J. Beudon

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 3-51 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__S3_0>

SUR LES SYSTÈMES
D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DONT LES CARACTÉRISTIQUES DÉPENDENT D'UN NOMBRE FINI DE PARAMÈTRES,

PAR M. JULES BEUDON,

AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

L'un des problèmes les plus importants de la Théorie des équations aux dérivées partielles est la détermination des cas où la recherche des intégrales peut être ramenée à l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Dans le cas des équations du premier ordre à une fonction inconnue, le problème est résolu, et la théorie de ces équations a atteint un rare degré de perfection, grâce aux travaux de M. Lie.

Dans le cas des équations d'ordre supérieur, les progrès accomplis sont loin d'être aussi considérables. M. Lie a démontré (1) que tous les systèmes différentiels, dont la solution générale ne renferme qu'un nombre fini de constantes arbitraires, conduisent à l'intégration d'un système complet. Auparavant, M. Darboux avait indiqué, dans un Mémoire fondamental (2), un procédé régulier pour reconnaître la possibilité du problème et obtenir sa solution.

(1) *Theorie der Transformationsgruppen* (I. Abschnitt, p. 171).

(2) *Annales de l'École Normale*; 1870.

Une étude approfondie des méthodes de M. Darboux conduit tout naturellement au problème suivant :

Déterminer et étudier les systèmes différentiels dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de constantes arbitraires.

Le cas où il y a plusieurs fonctions inconnues se ramène à celui d'une seule fonction, grâce au théorème suivant, dû à M. Riquier (1) :

« Étant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers olotropes dans quelque système de cercles, on peut, dans les circonstances générales et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, le remplacer par un système ayant les mêmes intégrales et formé de deux groupes d'équations G_1, G_2 qui jouissent de la double propriété ci-après énoncée : 1° l'une des fonctions inconnues u du système ne se trouve plus impliquée dans le groupe G_2 ; 2° en substituant aux fonctions restantes v, w, ... des intégrales quelconques du groupe G_2, on transforme le groupe G_1, soit en une formule unique exprimant directement la fonction u à l'aide des variables x, y, ..., soit en un système harmonique passif à la seule fonction inconnue u. »

Le présent Travail a pour but l'étude des systèmes dont j'ai parlé plus haut; il se compose de trois Parties.

Dans la première Partie, je généralise, d'après M. Lie, la notion d'élément et de multiplicité d'éléments dans l'espace à $n+1$ dimensions pour un ordre quelconque, et j'indique leur principale propriété. Je rappelle ensuite les résultats de M. Riquier (2) sur l'existence des intégrales dans les systèmes différentiels, et j'applique ces résultats aux systèmes que j'ai en vue d'étudier.

Dans la deuxième Partie, j'étudie les systèmes dont la solution ne renferme qu'une fonction arbitraire d'un seul argument, et je ramène leur intégration à des équations différentielles ordinaires.

La troisième Partie est réservée au cas général; j'y mets en évidence les analogies des systèmes étudiés avec les systèmes d'équations du premier ordre en involution.

(1) *Annales de l'École Normale*; 1893.

(2) Riquier, *Mémoires des Savants étrangers*, t. XXXIII.

Les principaux résultats contenus dans ce Travail ont été présentés à l'Académie des Sciences (séances des 11 février 1895, 29 avril 1895, 2 décembre 1895).

Un cas particulier du problème que j'ai traité a été résolu par M. Lie, par une méthode toute différente (*Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*; 1895).

PREMIÈRE PARTIE.

1. J'appellerai point de l'espace à $n+1$ dimensions tout système de valeurs des variables $z, x_1, \ldots, x_n$; ces valeurs seront les coordonnées du point.

S'il existe entre les variables $z, x_1, \ldots, x_n$ des relations

$$\Phi_1(z, x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_q(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

en nombre q, je dirai que ces relations représentent une multiplicité ponctuelle à $n+1-q$ dimensions dans l'espace à $n+1$ dimensions, et je la représenterai par m_{n+1-q}.

Soit

$$z = F(x_1, \ldots, x_n)$$

une fonction de $x_1, \ldots, x_n$ régulière dans le voisinage du point z^0, $x_1^0, \ldots, x_n^0$; elle représente une multiplicité ponctuelle m_n; et si l'on pose d'une manière générale

$$\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}} = Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n},$$
$$k = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n, \qquad Z^0_{0 \ldots 0} = z,$$

les valeurs

$$(Z^k_{\lambda \ldots \lambda_n})_{x_1 = x_1^0 \ldots x_n = x_n^0},$$

où l'on donne aux nombres $k, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ toutes les valeurs entières et positives possibles, k variant de 1 à p, font connaître z dans le voisinage du point z^0, x_1^0, ..., x_n^0 jusqu'aux infiniment petits d'ordre p. Convenons alors d'appeler *élément de multiplicité d'ordre p dans l'espace à n + 1 dimensions* tout système de valeurs attribuées aux lettres

$$(\mathrm{E}^p) \qquad x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad \ldots, \quad \mathrm{Z}^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}, \quad \ldots, \quad \mathrm{Z}^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n};$$

nous le désignerons par le symbole E^p.

Je dirai que deux éléments infiniment voisins E^p et $\mathrm{E}^p + \delta \mathrm{E}^p$

$$(\mathrm{E}^p + \delta \mathrm{E}^p) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \delta x_1, \quad \ldots, \quad x_n + \delta x_n, \quad z + \delta z, \quad \ldots, \\ \mathrm{Z}^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} + \delta \mathrm{Z}^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}, \quad \ldots, \quad \mathrm{Z}^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} + \delta \mathrm{Z}^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \end{array} \right.$$

sont *unis*, si l'on a les identités

$$\delta \mathrm{Z}^k_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Z}^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_i + 1 \ldots \lambda_n} \delta x_i,$$
$$k = 1, 2, \ldots, p, \qquad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = k.$$

On voit immédiatement que les éléments E^p correspondant à deux points infiniment voisins d'une multiplicité m_n sont unis.

Si un système d'équations en

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad \ldots, \quad \mathrm{Z}^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}, \quad \ldots, \quad \mathrm{Z}^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$$

vérifie les équations aux différentielles totales

$$(1) \qquad d\mathrm{Z}^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Z}^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_i + 1 \ldots \lambda_n} dx_i,$$

je dirai qu'il représente une multiplicité d'éléments E^p dans l'espace à $n + 1$ dimensions, que je désignerai par le symbole M^p.

Dans le système (1), l'équation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \partial x_n$$

a une signification particulière : elle exprime que, parmi les équations de définition d'une multiplicité M^p, il y a au moins une relation entre z, x_1, ..., x_n seulement; s'il y en a ρ, elles représenteront une multiplicité à $n+1-\rho$ dimensions $m_{n+1-\rho}$, que j'appellerai le *support* de la multiplicité M^p.

Étant donné le système (1), on peut se proposer de déterminer toutes les multiplicités M^p; leur détermination dépend évidemment du nombre des dimensions du support : on peut en particulier se donner, *a priori,* les équations qui définissent ce support; le problème admet alors une simplification notable, grâce à la notion de transformation ponctuelle prolongée due à M. Lie [1].

2. Soit la transformation

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, z), \\ z = \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, z) \end{array} \right.$$

que nous appellerons *transformation ponctuelle de l'espace à $n+1$ dimensions :* nous y considérerons $x_1, \ldots, x_n$ comme des variables indépendantes, et z comme une fonction, quelconque d'ailleurs, de ces variables. Si les fonctions F et f_i sont indépendantes, z' sera une fonction de $x'_1, \ldots, x'_n$; prolonger la transformation (2), c'est obtenir les expressions des dérivées de z' par rapport à $x'_1, \ldots, x'_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, z et des $Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$.

Soient

$$Z'^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \mathbf{F}^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots, Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n})$$

les formules qui définissent ce prolongement; elles doivent exprimer que les égalités

$$(3) \qquad dZ'^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \sum_{i=1}^{n} Z'^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_i+1 \ldots \lambda_n} dx_i$$

doivent être une conséquence des relations

$$(4) \qquad dZ^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \sum_{i=1}^{n} Z^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_i+1 \ldots \lambda_n} dx_i.$$

Supposons que le prolongement soit possible jusqu'à l'ordre p; nous

---

[1] *Voir* LIE, *Theorie der Transformationsgruppen,* I. Abschnitt, page 541.

allons montrer qu'on peut l'effectuer pour l'ordre $p+1$. Pour l'ordre p, on a

$$Z'^{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = F^{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots, Z^{k}_{\beta_1\ldots\beta_n}) \qquad (k \leqq p);$$

si nous écrivons que les systèmes (3) et (4) sont une conséquence l'un de l'autre, nous aurons

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dF^{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{dx_i} = \sum_{\rho=1}^{n} Z'^{p+1}_{\alpha_1\ldots\alpha_\rho+1\ldots\alpha_n}\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} + z_i\frac{\partial f_\rho}{\partial z}\right) \qquad \left(z_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right), \\ &\frac{dF^{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{dx_i} = \frac{\partial F^{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_i} + z_i\frac{\partial F^{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial z} + \sum_{h,\lambda_1\ldots\lambda_n} Z^{h}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n}\frac{\partial F^{p}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial Z^{h}_{\lambda_1\ldots\lambda_i\ldots\lambda_n}}. \end{aligned} \right.$$

On pourra toujours résoudre les équations (5) par rapport aux $Z'^{p+1}_{\alpha_1\ldots\alpha_\rho+1\ldots\alpha_n}$, à moins que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + z_1\dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + z_n\dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + z_1\dfrac{\partial f_n}{\partial z} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} + z_n\dfrac{\partial f_n}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ne soit nul, quelle que soit la fonction z de $x_1, \ldots, x_n$; il devrait donc être nul pour tout système de valeurs attribuées à $x_1, \ldots, x_n, z, z_1, \ldots, z_n$, et par suite les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ ne devraient pas être indépendantes, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On voit [1] donc que toute transformation ponctuelle prolongée, *par définition même*, laisse invariant le système d'équations différentielles (1); si donc on effectue une telle transformation sur une multiplicité d'éléments, on obtient une nouvelle multiplicité d'éléments.

3. Revenons à la détermination des multiplicités M^p ayant un support donné; soient

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, z) = 0, \qquad \varphi_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_n, z) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

les équations de ce support.

---

[1] La même propriété subsiste pour les transformations de contact prolongées, dues également à M. Lie; nous n'aurons pas l'occasion de nous en servir dans la suite.

Si nous posons

$$\begin{array}{ll} z' = \psi(x_1, \ldots, x_n, z), & x'_1 = x_1, \\ x'_{\mu+1} = \varphi_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_n, z), & \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & x'_\mu = x_\mu, \\ x'_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z), & \end{array}$$

les équations du support deviennent

$$z' = 0, \qquad x'_{\mu+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad x'_n = 0;$$

si l'on se reporte alors aux équations aux différentielles totales (1), on voit que, dans ces hypothèses : 1° les $Z'^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ pour lesquelles on a

$$\lambda_{\mu+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \lambda_n = 0$$

sont toutes nulles; 2° on peut choisir arbitrairement, en fonction de $x'_1, \ldots, x'_\mu$, les $Z'^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ pour lesquelles on a

$$\lambda_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \lambda_\mu = 0;$$

3° les $Z'^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ qui n'entrent pas dans une de ces catégories se déduisent par différentiation de la deuxième catégorie.

