de signes identiques au sien)

$$\{t_1\}_{xy}, \quad \ldots, \quad \{t_N\}_{xy},$$

jouissant tous de la propriété possédée par le triangle $\{0\,1\,2\}_{xy}$ de l'alinéa précédent (III), et de l'un desquels le point $(x^{(0)}, y^{(0)})$ soit un sommet (¹). Les triangles correspondants

$$\left\{t_1\right\}_{uv}, \quad \ldots, \quad \left\{t_N\right\}_{uv} \tag{31}$$

auront tous, en conséquence, le signe commun aux précédents et à $\{P_\lambda\}$ si $\mathfrak{D}(x, y)$ reste positif, le signe contraire si ce déterminant reste négatif; et, comme leur addition topographique reproduit évidemment $\{Q_\mu\}$, cet intervalle aura le signe de $\{P_\lambda\}$ ou le signe contraire, selon que le signe invariable de $\mathfrak{D}(x,y)$ sera $+$ ou $-$. Même chose aura donc lieu pour les intervalles $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, puisque leurs signes sont ceux de $\{P_\lambda\}$, $\{Q_\mu\}$.

Enfin le point $(u^{(0)}, v^{(0)})$ est nécessairement intérieur à $\{\beta\}$, de même que $(x^{(0)}, y^{(0)})$ l'est à $\{\alpha\}$, parce qu'il est placé ainsi relativement à $\{Q_\mu\}$ comme sommet de l'un des triangles de même signe (31) en la somme desquels cet intervalle polygonal se trouve être décomposé (8, IV).

On prouvera sans plus de difficultés que, si $(x^{(0)}, y^{(0)})$ est extérieur à $\{\alpha\}$, $(u^{(0)}, v^{(0)})$ l'est pareillement à $\{\beta\}$.

14. Le théorème précédent s'énonce brièvement en disant qu'*à tout intervalle franc, infiniment petit, du plan des xy* (8, III, *in fine*), *où* $U(x,y)$, $V(x, y)$ *demeurent olotropes sans que* $\mathfrak{D}(x,y)$ *s'y évanouisse, correspond dans celui des uv un intervalle franc aussi* (15, *inf.*), *de même signe ou de signe contraire selon que ce déterminant est positif ou négatif.* Il montre une analogie à remarquer entre une *paire* de fonctions $U(x, y)$, $V(x,y)$ de *deux* variables et une seule fonction $W(z)$ d'une variable unique; dans ce dernier cas, on sait effectivement depuis longtemps, que deux intervalles (primaires) francs et infiniment petits, contenant l'un des valeurs de z, l'autre les valeurs correspondantes de $W(z)$, sont de signes identiques ou opposés, selon que, pour les valeurs de z considérées, la dérivée $W'(z)$ reste positive

(¹) On y réussit de mille manières, de la suivante en particulier. Si $\{P_\lambda\}$ se réduit à un triangle ayant un sommet en $(x^{(0)}, y^{(0)})$ on procédera par des coupures respectivement *parallèles à ses trois côtés,* que l'on multipliera et rapprochera suffisamment. Sinon, on subdivisera de la manière ci-dessus chacun des divers triangles en lesquels cet intervalle peut alors être divisé (8, II), mais sous la condition additionnelle, évidemment réalisable, que $(x^{(0)}, y^{(0)})$ soit un sommet de quelqu'un des triangles partiels.

ou négative. On pourrait donc dire presque aussi bien, d'une paire de fonctions, qu'elle est *croissante* quand son déterminant différentiel est positif, *décroissante* quand il est négatif.

15. L'intervalle $\}\mathfrak{L}\{$ qui, dans le plan des uv, correspond à l'intervalle $\}\mathfrak{z}\{$ de celui des xy peut n'être pas franc; mais il résulte de la même proposition que *celui-ci peut toujours être divisé en un nombre limité d'intervalles partiels francs* $\}\mathfrak{z}_1\{$, $\}\mathfrak{z}_2\{$, ..., *tels que leurs correspondants* $\}\mathfrak{L}_1\{$, $\}\mathfrak{L}_2\{$, ..., *le soient tous aussi*. Pour cela, il suffit évidemment de tracer dans $\}\mathfrak{z}\{$ des anneaux tels que $\}\alpha\{$ pour découper ces intervalles partiels, en s'arrangeant toutefois de manière que leurs mesures demeurent numériquement supérieures à quelque constante positive. (On le voit plus facilement encore en divisant en orthorhombes de dimensions inférieures à α, mais en nombre limité, quelque orthorhombe ébauchant $\}\mathfrak{z}\{$ par excès.)

Après quoi, on pourra agrandir ces intervalles partiels et restreindre leur nombre, en substituant à quelques-uns pris en contiguïté leur somme topographique toutes les fois qu'elle restera franche et que celle de leurs correspondants serait induppliquée (9).

A certains points de vue, on peut donc supposer que l'intervalle $\}\mathfrak{L}\{$ est franc aussi; et, comme alors les fonctions implicites $X(u, v)$, $Y(u, v)$ précisées par les conditions initiales $X(u_0, v_0) = x_0$, $Y(u_0, v_0) = y_0$, (x_0, y_0) et (u_0, v_0) désignant un point intérieur à $[\mathfrak{z}]$ et son correspondant (intérieur à $\}\mathfrak{L}\{$ ainsi que nous l'avons vu) sont toutes deux monodromes dans l'intervalle $\}\mathfrak{L}\{$, partant olotropes à proprement parler (11), le point (x, y) *correspond* inversement à (u, v) de la même manière que, jusqu'ici, ce dernier correspondait à l'autre.

