ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. MANGEOT

Sur la détermination des centres, axes et plans de symétrie dans les figures algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 9-19

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR LA DÉTERMINATION
DES
CENTRES, AXES ET PLANS DE SYMÉTRIE
DANS
LES FIGURES ALGÉBRIQUES,

PAR M. S. MANGEOT,
DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PRÉLIMINAIRES.

Dans les développements qui vont suivre, je supposerai les figures définies par des équations cartésiennes et entières, et les axes de coordonnées seront supposés rectangulaires partout ailleurs que dans les questions relatives aux centres.

Les éléments de symétrie : centres, axes et plans de symétrie, d'une figure formée par une courbe plane ou surface algébrique peuvent faire partie de la figure, avec un ordre quelconque de multiplicité. Dans la recherche analytique de ces éléments, on est amené, pour certains d'entre eux (les axes d'une courbe et les plans de symétrie d'une surface), à tenir compte de cet ordre de multiplicité, ou du moins de sa parité, et à les diviser en éléments de symétrie d'ordre pair et d'ordre impair, l'élément non situé sur la figure étant regardé comme d'ordre pair.

L'équation d'une courbe étant prise sous la forme

$$\varphi(x, y^2) + y\,\psi(x, y^2) = 0,$$

pour que l'axe des x en soit un axe d'ordre pair (ou un axe d'ordre impair), il faut et il suffit que l'on ait $\psi(x, y^2) \equiv 0$ [ou $\varphi(x, y^2) \equiv 0$].

L'équation d'une surface étant mise sous la forme

$$\varphi(x, y, z^2) + z\,\psi(x, y, z^2) = 0,$$

pour que le plan des xy en soit un plan de symétrie d'ordre pair (ou d'ordre impair), il faut et il suffit que l'on ait $\psi(x, y, z^2) \equiv 0$ [ou $\varphi(x, y, z^2) \equiv 0$]; et pour que l'axe des z soit un axe de la surface, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\varphi(x, y, z^2) \equiv \varepsilon\,\varphi(-x, -y, z^2), \qquad \psi(x, y, z^2) \equiv \varepsilon\,\psi(-x, -y, z^2)$$
$$(\varepsilon = \pm 1),$$

les sections de la surface par les plans $z =$ const. devant avoir chacune un centre situé sur cette droite (¹).

Si $y^p\varphi_p(x) + y^{p-1}\varphi_{p-1}(x) + \ldots = 0$ est l'équation d'une courbe ordonnée par rapport à y, pour que cette courbe ait un axe d'ordre pair (ou d'ordre impair) parallèle à l'axe des x, il faut que le nombre p soit pair (ou qu'il soit impair) et que le rapport $\frac{\varphi_{p-1}(x)}{\varphi_p(x)}$ ait une valeur constante c, et l'équation de cet axe doit être $py + c = 0$.

Si, dans l'équation d'une surface où la plus haute puissance de z est z^p, $\varphi_n(x, y)$ est le coefficient de z^n, et que l'on désigne par C_n les

(¹) Dans l'espace à deux dimensions, un point quelconque sera centre d'une courbe indéterminée ou rejetée à l'infini; une droite quelconque sera axe d'ordre pair d'une courbe tout entière à l'infini, et elle sera regardée à volonté comme axe d'ordre pair ou comme axe d'ordre impair d'une courbe indéterminée.

Dans l'espace à trois dimensions, tout point (ou toute droite) sera centre (ou axe) d'une surface indéterminée ou située à l'infini; un plan quelconque sera plan de symétrie d'ordre pair d'une surface rejetée à l'infini, et il sera considéré soit comme plan de symétrie d'ordre pair, soit comme plan de symétrie d'ordre impair de toute surface indéterminée.

courbes (déterminées ou indéterminées ou à distance infinie) que représente, dans le plan des xy, l'équation

$$\varphi_n(x,y)=0 \qquad (n=p, p-1, p-2, \ldots):$$

1° Pour que la surface ait un plan de symétrie d'ordre pair (ou d'ordre impair) parallèle au plan des xy, il est nécessaire que le nombre p soit pair (ou qu'il soit impair) et que le rapport $\frac{\varphi_{p-1}(x,y)}{\varphi_p(x,y)}$ ait une valeur constante c, et l'équation de ce plan doit être $pz+c=0$.

2° Pour que la surface ait des plans de symétrie d'ordre pair (ou d'ordre impair) perpendiculaires au plan des xy, il faut et il suffit que les courbes C_n aient au moins un axe commun qui soit axe d'ordre pair (ou d'ordre impair) dans chacune d'elles; et chaque axe commun de cette sorte est la trace de l'un de ces plans.