Parmi les multiplicités M^p, nous distinguerons les multiplicités d'éléments telles qu'à un point quelconque du support ne correspond qu'un seul élément E^p, et nous les désignerons par le symbole M^p_q, q étant le nombre des dimensions du support.

4. C'est M. Lie qui a introduit dans la Science les notions d'*éléments* et de *multiplicités d'éléments;* on sait combien elles ont perfectionné la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. J'indique ici les principaux résultats de cette théorie que nous étendrons dans la suite de ce travail [1].

I. Soit

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

---

[1] *Voir* GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

une équation aux dérivées partielles du premier ordre : les équations

$$dt = \frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n}}$$

$$= \frac{dp_1}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \ldots = \frac{dp_n}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

définissent une infinité de multiplicités M_1^1 appelées *caractéristiques* de l'équation.

II. Soit

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0$$

un système en involution de m équations distinctes. Soit e^1 un élément vérifiant les équations; par e^1 passe une caractéristique $(M_1)_1^1$ de F_1; soit e'^1 un élément de $(M_1)_1^1$; par e'^1 passe une caractéristique $(M_2)_1^1$ de F_2, et l'ensemble de ces caractéristiques forme une multiplicité N_2^1.

En opérant avec N_2^1 et les caractéristiques de F_3 comme on l'a fait avec $(M_1)_1^1$ et $(M_2)_1^1$, et en continuant de proche en proche, on arrivera finalement à une multiplicité M_m^1, que nous appellerons *multiplicité caractéristique*.

III. Toute intégrale qui passe par un élément E^1 contient la multiplicité caractéristique correspondante.

Nous ferons connaître plus loin les systèmes d'équations aux dérivées partielles jouissant de propriétés analogues; mais, auparavant, nous allons rappeler quelques propositions relatives aux systèmes les plus généraux.

5. On dit qu'un système d'équations aux dérivées partielles

$$(6) \qquad \begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots, z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}, \ldots, z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}) = 0, \\ \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_i = 0 \end{cases}$$

est *intégrable*, quand il y a au moins une fonction z de $x_1, \ldots, x_n$ qui transforme ces équations en identités.

D'après notre terminologie, et si p est l'ordre le plus élevé de dérivation, cela signifie qu'il existe au moins une multiplicité d'éléments M_n^p qui vérifie les relations (6).

M. Riquier, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences et publié dans le Tome XXXIII des *Mémoires des Savants étrangers*, a posé les règles suivantes pour reconnaître si un système est intégrable.

I. Désignant par

$$x, \quad y, \quad \ldots$$

les variables indépendantes, et par

$$u, \quad v, \quad \ldots$$

les fonctions inconnues d'un système différentiel quelconque, faisons correspondre à chacune des quantités

$$x, \quad y, \quad \ldots, \qquad u, \quad v, \quad \ldots$$

p entiers positifs, nuls ou négatifs, que nous nommerons *cote première, cote seconde,* etc., *cote* $p^{\text{ième}}$ de cette quantité; considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions inconnues, et désignant par q un terme pris à volonté dans la suite

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p,$$

nommons *cote* $q^{\text{ième}}$ de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue les cotes $q^{\text{ièmes}}$ de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non.

Cela étant, le système différentiel proposé sera dit orthonome, si, moyennant un choix convenable du nombre p et des cotes attribuées à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, il remplit à la fois les conditions suivantes :

1° Chacune des équations données a pour premier membre une dérivée de quelque fonction inconnue; les premiers membres dont il s'agit sont tous distincts entre eux, et les seconds membres, si l'on y considère pour un instant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, et les dérivées de $u, v, \ldots$ qui y figurent comme autant de variables distinctes, sont tous olotropes dans un même système de cercles.

2° Les diverses dérivées des fonctions inconnues qui figurent dans les seconds membres d'une équation quelconque ont des ordres au plus égaux à celui du premier membre correspondant; en outre, si l'on désigne par $c_1, \ldots, c_p$ les cotes du premier membre, et par $c'_1, \ldots, c'_p$ celles d'une dérivée quelconque d'ordre égal figurant dans le second, les différences

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \ldots, \quad c_p - c'_p$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

3° Aucun des premiers membres ni aucune de leurs dérivées ne figurent dans le second membre d'une équation donnée quelle qu'elle soit.

II. En adjoignant aux relations d'un système orthonome donné toutes celles qui s'en déduisent par de simples différenciations, on obtient un groupe illimité de relations dont la considération permet de partager en deux grandes catégories les dérivées de tous les ordres des diverses fonctions inconnues; parmi ces dérivées, les unes, que nous nommerons *principales,* figurent au moins une fois dans les premiers membres des relations considérées; les autres, que nous nommerons *paramétriques,* n'y figurent jamais.

III. Les relations primitives d'un système orthonome donné peuvent se partager en groupes se succédant d'après une loi telle que les seconds membres d'un groupe quelconque ne contiennent, outre les variables indépendantes, les fonctions inconnues et certaines dérivées paramétriques, que les dérivées principales figurant dans le premier membre des groupes antérieurs.

Ces groupes de relations s'appellent *relations ultimes*.

IV. Par rapport aux valeurs initiales x_0, y_0, ... des variables indépendantes, nous nommerons *détermination initiale* d'une intégrale la portion de son développement formée par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques constants près, ont pour coefficients les valeurs initiales de l'intégrale et de ses dérivées paramétriques.

V. Un système orthonome est dit *passif* si la concordance numérique des relations ultimes a lieu pour toutes les données initiales possibles.

VI. Si l'on considère deux dérivées (distinctes) d'une fonction quelconque $F(x, y, \ldots)$ et que l'on adjoigne mentalement à chacune d'elles la suite indéfinie de ses propres dérivées, tout terme commun aux deux groupes illimités ainsi obtenus se nommera une *résultante* des deux dérivées en question.

Considérons un système orthonome et dans ce système deux équations ayant pour premiers membres respectifs deux dérivées d'une même fonction inconnue; puis, prenons la résultante d'*ordre minimum* de ces dérivées, et faisons cette opération de toutes les manières possibles; les résultantes, en nombre essentiellement limité, que nous obtiendrons ainsi, se nommeront les *dérivées cardinales* des diverses fonctions inconnues.

Pour qu'un système différentiel orthonome soit passif, il faut et il suffit que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque soient égales *identiquement*.

VII. Étant donné un système orthonome passif, si l'on choisit une détermination initiale convergente, les développements que l'on en déduit pour les intégrales au moyen du système sont en général convergents.

6. Appliquons d'abord les résultats précédents à un exemple simple. Soit

$$(7)\qquad \begin{cases} s=f(x,\, y,\, z,\, p,\, q,\, r), \\ t=\varphi(x,\, y,\, z,\, p,\, q,\, r) \end{cases}$$

un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, où l'on a posé

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y},\qquad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit orthonome et passif?

Choisissons les cotes suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \text{pour} & z, \\ 0 & » & x, \\ 1 & » & y. \end{array}$$

Le système est alors orthonome, car la cote de r est 0, celle de s est 1, et celle de t est 2.

Pour qu'il soit passif, il faut que les expressions ultimes des dérivées cardinales soient égales identiquement; or on a, dans les premiers membres, les dérivées

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

qui ont pour dérivée cardinale

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}.$$

Du système (7), on tire

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}f + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}p + \frac{\partial \varphi}{\partial p}r + \frac{\partial \varphi}{\partial q}f + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial p}f + \frac{\partial f}{\partial q}\varphi + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y},\end{aligned}$$

d'où les conditions

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}p + \frac{\partial \varphi}{\partial p}r + \frac{\partial \varphi}{\partial q}f \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial p}f + \frac{\partial f}{\partial q}\varphi + \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}f\right).\end{aligned}$$

Si ces conditions sont remplies, les dérivées paramétriques sont

$$p, \quad q, \quad r, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \ldots$$

et elles définissent le degré de généralité de la solution; l'interprétation géométrique est immédiate : pour définir une surface intégrale, il suffira de se donner un élément E^1 et une courbe issue de cet élément.

7. Considérons maintenant un système d'équations aux dérivées partielles définissant z en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ dont toutes les équations ont été ramenées au même ordre p par des différentiations convenables, et supposons que le nombre de ces équations soit égal à

$$\Gamma_n^p - i,$$

Γ_n^p désignant le nombre des dérivées d'ordre p de z par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, et i un entier positif *au plus égal à n*.

On peut toujours supposer que le système a la forme suivante :

$$(8) \qquad Z^p_{\beta_1\ldots\beta_n} = \left(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots, Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_i^p}\right).$$

Cherchons les conditions de passivité d'un tel système.

Pour obtenir les z^{p+1}, il faut différentier les équations du système par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ successivement; on obtiendra ainsi les z^{p+1} en fonction des $z^1, \ldots, z^p$ et des

$$\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_k^p \partial x_\rho} \qquad (k \leqq i, \quad \rho = 1, 2, \ldots, n).$$

Parmi les équations (8), il y en a de la forme

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_k^{p-1} \partial x_\rho} = \left(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_i^p}\right),$$
$$k < i, \qquad \rho > i;$$

différentiées par rapport à x_k, elles donnent les

$$\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_k^p \partial x_\rho}, \qquad k < i, \quad \rho > i,$$

en fonction des

$$\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_k^p \partial x_\rho}, \qquad k < i, \quad \rho < i.$$

Envisageons de même les relations

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_k^{p-1} \partial x_\rho} = \left(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_i^p}\right),$$
$$k < i, \qquad \rho < i, \qquad \rho \neq k;$$

elles sont au nombre de $i(i-1)$; différentiées convenablement, elles donnent $i(i-1)$ relations entre les

$$\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_k^p \partial x_\rho}, \qquad k < i, \quad \rho < i$$

permettant de les calculer en fonction de

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad Z^1, \quad \ldots, \quad Z^p, \quad \frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_1^{p+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_i^{p+1}}.$$

On aura donc, pour l'ordre $p+1$,

$$Z^{p+1}_{\gamma_1 \ldots \gamma_n} = \left(x_1, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^{p-1}, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_i^p}, \frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_1^{p+1}}, \ldots, \frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_i^{p+1}}\right)$$

et, d'une façon générale, en appliquant de proche en proche le mécanisme précédent,

$$Z^{p+q}_{\ldots} = \left(x_1, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^{p-1}, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x_1^{p+q}}, \ldots, \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x_i^{p+q}}\right);$$

ce sont les *relations ultimes* (5, III).

Les dérivés paramétriques sont ici

$$Z^1, \quad \ldots, \quad Z^{p-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x_k^{p+q}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, i, \qquad q = 1, 2, \ldots;$$

pour reconnaître si le système est passif, il faudra considérer les dérivées cardinales; or, la dérivée cardinale de $Z^p_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ et $Z^p_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}$ est d'ordre $2p$ au plus; *il suffira donc de pousser les opérations indiquées jusqu'à l'ordre $2p$ et de vérifier que les différentes expressions ultimes des dérivées cardinales sont égales identiquement* (5, VI).

