ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ETIENNE DELASSUS

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 109-132

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__109_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE

A UNE SEULE FONCTION INCONNUE,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

1. Dans un Mémoire récent [1], j'ai exposé une théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Je me propose d'en faire ici l'application aux systèmes du premier ordre à une seule inconnue.

De cette théorie générale nous ne pourrons évidemment pas déduire *toutes* les propriétés des systèmes considérés, car toute propriété de ces systèmes n'est pas, *a priori*, un cas particulier d'une propriété des systèmes les plus généraux; mais nous allons montrer que les méthodes générales de réduction des systèmes différentiels à une forme canonique conduisent précisément aux systèmes en involution et que les théorèmes généraux fournissent, comme cas très particuliers, les théorèmes fondamentaux qui servent de bases aux principales méthodes d'intégration.

2. Je commencerai par faire une remarque générale sur les systèmes différentiels.

Dans l'étude des systèmes différentiels, à l'exception de cas très particuliers, il y a nécessité absolue de ne considérer que des équations résolues.

---

(1) DELASSUS, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 1896).

Cette nécessité va apparaître immédiatement sur un exemple simple. Considérons le système de deux équations du premier ordre à une inconnue z et à deux variables x_1, x_2

$$\left| \begin{aligned} F_1 &= (p_1 + p_2 - 1)\,p_1 = 0, \\ F_2 &= (p_1 + p_2 - 1)\,p_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Dans les théories, telles qu'on les expose ordinairement (¹), on raisonne comme il suit :

Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(p_1, p_2)}$$

n'est pas nul : donc on peut tirer de $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ des valeurs de p_1 et p_2.

Cela suppose que de $F_1 = 0$ on tire une valeur de p_1 qui ne transforme pas $F_2 = 0$ en identité, c'est-à-dire

$$p_1 = 0;$$

puis de $F_2 = 0$, qui devient

$$(p_2 - 1)\,p_2 = 0,$$

on tire

$$p_2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad p_2 = 0.$$

On doit donc considérer seulement les systèmes de valeurs

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 1,$$

et

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 0,$$

ce qui donne deux groupes de solutions, chacun d'eux renfermant une constante arbitraire.

En opérant ainsi, on a laissé de côté les fonctions z satisfaisant à l'équation unique

$$p_1 + p_2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire la partie principale de la solution du système, puisque ces solutions dépendent d'une fonction arbitraire.

(¹) *Voir* Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

Il est même impossible de ne pas les laisser de côté. On pourrait, en effet, dire que de $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ on peut tirer

$$\left| \begin{array}{l} p_1 = \varphi(x_1, x_2), \\ p_2 = 1 - \varphi(x_1, x_2). \end{array} \right.$$

Quelle que soit la fonction φ, ces valeurs de p_1 et p_2 vérifient les deux équations $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$. Mais il est évident que, quelle que soit cette fonction, p_1 et p_2 ne sont pas forcément des dérivées partielles d'une même fonction. Cela tient à ce que, si le système $F_1 F_2$ est en involution, les valeurs de p_1, p_2 qu'on peut en tirer ne sont les dérivées partielles d'une même fonction que si elles n'annulent pas

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(p_1, p_2)},$$

et c'est forcément ce qui arrive pour les solutions que nous considérons en dernier lieu, car

$$p_1 + p_2 - 1$$

se trouve forcément en facteur dans ce déterminant fonctionnel.

Il y a là un fait général qui se présentera chaque fois que le système proposé sera décomposable.

Il est donc indispensable, lorsqu'on a à traiter un système différentiel, de résoudre les équations au fur et à mesure qu'on les trouve, ce qui fera apparaître successivement les décompositions si le système est décomposable. Le système proposé sera remplacé par plusieurs systèmes indépendants les uns des autres, chacun d'eux étant résolu, certainement indécomposable et devant être intégré séparément.

Cette remarque ne s'applique évidemment pas aux systèmes d'équations linéaires, puisque toutes les équations qu'on aura à résoudre seront du premier degré.

3. *Réduction à la forme canonique.* — En général, pour réduire un système différentiel à la forme canonique, il faut y faire le changement linéaire de variables le plus général.

Dans le cas des systèmes du premier ordre, cela est complètement inutile, et c'est une conséquence de ce que :

La forme canonique d'un système du premier ordre à une inconnue est toujours du premier ordre

et de ce que :

Tout ensemble de dérivées du premier ordre d'une fonction est canonique quand on met les variables dans un ordre convenable.

Soit

$$\left|\begin{array}{l} F_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_\mu(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0. \end{array}\right.$$

un système du premier ordre à une seule inconnue z, système que nous supposerons *indécomposable*.

Cherchons à le résoudre par rapport à certaines dérivées. Il peut arriver que l'on ne puisse pas en tirer μ de ces dérivées et qu'on soit conduit à des équations ne contenant plus que $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, et ne se réduisant pas à des identités. S'il y en a qui ne contiennent pas z, le système est *incompatible*. Si elles contiennent toutes z, on tirera z de l'une d'elles et l'on portera dans les autres; si elles ne se réduisent pas alors à des identités, on sera conduit encore à l'incompatibilité.