16. *En supposant l'intervalle* $\}\mathfrak{L}\{$ *franc comme ci-dessus, pour simplifier, en divisant* $\}\mathfrak{z}\{$ *en parties franches*

$$\ldots,\quad \}i\{,\quad \ldots \tag{32}$$

assujetties à la seule condition d'avoir des dimensions toutes inférieures à une même quantité positive infiniment petite λ, *en appelant indéfiniment*

$$\ldots,\quad (x, y),\quad \ldots$$

des points formant respectivement avec les intervalles partiels (32) *des figures de dimensions inférieures à* λ, *points quelconques à part cela, et en conservant les notations des intervalles eux-mêmes pour représenter leurs mesures, on a la formule*

$$|\mathfrak{L}| = \lim \Sigma\, \mathfrak{D}(x, y)\,|i|, \tag{33}$$

où la sommation Σ *s'étend à tous les intervalles* (32).

I. *Si la fonction* $g(x, y)$ *est olotrope à l'intérieur de* $|\mathfrak{J}|$ *et si l'on prend l'intégrale sur l'anneau de l'un des intervalles* (32) (8, III), *on finit par avoir*

$$\left|\int_{|i|} g(x, y)\,dx + g^{(0,1)}(x_i, y_i)\,|i|\right| < |G\lambda\,|i||, \tag{34}$$

où G *et* (x_i, y_i) *représentent une certaine constante positive et, pour mieux préciser, quelque point formant avec* $|i|$ *une figure de dimensions inférieures à* λ.

1° Nous raisonnerons à partir du moment où λ reste inférieure aux olomètres de $g(x, y)$, et nous supposerons, pour commencer, que $|i|$ a été découpé dans la bande comprise entre les deux parallèles à l'axe des y, $x - x_0$, $x = x_1$, par la parallèle à l'axe des x, $y = y_0$ et par l'arc

$$x = t, \qquad y = \chi(t),$$

où $\chi(t)$ est, dans l'intervalle allant de $t = x_0$ à $t = x_1$, une fonction olotrope de t laissant un signe invariable à la différence $\chi(t) - y_0$, puis nous écrirons le développement de $g(x, y)$ par la formule de Taylor

$$\left\{\begin{aligned} g(x,y) &= a_{0,0} + a_{1,0}(x - x_0) + a_{0,1}(y - y_0) + \ldots \\ &= g_0(x) + a_{0,1}(y - y_0) \\ &\quad + (y - y_0)\,[\mathcal{H}(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0)(x - x_0) + \mathcal{K}(x_0, \ldots)(y - y_0)], \end{aligned}\right. \tag{35}$$

où $g_0(x)$ est une fonction de x seulement, olotrope dans l'intervalle primaire $|x_0 x_1|$, où l'on a $a_{0,1} = g^{(0,1)}(x_0, y_0)$, où en appelant H, K, Λ certaines constantes positives, au-dessous de la dernière desquelles λ finit sûrement par se maintenir, on a encore

$$|\mathcal{H}| < \mathrm{H}, \qquad |\mathcal{K}| < \mathrm{K}, \tag{36}$$

pour toute position de (x_0, y_0) à l'intérieur de [3] et pour

$$(37)\qquad |x - x_0| < \Lambda, \qquad |y - y_0| < \Lambda,$$

en particulier, pour toute position de (x, y) intérieure à $\{i\}$ (199* *et suiv.*).

L'intégration des deux membres de la formule (35), exécutée sur l'anneau de $\{i\}$ donne

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\{i\}} g(x,y)\,dx - g^{(0,1)}(x_0,y_0)\int_{\{i\}} y\,dx \\ &\quad = \int_{\{i\}} [g_0(x) - a_{0,1}y_0]\,dx + \int_{\{i\}} [(x-x_0)\mathcal{K} + (y-y_0)\mathcal{K}'](y-y_0)\,dx, \end{aligned}\right.$$

et l'on a tout d'abord

$$(39)\qquad \int_{\{i\}} y\,dx = -\{i\},$$

à cause de

$$\int_{\{i\}} y\,dx = [xy]_{\{i\}} - \int_{\{i\}} x\,dy$$

et de $\{xy\}_{\{i\}} = 0$, puisque cette expression est la différence des valeurs prises par la même quantité xy au commencement et à la fin de l'anneau, d'où

$$\int_{\{i\}} y\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{\{i\}} (y\,dx - x\,dy) = -\{i\} \quad (8,\ \text{III}).$$

On a ensuite

$$(40)\qquad \int_{\{i\}} [g_0(x) - a_{0,1}y_0]\,dx = 0,$$

parce que cette intégrale est la différence des valeurs semblables de l'intégrale indéfinie de la différentielle exacte qui est placée sous le signe d'intégration.

En prenant x pour variable indépendante, les parties de la dernière des intégrales (38) que fournissent les parties rectilignes de l'anneau sont nulles parce qu'il faut y prendre, soit $t = x_0$ ou $t = x_1$, d'où

$dx = 0\,dt$, soit $y = y_0$ identiquement, d'où $y - y_0 = 0$; il reste donc

$$(41)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\{i\}} [(x - x_0)\mathcal{H} + (y - y_0)\mathcal{K}](y - y_0)\,dx \\ &\quad = \pm \int_{x_0}^{x_1} [(x - x_0)\mathcal{H} + (y - y_0)\mathcal{K}](y - y_0)\,dx, \end{aligned} \right.$$

y devant être remplacé par $\chi(x)$ dans le second membre, et les égalités (39), (40), (41) réduisent la formule (38) à

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\{i\}} g(x, y)\,dx + g^{(0,1)}(x_0, y_0)\,\{i\} \\ &\quad = \pm \int_{x_0}^{x_1} [(x - x_0)\mathcal{H} + (y - y_0)\mathcal{K}](y - y_0)\,dx. \end{aligned} \right.$$