Le degré de généralité des intégrales est déterminé par le développement

$$z - z_0 = P(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0) + \sum_{\rho=p}^{\infty} \frac{1}{\rho!} \left[\left(\frac{\partial^\rho z}{\partial x_1^\rho}\right)_0 (x_1 - x_1^0)^\rho + \ldots + \left(\frac{\partial^\rho z}{\partial x_i^\rho}\right)_0 (x_i - x_i^0)^\rho\right],$$

où P est un polynome de degré $p-1$; on peut encore écrire

$$z - z_0 = Q(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0) + \varphi_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + \varphi_i(x_i - x_i^0),$$

Q est encore un polynome de degré $p-1$, et si l'on fait

$$
\begin{array}{lll}
x_2 = x_2^0, \ \ldots, \ x_n = x_n^0, & \text{on a} & z - z_0 = \varphi_1(x_1 - x_1^0), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_1 = x_1^0, \ \ldots, \ x_n = x_n^0, & \text{»} & z - z_0 = \varphi_i(x_i - x_i^0)
\end{array}
$$

$$(x_i \neq x_i^0).$$

De plus, comme une transformation ponctuelle ne change pas les propriétés du système proposé, nous pouvons en conclure que *la multiplicité intégrale m_n est complètement déterminée si l'on se donne un élément* E^{p-1} *et i courbes (multiplicités à une dimension) issues de cet élément.*

Appliquons le mécanisme indiqué à l'exemple suivant :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c', \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c'', \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c'''. \tag{12}$$

Les dérivées cardinales sont

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_3^2}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x_2 \partial x_3^2}, \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2};$$

nous devons donc aller jusqu'au quatrième ordre.

Pour calculer

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_3}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^2 \partial x_3},$$

il suffit de différentier (10) par rapport à x_1 et (11) par rapport à x_2; on obtient

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^2 \partial x_3} = 2\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3}.$$

Différentiant (9) par rapport à x_1 et x_2 successivement, on a

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3}.$$

Il vient alors, en différentiant (9) par rapport à x_3, (10) par rapport à x_2 et (11) par rapport à x_1 :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} = 2\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3};$$

différentiant (10) par rapport à x_3 et (12) par rapport à x_1,

$$(13) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_3^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_1^3} + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_1^3} + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3};$$

différentiant (11) par rapport à x_3 et (12) par rapport à x_2 :

$$(14) \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x_2 \partial x_3^2} = 2\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} = 4\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3};$$

les différentes expressions ultimes des dérivées cardinales du troisième ordre sont donc concordantes; on vérifierait par le même procédé et en différentiant (13) par rapport à x_2 et (14) par rapport à x_1 que les expressions ultimes de $\frac{\partial^4 z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2}$ sont aussi concordantes.

8. Envisageons encore le système (8), dans lequel nous supposerons maintenant $i < n$, l'inégalité excluant l'égalité. Il se compose d'un premier groupe

$$(\mathrm{A}) \qquad Z^p_{\beta_1 \ldots \beta_n} = \left(x_1, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^{p-1}, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_i^p}\right),$$

formé d'équations telles que, dans les premiers membres, il n'y a aucune dérivée de la forme

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_\rho^p}, \qquad \rho > i,$$

puis $n - i$ équations

$$(\alpha_1) \qquad \frac{\partial^p z}{\partial x_{i+1}^p} = \left(x_1, \ldots, x_n, \ldots \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_i^p}\right),$$

. . . .

$$(\alpha_{n-i}) \qquad \frac{\partial^p z}{\partial x_n^p} = \left(x_1, \ldots, x_n, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_i^p}\right).$$

Il résulte immédiatement du mécanisme adopté pour écrire les conditions de passivité que, si le système proposé est passif, les différents systèmes

$$(A\alpha_1), \quad \ldots, \quad (A\alpha_{n-i})$$

le sont aussi.

Donc, *si un système différentiel, définissant z en fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, composé de $\Gamma_n^p - i$ équations d'ordre $p (i < n)$, est passif, il renferme $n - i$ systèmes différentiels passifs composés chacun de $\Gamma_n^p - n + 1$ équations.*

DEUXIÈME PARTIE.

9. Il résulte des principes exposés dans la première Partie que, si un système différentiel définissant z en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ admet une solution générale ne dépendant que d'une fonction arbitraire d'un seul argument, et si l'on a ramené, par des différentiations, toutes les équations du système à être du même ordre p, le nombre de ces équations est égal au nombre des dérivées d'ordre p diminué d'une unité. Soit

$$(15) \qquad \psi_i(x_1, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^{p-1}, Z^p) = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, \Gamma_n - 1$$

un tel système; je supposerai que les ψ_i sont des fonctions rationnelles de leurs arguments.

Si, dans ces équations, je considère les dérivées d'ordre p comme des variables indépendantes, elles sont résolubles par rapport à $\Gamma_n^p - 1$ de ces dérivées; la formation de déterminants fonctionnels permettra d'ailleurs de reconnaître quelles sont les dérivées jouissant de cette propriété, et, par suite, quelle dérivée figurera dans les seconds membres. Soit

$$Z^p_{x_1 \ldots x_n}$$

cette dérivée; on peut toujours choisir les notations de façon que

$$\alpha_n \neq 0;$$

enfin, j'envisage aussi les dérivées

$$Z^p_{\alpha_1+1\ldots\alpha_n-1},\quad \ldots,\quad Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_n-1},\quad \ldots,\quad Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}+1\ldots\alpha_n-1}.$$

Je puis préparer le système donné, par voie d'élimination, de façon que $n-1$ de ses équations aient la forme

$$(16)\qquad 0 = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^{p-1}, Z^p_{\alpha_1+1\ldots\alpha_n-1}, \ldots, Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}+1\,\alpha_n-1}, Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Cela posé, il est facile de montrer que, par un procédé analogue au changement de variables employé par Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre, on peut ramener l'intégration de notre système à l'étude d'équations différentielles ordinaires. Substituons, en effet, aux variables

$$x_1,\quad \ldots,\quad x_{n-1},\quad x_n$$

les variables

$$x_1,\quad \ldots,\quad x_{n-1},\quad y,$$

le choix de cette nouvelle variable y devant être précisé plus loin.

Les formules bien connues du changement de variables nous donnent

$$(17)\qquad \frac{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i} = Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n} + Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}\frac{\partial x_n}{\partial x_i},$$

$$(18)\qquad \frac{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial y} = Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}\frac{\partial x_n}{\partial y},$$

d'où les conditions d'intégrabilité

$$(19)\qquad \frac{\partial Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n}}{\partial y} = \frac{\partial Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial y} - \frac{\partial Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial y}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}.$$

Différentions les équations (16) par rapport à y; nous obtiendrons, en tenant compte de (17), (18) et (19),

$$(20)\quad o = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}} Z^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n + 1} \frac{\partial x_n}{\partial y}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_j + 1 \ldots \alpha_n - 1}} \frac{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_j}\frac{\partial x_n}{\partial y} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_j + 1 \ldots \alpha_n - 1}} \frac{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial y}\frac{\partial x_n}{\partial x_j}$$
$$+ \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} \frac{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial y},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Je choisis maintenant la nouvelle variable y de façon que l'on ait

$$(21)\quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_j + 1 \ldots \alpha_n - 1}} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} = o,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1;$$

dans les équations (20) le terme en $\frac{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial y}$ disparaît; et, par suite,

$$(22)\quad o = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}} Z^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n + 1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_j + 1 \ldots \alpha_n - 1}} \frac{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_j},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Grâce à nos hypothèses, le déterminant des $\frac{\partial x_n}{\partial x_j}$, dans les équations (21), qui est le déterminant des $\frac{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_j}$, dans les équations (22), ne sera pas identiquement nul; il en sera de même pour le déterminant des $\frac{\partial Z^p_{\beta_1 \ldots \beta_n}}{\partial x_j}$, dans les équations provenant des $\Gamma^p_n - n$ équations du système proposé, différentes des équations (16), différentiées successivement par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Si donc nous considérons x_n, z, $Z^1, \ldots, Z^{p-1}$, Z^p comme des fonctions distinctes de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, elles sont définies par un système différentiel tel qu'on connaît toutes les dérivées du premier ordre des fonctions inconnues au moyen de ces fonctions et des variables indépendantes.

On pourrait, par un calcul direct, montrer que ce nouveau système est passif si le système proposé jouit de cette propriété; nous donnerons seulement, dans la troisième Partie (n° 19), une démonstration en quelque sorte géométrique de ce fait.

Je rappelle le procédé qui permet d'intégrer un pareil système.

Pour trouver les intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$ du système

$$(a) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n)$$

qui, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ se réduisent, respectivement, à $u_1^0, \ldots, u_m^0$, on procédera de la façon suivante: on effectuera, d'abord, le changement de variables

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \qquad \ldots, \qquad x_k = x_k^0 + y_1 y_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

dans le système (a). On remplacera ainsi ce système par un nouveau système

$$(b) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial y_k} = \mathbf{F}_{ik}$$

et aux intégrales précédentes du système (a) correspondront des intégrales du système (b) qui, pour $y_1 = 0$, se réduiront, respectivement, à $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$, quelles que soient les valeurs de $y_2, \ldots, y_n$.

On considère alors le système d'équations différentielles ordinaires

$$(c) \qquad \frac{du_1}{dy_1} = \mathbf{F}_{11}, \qquad \frac{du_2}{dy_1} = \mathbf{F}_{21}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dy_1} = \mathbf{F}_{m1}$$

déduit du système (b), en prenant les équations de ce système pour lesquelles $k = 1$, et l'on obtient les intégrales cherchées du système (b) en déterminant les intégrales du système (c), où l'on considère $y_2, y_3, \ldots, y_m$ comme des paramètres arbitraires, qui, pour $y_1 = 0$, se réduisent respectivement aux constantes données $u_1^0, \ldots, u_m^0$.

10. En appliquant cette méthode au système que nous avons obtenu, on aura

$$(23) \qquad \begin{cases} x_n = f[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, \ldots (z^p)^0], \\ z = \mathbf{F}[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, \ldots (z^p)^0], \\ \mathbf{Z}^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \mathbf{F}^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, \ldots, (z^p)^0]; \end{cases}$$

les valeurs initiales

$$x_1^0, \quad \ldots, \quad x_n^0, \quad z^0, \quad \ldots, \quad (z^p)^0$$

sont des fonctions de y définies par les relations (18) et transformant en identités les équations (15).

Nous allons voir que, si l'on choisit pour $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ des constantes numériques quelconques, si l'on pose

$$x_n^0 = \varphi(y), \qquad z^0 = \psi(y)$$

(φ et ψ étant des fonctions arbitraires de leur argument), et si l'on détermine les valeurs des $(Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n})_0$, de façon que l'on ait

$$\frac{\partial (Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n})_0}{\partial y} = (Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1})_0 \frac{\partial x_n^0}{\partial y}, \tag{24}$$

les valeurs de x_n, z, $Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ tirées des formules (23) vérifient les relations (¹) (18).