Si la valeur de z les vérifie toutes, le système ne pourra admettre que cette solution, et il suffira de la porter dans les équations $F_1 = 0, \ldots, F_\mu = 0$ pour voir si elle est effectivement solution de ce système.

Supposons donc qu'on puisse tirer

$$\begin{array}{l} p_1 = f_1(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu = f_\mu(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, z). \end{array}$$

Cherchons à former les conditions d'intégrabilité relative aux équations d'ordre 2.

$p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ forment un ensemble canonique E; l'ensemble dérivé E' sera composé de deux sortes de termes.

D'abord les termes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu, \quad j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

chacun de ceux pour lesquels on a $i \neq j$ pouvant être obtenu deux fois.

Ensuite les termes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_{\mu+k}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu, \quad k = 1, \ldots, n-\mu),$$

qui ne pourront être obtenus chacun qu'une seule fois.

Les termes de l'ensemble e', complémentaire de E′, seront de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+h}\,\partial x_{\mu+k}} \qquad (h = 1, \ldots, n-\mu, \quad k = 1, \ldots, n-\mu).$$

On a immédiatement

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_{\mu+k}} = \frac{df_i}{dx_{\mu+k}} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+h}\,\partial x_{\mu+k}},$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{d}{dx_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + p_\lambda \frac{\partial}{\partial z}.$$

L'expression ainsi obtenue ne contient que les dérivées du second ordre appartenant à e' et que les dérivées du premier ordre appartenant à e.

Les expressions des autres dérivées de E′ donneront des équations d'intégrabilité

$$\frac{df_i}{dx_j} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\,\partial x_{\mu+h}} = \frac{df_j}{dx_i} + \sum \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+h}}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_{\mu+h}}.$$

Remplaçons-y les dérivées du second ordre qui y figurent par les expressions trouvées précédemment. Elle deviendra

$$\begin{aligned}\frac{df_i}{dx_j} &+ \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}}\,\frac{df_j}{dx_{\mu+h}} + \sum\sum \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}}\,\frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+k}}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+h}\partial x_{\mu+k}}\\ &= \frac{\partial f_j}{dx_i} + \sum \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+h}}\,\frac{df_i}{dx_{\mu+h}} + \sum\sum \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+h}}\,\frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+k}}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+k}\,\partial x_{\mu+h}}.\end{aligned}$$

Elle se réduira donc à

$$\frac{df_i}{dx_j}+\sum\frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}}\frac{df_j}{dx_{\mu+h}}=\frac{df_j}{dx_i}+\sum\frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+h}}\frac{df_i}{dx_{\mu+h}};$$

ce qu'on peut écrire

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left[\frac{\partial(p_i-f_i)}{\partial p_\lambda}\frac{d(p_j-f_j)}{dx_\lambda}-\frac{\partial(p_j-f_j)}{\partial p_\lambda}\frac{d(p_i-f_i)}{dx_\lambda}\right]=0,$$

c'est-à-dire, en adoptant une notation bien connue dans la théorie qui nous occupe,

$$[p_i-f_i,\quad p_j-f_j]=0.$$

Nous constatons donc que :

Les équations d'intégrabilité sont toujours du premier ordre.

Il faudra y remplacer p_i et p_j, qui y figurent, respectivement par f_i et f_j et ajouter aux équations du système celles qui ne se réduiront pas à des identités. On cherchera à les résoudre par rapport à certaines des dérivées $p_{\mu+1},\ldots,p_n$; si l'on arrive à des équations ne contenant plus que z, $x_1, x_2,\ldots,x_n$, ou bien il y a incompatibilité, ou bien le système proposé est intégré sans même faire une quadrature. Nous pouvons donc supposer que toutes les équations du premier ordre que l'on a actuellement sont résolues par rapport à des dérivées; on recommencera sur elles les mêmes calculs, et finalement on arrivera ou à voir l'incompatibilité, ou à avoir la valeur de z sans intégration, ou à un système de la forme

$$p_1=f_1,\qquad\ldots,\qquad p_\mu=f_\mu,$$

tel que toutes les équations

$$[p_i-f_i,\quad p_j-f_j]=0$$

en soient des conséquences algébriques.

Le système

$$p_1=f_1,\qquad\ldots,\qquad p_\mu=f_\mu$$

est alors la forme canonique du système proposé.

Donc :

La forme canonique d'un système du premier ordre à une inconnue est toujours du premier ordre.

Considérons en particulier des équations ne contenant pas l'inconnue z, les $\frac{d}{dx_\lambda}$ se réduiront aux $\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$, de sorte que les conditions d'intégrabilité prendront la forme

$$(p_i - f_i, \quad p_j - f_j) = 0;$$

il n'y figurera que les dérivées $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$; elles ne pourront pas être des conséquences algébriques des μ équations du système; donc elles seront vérifiées identiquement, de sorte que :

Un système où ne figure pas l'inconnue z est forcément en involution quand il est mis sous forme canonique.

Dans le cas plus particulier encore où les équations, ne contenant pas z, sont linéaires et homogènes par rapport aux dérivées, on sait qu'en posant

$$X_i = p_i - f_i,$$

les conditions

$$(p_i - f_i, p_j - f_j) = 0$$

peuvent s'écrire

$$X_i(X_j(z)) - X_j(X_i(z)) = 0;$$

donc :

Un système ne contenant pas z, et qui est linéaire et homogène par rapport aux dérivées de z, est forcément jacobien lorsqu'il est mis sous forme canonique.