Comme $y - y_0$ conserve par hypothèse un signe invariable de $x = x_0$ à $x = x_1$, et, en vertu des inégalités (36), on a

$$(43)\quad \left\{ \begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} [x - x_0)\mathcal{H} + (y - y_0)\mathcal{H}](y - y_0)\,dx \right| &< \left| (\mathrm{H} + \mathrm{K})\lambda \int_{x_0}^{x_1} (y - y_0)\,dx \right| \\ &< |(\mathrm{H} + \mathrm{K})\lambda\,\{i\}|, \end{aligned} \right.$$

à cause de l'égalité évidente

$$\pm \int_{x_0}^{x_1} (y - y_0)\,dx = \int_{\{i\}} y\,dx = -\{i\}. \qquad (39)$$

En recommençant enfin, sur la fonction olotrope $g^{(0,1)}(x, y)$, un raisonnement analogue à celui qui nous a conduits à la formule (35), on trouvera

$$(44)\qquad |g^{(0,1)}(x_i, y_i) - g^{(0,1)}(x_0, y_0)| < \lambda(\mathrm{H}' + \mathrm{K}'),$$

où H′, K′ sont des constantes positives absolument indépendantes des positions occupées par (x_0, y_0) à l'intérieur de $\{5\}$ et de (x_i, y_i) à l'intérieur de $\{i\}$ (199* *et suiv.*).

Maintenant, il suffit de combiner ensemble l'égalité (42) et les inégalités (43), (44), puis de poser

$$\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{H}' + \mathrm{K}' = \mathrm{G},$$

pour arriver à l'inégalité (34) que nous voulions établir.

2° Supposons, en second lieu, que l'anneau $\{i\}$ soit d'une forme quelconque, mais que sur chacun des arcs curvilignes qui peuvent entrer dans sa composition, y reste fonction olotrope de x [c'est-à-dire qu'en y posant $x=\varphi(t)$, $y=\chi(t)$, on n'ait jamais $\varphi'(t)=0$]; on pourra évidemment diviser l'intervalle $[i]$ en un nombre limité d'autres

$$(45)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cdots\cdot \\ \{i'\}, \\ \cdots\cdot \end{array}\right.$$

ayant tous la forme considérée ci-dessus (1°), conduisant par suite aux inégalités

$$\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left|\int_{\{i'\}} g(x,y)\,dx + g^{(0,1)}(x_i, y_i)\{i\}\right| < |G\lambda\{i'\}|, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

parce que chacun d'eux et le même point (x_i, y_i) forment toujours une figure de dimensions inférieures à λ. Pour retrouver l'inégalité (34), il suffira donc d'additionner les précédentes membre à membre, en se rappelant que tous les intervalles (45) sont d'un même signe, et en ayant égard aux égalités

$$(46)\qquad \ldots+\{i'\}+\ldots=\{i\},$$

$$(47)\qquad \ldots+\int_{\{i'\}} g(x,y)\,dx+\ldots=\int_{\{i\}} g(x,y)\,dx.$$

La première est évidente; la seconde a lieu parce que, les intervalles (45) étant d'un même signe, leur contiguïté s'opère par des chemins dont les directions sont forcément opposées, et qu'ainsi les parties correspondantes des intégrales du premier membre se détruisent deux à deux, qu'il en reste seulement les parties afférentes aux portions de l'anneau $\{i\}$, dont l'addition reproduit l'intégrale du second membre.

3° Les points des parties curvilignes de l'anneau $\{i\}$ où y peut cesser d'être fonction olotrope de x sont en nombre essentiellement limité, parce que ces parties sont en nombre tel, et que, pour chacune d'elles, $\varphi'(t)$ fonction olotrope ne dégénérant pas en une constante ne peut offrir des zéros en nombre illimité (4**). Si donc on retranche de l'intervalle $\{i\}$ et de son anneau des parties de dimensions infiniment petites, contenant chacune un des points dont il s'agit, et cela, par exemple, au moyen de deux coupures rectilignes parallèles aux axes, il restera un intervalle variable donnant prise constante (2°) à l'inégalité (34), comportant, en outre, une mesure et une intégrale qui ont pour limites évidentes $\{i\}$ et l'intégrale que nous considérons; d'où l'extension certaine de cette inégalité à l'intervalle $\{i\}$.

II. *On a*

$$\int_{\{\mathfrak{I}\}} g(x, y)\, dx = -\lim \Sigma g^{(0,1)}(x, y)\{i\}, \tag{48}$$

$$\int_{\{\mathfrak{I}\}} g(x, y)\, dy = \lim \Sigma g^{(1,0)}(x, y)\{i\}, \tag{49}$$

où les intégrales sont prises sur l'anneau de l'intervalle $\{\mathfrak{I}\}$, *et où le signe* Σ *a la même signification que dans la relation* (33).

En additionnant membre à membre toutes les inégalités du genre de (34) que l'on peut écrire pour les divers intervalles partiels (32), puis ayant égard à des égalités analogues à (46), (47), il vient immédiatement

$$\left| \int_{\{\mathfrak{I}\}} g(x, y)\, dx + \Sigma g^{(0,1)}(x, y)\{i\} \right| < |G\lambda\{\mathfrak{I}\}|,$$

d'où la formule (48), puisque λ est une quantité infiniment petite.