3° Pour que la surface ait des axes situés dans le plan des xy, il faut et il suffit que les courbes C_n aient au moins un axe commun qui soit axe d'ordre pair dans les courbes $C_{2\mu}$ et axe d'ordre impair dans les courbes $C_{2\mu+1}$, ou inversement; et chaque axe commun de cette sorte est un axe de la surface.

4° La condition nécessaire et suffisante pour que la surface ait un axe parallèle à l'axe des z, est que celles des fonctions $\varphi_n(x,y)$ qui ne sont pas nulles aient leurs degrés de même parité et que celles des courbes C_n qui leur correspondent aient un centre commun, qui est la trace de l'axe sur le plan des xy.

A tout axe d'un cône correspond un plan de symétrie d'ordre pair, ou d'ordre impair, qui lui est perpendiculaire, et réciproquement.

A tout axe, à tout plan de symétrie d'ordre pair (ou impair) d'une surface, correspond, dans son cône asymptotique, un axe, un plan de symétrie d'ordre pair (ou impair), qui lui est parallèle.

On sait déterminer tous les éléments de symétrie que possèdent les figures du premier et du second ordre (¹). Je me propose de rechercher ceux que peuvent avoir les courbes planes ou surfaces algébriques définies par les équations de degré supérieur à 2, et je laisserai de

(¹) Une droite a un axe d'ordre impair, cette droite même; ses axes d'ordre pair sont ses normales. Un plan a un plan de symétrie d'ordre impair, le plan lui-même; les côté le cas où la courbe (ou la surface) serait formée uniquement de droites (ou de plans) parallèles.

Centres des courbes et des surfaces.

Les coordonnées des centres d'une figure F (courbe plane ou surface) d'ordre m ayant l'équation $f=0$ doivent vérifier les équations du premier degré obtenues en annulant toutes les dérivées partielles d'ordre $m-1$ de f, et leur détermination n'est, par conséquent, qu'une question de vérification toutes les fois que celles-ci ne se réduisent pas, soit à une seule

$$u = ax + by + \ldots = 0 \qquad (a \neq 0),$$

soit à deux distinctes et compatibles

$$v = a'x + b'y + c'z + d' = 0, \qquad w = a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$
$$(a'b'' - b'a'' \neq 0).$$

Mais s'il en est ainsi, et que l'on considère la figure F_1, d'ordre m_1 au plus égal à $m-2$, que définit, dans le premier cas, l'équation

$$m!\,a^m f - u^m \frac{\partial^m f}{\partial x^m} = 0,$$

et, dans le second, celle-ci

$$f - \varphi_m\left(\frac{b''v - b'w}{a'b'' - b'a''}, \frac{a'w - a''v}{a'b'' - b'a''}, 0\right) = 0,$$

$\varphi_m(x, y, z)$ désignant l'ensemble des termes de degré m de f, on voit que les centres de F sont ceux de F_1 dont les coordonnées annuleraient u, ou v et w, pourvu que m et m_1 aient la même parité, condition sans laquelle F est dénuée de centre; et la figure F pouvant être

---

plans qui lui sont perpendiculaires sont ses plans de symétrie d'ordre pair; les droites situées dans le plan ou normales au plan sont ses axes.

Le système de deux droites (ou de deux plans) rectangulaires est la seule des coniques (ou des quadriques) qui aient des axes (ou des plans de symétrie) d'ordre impair. Cette quadrique et le paraboloïde isocèle sont les deux seules espèces de surfaces du second ordre qui aient des axes autres que les intersections de leurs plans principaux, et ces droites s'aperçoivent aisément.

remplacée par une figure connue, F_1, d'ordre inférieur au sien, le problème doit être regardé comme résolu. Il le sera par de simples vérifications.

Axes des courbes planes.

Les axes d'ordre pair et impair de la courbe $f(x,y) = 0$ d'ordre m doivent être des axes de la conique

$$\sum \frac{1}{\alpha!\beta!}\left(\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)^2 = 0 \qquad (\alpha+\beta = m-1).$$

Ils peuvent donc être déterminés par de simples vérifications lorsque cette conique n'est pas un cercle. Si elle est un cercle de centre (x_0, y_0), les axes d'ordre impair (ou ceux d'ordre pair) de la courbe sont représentés par l'équation

$$A[x - x_0 + i(y-y_0)]^t + B[x - x_0 - i(y-y_0)]^t = 0,$$

$Ax^t + By^t$ désignant le plus grand commun diviseur des coefficients $a_k x^k + b_k y^k$ des diverses puissances de xy dans le polynome

$$f[x+y+x_0,\ i(y-x)+y_0]$$

(ou le plus grand commun diviseur des binomes $a_k x^k - b_k y^k$). Quand ces coefficients sont tous constants, la courbe est formée de cercles concentriques au précédent.