Théorèmes généraux et méthodes d'intégration.

4. Soit un système *canonique*

$$\left|\begin{array}{l} p_1 = f_1(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu = f_\mu(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z). \end{array}\right.$$

L'ensemble canonique, par rapport auquel est résolu ce système, a pour indices

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{\mu-1} = 0, \qquad \gamma_\mu = 1, \qquad \gamma_{\mu+1} = \ldots = \gamma_{n-1} = 0,$$

et, en outre, il n'y a pas d'*équations auxiliaires*.

Si à ce système nous appliquons le théorème de Cauchy, généralisé pour les systèmes quelconques, nous obtiendrons la proposition suivante :

Soit le système canonique du premier ordre à une inconnue et n variables

$$\begin{array}{l} p_1 = f_1(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu = f_\mu(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}$$

Soit $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$ *une fonction de* $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ *analytique en* $x^0_{+1\mu}, \ldots, x^n_0$. *Désignons par* z^0, $p^0_{\mu+1}, \ldots, p_n$ *les valeurs de* φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}$, *en* $x^0_{\mu+1}, \ldots, x^0_n$.

Si les fonctions $f_i(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n)$, *où l'on considère* $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$, z, $x_1, \ldots, x_n$, *comme des variables indépendantes, sont analytiques en* $p^0_{\mu+1}, \ldots, p^0_n, z^0, x^0_1, \ldots, x^0_n$, *il existe une intégrale et une seule, vérifiant le système, analytique en* $x^0_1, \ldots, x^0_n$ *et se réduisant à* $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$ *pour* $x_1 = x^0_1, \ldots, x_\mu = x^0_\mu$.

Ce théorème, qui est une conséquence immédiate d'un théorème extrêmement général relatif à des systèmes quelconques, résume tout ce qu'on peut dire de plus général à propos de l'existence des intégrales des systèmes du premier ordre à une inconnue.

Un théorème équivalent a été déjà démontré par Lie au moyen de la théorie générale des caractéristiques, et M. Goursat avait énoncé, dans le cas des équations ne contenant pas z, un théorème ayant exactement la forme de celui que nous venons de donner, sans toutefois démontrer la convergence des développements, se bornant à considérer cette convergence comme conséquence du théorème de Lie [1].

---

[1] Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 179 et 243.

5. Nous savons que l'intégration d'un système canonique quelconque se ramène à l'intégration successive de systèmes de Mme Kowalewski ayant successivement $1, 2, \ldots, n$ variables.

Appliquons cette propriété générale à nos systèmes du premier ordre.

Chaque système de Mme Kowalewski se réduira ici à une seule équation qui sera du premier ordre, et nous n'en aurons que μ.

Voici les équations qu'il faudra intégrer pour trouver l'intégrale dont l'existence vient d'être démontrée dans le paragraphe précédent.

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ l'inconnue z et $\mu - 1$ inconnues auxiliaires.

On commencera par chercher la fonction Z_μ des $n - \mu + 1$ variables $x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial Z_\mu}{\partial x_\mu} = f_\mu\left(\frac{\partial Z_\mu}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial Z_\mu}{\partial x_n}, Z_\mu, x_1^0, \ldots, x_{\mu-1}^0, x_\mu, \ldots, x_n\right)$$

et se réduisant à φ pour $x_\mu = x_\mu^0$.

On cherchera ensuite la fonction $Z_{\mu-1}$ des $n - \mu + 2$ variables $x_{\mu-1}, x_\mu, \ldots, x_n$, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial Z_{\mu-1}}{\partial x_{\mu-1}} = f_{\mu-1}\left(\frac{\partial Z_{\mu-1}}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial Z_{\mu-1}}{\partial x_n}, Z_{\mu-1}, x_1^0, \ldots, x_{\mu-2}^0, x_{\mu-1}, \ldots, x_n\right),$$

et se réduisant à Z_μ pour $x_{\mu-1} = x_{\mu-1}^0$.

On peut remarquer que, l'équation précédente ne contenant pas $\frac{\partial Z_{\mu-1}}{\partial x_\mu}$, on peut la considérer comme une équation ne contenant que les $n - \mu + 1$ variables $x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.

On continuera ainsi, et en dernier lieu Z_1 sera l'intégrale de

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x_1} + f_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial Z_1}{\partial x_n}, Z_1, x_1, \ldots, x_n\right),$$

se réduisant, pour $x_1 = x_1^0$, à Z_2.

Donc :

L'intégration d'un système canonique de μ équations du premier ordre, à une inconnue et n variables, se ramène à l'intégration successive de μ équations du premier ordre à une inconnue et à $n - \mu + 1$ variables.

6. Soit le système canonique

$$p_1 = f_1, \quad p_2 = f_2, \quad \ldots, \quad p_\mu = f_\mu;$$

faisons le changement de variables

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_\mu = x_\mu^0 + y_1 y_\mu,$$

et conservons les variables $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.

