ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GUICHARD

Sur les surfaces minima non euclidiennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 401-414
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__401_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES

SURFACES MINIMA NON EUCLIDIENNES,

PAR M. GUICHARD,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT.

I. — Les surfaces minima dans la Géométrie de M. Cayley.

On sait qu'on appelle ainsi les surfaces qui admettent un réseau conjugué dont les tangentes touchent une quadrique fixe, appelée *quadrique fondamentale* (DARBOUX, *Leçons*, IIIe Partie, Chap. XIV).

Rapportons la quadrique fondamentale à un tétraèdre conjugué et soit en coordonnées homogènes

$$x_1^2 + x_2^2 + x_{80}^2 + x_4^2 = 0$$

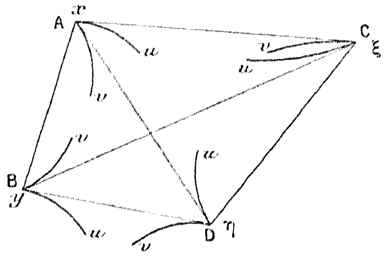
l'équation de la quadrique. Si un point M est pris en dehors de la quadrique, nous choisirons le facteur de proportionnalité qui entre dans les quatre coordonnées homogènes de telle sorte que la somme de leurs carrés soit égale à l'unité.

Cela posé, prenons comme paramètres variables u et v les quantités qui restent fixes quand on se déplace sur les lignes conjuguées en question. Soient $C(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ [1] un point d'une telle surface; $A(x_1 x_2 x_3 x_4)$, $B(y_1 y_2 y_3 y_4)$ les points où les tangentes conjuguées en C touchent la quadrique fondamentale; enfin $D(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)$ le pôle du plan CAB; le point D décrit la surface polaire réciproque de C. Les droites CA et DA, ainsi que CB et DB, sont conjuguées par rapport

(1) Pour abréger, nous indiquons, entre parenthèses, les quatre coordonnées d'un point.

à la quadrique fondamentale (rectangulaires dans le sens non euclidien). Il résulte de là et des propriétés connues de la transformation de Laplace que les quatre points A, B, C, D décrivent des réseaux conjugués quand u et v varient; on a alors la disposition représentée par la *fig.* 1, où nous indiquons sur chaque courbe la variable qui change.

Fig. 1.



Il en résulte que la surface D est aussi une surface minima.

Entre les coordonnées des quatre points A, B, C, D existent les relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \Sigma x^2 = 0, & \Sigma xy = 1, & \Sigma x\xi = 0, & \Sigma x\eta = 0, \\ & \Sigma y^2 = 0, & \Sigma y\xi = 0, & \Sigma y\eta = 0, \\ & & \Sigma \xi^2 = 1, & \Sigma \xi\eta = 0, \\ & & & \Sigma \eta^2 = 1. \end{array}\right.$$

Les sommes indiquées sont formées de quatre termes obtenus en mettant successivement les indices 1, 2, 3, 4.

Nous avons choisi les facteurs de proportionnalité qui entrent dans les coordonnées de A et B de telle sorte que

$$\Sigma xy = 1,$$

il reste encore dans le choix de ces facteurs une indétermination dont nous profiterons plus loin.

Des formules (1) on déduit, comme dans la théorie des substitutions orthogonales, d'autres formules qui appartiennent aux deux types suivants :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} 2x_1y_1 + \xi_1^2 + \eta_1^2 = 1, \\ x_1y_2 + y_1x_2 + \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 = 0. \end{array}\right.$$

De la disposition indiquée par la *fig.* 1, on déduit le groupe de formules

$$\frac{\partial x}{\partial u} = ax + p\xi, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = bx + q\eta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = ey + r\eta, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = fy + s\xi,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = g\xi + \alpha y, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = h\xi + \beta x,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = l\eta + \gamma x, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = m\eta + \delta y.$$

Dans ces formules, il faut affecter les coordonnées de l'un des indices 1, 2, 3, 4; le même dans les deux membres.

