ÉMILE BOREL

Addition au mémoire sur les séries divergentes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 132-136
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__132_0>

ADDITION AU MÉMOIRE SUR LES SÉRIES DIVERGENTES,

PAR M. ÉMILE BOREL.

1. J'ai eu connaissance, pendant l'impression du Mémoire précédent, d'un résultat fort remarquable obtenu par M. Mittag-Leffler dès le mois de mai 1898 et publié en suédois dans les *Comptes rendus de l'Académie de Stockholm* (¹). Frappé par la beauté et l'élégance de ce résultat, j'ai cherché à le retrouver à l'aide des principes exposés dans mon Mémoire et j'ai été conduit ainsi à plusieurs conséquences nouvelles, qui me paraissent de nature à accroître encore l'importance de la découverte de M. Mittag-Leffler. Je me permets d'indiquer rapidement ici les plus importants de ces résultats, me réservant de revenir plus longuement sur ce sujet lorsque la publication en français du Mémoire de M. Mittag-Leffler m'aura permis d'étudier avec plus de soin sa méthode (²).

2. Je m'appuierai sur le résultat suivant, cas très particulier de théorèmes obtenus par MM. Runge, Hilbert, Painlevé (³) :

On peut développer la fonction $\frac{1}{1-x}$ *en une série de polynomes, convergeant absolument et uniformément dans tout domaine fini dont le contour n'a aucun point commun avec une coupure allant du point* $z = 1$ *au point*

(¹) Je dois remercier M. Hermite, qui a eu l'obligeance de me communiquer un résumé en français de ce Mémoire, résumé qui lui avait été adressé par M. Mittag-Leffler.

(²) M. Leau, qui a obtenu de son côté un théorème analogue à celui de M. Mittag-Leffler, doit en publier prochainement la démonstration dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*.

(³) On verra par la suite combien il peut être important pour les applications de connaître plusieurs méthodes conduisant au même résultat.

à l'infini. Nous prendrons d'ailleurs tout d'abord comme coupure l'axe réel [depuis $+1$ jusqu'à $+\infty$]. Posons, dès lors,

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty \mathrm{P}_n(x); \qquad \mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=1}^{k=k_n} c_{nk} x^k.$$

Soit, d'autre part,

$$\text{(2)} \qquad f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_k z^k + \ldots$$

une fonction analytique définie dans un cercle; concevons que, tous les points singuliers de cette fonction ayant été joints par des droites à l'origine, nous conservions les portions de ces droites qui vont des points singuliers à l'infini; nous formons ainsi un domaine (¹) dans lequel la série définit une fonction uniforme $f(z)$. Si l'on pose, pour toute valeur de n et de k,

$$\gamma_{nk} = \alpha_k c_{nk}$$

et ensuite

$$\pi_n(z) = \sum_{k=1}^{k=k_n} \gamma_{nk} z^k,$$

on a dans tout ce domaine

$$\text{(3)} \qquad f(z) = \sum \pi_n(z)$$

la série de polynomes ainsi formée étant uniformément convergente dans tout domaine fini D *intérieur* au domaine considéré (les contours des deux domaines étant sans point commun).

Cette proposition se démontre immédiatement à l'aide des remarques de la page 63. En effet, regardons le domaine D comme donné; soient C son contour et C′ un contour un peu plus grand que C, mais toujours intérieur au domaine de M. Mittag-Leffler (²); soit u un point de C′; lorsque z est intérieur à C, il est clair que $x = \frac{z}{u}$ est intérieur à un certain domaine γ et que, lorsque u décrit C′, les divers domaines γ sont

(¹) La construction précédente et la considération de ce domaine sont dues à M. Mittag-Leffler.

(²) Nous supposons de plus que si l'on prolonge les rayons qui joignent l'origine aux divers points de C′, ces prolongements ne coupent pas C.

tous intérieurs à un domaine Γ, à l'intérieur duquel la série (1) est *uniformément convergente*. Comme la fonction $f(z)$ n'a pas de singularité sur C', ni à son intérieur, la considération de l'intégrale de Cauchy suffit pour conduire au résultat énoncé, tout à fait analogue au théorème de M. Mittag-Leffler.

3. Voici maintenant des conséquences nouvelles : Soient a un nombre positif plus grand que un, qui restera fixe dans la suite, et ε un infiniment petit. La série (1) converge uniformément pour $z = \theta a e^{i\varepsilon}$, θ variant de zéro à un, lorsque ε est donné, mais la convergence cesse d'être uniforme lorsque ε tend vers zéro. Le maximum de la somme des valeurs absolues des termes de la série, pour une valeur donnée de ε, est une certaine fonction positive $F(\varepsilon)$ qui augmente indéfiniment lorsque ε tend vers zéro. Il serait aisé [1] de calculer $F(\varepsilon)$ connaissant explicitement le développement (1); mais, pour les conséquences théoriques qui suivent, nous n'avons pas besoin de la valeur de cette fonction; il nous suffit qu'elle existe.