Nous aurons les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} y_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_\mu} y_\mu + \ldots, \\ \frac{\partial z}{\partial y_2} &= \frac{\partial z}{\partial x_2} y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial z}{\partial y_\mu} &= \frac{\partial z}{\partial x_\mu} y_1. \end{aligned}$$

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des dérivées de z par rapport aux nouvelles variables, et désignons par

$$\psi_i(q_{\mu+1}, \ldots, q_n, z, y_1, y_2, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n),$$

la fonction f_i dans laquelle on aurait remplacé $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$ par $q_{\mu+1}, \ldots, q_n$, et $x_1, \ldots, x_\mu$ par leurs expressions, au moyen des y. Le système deviendra

$$\begin{aligned} q_1 &= \psi_1 + y_2\psi_2 + \ldots + y_\mu \psi_\mu, \\ q_2 &= y_1 \psi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_\mu &= y_1 \psi_\mu. \end{aligned}$$

Ce nouveau système est encore canonique, car, s'il ne l'était pas, il y aurait au moins une condition d'intégrabilité

$$\chi(q_{\mu+1}, \ldots, q_n, z, y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots. x_n) = 0,$$

qui ne serait pas identiquement vérifiée; et elle fournirait immédiatement une relation

$$\chi'(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

non identiquement vérifiée, et qui aurait été obtenue en écrivant les conditions d'intégrabilité du système primitif, ce qui est contraire aux hypothèses puisque ce système est canonique.

Nous obtenons donc un système transformé qui est canonique et de la forme

$$q_1 = \Theta_1, \qquad q_2 = y_1\psi_2, \qquad \ldots, \qquad q_\mu = y_1\psi_\mu.$$

Il est facile de simplifier son intégration. En effet, soit Z_1 une intégrale de la première équation, déterminée par sa fonction initiale

$$Z_2(y_2, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_\mu)$$

pour $y_1 = 0$.

D'après nos principes généraux, nous savons que *la condition nécessaire et suffisante pour que Z_1 soit une intégrale du système est que sa fonction initiale Z_2 vérifie toutes les autres équations dans lesquelles on aurait fait $y_1 = 0$.*

Dans le cas actuel, Z_2 devra donc vérifier les équations

$$\frac{\partial Z_2}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial Z_2}{\partial y_3} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial Z_2}{\partial y_\mu} = 0.$$

De sorte que :

Pour que Z_1 soit une intégrale du système, il faut et il suffit que sa fonction initiale Z_2 ne dépende que de $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.

En particulier, si l'on cherche l'intégrale du système primitif qui, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$, se réduit à $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$, on cherchera l'intégrale Z_1 de l'équation

$$\frac{\partial Z_1}{\partial y_1} = \Theta_1,$$

qui, pour $y_1 = 0$, se réduit à $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots. x_n)$, et l'on y fera le changement inverse de variables. En dernier lieu, on peut remarquer que l'équation

$$q_1 = \Theta_1$$

ne contient pas les dérivées de z par rapport aux variables $y_2, \ldots, y_\mu$; de sorte que c'est, en réalité, une équation du premier ordre à $n - \mu + 1$ variables.

D'où ce théorème :

L'intégration d'un système canonique de μ équations du premier *ordre à une inconnue et n variables peut toujours se ramener à l'intégration d'une équation unique du premier ordre et à $n-\mu+1$ variables.*

Théorème qui a été donné par Lie dans le cas des équations ne contenant pas z.

7. Plus particulièrement, considérons un système canonique formé de n équations, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1(z, x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ p_n &= f_n(z, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Il aura une intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire qui sera la valeur de z en $x_1^0, \ldots, x_n^0$.

En lui appliquant le procédé précédent, on sera conduit à une équation

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \Theta_1(z, y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

c'est une équation différentielle ordinaire, car on peut y considérer $y_2, \ldots, y_n$ comme des constantes arbitraires et l'écrire

$$\frac{dz}{\Theta_1} = \frac{dy_1}{1}.$$

Dans ce cas, l'intégration du système se ramène donc à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

8. *Intégration des systèmes jacobiens.* — Soit un système jacobien

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{\partial z}{\partial x_1} - \sum b_i^1 \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+i}} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ X_\mu(z) &= \frac{\partial z}{\partial x_\mu} - \sum b_i^\mu \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+i}} = 0. \end{aligned}$$

Appliquons-lui le théorème du n° 6, nous obtiendrons immédiatement :

L'intégration d'un système jacobien se ramène à l'intégration d'une *équation unique de même forme que celles du système et à $n - \mu + 1$ variables.*

Cette équation unique est, comme nous l'avons vu, l'équation qui donne $\frac{\partial z}{\partial y_1}$ après la transformation

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \qquad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \qquad \ldots, \qquad x_\mu = x_\mu^0 + y_1 y_\mu.$$

Soit

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{\partial z}{\partial y_1} - c_1 \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+1}} - c_2 \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+2}} - \ldots - c_{n-\mu} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0;$$

son intégration est équivalente à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy_1}{-1} = \frac{dx_{\mu+1}}{c_1} = \frac{dx_{\mu+2}}{c_2} = \ldots = \frac{dx_n}{c_{n-\mu}}.$$

Nous obtenons ainsi immédiatement la méthode et le résultat de Mayer.