Considérons, en effet, les expressions

$$U^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n} = \frac{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial y} - Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}\frac{\partial x_n}{\partial y};$$

nous aurons

$$\frac{\partial U^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i \partial y} - \frac{\partial Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial y} - Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}\frac{\partial^2 x_n}{\partial x_i \partial y}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

mais, à cause des relations (17), on a aussi

$$\frac{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i} = Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n} + Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}; \tag{17}$$

en différentiant cette relation par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial U^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i} = U^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n} + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right) U^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}, \tag{25}$$

où $\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right)$ est donné par les équations (21).

(¹) Il est presque inutile de dire qu'aux conditions (24) on doit adjoindre les relations

$$\psi_i[x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, (Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n})^0] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \Gamma_n^p - 1).$$

Ces formules (25) sont valables pour $k = 1, 2, \ldots, p-2$.

Considérons maintenant les expressions

$$(26) \qquad \mathrm{U}^{p-1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n} = \frac{\partial \mathrm{Z}^{p-1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial y} - \mathrm{Z}^{p}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}\frac{\partial x_n}{\partial y},$$

et supposons (ce qui ne diminue en rien la généralité) que les équations proposées (15) aient été résolues par rapport à $\Gamma^p_n - 1$ dérivées d'ordre p.

Soit, d'une façon générale,

$$\mathrm{Z}^p_{\rho_1\ldots\rho_n} = \Phi^p_{\rho_1\ldots\rho_n}(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots, \mathrm{Z}^{p-1}, \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n});$$

les conditions d'intégrabilité étant satisfaites, on a, sur chaque multiplicité intégrale

$$(27) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \Phi^p_{\rho_1\ldots\rho_i+1\ldots\rho_n-1}}{\partial x_n} + \sum_{k=0}^{p-1}\frac{\partial \Phi^p_{\rho_1\ldots\rho_i+1\ldots\rho_n-1}}{\partial \mathrm{Z}^k_{\mu_1\ldots\mu_n}}\mathrm{Z}^{k+1}_{\mu_1\ldots\mu_n+1} + \frac{\partial \Phi^p_{\rho_1\ldots\rho_i+1\ldots\rho_n-1}}{\partial \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}\frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_n} \\ &= \frac{\partial \Phi^p_{\rho_1\ldots\rho_n}}{\partial x_i} + \sum_{k=0}^{p-1}\frac{\partial \Phi^p_{\rho_1\ldots\rho_n}}{\partial \mathrm{Z}^k_{\mu_1\ldots\mu_n}}\mathrm{Z}^{k+1}_{\mu_1\ldots\mu_i+1\ldots\mu_n} + \frac{\partial \Phi^p_{\rho_1\ldots\rho_i\ldots\rho_n}}{\partial \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}\frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Des équations (26) on tire

$$(28) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}^{p-1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\lambda_1\ldots\lambda_j+1\ldots\lambda_n}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial x_j}\frac{\partial x_n}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\lambda_1\ldots\lambda_j\ldots\lambda_n+1}}{\partial y}\frac{\partial x_n}{\partial x_j}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\lambda_1\ldots\lambda_j+1\ldots\lambda_n}}{\partial y} = \frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y} &+ \sum_{k=0}^{p-1}\frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_j+1\ldots\lambda_n}}{\partial \mathrm{Z}^k_{\mu_1\ldots\mu_n}}\left(\mathrm{U}^k_{\mu_1\ldots\mu_n} + \mathrm{Z}^{k+1}_{\mu_1\ldots\mu_n+1}\frac{\partial x_n}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_j+1\ldots\lambda_n}}{\partial \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}\frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial x_j} &+ \sum_{k=0}^{p-1}\frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial \mathrm{Z}^k_{\mu_1\ldots\mu_n}}\left(\mathrm{Z}^{k+1}_{\mu_1\ldots\mu_j+1\ldots\mu_n} + \mathrm{Z}^{k+1}_{\mu_1\ldots\mu_n+1}\frac{\partial x_n}{\partial x_j}\right) \\ &+ \frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_n-1}}{\partial \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}\frac{\partial \mathrm{Z}^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Remplaçons ces valeurs dans (28), en tenant compte des relations (27), nous obtiendrons

$$(29) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}^{p-1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_j} = \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_j+1\ldots\lambda_n}}{\partial \mathrm{Z}^k_{\mu_1\ldots\mu_n}} + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \Phi^p_{\lambda_1\ldots\lambda_j\ldots\lambda_n+1}}{\partial \mathrm{Z}^k_{\mu_1\ldots\mu_n}} \right] \mathrm{U}^k_{\mu_1\ldots\mu_n}.$$

En rapprochant les équations (15), (17), (21), (22), (25), (29), on voit que les expressions $\mathrm{U}^k_{\mu_1\ldots\mu_n}$ sont données par un système d'équations linéaires et homogènes qui permettent de les développer en séries entières par rapport à $x_1 - x_1^0, \ldots, x_{n-1} - x_{n-1}^0$; il en résulte que si les $\mathrm{U}^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ sont nuls pour les valeurs initiales, ils sont nuls pour toute valeur de $x_1, \ldots, x_{n-1}$, ainsi que nous l'avions annoncé.

11. Je considère les formules (23); les deux premières représentent une multiplicité ponctuelle à $n-1$ dimensions (m_{n-1}), et les autres font correspondre un élément E^p à chacun des points de cette multiplicité. D'autre part, parmi les équations différentielles qui définissent nos formules, nous remarquons les suivantes :

$$\frac{\partial \mathrm{Z}^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i} = \mathrm{Z}^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n} + \mathrm{Z}^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i\ldots\lambda_n+1} \frac{\partial x_n}{\partial x_i},$$

qui expriment que les deux éléments E^p correspondant à deux points infiniment voisins de m_{n-1} sont *unis*. Les formules (23) définissent donc une famille de multiplicités M^p_{n-1} (*voir* n° 3), que j'appellerai les *multiplicités caractéristiques* du système proposé.

Les équations (24), qui définissent les constantes $x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, (\mathrm{Z}^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n})^0$ en fonction de y, représentent une multiplicité M^p_1 ayant pour support la courbe

$$x_1 = x_1^0, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = x_{n-1}^0 \qquad x_n = \varphi(y), \qquad z = \psi(y);$$

et la multiplicité intégrale est le lieu des multiplicités caractéristiques issues des différents éléments E^p de cette multiplicité M^p_1.

Nous avons vu, d'ailleurs, qu'une transformation ponctuelle ne changeait aucune de ces propriétés; nous pouvons donc définir de la façon suivante l'intégrale générale du système proposé : *On considère une courbe (multiplicité à 1 dimension) quelconque, et l'on cherche* *une multiplicité* M_1^p *ayant cette courbe pour support et vérifiant le système proposé; le lieu des multiplicités caractéristiques issues des divers éléments* E^p *de* M_1^p *est une multiplicité intégrale* m_n.

Comment obtenir cette multiplicité M_1^p? Soient

$$x_1 = \varphi_1(u), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(u), \qquad z = \psi(u)$$

les équations du support; on a à intégrer le système

$$\frac{dZ^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{du} = \sum_{i=1}^{n} Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n}\frac{dx_i}{du},$$

$$\Psi_i(x_1, \ldots, x_n, z \ \ldots, Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}, \ldots) = 0.$$

Quelques-unes des fonctions inconnues ne seront pas affectées de constantes d'intégration.

En effet, l'équation en $\frac{dz}{du}$ livre une relation linéaire entre les dérivées du premier ordre Z^1; si l'on différentie cette relation par rapport à u, en tenant compte des équations en $\frac{dZ^1}{du}$, on obtient une relation linéaire par rapport à Z^1 et Z^2; en procédant ainsi de proche en proche, on arrivera finalement à une relation linéaire en $Z^1, Z^2, \ldots, Z^p$; cette relation, associée aux $\Gamma_n^p - 1$ équations données, donnera tous les Z^p en fonction des Z^q, où $q < p$.

Le nombre des constantes arbitraires qui entrent dans les formules définissant la multiplicité M_1^p cherchée est donc

$$\Gamma_n^1 + \Gamma_n^2 + \ldots + \Gamma_n^{p-1} - (p-1) = \Gamma_{n+1}^{p-1} - p;$$

il y a donc $\infty^{\Gamma_{n+1}^{p-1}-p}$ multiplicités intégrales m_n passant par une courbe donnée.

12. Il résulte de ce qui précède que, par une multiplicité caractéristique passent une infinité de multiplicités intégrales m_n; à chacune de ces multiplicités correspond, sur le support de la multiplicité caractéristique, une orientation des $Z^{p+1}, Z^{p+2}, \ldots$. Il est facile, comme on va le voir, d'obtenir directement l'ensemble de ces orientations.

En effet, si nous différentions les équations du système proposé par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ successivement, nous obtiendrons, comme nous l'avons vu au n° 7, $\Gamma_n^{p+1} - 1$ équations distinctes d'ordre $p+1$; nous allons traiter ces nouvelles équations de la même manière que les équations primitives.

Envisageons les $n-1$ équations (16) et différentions-les par rapport à x_n; nous aurons

$$
(30) \qquad \Lambda_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}} Z^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n+1} + \ldots
+ \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_j+1 \ldots \alpha_n-1}} Z^{p+1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_j+1 \ldots \alpha_n} + \ldots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} Z^{p+1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n+1}
$$

$$
(i = 1, 2, \ldots, n-1).
$$

Ces équations sont certainement distinctes.

En appliquant les formules (21) et (22) à ce *nouveau système,* nous aurons

$$
(31) \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_j+1 \ldots \alpha_n-1}} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} = 0,
$$

et

$$
(32) \qquad 0 = \text{une fonction de } x_1, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^{p+1}
+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_j+1 \ldots \alpha_n-1}} \frac{\partial Z^{p+1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n+1}}{\partial x_j}.
$$

On aura de plus

$$
\frac{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_j} = Z^{p+1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_j+1 \ldots \alpha_n} + Z^{p+1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n+1} \frac{\partial x_n}{\partial x_j}.
$$

Si l'on effectue la somme

$$
\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_j+1 \ldots \alpha_n-1}} \frac{\partial Z^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_j},
$$

en tenant compte de (30) et (31), on retrouve justement la relation (22).

Comme on devait s'y attendre, nous retrouvons les mêmes caractéristiques jusqu'à l'ordre p, l'orientation des Z^{p+1} étant donnée par les formules (32) et les $\Gamma_n^{p+1} - 1$ équations d'ordre $p+1$.

Il est manifeste qu'on pourra poursuivre le calcul de proche en proche et atteindre tel ordre que l'on voudra.

Il résulte immédiatement des calculs précédents que, *si deux multiplicités intégrales m_n ont en commun un élément* $E^{p'}$ $(p' \geqq p)$, *elles auront aussi en commun tous les éléments d'ordre p' correspondant aux différents points du support de la multiplicité caractéristique passant par* $E^{p'}$.

13. Les formules (23) nous montrent que, par tout élément E^{p-1} passe une famille de multiplicités caractéristiques dépendant d'un paramètre arbitraire; toutes ces caractéristiques engendrent une multiplicité intégrale m_n, car on satisfait évidemment aux conditions (24) en prenant pour $x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots, (Z^{p-1})_0$ des constantes. Cette multiplicité m_n est une *intégrale complète* dépendant de $\Gamma_{n+1}^{p-1} + 1$ constantes arbitraires.