Désignons par A_n des nombres tels que l'on ait

$$\left|\frac{1}{A_n}\right| > n^2 F\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et considérons la série

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}, \tag{4}$$

les a_n ayant des modules compris entre un nombre positif quelconque b et le nombre a choisi plus haut ($b < |a_n| < a$), la fonction $f(z)$ a alors un développement de Taylor tel que (2); si on le transforme en un développement en série de polynomes (3), on aura étendu sa région de convergence.

Le point sur lequel nous voulons attirer l'attention est le suivant : *cette extension de la région de convergence peut conduire à traverser des lignes singulières essentielles et est, par suite, en relation étroite avec*

---

(1) On peut prendre pour (1) le développement de M. Mittag-Leffler, ou employer l'une des méthodes générales indiquées au début. Il y aurait lieu de chercher un développement (1) tel que la fonction $F(\varepsilon)$ soit la moins grande possible.

l'extension de la notion de fonction analytique dont j'ai parlé dans ma Thèse. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que l'on ait

$$a_n = e^{i\pi n\sqrt{2}};$$

les points a_n sont ainsi denses sur toute la circonférence de rayon *un*. On conclura aisément des hypothèses faites que la série (3) est ici convergente sur toutes les droites qui font avec l'axe réel un angle commensurable avec π. Sur chacune de ces droites, la convergence est uniforme; d'ailleurs, à l'intérieur comme à l'extérieur du cercle, cette série coïncide avec la fonction analytique représentée par la série (4) (au sens de Weierstrass, on a là *deux* fonctions analytiques différentes).

4. Supposons maintenant que les points a_n soient tous extérieurs au cercle de rayon (1) mais aient pour points limites tous les points de ce cercle. Dans ce cas, on n'a pas encore démontré rigoureusement [1], sauf dans des cas où la distribution des a_n est particulière [2], que le cercle est une coupure pour $f(z)$. On le prouve rigoureusement, dans le cas où les a_n n'ont pas d'autres points limites que les points du cercle, sans faire aucune autre hypothèse sur leur distribution, moyennant l'hypothèse faite [3] sur les A_n. En effet, si la fonction analytique $f(z)$ pouvait être prolongée au delà du cercle, elle y coïnciderait dans une région finie avec la série (3). Or, quels que soient les a_n, cette série converge sur quelque rayon et y coïncide avec la fonction analytique représentée par la série (4) à l'extérieur du cercle. Donc cette fonction coïnciderait avec la fonction prolongée, ce qui établit l'impossibilité du prolongement (*voir* ma Thèse, *loc. cit.* et p. 20).

5. Je dois me contenter de signaler rapidement l'extension de ce qui précède au cas où les a_n auraient *zéro* parmi leurs points limites;

---

[1] *Voir* ma Thèse, p. 14-15.

[2] A. PRINGSHEIM, *Math. Annalen*, t. L.

[3] J'ai insisté, dans mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*, sur cette différence entre les hypothèses précises sur les a_n et les hypothèses de plus ou moins grande convergence sur les A_n.

on peut, dans les cas étendus (au moyen d'hypothèses sur les A_n seulement), suivre, en combinant la méthode de Weierstrass et celle de M. Mittag-Leffler, une fonction telle que (4) à travers des *espaces lacunaires* dont tous les points sont limites de points a_n.

On voit ici très nettement les avantages de la méthode d'exposition que j'ai suivie dans mon Mémoire, sur celle qui consisterait à ne jamais parler de sommation de séries divergentes, mais seulement de prolongement analytique. De nombreuses généralisations, évidentes au premier point de vue, resteraient cachées, ou paraîtraient n'avoir aucun rapport avec la question.

6. Je signale enfin tout l'intérêt qu'il pourrait y avoir à remplacer l'axe réel (n° 2) par une spirale logarithmique de module déterminé. Les spirales logarithmiques ont, sur les autres courbes que l'on pourrait être tenté de prendre, l'avantage de rester invariables par certaines des substitutions (z, uz), et un peu de réflexion suffit à montrer les avantages considérables de cette propriété, surtout lorsqu'on ne sait rien sur la distribution des points singuliers.

Mais, dans ce cas comme dans le précédent, il y aurait lieu, en vue des applications, de rechercher un développement (1) satisfaisant à la double condition d'être numériquement simple et de donner lieu à une fonction $F(\varepsilon)$ ne croissant pas trop rapidement.

Paris, mars 1899.