Plans de symétrie et axes des surfaces.

Si ω désigne un polynome entier en x, y, z, de degré p, je représente par $V(\omega)$ la fonction du second degré

$$\sum \frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!}\left(\frac{\partial^{p-1}\omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)^2 \qquad (\alpha+\beta+\gamma = p-1),$$

en faisant toutefois $V(\omega) = \omega$, si p est inférieur à 3; et si u, v sont deux fonctions quelconques de x, y, z, différentes ou non, je poserai

$$\lambda_h(u,v) = \sum \frac{h!}{\alpha!\beta!\gamma!}\frac{\partial^h u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\frac{\partial^h v}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \qquad (\alpha+\beta+\gamma = h).$$

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation donnée d'une surface S d'ordre m supérieur à 2. Tout axe et tout plan de symétrie d'ordre pair ou impair que peut avoir cette surface doit être un axe ou un plan de symétrie de chacune des surfaces définies par les formules

$$f_k = \frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial z^2} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots; f_0 = f),$$

$$\lambda_h(f_r, f_r) = \sum \frac{h!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^h f_r}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)^2 = 0$$
$$(r = 0, 1, 2, \ldots; h = 1, 2, 3, \ldots),$$

et en particulier de la quadrique Q représentée par l'équation du second degré $V(f) = 0$, quadrique qui a au moins un centre, et dont le cône asymptotique a les mêmes centres que celui de S.

Au surplus, si deux surfaces, ayant pour équations entières

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \chi(x, y, z) = 0,$$

ont un même plan de symétrie ou un même axe, ce plan ou cette droite est un plan de symétrie ou un axe de la surface qui correspond à l'équation $\lambda_h(\varphi, \chi) = 0$, quel que soit h [1].

De là, et des propositions préliminaires énoncées plus haut (n^{os} 1, 2, 3, 4), résultent celles-ci.

Toutes les fois que la quadrique Q n'est pas une sphère, la considération de ses axes ou plans de symétrie ramène le problème de la recherche des axes et des plans de symétrie d'ordre pair ou impair de la surface S, soit à de simples vérifications, soit (après une transformation de coordonnées évidente) à la recherche des centres ou axes de courbes planes, c'est-à-dire encore, en fin de compte, à des calculs

---

(1) On peut démontrer que l'on a, pour toute valeur de h,

$$\frac{\partial^2 \lambda_{h-1}(u, v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_{h-1}(u, v)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda_{h-1}(u, v)}{\partial z^2}$$
$$= \lambda_{h-1}\left(u, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \lambda_{h-1}\left(v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + 2\lambda_h(u, v).$$

Les propriétés géométriques que je viens d'indiquer, faciles à vérifier pour $k = 1$, $h = 1$, $r = 0$, sont des conséquences de cette formule.

de vérification ([1]). Dans le cas contraire, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du centre de la sphère Q, et $\psi_n(x, y, z)$ la somme des termes de degré n du polynome $f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$, il en sera de même aussi de la considération de l'une quelconque des surfaces d'ordre égal ou inférieur à 2, définies par la formule

$$\mathcal{F}_{n,k}(x, y, z) = \mathrm{V}(\psi_{n,k}) = 0,$$

où

$$\psi_{n,k} = \sum \frac{\partial^2 \psi_{n,k-1}}{\partial x^2}, \qquad \psi_{n,0} = \psi_n$$

$$(n = m, m - 1, m - 2, \ldots; \; k = 1, 2, 3, \ldots),$$

quand cette surface est déterminée et différente d'une sphère [car les axes ou plans de symétrie d'ordre pair ou impair de S doivent passer par le point (x_0, y_0, z_0) et être des axes ou plans de symétrie des surfaces coniques

$$\psi_n(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0, \qquad \mathcal{F}_{n,k}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0].$$

Cette dernière proposition subsiste lorsque la quadrique Q, sans être une sphère, possède un centre unique, x_0, y_0, z_0 désignant encore les coordonnées de ce point; et aussi lorsqu'on prend pour $\psi_n(x, y, z)$ la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ degré de l'expression obtenue en rempla-

