Annales scientifiques de l'É.N.S.

E. Lacour

Décomposition en facteurs de la fonction $\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 415-420

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__415_0>

DÉCOMPOSITION EN FACTEURS DE LA FONCTION

$\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$,

PAR M. E. LACOUR,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Je me propose d'appliquer à la fonction

$$\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$$

la méthode générale que j'ai indiquée, dans un travail précédent, pour les fonctions à multiplicateurs exponentiels (*Annales de l'École Normale;* 1895, Supplément).

Soit

$$f(z, s) = 0$$

une équation algébrique de genre p, et soient T la surface de Riemann [1] correspondante, T' cette surface rendue simplement connexe au moyen des coupures

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_p, \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_p, \end{array}$$

$u^{(i)}(z)$ l'intégrale normale de première espèce qui admet la période $2\pi\sqrt{-1}$ le long de la coupure a_i, $2\beta_{ik}$ la période de l'intégrale $u^{(i)}(z)$ le long de la coupure b_k de sorte que $\beta_{ik} = \beta_{ki}$.

Considérons la fonction [2] définie par l'égalité

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \mathrm{S}\, e^{m_1 n_1 + m_2 n_2 + \ldots + m_p n_p + \varphi(m_1 m_2 \ldots m_p)},$$

---

(1) *Voir* APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. 195 et 233.

(2) BRIOT, *Fonctions abéliennes*, p. 114.

où les p nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ varient de $-\infty$ à $+\infty$ et où $\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ désigne la forme quadratique

$$\Sigma\Sigma\beta_{ik} m_i m_k = \beta_{11} m_1^2 + \ldots + 2\beta_{12} m_1 m_2 + \ldots;$$

posons

$$u_i = u^{(i)}(z) - G_i,$$

en désignant par $G_1, G_2, \ldots, G_p$ des constantes arbitraires, et représentons la fonction ainsi obtenue par

$$F(z) = \Theta[u^{(i)}(z) - G_i].$$

Cette fonction est régulière en tous les points de la surface T′, reste continue quand on traverse une coupure a_i ou c_i et admet, le long d'une coupure b_i, un multiplicateur défini par l'égalité

$$F(\lambda) = F(\rho)\, e^{-u^{(i)}(\rho) - \beta_{ii}}.$$

Elle s'annule en p points de la surface T′, et les valeurs correspondantes de z vérifient les p relations

$$u^{(i)}(z_1) + u^{(i)}(z_2) + \ldots + u^{(i)}(z_p) - G_i \equiv C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans lesquelles les constantes C_i sont indépendantes des quantités arbitraires G_i et où le signe $\equiv$ rappelle que l'égalité a lieu à des multiples près des périodes de seconde espèce.

D'après une formule de Clebsch et Gordan (*Theorie der Abelschen Functionen*, S. 198), on a pour la fonction $\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$ une décomposition en facteurs analogue à une décomposition connue pour les fonctions à multiplicateurs constants. Cette formule peut s'écrire

$$\frac{\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]}{\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]}$$
$$= e^{\frac{1}{2}\Sigma[u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \frac{1}{2}\Sigma[\Pi_{z'_k z_k}(z) - \Pi_{z'_k z_k}(a)]},$$

en désignant par $\Pi_{z'_k z_k}$ l'intégrale normale de troisième espèce qui se comporte, dans le voisinage des points z_k et z'_k, comme

$$\operatorname{Log}(z - z_k) \qquad \text{et} \qquad -\operatorname{Log}(z - z'_k)$$

et par $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ des valeurs de z qui se déduisent algébriquement de $z_1, z_2, \ldots, z_p$ d'une part et de a et de z d'autre part, d'après une règle dont l'énoncé géométrique est très simple.