Si l'on connaît *a priori* une intégrale complète, le problème de l'intégration du système proposé se réduit à la recherche des multiplicités intégrales M_1^p.

Supposons, en effet, qu'on ait déterminé une multiplicité de ce genre; $x_1, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^p$ sont des fonctions connues d'une seule variable u.

Soit, d'autre part,

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\Gamma_{n+1}^{p-1}+1}) = 0$$

l'intégrale complète; on déterminera les λ en fonction de u de façon que, si l'on fait varier u, l'intégrale complète passe successivement par les différents éléments E^p de M_1^p; il résulte alors des théorèmes établis plus haut qu'on aura la multiplicité intégrale m_n passant par M_1^p en cherchant l'enveloppe de l'intégrale complète, c'est-à-dire en éliminant u entre les deux équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

14. Considérons, en particulier, le cas de deux équations du second ordre à deux variables indépendantes.

Soient

$$\left\{\begin{aligned} r &= f(x, y, z, p, q, s), \\ t &= \varphi(x, y, z, p, q, s) \end{aligned}\right. \tag{33}$$

ces deux équations. Pour qu'elles aient une solution commune dépendant d'une fonction arbitraire, il faut que l'on ait identiquement (n° 6)

$$1 - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial \varphi}{\partial p} f + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} \varphi\right) = 0. \tag{35}$$

Les formules du changement de variables de Cauchy sont ici

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= r + s\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= s + t\frac{\partial y}{\partial x}, \end{aligned}\right. \tag{36}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= q\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial p}{\partial u} &= s\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial q}{\partial u} &= t\frac{\partial y}{\partial u}, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

d'où l'on déduit

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial r}{\partial u} &= \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial s}{\partial u} &= \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Différentiant la première des équations (33) par rapport à u, on aura, en tenant compte de (36), (37) et (38),

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}} = -\dfrac{\partial f}{\partial s}, \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q + \dfrac{\partial f}{\partial p} s + \dfrac{\partial f}{\partial q} \varphi. \end{cases}$$

Les caractéristiques sont donc définies par les équations différentielles suivantes :

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f}{\partial s} = -\dfrac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}}, \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = p - q\dfrac{\partial f}{\partial s}, \\[2ex] \dfrac{dp}{dx} = f - s\dfrac{\partial f}{\partial s}, \\[2ex] \dfrac{dq}{dx} = s - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial s}, \\[2ex] \dfrac{ds}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} q + \dfrac{\partial f}{\partial p} s + \dfrac{\partial f}{\partial q} \varphi \\[2ex] \qquad = -\dfrac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} p + \dfrac{\partial \varphi}{\partial p} f + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q} s\right), \\[2ex] r = f(x, y, z, p, q, s), \\ t = \varphi(x, y, z, p, q, s). \end{cases}$$

La solution générale

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{Y}(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0), \\ z &= \mathrm{Z}(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0), \\ p &= \mathrm{P}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ q &= \mathrm{Q}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ s &= \mathrm{S}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \end{aligned}$$

renferme cinq constantes arbitraires.

Les deux premières équations représentent une courbe; les deux suivantes, une orientation de plans tangents à cette courbe; on peut interpréter géométriquement les formules qui définissent r, s, t en disant qu'elles représentent une orientation de calottes infiniment petites de surfaces du second degré ayant pour plans tangents les plans définis par les deux formules qui donnent p et q.

Deux éléments infiniment voisins sont unis; il en résulte que les deux calottes correspondantes sont tangentes.

En effet, l'équation de la calotte correspondant à x', y', z', p', q', r', s', t',

$$\begin{aligned}z - z' = {} & p'(x - x') + q'(y - y')\\ & + \tfrac{1}{2}[r'(x - x')^2 + 2s'(x - x')(y - y') + t'(y - y')^2];\end{aligned}$$

pour $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$, $p' - dp'$, $q' + dq'$, $r' + dr'$, $s' + ds'$, $t' + dt'$, on a, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur et en tenant compte de

$$\begin{aligned}dz' &= p'\,dx' + q'\,dy',\\ dp' &= r'\,dx' + s'\,dy',\\ dq' &= s'\,dx' + t'\,dy',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z - z' = {} & p'(x - x') + q'(y - y')\\ & + \tfrac{1}{2}[r'(x - x')^2 + 2s'(x - x')(y - y') + t'(y - y')^2]\\ & + \tfrac{1}{2}[dr'(x - x')^2 + 2\,ds'(x - x')(y - y') + dt'(y - y')^2];\end{aligned}$$

on voit alors immédiatement que les deux calottes sont tangentes; leur intersection a un point double dont les tangentes sont données par

$$dr'(x - x')^2 + 2\,ds'(x - x')(y - y') + dt'(y - y')^2 = 0.$$

Il résulte de nos théorèmes généraux que, si une surface intégrale a un contact du second ordre avec un de ces éléments de quadriques, les autres éléments de quadriques appartenant à la caractéristique correspondante jouissent de la même propriété.

Si l'on se donne un élément E^1, c'est-à-dire un point O et un plan P passant par ce point, il y a une infinité de courbes caractéristiques tangentes au plan P en O; ces caractéristiques, dépendant d'un paramètre arbitraire, engendrent une surface qui est une intégrale de notre système. Soit

$$F(x, y, z, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

l'équation de cette surface; en donnant à x_0 une valeur *numérique* et en considérant y_0, z_0, p_0, q_0 comme des paramètres arbitraires, on obtient ainsi une *intégrale complète*.

Pour résoudre le problème de Cauchy correspondant à une courbe donnée C, il faut d'abord rechercher le long de cette courbe une orientation d'éléments du second ordre *unis* et vérifiant le système proposé (33); cette orientation est donnée par

$$\frac{dz}{d\lambda} = p\frac{dx}{d\lambda} + q\frac{dy}{d\lambda}, \tag{41}$$

$$\frac{dp}{d\lambda} = f\frac{dx}{d\lambda} + s\frac{dy}{d\lambda}, \tag{42}$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = s\frac{dx}{d\lambda} + \varphi\frac{dy}{d\lambda}, \tag{43}$$

où x, y, z sont des fonctions données de λ. L'équation (41), différentiée par rapport à λ, donne

$$\frac{d^2z}{d\lambda^2} = p\frac{d^2x}{d\lambda^2} + q\frac{d^2y}{d\lambda^2} + f\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda} + \varphi\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2;$$

cette relation fait connaître s en fonction de p, q et λ; l'équation (41) fait connaître q en fonction de p et λ, de sorte que l'équation (42) devient une équation du premier ordre dont l'intégration livrera p.

Étant donnée une courbe C, il y a donc une infinité à un paramètre de surfaces intégrales contenant cette courbe.

15. Considérons une orientation d'éléments unis le long de C et vérifiant notre système, et une intégrale complète.

On peut, comme nous l'avons vu dans la théorie générale, choisir comme valeurs de ses paramètres des fonctions de λ telles que l'intégrale complète passe successivement par les divers éléments de cette orientation. Soit

$$F(x, y, z, \lambda) = 0 \tag{44}$$

l'équation de cette intégrale à un paramètre; la surface intégrale sera l'enveloppe de la surface (44) et aura avec elle un contact du second ordre tout le long de la caractéristique; on aura donc tout le long de cette courbe

$$F = 0, \qquad \delta F = 0, \qquad \delta^2 F = 0,$$

δ indiquant la différentiation par rapport au paramètre λ.

Si l'on se propose de trouver, sur la surface intégrale, l'enveloppe des caractéristiques, il faudra éliminer λ entre les équations

$$F = 0, \qquad \delta F = 0, \qquad \delta^2 F = 0, \qquad \delta^3 F = 0.$$

La courbe ainsi définie a un contact du second ordre avec les caractéristiques qu'elle enveloppe. En effet, les éléments du premier et du second ordre de l'enveloppe sont définis par

$$\begin{aligned} &dF + \delta F = 0, && d\,\delta F + \delta^2 F = 0, \\ &d^2 F + 2d\,\delta F + \delta^2 F = 0, && d^2\delta F + 2d\,\delta^2 F + \delta^3 F = 0, \end{aligned}$$

où λ est considéré comme une fonction de xyz; mais, à cause de

$$\delta F = 0, \qquad \delta^2 F = 0, \qquad \delta^3 F = 0,$$

ces équations se réduisent à

$$dF = 0, \qquad d\,\delta F = 0, \qquad d\,\delta^2 F = 0, \qquad d^2 F = 0, \qquad d^2\delta F = 0,$$

où l'on considère λ comme une constante; or, nous obtenons ainsi les équations qui définissent les éléments du premier et du second ordre de la caractéristique.

Nous voyons ainsi que les intégrales des systèmes formés de deux équations du second ordre à deux variables indépendantes sont analogues aux intégrales sans rebroussement apparent signalées par M. Darboux, comme un cas particulier dans les intégrales des équations du premier ordre.

Nous appellerons *courbes intégrales* du système proposé ces enveloppes de caractéristiques jouissant de la propriété d'avoir un contact du second ordre avec leurs enveloppées.

Proposons-nous de chercher l'équation différentielle de ces courbes.

Sur une surface intégrale quelconque, nous avons, pour un déplacement quelconque, les relations

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = p + q\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{dp}{dx} = f + s\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{dq}{dx} = s + \varphi\dfrac{dy}{dx}. \end{cases}$$

Différentions la première de ces relations en tenant compte des deux autres; nous obtiendrons

$$(46)\qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = f + 2s\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + q\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Différentions la relation (46); il vient

$$(47)\qquad \begin{aligned} \frac{d^3 z}{dx^3} = {} & \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(p + q\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial p}\left(f + s\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\left(s + \varphi\frac{dy}{dx}\right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{ds}{dx} + 2\frac{ds}{dx}\frac{dy}{dx} + 2s\frac{d^2 y}{dx^2} \\ & + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(p + q\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\left(f + s\frac{dy}{dx}\right)\right] \\ & + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(s + \varphi\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{ds}{dx}\right] + 2\varphi\frac{\partial y}{\partial x}\frac{d^2 y}{dx^2} \\ & + \left(s + \varphi\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + q\frac{d^3 y}{dx^3}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant, sur une surface intégrale, le point de contact d'une caractéristique avec son enveloppe; le déplacement est défini par

$$(48)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}} = -\frac{\partial f}{\partial s};$$

pour les deux courbes, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$ ont les mêmes valeurs, tandis que la valeur de $\frac{ds}{dx}$ n'est pas la même pour la caractéristique et pour son enveloppe; mais, d'autre part, $\frac{ds}{dx}$ disparaît de l'équation (47); cette relation est donc commune à la caractéristique et à son enveloppe. En éliminant p, q, s entre la première des équations (45) et les équations (46), (47) et (48), on aura l'équation différentielle des courbes intégrales

$$F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0. \tag{49}$$

Inversement, si l'on considère une courbe C

$$y_0 = A(x_0), \qquad z_0 = B(x_0)$$

vérifiant la relation (49), la première des équations (45) et les équations (46), (47) et (48) définissent, le long de cette courbe, une orientation d'éléments du second ordre unis; à chacun de ces éléments correspondra une caractéristique ayant, avec la courbe donnée, un contact du second ordre, et toutes ces caractéristiques engendreront une surface intégrale ayant pour arête de rebroussement non apparent la courbe C.