---

([1]) Le fait a besoin d'être prouvé, en ce qui concerne les axes, quand la quadrique Q est un cylindre de révolution. Je prends son axe de révolution $O'z'$ comme axe des cotes, et soit

$$\varphi_m(x', y') + \Phi(x', y', z') = 0$$

la nouvelle équation de S; la variable z' ne figure pas dans le groupe $\varphi_m(x', y')$ des termes de degré m. Le fait est déjà vrai lorsque ce groupe n'est pas une puissance de $x'^2 + y'^2$ à un facteur constant près, car les axes A de S, autres que celui qui pourrait coïncider avec $O'z'$, doivent rencontrer normalement $O'z'$ et être parallèles aux axes du faisceau de droite $\varphi_m(x', y') = 0$. Dans le cas contraire, les droites A sont les axes B de la surface $\Phi(x', y', z') = 0$ qui couperaient normalement $O'z'$ et satisferaient à la condition que les sections de cette surface Φ par les plans qui leur sont perpendiculaires soient d'ordre pair. Or la quadrique $\mathrm{V}[\Phi(x', y', z')] = 0$, à supposer que la surface Φ soit d'ordre supérieur à 2, ferait connaître les droites B par de simples vérifications, à moins qu'elle ne soit elle-même un cylindre de révolution autour de $O'z'$; mais alors on opérerait sur la surface Φ, *dont l'ordre est inférieur à m*, comme on l'a fait sur la surface S.

çant x, y, z par $x+x_0$, $y+y_0$, $z+z_0$ dans l'une quelconque des fonctions que représentent les symboles

$$\lambda_h(f_r, f_{r_1}), \quad \lambda_l[\lambda_h(f_r, f_{r_1}), \lambda_{h'}(f_{r'}, f_{r'_1})], \quad \ldots,$$

où les indices sont des entiers quelconques, distincts ou non, ceux qui affectent la lettre f pouvant être nuls ($f_0 = f$).

Cas des surfaces d'ordre inférieur à 6. — Je désigne par $\varphi_m(x, y, z)$ le groupe des termes du polynome $f(x, y, z)$ dont le degré est m, et par C le cône qui a l'équation $\varphi_m(x, y, z) = 0$.

Je suppose d'abord la surface S du troisième ou du quatrième ordre. La considération de la quadrique Q, et de la surface R représentée par l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

dont le degré ne dépasse pas 2, suffira, d'après ce que je viens de dire, à déterminer, par de simples vérifications, les axes et plans de symétrie d'ordre pair ou impair que peut avoir la surface S, toutes les fois que ces deux surfaces Q, R n'auront pas l'une et l'autre des axes dans toutes les directions de l'espace. Je me place maintenant dans l'hypothèse contraire, et soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre H de la sphère Q.

1° $m = 3$. — Le cône C est ici formé de trois plans deux à deux rectangulaires. Je considère les trois plans P, P′, P″ parallèles à ceux-ci et menés par le point H. Les plans de symétrie d'ordre impair de S ne peuvent se trouver que parmi les trois plans P, P′, P″; ceux d'ordre pair, que parmi leurs six bissecteurs, et les axes de S que parmi les arêtes et les six bissectrices des faces du trièdre que forment les plans P, P′, P″. De simples calculs de vérification suffiront donc pour les déterminer.

2° $m = 4$. — Le cône C, et par suite la surface S, n'admet ici aucun plan de symétrie d'ordre impair. Je suppose d'abord ce cône différent d'une sphère double. S'il a des plans de symétrie, il en a neuf, ceux d'un cube. Pour qu'ils existent, il faut que le polynome $\varphi_4(x, y, z)$ ait la forme $a(x^2+y^2+z^2)^2 + b(x^4+y^4+z^4)$ ou que, dans le cas contraire, il soit réductible à cette forme, et que, par suite, les trois cônes du second ordre représentés par les équations

$$y \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial z} - z \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$z \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial y^2 \partial x} - x \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial y^2 \partial z} = 0,$$

$$x \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial z^2 \partial y} - y \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial z^2 \partial x} = 0$$

aient trois droites communes Δ, Δ', Δ'' rectangulaires deux à deux, qui soient bien déterminées (ce qui exige que deux au moins de ces trois cônes soient déterminés et distincts). Je considère le trièdre trirectangle dont les arêtes sont les parallèles, menées par le point H, aux axes de coordonnées dans le premier cas, ou aux droites Δ, Δ', Δ'' dans le second cas. Les plans de symétrie de la surface S ne peuvent se trouver que parmi les plans des faces de ce trièdre ou leurs six bissecteurs, et les axes de S que parmi les arêtes de ce trièdre ou leurs six bissectrices. De simples vérifications permettront donc de les déterminer.