L'intégration d'un système jacobien de μ equations à n variables se ramène à l'intégration d'un système de $n - \mu$ équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Pour trouver effectivement la solution z du système proposé qui se réduit à $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$, il faudra chercher l'intégrale z de l'équation $\mathrm{Y}(z) = 0$ qui, pour $y_1 = 0$, se réduit à $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$, et y faire le changement inverse de variables.

Plus simplement, à cause de la forme linéaire et homogène des équations, il faudra former les intégrales $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\mu}$ qui, en $x_1^0. \ldots, x_\mu^0$, se réduisent respectivement à $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$. L'intégrale cherchée sera alors

$$\varphi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\mu}).$$

D'ailleurs $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\mu}$ considérées comme fonctions de y_1, $y_2, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ sont $n - \mu$ intégrales de $\mathrm{Y}(z) = 0$, qui se réduisent à $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ pour $y_1 = 0$. On les déduira de $n - \mu$ intégrales quelconques et distinctes du système d'équations différentielles ordinaires, par le procédé de Mayer.

Il est à peine utile de faire remarquer que le théorème sur l'existence de $n-\mu$ intégrales distinctes et le théorème de Mayer sur l'existence des $n-\mu$ intégrales se réduisant à $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ ne sont que des cas très particuliers, et qu'il n'est même pas nécessaire d'énoncer explicitement, du théorème général du n° 4 et qu'en outre les propriétés générales énoncées dans le n° 5 conduisent immédiatement à l'intégration du système jacobien par μ systèmes successifs de $n-\mu$ équations différentielles ordinaires sans être obligé de faire le moindre changement de variables.

9. *Intégration des systèmes non linéaires par la méthode de Jacobi et Mayer.* — Dans le cas des équations ne contenant pas z, la méthode pourra s'exposer comme on le fait ordinairement parce que, dans ce cas, les systèmes en involution sont précisément nos systèmes canoniques.

Il n'en est plus de même quand les équations contiennent z, car nos systèmes canoniques ne sont pas en involution, et, en outre, nos systèmes canoniques sont toujours résolus par rapport à μ dérivées, tandis que les systèmes en involution sont toujours supposés résolus par rapport à z et $\mu-1$ dérivées.

Avec les systèmes canoniques, nous allons pouvoir exposer la méthode sans distinguer les deux cas.

On connaît les identités

$$[c, U] = 0,$$
$$[U, U] = 0,$$
$$[U, V] = -[V, U],$$
$$[U(\alpha, \beta, \ldots), V] = \sum \frac{\partial U}{\partial \alpha}[\alpha, U],$$
$$[U(\alpha, \beta, \ldots), V(\alpha, \beta, \ldots)] = \sum \frac{D(U, V)}{D(\alpha, \beta)}[\alpha, \beta],$$
$$\Big[[U, V], W\Big] + \Big[[V, W], U\Big] + \Big[[W, U], V\Big] = \frac{\partial U}{\partial z}[W, V] + \frac{\partial V}{\partial z}[U, W] + \frac{\partial W}{\partial z}[V, U].$$

Théorème. — *Soit un système*

$$H_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$H_\mu(p_1, p_2, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

tel que le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{D(H_1, H_2, \ldots, H_\mu)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_\mu)}$$

ne soit pas identiquement nul et que toutes les équations

$$[H_i, H_k] = 0$$

soient des conséquences algébriques des équations

$$H_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad H_\mu = 0.$$

Si des équations proposées on tire, pour $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, *des valeurs*

$$\begin{array}{l} f_1(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

n'annulant pas Δ, *le système*

$$p_1 - f_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_\mu - f_\mu = 0$$

est canonique.

Les fonctions f vérifiant les équations $H = 0$, on en déduit

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial z} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial f_k}{\partial z} = 0,$$

et, par conséquent, en multipliant la seconde par p_i et ajoutant à la première,

$$\frac{dH_\alpha}{dx_i} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{df_k}{dx_i} = 0;$$

or, on a

$$\frac{df_k}{dx_i} = -\frac{d(d_k - f_k)}{dx_i},$$

de sorte que

$$\frac{dH_\alpha}{dp_i} = \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_k} \frac{d(p_k - f_k)}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On trouve de même

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial (p_k - f_k)}{\partial p_i} \qquad (i = \mu + 1, \ldots, n),$$

et cette relation est évidente pour $i = 1, 2, \ldots, \mu$, parce que f_k ne contient aucun des termes $p_1, \ldots, p_\mu$.

En écrivant des relations analogues pour H_β, formant

$$\frac{\partial H_\beta}{\partial p_i} \frac{dH_\alpha}{dx_i} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} \frac{dH_\beta}{dx_i},$$

et sommant, par rapport à i, on obtient

$$[H_\beta, H_\alpha] = \sum_{k=1}^{k=\mu} \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial H_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k].$$

Cette égalité est une identité dans les conditions suivantes :

$[H_\beta, H_\alpha]$ et les $[p_h - f_h, p_k - f_k]$ sont des expressions qui, développées, contiennent $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$. Il faut supposer qu'on y a remplacé $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ respectivement par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, et qu'on a fait de même dans les $\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k}$ et les $\frac{\partial H_\beta}{\partial p_h}$. C'est donc une identité en $p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n$.