16. Il est clair que des calculs et des raisonnements tout à fait analogues s'appliquent à tout système complètement intégrable composé de p équations d'ordre p définissant une fonction z de deux variables x et y.

17. Soit

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{50}$$

une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes; appliquons-lui le changement de variables, dont nous avons déjà fait usage au n° 9, et désignons par

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt = 0$$

sa différentielle totale.

Si, aux variables x et y, nous substituons les variables x et y_0, nous aurons

$$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y_0} = s\frac{\partial y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y_0} = t\frac{\partial y}{\partial y_0}, \tag{51}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x}; \tag{52}$$

d'où

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y_0} &= \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x},\\ \frac{\partial r}{\partial y_0} &= \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial s}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x},\\ \frac{\partial s}{\partial y_0} &= \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial t}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

Différentiant l'équation proposée par rapport à y_0, nous aurons

$$\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial y_0} + \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial y_0} + \mathrm{Q}\frac{\partial q}{\partial y_0} + \mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial y_0} + \mathrm{S}\frac{\partial s}{\partial y_0} + \mathrm{T}\frac{\partial t}{\partial y_0} = 0;$$

en utilisant les équations (51), (52) et (53), cette relation devient

$$\begin{aligned} 0 = {}&\left(\mathrm{Y} + \mathrm{Z}q + \mathrm{P}s + \mathrm{Q}t + \mathrm{R}\frac{\partial s}{\partial x} + \mathrm{S}\frac{\partial t}{\partial x} - \mathrm{R}\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0}\\ &+ \left[\mathrm{S}\frac{\partial y}{\partial x} - \mathrm{R}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \mathrm{T}\right]\frac{\partial t}{\partial y_0}.\end{aligned}$$

Si y_0 a été choisi de façon que

$$(54)\quad \mathrm{R}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \mathrm{S}\frac{\partial y}{\partial x} + \mathrm{T} = 0$$

l'équation précédente se réduit à

$$(55)\quad \mathrm{Y} + \mathrm{Z}q + \mathrm{P}s + \mathrm{Q}t + \mathrm{R}\frac{\partial s}{\partial x} + \mathrm{S}\frac{\partial t}{\partial x} - \mathrm{R}\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

et, en remplaçant l'équation proposée (50) par sa dérivée par rapport à x, on a

$$(56)\quad \mathrm{X} + \mathrm{Z}p + \mathrm{P}r + \mathrm{Q}s + \mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{S}\frac{\partial s}{\partial x} + \mathrm{T}\frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

Si l'on considère les équations (52), (54), (55) et (56) comme des équations différentielles ordinaires, tout système d'expression de y, z, p, q, r, s, t, en fonction de x qui les vérifie, s'appelle une *caractéristique;* avec notre terminologie, ce système d'expressions représente une multiplicité M_1^2.

Les caractéristiques sont déterminées par un système de *six* équations à *sept* inconnues; elles dépendent donc d'une fonction arbitraire.

M. Darboux a remarqué (*Annales de l'École Normale,* 1870) que si, au lieu de se borner aux inconnues y, z, p, q, r, s, t, on adjoint les dérivées du troisième, quatrième, ..., $n^{\text{ième}}$ ordre, le nombre des équations ne contenant pas y_0 est encore inférieur d'une unité au nombre des fonctions inconnues.

En effet, considérons d'abord le cas où l'on introduit seulement les dérivées du troisième ordre, et désignons par $\frac{d}{dx}$ et $\frac{d}{dy}$ les opérations suivantes :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}p + \frac{\partial}{\partial p}r + \frac{\partial}{\partial q}s + \frac{\partial}{\partial r}\alpha + \frac{\partial}{\partial s}\beta + \frac{\partial}{\partial t}\gamma,$$
$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial r}q + \frac{\partial}{\partial p}s + \frac{\partial}{\partial q}t + \frac{\partial}{\partial r}\beta + \frac{\partial}{\partial s}\gamma + \frac{\partial}{\partial t}\delta,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent les dérivées du troisième ordre de z; ces deux opérations sont commutatives.

Nous devons remplacer l'équation proposée (50) par les équations

$$\frac{df}{dx} = 0, \tag{57}$$

$$\frac{df}{dy} = 0. \tag{58}$$

Les formules du changement de variables sont (51), (52) et

$$\frac{\partial r}{\partial y_0} = \beta\frac{\partial y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y_0} = \gamma\frac{\partial y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial t}{\partial y_0} = \delta\frac{\partial y}{\partial y_0}; \tag{59}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \alpha + \beta\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial x} = \beta + \gamma\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial t}{\partial x} = \gamma + \delta\frac{\partial y}{\partial x}; \tag{60}$$

d'où l'on déduit

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial y_0} &= \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial\beta}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial\beta}{\partial y_0} &= \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial\gamma}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial y_0} &= \frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial\delta}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}. \end{aligned}\right. \tag{61}$$

Différentions (57) par rapport à y_0, nous obtiendrons

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\alpha}{\partial y_0} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial\beta}{\partial y_0} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial y_0} = 0,$$

ou, en tenant compte des relations (61) et en annulant le coefficient de $\frac{\partial \delta}{\partial y_0}$,

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

qui n'est autre chose que la relation (54), et

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0. \tag{62}$$

En opérant de la même façon sur (58), on obtient

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \delta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \delta}{\partial x} = 0. \tag{63}$$

Enfin, (57), différentiée par rapport à x, donne

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{d^2 f}{dy^2}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \delta}{\partial x} = 0. \tag{64}$$

Or, on voit de suite que si l'on multiplie (63) par $\frac{\partial y}{\partial x}$ et qu'on l'ajoute à (62), en tenant compte de (54), on obtient la relation (64); nous avons donc trois équations pour déterminer $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \frac{\partial \delta}{\partial x}$.

La démonstration se fait d'une façon toute pareille pour un ordre quelconque n; nous poserons

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = Z_{\alpha\beta}, \qquad Z_0 = z$$

et nous considérerons les deux opérations

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial Z_{\alpha\beta}} Z_{\alpha+1\,\beta},$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial Z_{\alpha\beta}} Z_{\alpha\,\beta+1},$$

$$\alpha + \beta = k,$$

qui sont échangeables entre elles.

Il faudra remplacer l'équation proposée par le système

$$(65)\qquad \frac{d^{n-2}f}{dx^\lambda dy^\mu}=0, \qquad \lambda+\mu=n-2,$$

composé de $n-1$ équations; en particulier, l'équation précédente se terminera par le trinome

$$\frac{\partial f}{\partial r}Z_{\lambda+2\mu}+\frac{\partial f}{\partial s}Z_{\lambda+1\,\mu+1}+\frac{\partial f}{\partial t}Z_{\lambda\mu+2}.$$

Les formules du changement de variables sont

$$(66)\qquad \frac{\partial Z_{\alpha\beta}}{\partial y_0}=Z_{\alpha\beta+1}\frac{\partial y}{\partial y_0},$$

$$(67)\qquad \frac{\partial Z_{\alpha\beta}}{\partial x}=Z_{\alpha+1\,\beta}+Z_{\alpha\beta+1}\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\alpha+\beta=k, \qquad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Pour l'ordre n, on aura, en écrivant les conditions d'intégrabilité,

$$(68)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z_{\lambda+2\mu}}{\partial y_0}=\dfrac{\partial Z_{\lambda+1\,\mu+1}}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial y_0}-\dfrac{\partial Z_{\lambda+1\,\mu+1}}{\partial y_0}\dfrac{\partial y}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial Z_{\lambda+1\,\mu+1}}{\partial y_0}=\dfrac{\partial Z_{\lambda\mu+2}}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial y_0}-\dfrac{\partial Z_{\lambda\mu+2}}{\partial y_0}\dfrac{\partial y}{\partial x}. \end{cases}$$

Prenons la dérivée de (65) par rapport à y_0, nous aurons

$$0=\frac{d^{n-1}f}{dx^\lambda dy^{\mu+1}}\frac{\partial y}{\partial y_0}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial Z_{\lambda+2\mu}}{\partial y_0}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial Z_{\lambda+1\,\mu+1}}{\partial y_0}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial Z_{\lambda\mu+2}}{\partial y_0},$$

ou, en tenant compte de (68) et en annulant le coefficient de

$$\frac{\partial Z_{\lambda\mu+2}}{\partial y_0},$$

il vient l'équation (54) et

$$(69)\qquad 0=\frac{d^{n-1}f}{dx^\lambda dy^{\mu+1}}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial Z_{\lambda\mu+2}}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial Z_{\lambda+1\,\mu+1}}{dx}-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial Z_{\lambda\mu+2}}{\partial x}.$$

En opérant de même sur l'équation

$$\frac{d^{n-2}f}{dx^{\lambda+1}dy^{\mu-1}}=0,$$

nous obtiendrons

$$(70) \qquad 0 = \frac{d^{n-1}f}{dx^{\lambda+1}dy^{\mu}} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial Z_{\lambda+1\,\mu+1}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial Z_{\lambda+2\mu}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial Z_{\lambda+1\,\mu+1}}{\partial x}.$$

Différentiant (65) par rapport à x, on a

$$(71) \qquad \frac{d^{n-1}f}{dx^{\lambda+1}dy^{\mu}} + \frac{d^{n-1}f}{dx^{\lambda}dy^{\mu+1}}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial Z_{\lambda+2\mu}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial Z_{\lambda+1\,\mu+1}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial Z_{\lambda\mu+2}}{\partial x} = 0.$$

Il est facile de vérifier, comme précédemment, que cette dernière relation est une combinaison linéaire de (69) et (70). Il résulte des calculs précédents que l'on a n équations pour déterminer les $n+1$ quantités $\frac{\partial Z_{\alpha\beta}}{\partial x}$.

On sait, d'après M. Darboux, que, pour intégrer l'équation aux dérivées partielles proposée, il faut chercher à former, en dehors de l'équation proposée, deux combinaisons intégrables des équations en $y, z, p, q, \ldots, Z_{\alpha\beta}$.

Soient

$$F(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}, \qquad F_1(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}$$

deux combinaisons intégrables; les deux constantes qui figurent dans ces équations doivent être considérées comme des fonctions inconnues de y_0; éliminant y_0, on est conduit à une équation de la forme

$$F = \text{fonction arbitraire de } F_1.$$

Cette dernière relation peut être évidemment considérée comme une nouvelle équation compatible avec la proposée, et qui admet en commun avec elle une intégrale avec une fonction arbitraire. Les résultats obtenus précédemment nous fournissent un procédé régulier pour construire la surface intégrale passant par une courbe donnée C et tangente, tout le long de C, à une développable D passant par cette courbe.