L'autre (49) s'établit par la simple permutation de x en y dans les raisonnements qui précèdent; le second membre y est pourvu d'un signe différent, parce qu'au lieu de l'égalité (39) on rencontre

$$\int_{\{i\}} x\, dy = \{i\}.$$

III. On a maintenant (8, III)

$$\{\mathfrak{L}\} = \frac{1}{2} \int_{\{\mathfrak{L}\}} (u\, dv - v\, du),$$

ou bien, si l'on change de variables au moyen des formules de transformation (18),

$$\{\mathfrak{L}\} = \frac{1}{2}\int_{\{\mathfrak{S}\}} \left[\mathrm{U}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dx + \frac{d\mathrm{V}}{dy}\,dy\right) - \mathrm{V}\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\,dy\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\{\mathfrak{S}\}} \left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{\{\mathfrak{S}\}} \left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dy} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dy}\right)dy;$$

d'où la relation (33) dont nous voulions démontrer l'exactitude, en appliquant les formules (48), (49) à la transformation des deux dernières intégrales et en ayant égard aux identités évidentes

$$\frac{d}{dy}\left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right) = -\,\mathfrak{D}(x, y) + \left(\mathrm{U}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx\,dy} - \mathrm{V}\frac{d^2\mathrm{U}}{dx\,dy}\right),$$
$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dy} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dy}\right) = \quad \mathfrak{D}(x, y) + \left(\mathrm{U}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx\,dy} - \mathrm{V}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx\,dy}\right).$$

17. *Quelle que soit la fonction $f(x, y)$, olotrope dans l'intervalle $\{\mathfrak{S}\}$, la variante*

(50) $$\Sigma f(x, y)\{i\},$$

construite avec elle, comme celle du second membre de la relation (33) l'a été avec $\mathfrak{D}(x, y)$, est toujours convergente.

I. *Il existe quelque paire de fonctions, olotropes dans le même intervalle,*

(51) $$\mathrm{P}(x, y), \quad \mathrm{Q}(x, y),$$

dont le déterminant différentiel est précisément égal à $f(x, y)$.

Pour en former une, il suffit effectivement de prendre (¹)

$$\mathrm{P}(x, y) = f^{(-1,0)}(x, y), \quad \mathrm{Q}(x, y) = y,$$

(¹) Pour représenter la dérivée $\dfrac{d^{p+q} f(x, y)}{dx^p\, dy^q}$, j'ai proposé de substituer à cette écriture, parfois souverainement encombrante et incommode, quoique classique, et j'emploie souvent avec avantage la notation $f^{(p,q)}(x, y)$, simple extension au cas de plusieurs variables, de celle de Lagrange, $f^{(p)}(x)$, pour le cas d'une seule (159*). L'introduction d'accents *négatifs* permet de conserver les mêmes avantages dans le calcul *inverse* des dérivées : si, par exemple, p, q sont des entiers absolus, $f^{(-p,q)}(x, y)$ représentera le résultat du calcul consistant à exécuter, sur $f(x, y)$, p intégrations (indéfinies) par rappuisqu'il vient alors

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dP}{dx} & \dfrac{dP}{dy} \\ \dfrac{dQ}{dx} & \dfrac{dQ}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x, y) & f^{(-1,1)}(x, y) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = f(x, y).$$

Il existe même une infinité de paires de semblables fonctions (21, *inf.*), parmi lesquelles, évidemment,

$$P(x, y) = x, \qquad Q(x, y) = f^{(0,-1)}(x, y) \left[= \int f(x, y)\, dy\right].$$

II. Si $f(x, y)$ ne s'évanouit jamais dans l'intérieur de $\{\mathfrak{z}\}$, et si, à l'intérieur de cet intervalle, les relations

$$p = P(x, y), \qquad q = Q(x, y)$$

font correspondre celui d'un intervalle $\{\mathfrak{X}\}$, franc aussi, le théorème précédent (16) donne immédiatement

$$\lim \Sigma f(x, y) \{i\} = \{\mathfrak{X}\}.$$

Si $\{\mathfrak{X}\}$ n'est pas franc, il est toujours décomposable en parties telles, par une division convenable de $\{\mathfrak{z}\}$ (15), et la formule précédente subsiste évidemment.

III. Quand $f(x, y)$ s'évanouit identiquement à l'intérieur de $\{\mathfrak{z}\}$, on a de suite

$$\lim \Sigma f(x, y) \{i\} = \lim \Sigma 0 . \{i\} = 0.$$

Quand $f(x, y)$ y prend la valeur 0, mais non identiquement, le cas se ramène facilement au précédent par la considération de coupures variables retranchant de $\{\mathfrak{z}\}$ des parties, de mesures infiniment petites, en dehors desquelles $f(x, y)$ ne s'évanouit plus; mais il est superflu de nous engager dans cette discussion.

---

port à x, accompagnées de q différentiations par rapport à y, toutes opérations dont l'ordre est indifférent (224* *et suiv.*). De même, $f^{(-p,-q)}(x, y)$ équivaudra à

$$\int\int \cdots \int f(x, y)\, dx^p\, dy^q,$$

les intégrations étant en nombre total $= p + q$. C'est cette notation que j'emploie ici, et plus bas encore (21, *inf.*), où son utilité sera plus apparente.