Mais, dans ces conditions, les expressions $[H_\beta, H_\alpha]$ sont identiquement nulles puisque, par hypothèse, les équations $[H_i, H_k] = 0$ sont des conséquences algébriques des équations $H = 0$.

Nous aurons donc les identités

$$\sum_{k=1}^{k=\mu} \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial H_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k] = 0,$$

et l'on en déduira, par un raisonnement connu, que si Δ, où l'on a remplacé $p_1, \ldots, p_\mu$ par $f_1, \ldots, f_\mu$, n'est pas nul identiquement, toutes les expressions

$$[p_h - f_h, p_k - f_k],$$

telles qu'elles figurent dans nos identités, sont identiquement nulles.

Autrement dit, les équations

$$[p_h - f_h, p_k - f_k] = 0$$

se transforment en identités, en vertu des équations

$$p_1 - f_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0,$$

c'est-à-dire en sont des conséquences algébriques.

Le système

$$p_1 - f_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0$$

est donc canonique.

En particulier, si nous considérons des équations qui soient linéaires et homogènes par rapport aux dérivées et ne contiennent pas z, les équations $[\mathrm{H}_i, \mathrm{H}_k] = 0$ deviendront

$$\mathrm{H}_i(\mathrm{H}_k) - \mathrm{H}_k(\mathrm{H}_i) = 0,$$

et nous aurons ainsi des *systèmes complets* qui, par leur résolution, fournissent des systèmes jacobiens.

Ceci posé, considérons un système canonique

$$p_1 - f_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0,$$

et cherchons à déterminer une fonction

$$\varphi(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n)$$

telle que, en résolvant le système

$$p_1 - f_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0, \quad \varphi = 0,$$

par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et à une $(\mu + 1)^{\text{ième}}$ dérivée, on obtienne un système canonique. Il en sera certainement ainsi si toutes les équations

$$[p_i - f_i, \varphi] = 0$$

sont des conséquences algébriques des équations $p_i - f_i = 0$, c'est-à-dire si φ vérifie le système linéaire et homogène à $2n - \mu + 1$ variables

$$\mathrm{X}_i(\varphi) = \{p_i - f_i, \varphi\} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

en convenant de représenter, en général, par

$$\{H_i, H_k\}$$

ce que devient

$$[H_i, H_k]$$

quand on y remplace $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ respectivement par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$.

Je dis que le système formé par les équations $X_i(\varphi) = 0$ est complet, c'est-à-dire donne, par sa résolution, un système jacobien.

Nous avons l'identité

$$\begin{gathered}\big[[p_i - f_i, p_k - f_k], \varphi\big] + \big[[p_k - f_k, \varphi], p_i - f_i\big] + \big[[\varphi, p_i - f_i], p_k - f_k\big] \\ = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}[p_i - f_i, p_k - f_k] - \frac{\partial(p_i - f_i)}{\partial z}[p_k - f_k, \varphi] - \frac{\partial(p_k - f_k)}{\partial z}[\varphi, p_i - f_i].\end{gathered}$$

Nous aurons encore une identité en y remplaçant $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$. Voyons ce que deviennent, dans ces conditions, les différents termes.

Par hypothèse, les trois $[\,,]$ du second membre, deviennent respectivement

$$0, \quad \{p_k - f_k, \varphi\}, \quad \{\varphi, p_i - f_i\},$$

c'est-à-dire

$$0, \quad X_k(\varphi), \quad -X_i(\varphi).$$

Voyons ce que deviennent les trois premiers termes du premier membre. Nous remarquerons que les trois $[\,,]$

$$[p_i - f_i, p_k - f_k], \quad [p_k - f_k, \varphi], \quad [\varphi, p_i - f_i]$$

contiennent linéairement $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, de sorte que l'on a certainement, pour l'un quelconque des trois, une identité de la forme

$$[\,,] = \{\,,\} + \Sigma\lambda_j(p_j - f_j),$$

les λ ne contenant aucune des dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$. Prenons le premier terme, on aura

$$\big[[p_i - f_i, p_k - f_k]\varphi\big] = \big[\{p_i - f_i, p_k - f_k\}\varphi\big] + \Sigma\lambda_j[p_j - f_i, \varphi] + \Sigma(p_j - f_j)[\lambda_j, \varphi].$$

On a $\{p_i - f_i, p_k - f_k\} = 0$, parce que le système proposé est canonique. Il ne reste donc, dans le second membre, que les deux derniers groupes de termes, et si l'on remplace $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, le tout se réduit à

$$\Sigma\lambda_j X_j(\varphi).$$

On aura de même

$$\big[[p_k-f_k, \varphi], p_i-f_i\big] = \big[\{p_k-f_k, \varphi\}, p_i-f_i\big] + \Sigma\lambda_j[p_j-f_j, p_i-f_i] + \Sigma(p_j-f_j)[\lambda_j, p_i-f_i].$$

Ce terme se réduit, par le remplacement de $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, à

$$\{\{p_k-f_k, \varphi\} p_i-f_i\},$$

c'est-à-dire à

$$-X_i(X_k(\varphi)).$$

On verrait, de même, que le troisième terme du premier membre se réduit à

$$X_k(X_i(\varphi)),$$

de sorte que, finalement, on obtient l'identité

$$\sum \lambda_j X_j(\varphi) + X_k(X_i(\varphi)) - X_i(X_k(\varphi) = \frac{\partial f_i}{\partial z} X_k(\varphi) - \frac{\partial f_k}{\partial z} X_i(\varphi),$$

ce qui démontre que les équations

$$X_k(X_i(\varphi)) - X_i(X_k(\varphi)) = 0$$

sont des combinaisons linéaires et homogènes des équations $X_i(\varphi) = 0$ et, par conséquent, en sont des conséquences algébriques.