Soient, en effet,

$$x(\lambda), \quad y(\lambda), \quad z(\lambda), \quad Z_{10}(\lambda), \quad Z_{01}(\lambda)$$

les fonctions qui définissent la courbe C et la développable D; elles vérifient la condition

$$\frac{dZ}{d\lambda} = Z_{10}\frac{dx}{d\lambda} + Z_{01}\frac{dy}{d\lambda}.$$

Les fonctions z_{20}, z_{11}, z_{02} sont définies le long de la courbe par

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{10}}{d\lambda} &= Z_{20}\frac{dx}{d\lambda} + Z_{11}\frac{dy}{d\lambda}, \\ \frac{dZ_{01}}{d\lambda} &= Z_{11}\frac{dx}{d\lambda} + Z_{02}\frac{dy}{d\lambda}, \end{aligned} \qquad f = 0.$$

D'une façon générale, si l'on a déterminé les valeurs des dérivées jusqu'à l'ordre i, les dérivées d'ordre $i+1$ seront données par

$$\begin{aligned} &\frac{dZ_{i0}}{d\lambda} = Z_{i+10}\frac{dx}{d\lambda} + Z_{i1}\frac{dy}{d\lambda}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{dZ_{0i}}{d\lambda} = Z_{1i}\frac{dx}{d\lambda} + Z_{0i+1}\frac{dy}{d\lambda}, \\ &\frac{d^{i-2}f}{d\lambda^{i-2}} = 0. \end{aligned}$$

On procédera ainsi de proche en proche jusqu'à l'ordre n.

Si l'on remplace x, y, z et les dérivées par leurs expressions en fonction de λ, F et F_1 deviennent aussi des fonctions de λ entre lesquelles il y a une relation

$$\psi(F, F_1) = 0.$$

On envisagera ensuite le système

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-2} f}{\partial x^{n-2}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-2} f}{\partial y^{n-2}} = 0, \quad \psi = 0,$$

dont la solution générale renferme une fonction arbitraire, et l'on formera les équations différentielles des caractéristiques. Si l'on sait les intégrer, le problème s'achève par des éliminations, car ici on connaît la multiplicité initiale M_1^n, et par suite on n'a plus qu'à chercher le lieu des caractéristiques issues des divers éléments E^n de cette multiplicité.

En appliquant les principes précédents à l'équation

$$s = qz + q^2 f\left(\frac{t}{q}, y\right),$$

on trouve, par des calculs que j'omets à dessein, que les deux combinaisons intégrables sont définies par l'équation linéaire et du premier ordre

$$A\frac{\partial F}{\partial y} + B\frac{\partial F}{\partial \frac{t}{q}} + C\frac{\partial F}{\partial \frac{\delta}{q}} = 0,$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial \frac{t}{q}}, \qquad B = -\left(1 + \frac{t}{q}f + \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$-C = 3\frac{t}{q} + 2\frac{t^2}{q^2}f + f\frac{\delta}{q} + 4\frac{t}{q}\frac{\partial f}{\partial y} + 4\frac{t}{q}\frac{\partial f}{\partial \frac{t}{q}}\left(\frac{\delta}{q} - \frac{t^2}{q^2}\right)$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial \frac{t}{q}}\left(\frac{\delta}{q} - \frac{t^2}{q^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \frac{t}{q}}\left(\frac{\delta}{q} - \frac{t^2}{q^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

TROISIÈME PARTIE.

18. Considérons maintenant un système complètement intégrable composé de $\Gamma_n^p - n + 1$ équations d'ordre p; en appliquant le procédé de calcul indiqué au n° 8, nous pouvons préparer le système de façon que l'une de ses équations ait la forme

$$(72) \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^{p-1} Z^p_{\alpha_1+1\ldots\alpha_n}, \ldots, Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_\rho+1\ldots\alpha_n}, \ldots, Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n+1}) = 0$$
$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p - 1).$$

Soit

$$z = F(x_1, \ldots, x_n)$$

une intégrale quelconque du système; sur cette intégrale, $Z^1, \ldots, Z^p$ sont des fonctions connues de $x_1, \ldots, x_n$; et, par suite, les équations

$$(73)\qquad \frac{dx_1}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial Z^p_{\alpha_1+1\ldots\alpha_n}}} = \ldots = \frac{dx_\rho}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_\rho+1\ldots\alpha_n}}} = \ldots = \frac{dx_n}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n+1}}} = dt$$

définissent sur la multiplicité intégrale une famille de courbes (multiplicités à une dimension) que nous appellerons *caractéristiques*.

Nous allons montrer que, sans connaître l'expression de z en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, on peut joindre aux équations précédentes d'autres équations qui permettent de définir complètement la variation des variables x_i, z, $Z^1, \ldots, Z^p$ le long d'une caractéristique.

Partons d'un élément E^p de l'intégrale et attribuons aux variables des accroissements définis par les formules (73) et l'équation de la multiplicité intégrale. Nous aurons

$$(74)\qquad dZ^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n} = \sum_{i=1}^{n} Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n}\,dx_i \qquad (k=1, 2, \ldots, p).$$

L'équation (72) différentiée par rapport à x_i donne

$$0 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\partial\Phi}{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}} Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n} + \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_\rho+1\ldots\alpha_n}} Z^{p+1}_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_\rho+1\ldots\alpha_n}.$$

Remplaçons

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Z^p_{\alpha_1+1\ldots\alpha_n}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n+1}}$$

par leurs valeurs

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt},$$

nous aurons, en tenant compte de

$$dZ^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_n} = \sum_{\rho=1}^{n} Z^{p+1}_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_\rho+1\ldots\alpha_n}\,dx_i,$$

l'égalité

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\partial \Phi}{\partial Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}} Z^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_i + 1 \ldots \lambda_n} + \frac{dZ^p_{\alpha \ldots \alpha_i + 1 \ldots \alpha_n}}{dt}.$$

Les autres équations du système différentiées par rapport à t et les équations (74) feront connaître $\frac{dz}{dt}$ et les $\frac{dZ^1}{dt}, \ldots, \frac{dZ^p}{dt}$; ces équations ne dépendent pas de la fonction F, et, par suite, on peut déterminer les éléments successifs le long d'une caractéristique sans connaître l'intégrale.

La caractéristique issue d'un élément déterminé E^p_0 est donc bien déterminée. On en conclut que *si deux intégrales ont un élément commun, elles ont en commun tous ceux qui sont sur la caractéristique issue de ce point.*

19. Envisageons un système Σ complètement intégrable composé de $\Gamma^p_n - \nu$ équations d'ordre p; d'après ce qui a été établi au n° 7, il contient $n - \nu$ systèmes composés chacun de $\Gamma^p_n - n + 1$ équations; nous les désignerons par $S_1, S_2, \ldots, S_{n-\nu}$.

Soit M^p_n une intégrale de Σ et E^p un élément de cette intégrale. Par E^p passe une caractéristique C^p_1 de S_1 dont tous les éléments sont situés sur M^p_n. Soit alors E'^p un élément de C^p_1; par E'^p passe une caractéristique C'^p_1 de S_2, et l'ensemble de toutes les caractéristiques C^p issues de tous les éléments de C^p_1 formera une multiplicité M^p_2 sur M^p_n. En continuant de la sorte, on arrivera finalement à une multiplicité $M^p_{n-\nu}$ située sur M^p_n, passant par l'élément E^p, obtenue par la superposition successive des caractéristiques des $n - i$ systèmes $S_1, \ldots, S_{n-\nu}$.

Nous désignerons cette multiplicité M^p_{n-i} sous le nom de *multiplicité caractéristique du système* Σ.

On voit de suite que *toute intégrale qui contient un élément* E^p *contient la multiplicité caractéristique* $M^p_{n-\nu}$ *issue de cet élément.*

20. Étant donné le système Σ, il est facile d'obtenir, par le changement de variables de Cauchy, un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre définissant l'ensemble des multiplicités caractéristiques $M^p_{n-\nu}$.

On peut supposer, en effet, qu'il y a, parmi les équations du système Σ, $n-\nu$ relations de la forme suivante

$$(75)\quad 0=\Phi_i(x_1,\ldots,x_n,z,Z^1,\ldots,Z^{p-1}Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_n}Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-\nu+1}\ldots\alpha_n},\ldots,Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n+1})$$
$$(i=1,2,\ldots,n-\nu),\qquad(\alpha_1+\ldots+\alpha_n=p-1)$$

et telles que les lettres $Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_n}$ *y figurent effectivement.*

J'effectue un changement de variables tel que

$$x_1,\ \ldots,\ x_{n-\nu}$$

ne sont pas altérées, tandis que

$$x_{n-\nu+1},\ \ldots,\ x_n$$

deviennent des fonctions de $x_1,\ \ldots,\ x_{n-\nu}$ et de ν nouvelles variables $y_1,\ldots,y_\nu$.

J'aurai les formules

$$(76)\qquad \frac{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i}=Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n}+\sum_{\rho=1}^{\nu}Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-\nu+\rho}+1\ldots\lambda_n}\frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial x_i},$$

$$(77)\qquad \frac{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial y_q}=\sum_{\rho=1}^{\nu}Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-\nu+\rho}+1\ldots\lambda_n}\frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial y_q},$$

$$i=1,2,\ldots,n-\nu,\qquad q=1,2,\ldots,\nu,\qquad k=1,2,\ldots,p-1;$$

j'en déduis

$$(78)\quad \frac{\partial Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n}}{\partial y_q}=\sum_{\rho=1}^{\nu}\left(\frac{\partial Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-\nu+\rho}+1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i}\frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial y_q}-\frac{\partial Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-\nu+\rho}+1\ldots\lambda_n}}{\partial y_q}\frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial x_i}\right).$$

Je différentie les équations (75) par rapport à y_q en tenant compte de (76) et (77) jusqu'à l'ordre $p-1$ et de (78) pour l'ordre p, et j'obtiens

$$(79)\quad \begin{aligned} 0=&\sum_{\rho=1}^{\nu}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_{n-\nu+\rho}}\frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial y_q}+\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}\sum_{\rho=1}^{\nu}Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-\nu+\rho}+1\ldots\lambda_n}\frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial y_q}\right)\\ &+\sum_{\rho=1}^{\nu}\frac{\partial\Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-\nu+\rho}+1\ldots\alpha_n}}\frac{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-\nu+\rho}+1\ldots\alpha_n}}{\partial y_q}\\ &+\frac{\partial\Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_n}}\sum_{\rho=1}^{\nu}\left(\frac{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-\nu+\rho}+1\ldots\alpha_n}}{\partial x_i}\frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial y_q}-\frac{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-\nu+\rho}+1\ldots\alpha_n}}{\partial y_q}\frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

Je choisis le changement de variables de façon que l'on ait

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-\nu+\rho}+1\ldots\alpha_n}} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_n}} \frac{\partial x_{n-\nu+\rho}}{\partial x_i} = 0; \tag{80}$$

dans ces conditions, le terme en

$$\frac{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-\nu+\rho}+1\ldots\alpha_n}}{\partial y_q}$$

disparaît dans les équations (79), qui prennent la forme suivante

$$\begin{gathered}
A_{i1}\frac{\partial x_{n-\nu+1}}{\partial y_1} + A_{i2}\frac{\partial x_{n-\nu+2}}{\partial y_1} + \ldots + A_{i\nu}\frac{\partial x_n}{\partial y_1} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_{i1}\frac{\partial x_{n-\nu+1}}{\partial y_\nu} + A_{i2}\frac{\partial x_{n-\nu+2}}{\partial y_\nu} + \ldots + A_{i\nu}\frac{\partial x_n}{\partial y_\nu} = 0,\\
i = 1, 2, \ldots, n-\nu.
\end{gathered}$$