Lorsque C est une sphère double, les plans de symétrie de S sont les plans de symétrie d'ordre pair de la surface

$$f(x, y, z) - \varphi_4(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

d'ordre inférieur à 4, qui passeraient au point H, et ses axes sont les axes de cette même surface qui passeraient aussi au point H et qui seraient tels que les plans qui leur sont perpendiculaires donnent des sections d'ordre pair dans cette dernière surface.

$m = 5$. — Quand la surface S est du cinquième ordre, j'adjoins à la quadrique Q les deux surfaces R, R′ qui correspondent aux équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

$$\sum \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, dz^\gamma} \right)^2 = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 3),$$

surfaces dont l'ordre ne dépasse pas 4, et dont on sait, par conséquent, trouver les axes et plans de symétrie par de simples vérifications. Les axes et plans de symétrie d'ordre pair ou impair de S, devant être des éléments de symétrie de chacune des trois surfaces Q, R, R′, pourront eux-mêmes être obtenus par de simples calculs de vérification toutes les fois que ces trois surfaces n'auront pas toutes les trois des axes ayant toutes les directions de l'espace. Quand il en est autrement, on peut voir que $\varphi_5(x, y, z)$ n'est réductible par aucune substitution orthogonale aux formes $\mathcal{F}(X, Y, Z^2)$, $Z\mathcal{F}(X, Y, Z^2)$ (1); d'où l'on conclut qu'alors le cône C, et par suite la surface S, n'a aucun axe ni aucun plan de symétrie d'ordre pair ou impair.

Conclusion.

Les méthodes que je viens d'exposer pour la recherche des centres, axes ou plans de symétrie d'ordre pair ou impair des figures algébriques n'introduisent pas d'indéterminées dans les calculs et évitent ainsi les éliminations.

Ces méthodes ont toutes le même point de départ, à savoir la considération des dérivées d'ordre $\mu - 1$ d'un certain polynome F de degré μ, dérivées dont chacune, telle que $\frac{\partial^{\mu-1}F}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$, se forme immédiatement à l'inspection du polynome F, puisqu'elle a pour expression

$$\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,[A(\alpha+1)x + B(\beta+1)y + C(\gamma+1)z + D],$$

(1) Voici comment j'établis ce résultat. Partant de ce fait que les premiers membres des équations des trois surfaces Q, R, R′ sont des covariants de la fonction f quelle qu'elle soit, je calcule ces trois covariants pour l'une ou l'autre des deux formes homogènes du cinquième degré

$$\psi(X, Y) + Z^2\psi_1(X, Y) + hXZ^4, \quad Z\psi(X, Y) + Z^3(aX^2 + bY^2) + hZ^5.$$

J'écris que le second covariant est identiquement nul, ce qui me donne les constantes de la forme exprimées à l'aide des constantes c qui entrent dans $\psi(X, Y)$. Puis j'écris que le premier covariant est proportionnel à $X^2 + Y^2 + Z^2$, ce qui me fournit trois relations entre ces constantes c. J'exprime ensuite que le troisième covariant, qui est une fonction de X, Y, Z^2, est proportionnel à $(X^2 + Y^2 + Z^2)^2$; mais dès que j'ai écrit les trois relations exprimant que sa dérivée par rapport à Z^2 est proportionnelle à $X^2 + Y^2 + Z^2$, je trouve que les six relations formées exigent que toutes les constantes c, et par suite toutes les constantes de la forme considérée, soient nulles.

en représentant par $x^\alpha y^\beta z^\gamma(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D})$ la somme des termes de F qui contiennent le facteur $x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

Ces procédés pratiques aboutissent toujours dans le cas des figures d'ordre inférieur à 6; et c'est là un résultat important pour l'étude de ces figures, si l'on remarque que la construction par points d'une courbe plane ou surface du troisième, quatrième ou cinquième ordre qui possède un centre, ou un axe, ou un plan de symétrie, peut être ramenée, au moyen d'une transformation de coordonnées évidente, à la construction des racines d'une équation du second degré ou d'une équation bicarrée.

Ainsi peuvent être obtenues sans le secours de l'élimination, dans la généralité des cas, toutes les substitutions orthogonales homogènes ou non homogènes capables chacune de faire disparaître d'un polynome entier à deux ou à trois variables, soit les termes de degré pair, soit les termes de degré impair, par rapport à l'une des nouvelles variables, ou par rapport à l'ensemble de deux de ces variables, ou encore, quand celles-ci sont au nombre de trois, par rapport à ces trois variables à la fois. Les méthodes pourraient être étendues à un nombre quelconque de variables.