18. La limite de la somme (50), qui se présente si souvent dans les applications géométriques et autres, a été nommée l'*intégrale définie double de* $f(x,y)\,dx\,dy$, *prise dans l'intervalle* $\{\mathfrak{J}\}$, et on peut la représenter par

$$\iint_{\{\mathfrak{J}\}} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{52}$$

Pour la calculer, il suffit, d'après ce qui précède, de chercher une détermination de l'*intégrale indéfinie binaire* de la fonction $f(x,y)$ considérée comme un déterminant différentiel, savoir quelque paire de fonctions (51), puis de *prendre cette paire de fonctions aux limites de* $\{\mathfrak{J}\}$, c'est-à-dire de prendre la mesure de l'intervalle $\{\mathfrak{X}\}$ ayant pour enceinte le contour que décrit le point $[P(x,y), Q(x,y)]$ quand (x,y) décrit l'anneau de $\{\mathfrak{J}\}$ (dans le sens voulu), mesure donnée par la formule (8, III)

$$\{\mathfrak{X}\} = \frac{1}{2}\int_{\{\mathfrak{X}\}}(p\,dq - q\,dp) = \frac{1}{2}\int_{\{\mathfrak{J}\}}(P\,dQ - Q\,dP), \tag{53}$$

où

$$dP = \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy, \qquad dQ = \frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy.$$

La dénomination d'intégrale double se trouve justifiée par la superposition des deux intégrations simples qui sont nécessaires au calcul de l'expression (52), savoir : la première, de nature *binaire,* pour passer de $f(x,y)$ à quelque paire d'autres fonctions (51) dont elle soit le déterminant différentiel, la seconde, de nature *primaire,* à exécuter dans le dernier membre de la formule (53). De tout ceci, ressortent, dans la conception des intégrales doubles, des analogies maintenant frappantes avec les intégrales simples, et aussi, pour leur calcul, un procédé infiniment plus large à cause de l'indétermination d'une intégrale binaire (21, *inf.*), indépendant de toute distinction entre les variables x, y, semblant devoir faciliter le maniement de ces expressions dans bien des circonstances.

Pour retomber par exemple sur la règle classique, propre au cas où l'intervalle $\{\mathfrak{J}\}$, supposé positif, est découpé dans la bande comprise entre les parallèles à l'axe des y,

$$x = x_0, \qquad x = X \qquad (x_0 < X)$$

par les arcs (ordinaires),

$$y = \varphi_0(x), \qquad y = \Phi(x) \qquad [\varphi_0(x) < \Phi(x)],$$

il suffit de remarquer que l'on a aussi, comme au n° 16, I,

$$\{\mathcal{H}\} = -\int_{\{\mathcal{H}\}} q\, dp = -\int_{\{\mathfrak{J}\}} \mathrm{Q}\, d\mathrm{P},$$

et de prendre (17, I, *in fine*)

$$\mathrm{P}(x, y) = x, \qquad \mathrm{Q}(x, y) = f^{(0,-1)}(x, y).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\iint_{\{\mathfrak{J}\}} f(x, y)\, dx\, dy &= \{\mathcal{H}\} \\
&= -\int_{\{\mathfrak{J}\}} f^{(0,-1)}(x, y)\, dx \\
&= -\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f^{(0,-1)}[x, \varphi_0(x)]\, dx - \int_{\mathrm{X}}^{x_0} f^{(0,-1)}[x, \Phi(x)]\, dx \\
&= \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \{ f^{(0,-1)}[x, \Phi(x)] - f^{(0,-1)}[x, \varphi_0(x)] \}\, dx \\
&= \int_{x_0}^{\mathrm{X}} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\Phi(x)} f(x, y)\, dy.
\end{aligned}$$

En choisissant effectivement y pour variable indépendante sur les parties rectilignes de l'anneau de $\{\mathfrak{J}\}$, il vient immédiatement $dx = 0.dy$, parce qu'on y a $x = x_0$, ou bien $x = \mathrm{X}$, ce qui entraîne la nullité des parties correspondantes de l'intégrale simple à prendre sur cet anneau.

19. Des considérations précédentes, on tire, en tous cas, une démonstration d'une rare facilité, pour la formule servant à exécuter un changement de variables dans une intégrale double, formule d'où ressortait depuis longtemps, entre les intégrales doubles et les intégrales simples, mais inexplicable, une analogie du genre de celles que nous venons de signaler.

Si les fonctions $g(\xi, \eta)$, $h(\xi, \eta)$ sont olotropes à l'intérieur d'un inter-

valle franc $|\Omega|$, *et si, quand* (ξ, η) *décrit l'anneau de cet intervalle, le point, de coordonnées*

$$x = g(\xi, \eta), \qquad y = h(\xi, \eta),$$

décrit celui de $|\mathfrak{Z}|$, *on a*

$$(54) \qquad \iint_{|\mathfrak{Z}|} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{|\Omega|} f[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)]\, \Delta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

où

$$(55) \qquad \Delta(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \dfrac{dg}{d\xi} & \dfrac{dg}{d\eta} \\ \dfrac{dh}{d\xi} & \dfrac{dh}{d\eta} \end{vmatrix}.$$

Nous avons effectivement trouvé (17, II)

$$(56) \qquad \iint_{|\mathfrak{Z}|} f(x, y)\, dx\, dy = |\mathfrak{X}|,$$

$|\mathfrak{X}|$ étant toujours l'intervalle dont l'enceinte est décrite par le point de coordonnées

$$p = \mathrm{P}(x, y), \qquad q = \mathrm{Q}(x, y),$$

quand (x, y) décrit l'anneau de $|\mathfrak{Z}|$, ou bien, ce que notre hypothèse fait revenir au même, par le point de coordonnées

$$p = \mathfrak{p}(\xi, \eta) = \mathrm{P}[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)], \qquad q = \mathfrak{q}(\xi, \eta) = \mathrm{Q}[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)],$$

quand (ξ, η) décrit l'anneau de $|\Omega|$. La formule (33), appliquée à la mesure de l'intervalle $|\mathfrak{X}|$, donne donc, sous le bénéfice de la définition de l'intégrale double (18)

$$(57) \qquad |\mathfrak{X}| = \iint_{|\Omega|} \begin{vmatrix} \dfrac{d\mathfrak{p}}{d\xi} & \dfrac{d\mathfrak{p}}{d\eta} \\ \dfrac{d\mathfrak{q}}{d\xi} & \dfrac{d\mathfrak{q}}{d\eta} \end{vmatrix} d\xi\, d\eta$$