Nous allons rattacher ce résultat à une formule qui s'obtient d'après une méthode de Riemann, en évaluant l'intégrale

$$\int_{T'} \Pi_{az}(x)\, d \operatorname{Log} \Phi(x)$$

prise suivant le contour de la surface T′ et en appliquant ensuite à la même intégrale le théorème de Cauchy ou du moins l'extension de ce théorème aux surfaces de Riemann. On trouve ainsi

$$\operatorname{Log} \frac{\Phi(z)}{\Phi(a)} = \Sigma n_k [u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \Sigma \Pi_{az}(z_k) + \varphi(z) \qquad (k = 1.2..p),$$

$\Phi(z)$ étant une fonction assujettie seulement à avoir les propriétés suivantes de la fonction $F(z)$: Elle est régulière sur toute la surface de Riemann T′ et admet les mêmes multiplicateurs que $F(z)$ le long des coupures a_i, b_i, c_i. Cela suffit pour établir que cette fonction a p zéros, et les valeurs z_k qui figurent dans la formule désignent ces zéros.

$\varphi(z)$ est une fonction qui ne change pas quand on change la fonction $\Phi(z)$ en lui conservant les propriétés précédentes. La valeur de $\varphi(z)$ est

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[\int_{b_1} \Pi_{az}(\rho)\, du^{(1)} + \int_{b_2} \Pi_{az}(\rho)\, du^{(2)} + \ldots + \int_{b_p} \Pi_{az}(\rho)\, du^{(p)} \right];$$

les intégrales qui figurent dans le second membre sont prises le long des coupures b_i, la variable décrivant le bord négatif de la coupure dans le sens qui correspond à ce bord négatif.

Appliquons cette formule à la fonction $F(z)$ et à une fonction qui se déduit de $F(z)$ et, changeant les valeurs des zéros,

$$\operatorname{Log} \frac{\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]}{\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]}$$
$$= \Sigma n'_k [u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \Sigma \Pi_{az}(z_k) + \varphi(z).$$

$$\operatorname{Log} \frac{\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z'_1) - u^{(i)}(z'_2) - \ldots - u^{(i)}(z'_p) + C_i]}{\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - u^{(i)}(z'_2) - \ldots - u^{(i)}(z'_p) + C_i]}$$
$$= \Sigma n''_k [u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \Sigma \Pi_{az}(z'_k) + \varphi(z).$$

Or, on peut établir entre les deux systèmes de points

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_p \qquad \text{et} \qquad z'_1, \quad z'_2, \quad \ldots, \quad z'_p$$

une relation telle que les logarithmes qui figurent dans les premiers membres des égalités précédentes soient égaux et de signes contraires. Nous allons le montrer dans un instant.

Supposons cette relation établie ; en retranchant membre à membre les deux égalités nous ferons disparaître $\varphi(z)$ et il viendra

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Log} \frac{\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]}{\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]} \\ &\quad = \Sigma n_k [u^{(i)}(z) - u^{(i)}(a)] + \Sigma[\Pi_{az}(z_k) - \Pi_{az}(z'_k)]. \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à se servir de la relation

$$\int_{z'_k}^{z_k} d\Pi_{az} = \int_a^z d\Pi_{z'_k z_k},$$

appelée *théorème de l'échange du paramètre et de l'argument*, et à passer des logarithmes aux nombres pour obtenir la formule de décomposition

$$\begin{aligned} &\frac{\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]}{\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]} \\ &\quad = e^{\frac{1}{2}\Sigma[u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \frac{1}{2}\Sigma[\Pi_{z'_k z_k}(z) - \Pi_{z'_k z_k}(a)]} \end{aligned}$$

qu'il s'agissait d'établir.

Il reste à définir la relation entre le système des points z_k et le système des points z'_k.

Soient

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_{n-2}$$

les $n - 2$ points d'intersection de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

avec la droite joignant les deux points a et z. Considérons une courbe adjointe C_{n-2} d'ordre $n - 2$, passant par ces points $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}$. Elle rencontre encore la courbe en $2p$ points, dont p peuvent être pris arbitrairement. Prenons pour les p points qui peuvent être choisis arbitrairement

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_p,$$

et soient

$$z'_1, \quad z'_2, \quad \ldots, \quad z'_p$$

les p autres points.