Le déterminant de ces équations linéaires et homogènes en A_{i1}, ..., $A_{i\nu}$ est précisément le déterminant fonctionnel de $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n$ par rapport à $y_1, \ldots, y_\nu$; il est certainement différent de zéro, puisque $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes; on a donc

$$A_{i1} = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{i\nu} = 0,$$

c'est-à-dire

$$0 = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{n-\nu+\rho}} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}} Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-\nu+\rho}+1\ldots\lambda_n} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_n}} \frac{\partial Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-\nu+\rho}+1\ldots\alpha_n}}{\partial x_i}.$$

Si nous différentions les autres équations du système Σ par rapport à $x_1, \ldots, x_{n-\nu}$ successivement, et si nous tenons compte des relations (76) nous aurons un système du premier ordre définissant $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^p$ en fonction de $x_1, \ldots, x_{n-\nu}$; il résulte des raisonnements faits au paragraphe précédent que ce système est complètement intégrable, et nous avons indiqué au n° 8 comment on ramenait l'intégration d'un système de ce genre à l'étude d'équations différentielles ordinaires.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système différentiel complètement intégrable définissant z en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ ait des caractéristiques dépendant d'un nombre fini *de constantes arbitraires est que, si p est l'ordre le plus élevé des dérivées qui y figurent, et si l'on a amené toutes les équations à être d'ordre p, le nombre de ces équations soit égal à $\Gamma_n^p - i$, i étant un entier positif inférieur à n.*

21. Pour achever l'intégration du système proposé, il faudrait, dans les formules qui donnent $x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n, z, Z^1, \ldots, Z^p$ en fonctions de $x_1, \ldots, x_{n-\nu}$, remplacer les constantes d'intégration par des fonctions de $y_1, \ldots, y_\nu$ telles que les relations (77) soient vérifiées.

On verrait, par un calcul tout à fait semblable à celui du n° 10, que cela revient à trouver les multiplicités M_ν^p qui vérifient notre système.

C'est ici qu'apparaît une différence essentielle entre les systèmes que nous étudions et les systèmes du premier ordre; pour ces derniers, la multiplicité M_ν^1 se détermine sans intégration, tandis que pour nos systèmes *la détermination de M_ν^p dépend d'un système d'équations aux dérivées partielles plus difficile à étudier que le système proposé.*

Proposons-nous, en effet, de déterminer cette multiplicité M_ν^p; soient

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_\nu), \qquad x_{\nu+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

les équations de son support; en vertu des principes exposés au n° 3, tous les $Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu 0 \ldots 0}$ sont déterminés en fonction de ψ; les $Z^k_{0 \ldots 0 \lambda_{\nu+1} \ldots \lambda_n}$ sont des fonctions inconnues, dont les $Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ qui n'entrent pas dans l'une des deux catégories précédentes sont des dérivées; on aura ainsi à intégrer un système différentiel à ν variables et à

$$1 + \Gamma_{n-\nu}^1 + \ldots + \Gamma_{n-\nu}^p = \Gamma_{n-\nu+1}^p$$

fonctions inconnues.

Or, on voit aisément que, si le support ψ est déterminé, l'orientation des éléments d'ordre p est déterminée à des constantes près; donc les fonctions inconnues qui entrent dans la définition de l'intégrale générale du système Σ doivent entrer dans la définition de ψ;

donc, ψ sera défini par un système différentiel à ν variables dont la solution générale est définie par ν courbes passant par un point donné; ce système est donc plus compliqué que le système Σ.

22. Considérons une multiplicité caractéristique $M^p_{n-\nu}$; par cette multiplicité passent une infinité de surfaces intégrales m_n; et un calcul tout à fait analogue à celui qui a été fait au n° 12 montrerait qu'on peut établir la formule générale des orientations d'élément d'ordre $p' > p$ correspondant à ces différentes multiplicités intégrales.

On peut en conclure le théorème suivant : *Si deux multiplicités intégrales m_n ont un élément $E^{p'}(p' \geqq p)$ commun, il en est de même en tous les points de leur caractéristique commune.*

23. Soient

$$\begin{array}{lll}
x_{n-\nu+1} = X_{n-\nu+1} & [x_1, \ldots, x_{n-\nu}, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, (Z^1)^0, \ldots, (Z^p)^0], \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = X_n & [x_1, \ldots, x_{n-\nu}, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, (Z^1)^0, \ldots, (Z^p)^0], \\
z = Z & [x_1, \ldots, x_{n-\nu}, x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0, (Z^1)^0, \ldots, (Z^p)^0], \\
Z^1_{\ldots} = \Phi^1_{\ldots} & (x_1, \ldots, x_{n-\nu}, \ldots), \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z^p_{\ldots} = \Phi^p_{\ldots} & (x_1, \ldots, x_{n-\nu}, \ldots)
\end{array}$$

les équations finies des multiplicités caractéristiques.

Par un élément E^{p-1} passent ∞^ν caractéristiques dont le lieu est une multiplicité intégrale m_n; son équation est de la forme

$$F[z, x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_{n-\nu}^0, x_{n-\nu+1}^0, \ldots, x_n^0, z^0, (Z^1)^0, \ldots, (Z^{p-1})^0] = 0.$$

Si, dans cette équation, on donne à $x_1^0, \ldots, x_{n-\nu}^0$ des valeurs numériques quelconques, et si l'on considère les autres constantes comme des paramètres arbitraires, on a une *intégrale complète* du système Σ.

Inversement, supposons connue *a priori* une intégrale complète; supposons, en outre, que l'on connaisse une multiplicité intégrale M^p_ν; on pourra alors, par de simples éliminations, trouver la multiplicité intégrale m_n passant par M^p_ν. En effet, si l'on considère un élément quelconque E^p de M^p_ν, il y a une intégrale complète bien déterminée qui passe par E^p. Envisageons l'ensemble des éléments E^p de

M_ν'' et la suite des intégrales complètes passant par ces divers éléments; elles seront représentées par une équation de la forme

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_\nu) = 0,$$

les a étant des paramètres définissant la position du point correspondant à chaque élément E^p.

Pour avoir l'intégrale demandée, il suffira évidemment de chercher l'enveloppe de ces intégrales complètes, c'est-à-dire d'éliminer a_1, a_2, ..., a_ν entre les équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial F}{\partial a_\nu} = 0.$$

24. Nous allons appliquer les résultats précédents à un exemple simple.

Soit le système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + c,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c',\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} &= 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c'',\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + c''';
\end{aligned}$$

nous avons montré au n° 7 qu'il était complètement intégrable.

Des deux premières équations, on déduit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} - c + c' = 0.$$

Les équaffons différentielles des caractéristiques sont donc

$$\begin{aligned}
dx_1 &= dx_2 = -dx_3 = dt,\\
dz &= p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + p_3\, dx_3,\\
dp_1 &= p_{11} dx_1 + p_{12} dx_2 + p_{13} dx_3,\\
dp_2 &= p_{21} dx_1 + p_{22} dx_2 + p_{23} dx_3,\\
dp_3 &= p_{31} dx_1 + p_{32} dx_2 + p_{33} dx_3,\\
dp_{11} &= 0, \qquad dp_{12} = 0, \qquad dp_{13} = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Les équations finies des caractéristiques sont donc

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + t, \\ x_2 &= x_2^0 + t, \\ x_3 &= x_3^0 - t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= z_0 + (p_1^0 + p_2^0 - p_3^0)t + \tfrac{1}{2}(c' - c'' + c''')t^2, \\ p_1 &= p_1^0 + (p_{11}^0 + p_{12}^0 - p_{13}^0)t, \\ p_2 &= p_2^0 + (c + c'')t, \\ p_3 &= p_3^0 + (p_{11}^0 + 5p_{12}^0 + p_{13}^0 - 5c - c'' - c''')t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{11}^0, \\ p_{12} &= p_{12}^0, \\ p_{13} &= p_{13}^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{22} &= p_{12}^0 - c, \\ p_{23} &= 2p_{12}^0 - 2c - c'', \\ p_{33} &= p_{11}^0 + 3p_{12}^0 - 3c - c'''. \end{aligned}$$

Il s'agit de déterminer maintenant les multiplicités M_2^2 vérifiant le système proposé; nous poserons $x_3^0 = 0$ et nous aurons trois fonctions inconnues, à savoir

$$z^0 = \psi(x_1^0, x_2^0), \qquad p_3^0, \qquad p_{33}^0.$$

On tire immédiatement des équations données

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^0 \partial x_2^0} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + c, \\ \frac{\partial p_3^0}{\partial x_1^0} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^{0\,2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^{0\,2}} + c', \\ \frac{\partial p_3^0}{\partial x_2^0} &= 2\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^{0\,2}} + c'', \\ p_{33}^0 &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^{0\,2}} + 3\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^{0\,2}} + c'''. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que le support de la multiplicité M_2^2 est déterminé par une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. L'intégrale générale de cette équation est

$$z^0 = c x_1^0 x_2^0 + \lambda(x_1^0 + x_2^0) + \mathrm{X}(x_1^0), \tag{81}$$

λ et X étant des fonctions arbitraires de leurs arguments; on en déduit

$$p_3^0 = 2\lambda'(x_1^0 + x_2^0)\,\mathrm{X}'(x_1^0) + c' x_1^0 + c'' x_2^0 + \mu, \tag{82}$$

μ étant une constante arbitraire; et enfin

$$p_{33}^0 = 2\lambda''(x_1^0 + x_2^0) + \mathrm{X}''(x_1^0) + c''', \tag{83}$$

puis

$$\left\{\begin{aligned} &p_{11}^0 = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^{0\,2}}, \qquad p_{12} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^0\,\partial x_2^0}, \qquad p_{22} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^0},\\ &p_{13}^0 = \frac{\partial p_3^0}{\partial x_1^0}, \qquad p_{23}^0 = \frac{\partial p_3^0}{\partial x_2^0}, \qquad p_1^0 = \frac{\partial\psi}{\partial x_1^0}, \qquad p_2 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2^0}. \end{aligned}\right. \tag{84}$$

Pour avoir l'intégrale générale, il faut éliminer x_1^0, x_2^0, p_1^0, p_2^0, p_3^0, $p_{11}^0, \ldots, p_{33}^0$ entre les équations finies des caractéristiques, où l'on a fait $x_3^0 = 0$, et les équations (81), (82), (83) et (84); par un calcul facile on trouve

$$\begin{aligned} z = c(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - [(c - c')(x_1 + x_3) + (c - c'')(x_2 + x_3) - \mu]x_3 \\ + \tfrac{1}{2}(c' - c'' + c''')x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + 2x_3) + \mathrm{X}(x_1 + x_3). \end{aligned}$$