$$= \iint_{|\Omega|} \begin{vmatrix} \mathrm{P}^{(1,0)}[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)] & \mathrm{P}^{(0,1)}[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)] \\ \mathrm{Q}^{(1,0)}[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)] & \mathrm{Q}^{(0,1)}[g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{dg}{d\xi} & \dfrac{dg}{d\eta} \\ \dfrac{dh}{d\xi} & \dfrac{dh}{d\eta} \end{vmatrix} d\xi\, d$$

d'après la règle de formation du déterminant différentiel d'une paire de fonctions composées (306* *bis*). Pour arriver à la relation (54), il suffit maintenant d'ajouter membre à membre (56) et (57), en ayant égard à (55) ainsi qu'à

$$\begin{vmatrix} P^{(1,0)}(x,y) & P^{(0,1)}(x,y) \\ Q^{(1,0)}(x,y) & Q^{(0,1)}(x,y) \end{vmatrix} = f(x,y).$$

20. Deux fonctions $U(x,y)$, $V(x,y)$, toutes deux olotropes dans l'intervalle franc $\{\mathfrak{z}\}$, donnent lieu à la relation

$$\int_{\{\mathfrak{z}\}} (U\,dx + V\,dy) = \int\int_{\{\mathfrak{z}\}} \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) dx\,dy,$$

qui est bien connue, mais que nous notons en passant parce que nous l'avons, pour ainsi dire, déjà démontrée. Pour y arriver, il suffit effectivement d'ajouter membre à membre les formules (48), (49), après avoir pris $g(x,y) = U(x,y)$ dans la première, $g(x,y) = V(x,y)$ dans la seconde, et d'avoir égard à la définition de l'intégrale double (18).

De la relation en question dérive, par la voie la plus rapide, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale simple, figurant dans son premier membre, s'évanouisse sur tous les anneaux, ou bien encore, ce qui est équivalent, pour que l'intégrale de la même différentielle conserve une valeur invariable sur tous les chemins traçables entre deux extrémités fixes quelconques : cette condition est évidemment que la fonction entre parenthèses dans l'intégrale double soit nulle identiquement, c'est-à-dire que $U\,dx + V\,dy$ soit une différentielle exacte.

21. Les considérations du n° 17 posent naturellement le problème suivant que nous allons résoudre :

Intégrer binairement une fonction donnée, $f(x,y)$, de deux variables, c'est-à-dire trouver toutes les paires de fonctions $P(x,y)$, $Q(x,y)$, qui donnent

$$(58) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dP}{dx} & \dfrac{dP}{dy} \\ \dfrac{dQ}{dx} & \dfrac{dQ}{dy} \end{vmatrix} = f(x,y).$$

I. Si l'on a $f(x,y)=0$ identiquement, on voit immédiatement (314*) qu'il faut prendre, ou bien

$$Q(x,y)=\text{const.},\qquad P(x,y)=\text{indéterminée},$$

ou bien

$$Q(x,y)=\text{indéterminée},\qquad P(x,y)=\mathfrak{z}[Q(x,y)],$$

$\mathfrak{z}$ représentant ici la caractéristique d'une composante arbitraire à une seule variable.

II. Sinon, et en supposant d'abord que $f(x,y)=1$, c'est-à-dire qu'il s'agisse seulement d'intégrer l'équation

$$(59)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dP}{dx} & \dfrac{dP}{dy} \\ \dfrac{dQ}{dx} & \dfrac{dQ}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P^{(1,0)}(x,y) & P^{(0,1)}(x,y) \\ Q^{(1,0)}(x,y) & Q^{(0,1)}(x,y) \end{vmatrix} = 1,$$

nous remarquerons que les dérivées d'aucune des fonctions inconnues ne peuvent s'évanouir toutes deux identiquement, et nous prendrons arbitrairement la seconde fonction $Q(x,y)$, en admettant que sa dérivée par rapport à y n'est pas identiquement nulle. On pourra, dès lors, substituer à x, y les nouvelles variables s, t liées à elles par les formules de transformation

$$(60)\qquad x=s,\qquad Q(x,y)=t,$$

donnant par leur résolution

$$(61)\qquad x=s,\qquad y=\eta(s,t).$$

Si maintenant on pose

$$P[s,\eta(s,t)]=\varpi(s,t),\qquad Q[s,\eta(s,t)]=\chi(s,t)\,[=t],$$

il viendra, en différentiant par rapport à s,

$$\frac{d\varpi}{ds}=P^{(1,0)}(s,\eta)+P^{(0,1)}(s,\eta)\eta^{(1,0)}(s,t),$$
$$\frac{d\chi}{ds}=Q^{(1,0)}(s,\eta)+Q^{(0,1)}(s,\eta)\eta^{(1,0)}(s,t)=0,$$

puis, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{d\chi}{dt} = Q^{(0,1)}(s, \eta)\,\eta^{(0,1)}(s, t) = 1.$$

De sorte que l'exécution, dans l'équation (59), des substitutions (61), puis l'addition, aux éléments de la première colonne du déterminant, de ceux de la deuxième, multipliés tous deux par $\eta^{(1,0)}(s, t)$, laissera

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\varpi}{ds} & P^{(0,1)}[s, \eta(s, t)] \\ 0 & 1 : \eta^{(0,1)}(s, t) \end{vmatrix} = 1,$$

d'où

$$\frac{d\varpi}{ds} = \eta^{(0,1)}(s, t),$$

puis immédiatement

$$\varpi(s, t) = \eta^{(-1,1)}(s, t) + \vartheta(t),$$

où la notation $\eta^{(-1,1)}(s, t)$ représente quelque détermination de $\int \eta^{(0,1)}(s, t)\, ds$ (*Cf.* note de la p. 226), où ϑ est une fonction arbitraire d'une seule variable. En opérant donc dans cette formule les substitutions inverses (60), il viendra définitivement

$$P(x, y) = \eta^{(-1,1)}[x, Q(x, y)] + \vartheta[Q(x, y)];$$

c'est l'expression de $P(x, y)$ au moyen de $Q(x, y)$ que nous cherchions.