En résolvant le système des équations $X_i(\varphi) = 0$, on le mettra forcément sous forme de système jacobien, dont l'intégration se ramènera à celle d'un système de $2n - \mu$ équations différentielles ordinaires.

Connaissant une intégrale de ce système, on aura une fonction, φ et la fonction

$$\varphi - a_1,$$

où a_1 est une constante arbitraire, répondra encore à la question.

De l'équation $\varphi - a_1 = 0$ on tirera une dérivée $p_{\mu+1}$, par exemple, et l'on portera sa valeur dans $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$. On obtiendra ainsi un nouveau système canonique de $\mu + 1$ équations contenant l'arbitraire a_1, dont toutes les solutions seront solutions du système primitif et sur lequel nous pourrons recommencer les mêmes calculs.

Finalement, nous arriverons à un système de la forme

$$\begin{aligned} p_1 &= \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-\mu}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n &= \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-\mu}). \end{aligned}$$

Comme il a été expliqué au n° 7, son intégration sera ramenée à celle d'une équation différentielle ordinaire. Cette intégration introduira une nouvelle constante arbitraire $a_{n-\mu+1}$, et l'on aura

$$z = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-\mu}, a_{n-\mu+1}),$$

qui sera une intégrale complète du système proposé.

On peut remarquer que dans le cas des systèmes ne contenant pas z, les $X_i(\varphi) = 0$ forment un système jacobien et que l'équation différentielle que l'on trouve à la fin s'intègre par une quadrature.

10. *Intégration des systèmes non linéaires par la méthode de Lie.* — Cette méthode est fondée sur le théorème suivant, démontré au n° 6 :

La recherche d'une intégrale complète d'un système canonique de μ équations à n variables se ramène à la recherche d'une intégrale complète d'une seule équation à $n - \mu + 1$ variables.

On commencera par ramener le système canonique proposé à une équation unique

$$p_1 - f_1 = 0.$$

On cherchera ensuite une intégrale φ de l'équation linéaire et homogène

$$\{p_1 - f_1, \varphi\} = 0;$$

le système

$$p - f_1 = 0, \qquad \varphi = a_1,$$

étant résolu, donnera un système canonique dont l'intégrale complète fournira une intégrale complète du système proposé. Ce nouveau système canonique se ramènera à une seule équation à $(n - \mu + 1) - 2 + 1$ ou $n - \mu - 1$ variables, qu'on pourra traiter de la même façon. Finalement, on sera ramené à une seule équation à une variable indépendante, c'est-à-dire à une équation différentielle ordinaire.

On peut remarquer que *la méthode de Lie, telle que nous venons de l'exposer, s'applique indifféremment aux équations contenant ou ne contenant pas* z, tandis qu'à la façon dont on l'expose ordinairement elle ne s'applique qu'aux équations ne contenant pas z.

11. *Intégration des systèmes linéaires par la méthode générale des caractéristiques.* — La marche que nous suivons n'introduira aucun changement dans la méthode de Cauchy, c'est-à-dire pour l'intégration d'une équation unique.

Dans le cas de l'intégration d'un système canonique formé de plusieurs équations, on peut considérablement simplifier l'exposition en ramenant au cas précédent au moyen du théorème général du n° 6.

En effet, au moyen de ce théorème on ramène l'intégration à celle d'une équation unique à $n-\mu+1$ variables. Si, à cette équation, on applique la méthode de Cauchy, on est amené à intégrer complètement un système de $2(n-\mu+1)$ équations différentielles ordinaires du premier ordre. On en connaît déjà une intégrale première qui est le premier membre de l'équation considérée. On est donc ramené à intégrer complètement un système de $2n-2\mu+1$ équations différentielles ordinaires, et c'est bien le résultat fourni par la théorie des caractéristiques des systèmes d'équations du premier ordre, de sorte que :

La théorie générale des caractéristiques d'un système d'équations du premier ordre n'est pas distincte de la théorie des caractéristiques d'une seule équation.

12. *Intégration des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales.* — Soit un système d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned}
dx_{n+1} &= b_1^1\,dx_1 + b_1^2\,dx_2 + \ldots + b_1^n\,dx_n,\\
dx_{n+2} &= b_2^1\,dx_1 + b_2^2\,dx_2 + \ldots + b_2^n\,dx_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
dx_{n+\mu} &= b_\mu^1\,dx_1 + b_\mu^2\,dx_2 + \ldots + b_\mu^n\,dx_n.
\end{aligned}$$

Il est équivalent au système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1} = b_1^1, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_2} = b_1^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = b_1^n, \\
\dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_1} = b_2^1, & \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_2} = b_2^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_n} = b_2^n, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial x_1} = b_\mu^1, & \dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial x_2} = b_\mu^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial x_n} = b_\mu^n,
\end{array}$$

qui donne les valeurs de toutes les dérivées du premier ordre de toutes les inconnues en fonction des variables et de ces inconnues.