En appliquant le théorème d'Abel aux points d'intersection de la courbe donnée avec la droite az d'une part et avec la courbe adjointe C_{n-2} d'autre part, nous trouverons successivement

$$\int^{a} du^{(i)} + \int^{(z)} du^{(i)} + \int^{\gamma_1} du^{(i)} + \int^{\gamma_2} du^{(i)} + \ldots + \int^{\gamma_{n-2}} du^{(i)} \qquad = A_i,$$

$$\int^{z_1} du^{(i)} + \int^{z_2} du^{(i)} + \ldots + \int^{z_p} du^{(i)} + \int^{z'_1} du^{(i)} + \ldots + \int^{z'_p} du^{(i)}$$
$$+ \int^{\gamma_1} du^{(i)} + \ldots + \int^{\gamma_{n-2}} du^{(i)} = B_i,$$

ou bien

$$u^{(i)}(a) + u^{(i)}(z) + u^{(i)}(\gamma_1) + u^{(i)}(\gamma_2) + \ldots + u^{(i)}(\gamma_{n-2}) = A_i,$$
$$u^{(i)}(z_1) + \ldots + u^{(i)}(z_p) + u^{(i)}(z'_1) + \ldots + u^{(i)}(z'_p) + u^{(i)}(\gamma_1) + \ldots + u^{(i)}(\gamma_{n-2}) = B_i,$$

et nous pouvons en déduire par soustraction

$$u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \ldots - u^{(i)}(z_p)$$
$$+ u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - u^{(i)}(z'_2) - \ldots - u^{(i)}(z'_p) = -\mathrm{H}_i,$$

H_i étant une quantité qui reste fixe quand la droite az et la courbe C_{n-2} se déplacent de façon que leurs $n-2$ points d'intersection restent sur la courbe donnée.

On a, d'après cela et en remarquant que Θ ne change pas quand on change les signes des p arguments,

$$\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + C_i]$$
$$= \Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - \ldots - u^{(i)}(z'_p) + \mathrm{H}_i - C_i).$$

Si l'un des points du second groupe, z'_p par exemple, vient se confondre avec a, les p points du premier groupe sont sur une courbe adjointe d'ordre $(n-3)$ (Clebsch et Gordan, *Abelschen Functionen*, S. 206), le premier membre de l'égalité précédente s'annule alors et l'on en déduit

$$\Theta[u^{(i)}(z'_1) + u^{(i)}(z'_2) + \ldots + u^{(i)}(z'_{p-1}) - \mathrm{H}_i + \mathrm{C}_i] = 0.$$

Ceci exige (Briot, *Fonctions abéliennes*, p. 146) que l'on ait

$$\mathrm{H}_i - \mathrm{C}_i = \mathrm{C}_i;$$

cette condition nous détermine H_i et la relation entre les fonctions Θ devient

$$\begin{aligned}\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + \mathrm{C}_i]\\ = \Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - \ldots - u^{(i)}(z'_p) + \mathrm{C}_i].\end{aligned}$$

On trouve de même, en échangeant les points a et z,

$$\begin{aligned}\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + \mathrm{C}_i]\\ = \Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z'_1) - \ldots - u^{(i)}(z'_p) + \mathrm{C}_i],\end{aligned}$$

et l'on peut en conclure immédiatement que l'expression

$$\mathrm{Log}\frac{\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + \mathrm{C}_i]}{\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - \ldots - u^{(i)}(z_p) + \mathrm{C}_i]}$$

change de signe quand on remplace les points du premier groupe

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_p,$$

par les points du second groupe

$$z'_1, \quad z'_2. \quad \ldots, \quad z'_p.$$

C'est ce que l'on avait admis dans la démonstration de la formule qui donne la décomposition en facteurs de la fonction $\mathrm{F}(z)$.