La fonction $\eta(s, t)$ prenant évidemment toutes les formes possibles quand on fait varier indéfiniment celle de $Q(x, y)$ dans les transformations (60), et inversement, on peut considérer tout aussi bien les solutions de l'équation (59) comme fournies par les formules

$$\begin{cases} y = \eta(x, Q), \\ P = \eta^{(-1,1)}(x, Q) + \vartheta(Q), \end{cases}$$

à résoudre par rapport au couple (P, Q); η, ϑ représentent ici deux composantes entièrement arbitraires. On vérifiera facilement d'ailleurs, que les racines de ce système d'équations finies satisfont bien, quelle que soit $\eta(x, Q)$, à l'équation (59) considérée en ce moment.

En posant $\eta^{(-1,0)}(s,t) = \varphi(s,t)$, composante encore arbitraire, les formules précédentes prennent la forme

$$\begin{cases} y = \varphi^{(1,0)}(x, Q), \\ P = \varphi^{(0,1)}(x, Q) + 8(Q), \end{cases}$$

d'où a disparu tout signe d'intégration.

III. Supposons en dernier lieu, que, $f(x,y)$ étant $\neq 0$ identiquement, mais quelconque à part cela, on connaisse une intégrale particulière $[p(x,y), q(x,y)]$ de l'équation proposée (58).

Comme le déterminant différentiel de ces fonctions n'est pas identiquement nul [puisqu'il se réduit à $f(x,y)$], les équations

$$(62) \qquad p(x,y) = \xi, \qquad q(x,y) = \eta$$

se résolvent normalement par rapport à x, y (307* *et suiv.*) et donnent les formules de transformation

$$x = \mathfrak{X}(\xi, \eta), \qquad y = \mathfrak{Y}(\xi, \eta),$$

au moyen desquelles nous substituerons les nouvelles variables ξ, η à x, y dans l'équation à intégrer, de la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} \\ \frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{d\mathfrak{X}}{d\xi} & \frac{d\mathfrak{X}}{d\eta} \\ \frac{d\mathfrak{Y}}{d\xi} & \frac{d\mathfrak{Y}}{d\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dx} & \frac{dp}{dy} \\ \frac{dq}{dx} & \frac{dq}{dy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{d\mathfrak{X}}{dx} & \frac{d\mathfrak{X}}{dy} \\ \frac{d\mathfrak{Y}}{dx} & \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} \end{vmatrix},$$

après multiplication de ses deux membres par le déterminant différentiel de $\mathfrak{X}(\xi, \eta)$, $\mathfrak{Y}(\xi, \eta)$. Il reste évidemment

$$(63) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d\Pi}{d\xi} & \frac{d\Pi}{d\eta} \\ \frac{d\Xi}{d\xi} & \frac{d\Xi}{d\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{d\xi} & \frac{d\xi}{d\eta} \\ \frac{d\eta}{d\xi} & \frac{d\eta}{d\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

si l'on pose

$$P[\mathfrak{X}(\xi, \eta), \mathfrak{Y}(\xi, \eta)] = \Pi(\xi, \eta), \qquad Q[\mathfrak{X}(\xi, \eta), \mathfrak{Y}(\xi, \eta)] = \Xi(\xi, \eta).$$

En appelant donc maintenant $\Pi(\xi, \eta)$, $\Xi(\xi, \eta)$ la paire générale de solutions de l'équation (63), (II), le retour aux variables primitives x, y, opéré à l'aide des formules de transformation (62), donnera pour l'intégrale de l'équation (58), la paire de formules

$$\mathrm{P}(x,y)=\Pi[p(x,y),\, q(x,y)], \qquad \mathrm{Q}(x,y)=\Xi[p(x,y),\, q(x,y)].$$

IV. La solution complète de notre problème résulte évidemment de la combinaison de ce qui précède, avec la possession des intégrales particulières

$$p(x,y)=f^{(-1,0)}(x,y), \qquad q(x,y)=y,$$

ou bien

$$p(x,y)=x, \qquad q(x,y)=f^{(0,-1)}(x,y).$$

dont nous avons parlé au n° 17, I.

22. Je termine par deux applications, maintenant très faciles, mais assez intéressantes, à la théorie des fonctions d'une seule variable imaginaire. Elles reposent sur le lemme suivant :

A l'intérieur de tout intervalle franc $\{\mathfrak{z}\}$ *où la fonction*

$$f(x)=u=u'+iu''$$

de la variable imaginaire

$$x=x'+ix''$$

est olotrope avec l'olomètre δ, *les éléments de cette fonction,*

$$u'={}'\mathrm{U}(x',x''), \qquad u''={}''\mathrm{U}(x',x''), \tag{64}$$

sont des fonctions olotropes aussi de x', x'', *aux olomètres* $\frac{\delta}{2}$, $\frac{\delta}{2}$ (10), *qui donnent lieu aux identités*

$$\frac{d'\mathrm{U}}{dx'}=\frac{d''\mathrm{U}}{dx''}, \qquad \frac{d'\mathrm{U}}{dx''}=-\frac{d''\mathrm{U}}{dx'} \tag{65}$$

et

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d'\mathrm{U}}{dx'} & \dfrac{d''\mathrm{U}}{dx''} \\ \dfrac{d''\mathrm{U}}{dx'} & \dfrac{d''\mathrm{U}}{dx''} \end{vmatrix} = |f'(x)|^2. \tag{66}$$