Cherchons à le mettre sous forme canonique, il pourra se présenter deux cas.

Ou bien les équations d'intégrabilité ne seront pas des conséquences des équations proposées, et alors elles se réduiront, en vertu de ces équations, à des équations ne contenant plus de dérivées, ce qui indiquera l'incompatibilité ou au moins l'impossibilité de se donner arbitrairement les valeurs en $x_1^0, \ldots, x_n^0$ de toutes les inconnues.

Ou bien toutes ces équations d'intégrabilité seront des conséquences algébriques des équations proposées; alors le système, tel qu'il est donné, est sous forme canonique, et nous pouvons lui appliquer le théorème de Cauchy, généralisé pour des systèmes quelconques. Tous les ensembles canoniques, par rapport auxquels il est résolu, étant *complets*, un système d'intégrales sera complètement déterminé quand on se donnera les valeurs initiales en $x_1^0, \ldots, x_n^0$ de toutes les inconnues.

D'ailleurs, par un calcul connu, on trouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système proposé soit canonique sont que, en posant

$$X_i(z) = \frac{\partial z}{\partial x_i} + b_1^i \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+1}} + \ldots + b_n^i \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+n}},$$

on ait toujours

$$X_k(b_h^i) = X_i(b_h^k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, \mu),$$

c'est-à-dire que le système

$$X_1(z) = 0, \qquad \ldots, \qquad X_n(z) = 0$$

soit jacobien.

Nous arrivons donc immédiatement au théorème de Bouquet :

Pour que le système d'équations aux différentielles totales

$$dx_{n+i} = \sum_{j=1}^{j=n} b_i^j dx_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

où les b_i^j *sont analytiques en* $x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+\mu}^0$, *possède un système, et un seul, d'intégrales* $x_{n+1}, \ldots, x_{n+\mu}$ *analytiques en* $x_1^0, \ldots, x_n^0$ *et se réduisant, en ce point, respectivement à* $x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+\mu}^0$, *il faut et il suffit que les coefficients* b_i^j *vérifient les identités*

$$X_k(b_h^i) - X_i(b_h^k) = 0.$$

Pour faire l'intégration d'un tel système, nous ferons le changement de variables

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \qquad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^0 + y_1 y_n;$$

le nouveau système d'équations aux dérivées partielles sera de la forme

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial y_1} = c_1^1, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial y_2} = y_1 c_1^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = y_1 c_1^n, \\
\dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial y_1} = c_2^1, & \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial y_2} = y_1 c_2^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial y_n} = y_1 c_2^n, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial y_1} = c_\mu^1, & \dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial y_2} = y_1 c_\mu^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial y_n} = y_1 c_\mu^n,
\end{array}$$

Considérons le système

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_1} = c_1^1, \qquad \frac{\partial x_{n+2}}{\partial y_1} = c_2^1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial x_{n+\mu}}{\partial y_1} = c_\mu^1,$$

qui peut être intégré comme un système d'équations différentielles ordinaires. Il déterminera $x_{n+1}, \ldots, x_{n+\mu}$ quand on se donnera les fonctions de $y_2, \ldots, y_n$ auxquelles se réduisent les inconnues pour $y_1 = 0$.

D'après une propriété générale, déjà utilisée au n° 6, il faut et il suffit, pour que les intégrales ainsi déterminées vérifient toutes les autres équations du système, que leurs fonctions initiales

$$\varphi_1(y_2\ldots y_n), \quad \ldots, \quad \varphi_\mu(y_2\ldots y_n)$$

vérifient toutes ces équations dans lesquelles on aurait fait $y_1 = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} = 0, \\[2ex]
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_n} = 0,
\end{array}$$

ce qui signifie que ces fonctions φ doivent être des constantes.

13. En résumé, nous voyons que si, pour faire la théorie des systèmes de premier ordre à une inconnue, au lieu de prendre comme point de départ le théorème de M^me Kowalevski et les formes en involution, on part du théorème de Cauchy complètement généralisé et des formes canoniques, cette théorie acquiert beaucoup plus d'unité, puisqu'il n'y a plus à faire de distinction entre le cas où z figure dans les équations et le cas où z n'y figure pas et, en outre, les différentes méthodes d'intégration se présentent beaucoup plus simplement parce que les propriétés, sur lesquelles elles reposent, sont des conséquences immédiates des théorèmes généraux sur les systèmes différentiels.

Ainsi présentée, la théorie de l'intégration des systèmes du premier ordre à une inconnue (surtout par la méthode de Jacobi et Mayer) apparaît, non plus comme théorie isolée faite sur un cas particulier, où des artifices spéciaux permettent l'intégration, mais comme devant se rattacher à une théorie beaucoup plus générale conduisant *sûrement* à l'intégration, dans le cas de ces systèmes, mais pouvant y conduire aussi pour des systèmes de formes tout à fait différentes.