I. En supposant x intérieure à $\{\mathfrak{z}\}$ et $|h|=\eta<\delta$, on a, par hypothèse,

$$f(x+h)=a_0+a_1h+\ldots+a_mh^m+\ldots,$$

et la série

$$\alpha_0+\alpha_1\eta+\ldots+\alpha_m\eta^m+\ldots,$$

formée par les modules des termes de la précédente, est encore convergente. En posant donc

$$a_m = a'_m + i a''_m, \qquad |a'_m| = \alpha'_m, \qquad |a''_m| = \alpha''_m,$$

d'où

$$\alpha'_m \leqq \alpha_m, \qquad \alpha''_m \leqq \alpha_m;$$

en posant encore

$$h = h' + i h'', \qquad |h'| = \eta', \qquad |h''| = \eta''$$

et, en supposant

$$\eta' < \frac{\delta}{2}, \quad \eta'' < \frac{\delta}{2},$$

d'où $\eta' + \eta'' < \delta$, les séries

$$\alpha'_0 + \alpha'_1(\eta' + \eta'') + \ldots + \alpha'_m(\eta' + \eta'')^m + \ldots,$$
$$\alpha''_0 + \alpha'''_1(\eta' + \eta'') + \ldots + \alpha''_m(\eta' + \eta'')^m + \ldots,$$

leur somme en même temps,

$$(\alpha'_0 + \alpha''_0) + (\alpha'_1 + \alpha''_1)(\eta' + \eta'') + \ldots + (\alpha'_m + \alpha''_m)(\eta' + \eta'')^m + \ldots,$$

sont convergentes aussi, et, par suite (107*), celles entières en η', η'', que fournit toute décomposition additive du terme général de la troisième en monômes dissemblables par rapport à η', η''; celles, en outre, que forment des termes choisis arbitrairement dans ces dernières, quoique sans répétition (105*).

Or, à la classe de ces séries partielles appartiennent évidemment les deux séries formées par les valeurs numériques des termes de celles entières en h', h'' que l'on obtient en sommant les premiers éléments, puis les seconds, des termes de la série

$$(67) \quad (a'_0 + i a''_0) + (a'_1 + i a''_1)(h' + i h'') + \ldots + (a'_m + i a''_m)(h' + i h'')^m + \ldots,$$

c'est-à-dire en cherchant les éléments,

$$(68) \qquad {}'\mathrm{U}(x' + h', x'' + h''), \qquad {}''\mathrm{U}(x' + h', x'' + h''),$$

de $f(x+h)$; ces deux fonctions sont donc développables en séries entières par rapport à h', h'', sous les conditions posées.

II. D'après la nature de la série (67), les termes du premier degré en h', h'' sont : $a'_1 h' - a''_1 h''$ dans le développement de la première des fonctions (68), et $a''_1 h' + a'_1 h''$ dans celui de la dernière; or ceci assigne bien les valeurs a'_1, $-a''_1$ aux deux membres de chacune des identités (65) à établir.

III. Pour la valeur du déterminant différentiel (66), on trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} a'_1 & -a''_1 \\ a''_1 & a'_1 \end{vmatrix} = a'^2_1 + a''^2_1,$$

c'est-à-dire le carré du module de $a'_1 + ia''_1$, valeur résultant pour $f'(x)$ de la nature de la même série (67).

Une conséquence de la relation (66) est à remarquer : quand les fonctions $'\mathrm{U}(x', x'')$, $''\mathrm{U}(x', x'')$ sont *quelconques*, leur déterminant différentiel, fonction *quelconque* aussi de x', x'' (17, I), peut, à l'intérieur de $\{\mathfrak{Z}\}$, s'annuler en tous les points de un ou plusieurs arcs, aussi bien qu'en quelques points isolés seulement. Mais cette dernière particularité se présente exclusivement, quand il s'agit, comme ici, des éléments d'une même fonction olotrope de $x = x' + ix''$; car la dérivée de cette fonction est, comme elle, une fonction olotrope, n'admettant, dans tout intervalle limité, que des zéros en nombre limité (si elle n'est pas *identiquement nulle*) (4**).

23. Voici maintenant les deux points que j'avais en vue.

I. *En supposant, pour simplifier, que l'intervalle franc* $\{\mathfrak{Z}\}$ *soit invanescent, que* $f'(x)$ *ne s'évanouisse jamais dans son intérieur, et que l'intervalle* $\{\mathfrak{L}\}$ *que les relations* (64) *lui font correspondre* (12) *soit franc aussi, les signes de ces intervalles sont toujours identiques.*

Car la relation (66) assigne toujours le signe + au déterminant différentiel des seconds membres des équations (64) (13).

II. *Sous les mêmes hypothèses accompagnées par celle que* $\{\mathfrak{Z}\}$ *soit positif, la valeur de l'intégrale*

$$\int_{\{\mathfrak{Z}\}} {}'\mathrm{U}\, d''\mathrm{U}$$

est nécessairement positive.

Car cette intégrale dérive de

$$\int_{\{\mathfrak{L}\}} u'\, du''$$

par le changement de variables (64), et cette dernière (16, I) est la mesure même de l'intervalle $\}\mathcal{L}\{$, c'est-à-dire une quantité positive (I).

Une division convenable de l'intervalle $\}\mathfrak{J}\{$ ramène facilement tous les autres cas à celui que nous avons exclusivement considéré (15), (17, III, *in fine*).

Je ne connais aucune autre démonstration bien catégorique de la proposition énoncée dans l'alinéa I ci-dessus.

L'autre, qui est due à Riemann (Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. IX; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894-95), est d'une importance majeure dans la théorie des transcendantes abéliennes.