La différentiation des formules (1) montre que l'on a

$$\begin{aligned} e + a &= 0, & b + f &= 0,\\ p + \alpha &= 0, & q + \delta &= 0,\\ r + \gamma &= 0, & s + \beta &= 0,\\ g &= 0, & h &= 0,\\ l &= 0, & m &= 0,\end{aligned}$$

de sorte que le groupe de formules s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = ax + p\xi, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -ay + r\eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -py, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = -rx,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = bx + q\eta, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -by + s\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -sx, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = -qy.$$

Différentions le premier groupe par rapport à v, le second par rapport à u et égalons les deux valeurs des dérivées. On obtient

$$\frac{\partial x}{\partial v} + ab - ps = \frac{\partial b}{\partial u} + ba - qr,$$
$$\frac{\partial p}{\partial v} = bp, \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = aq,$$
$$\frac{\partial r}{\partial v} = -br, \qquad \frac{\partial s}{\partial u} = -as.$$

On voit déjà que pr est fonction de u, qs fonction de v; par un choix convenable des paramètres u et v, on peut réduire ces fonctions à l'unité.

Posons alors

$$p = e^{\varphi}, \qquad s = e^{\theta},$$

on aura

$$r = e^{-\varphi}, \qquad q = e^{-\theta},$$

$$b = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad a = -\frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

La première relation devient alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = e^{-\varphi-\theta} - e^{\varphi+\theta}.$$

Remarquons maintenant que, si l'on multiplie les quatre coordonnées x par un même facteur h, p et q sont remplacés respectivement par $\frac{p}{h}$, $\frac{q}{h}$. On peut donc choisir h de façon que $\theta = \varphi$.

On arrive ainsi aux formules définitives

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -x\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + e^{\varphi}\xi, & \dfrac{\partial y}{\partial u} = y\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + e^{-\varphi}\eta, & \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -e^{\varphi} y, & \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = -e^{-\varphi} x, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = x\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + e^{-\varphi}\eta, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = -y\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + e^{\varphi}\xi, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = -e^{\varphi} x, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = -e^{-\varphi} y, \end{array}\right.$$

avec la condition

$$2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = e^{-2\varphi} - e^{2\varphi}. \tag{3}$$

Cette dernière équation se rencontre dans la théorie des surfaces à courbure totale constante; ce qui établit un lien déjà signalé par M. Darboux entre ces deux groupes de surfaces.

En différentiant les formules (2), on trouve que ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 vérifient les deux équations

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = -e^{2\varphi}\xi, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\eta. \tag{5}$$

Les deux équations aux dérivées partielles (4) et (5) n'ont pas de solutions communes linéairement indépendantes de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4.

De même, les quatre quantités η_1, η_2, η_3, η_4 satisfont aux deux équations

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\, \partial v} = -e^{-2\varphi}\eta, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v} = -\xi. \tag{7}$$

II. — Sur certains réseaux de lignes de courbure qui se transforment en lignes de courbure après deux transformations de Laplace.

Supposons que la quadrique fondamentale soit la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1.$$

Les réseaux conjugués décrits par A et B sont orthogonaux. Nous désignerons par (x) et par (y) des surfaces dont les lignes de courbure admettent pour représentation sphérique les réseaux A et B; enfin par (ξ), (η) des surfaces admettant des réseaux conjugués parallèles à celui des surfaces (C) et (D).

Cela posé, remarquons que, si l'on applique la transformation de Laplace au réseau A en faisant varier u, on tombe sur le réseau C; puis une deuxième transformation donne le réseau B. On arriverait au même résultat en faisant la transformation en sens inverse.

Si l'on se reporte à une Note que j'ai présentée à l'Académie en 1895 (*Sur certaines propriétés géométriques qui ne dépendent que de la représentation sphérique*), on arrive aux conclusions suivantes :

1° *Après deux transformations de Laplace, dans un sens ou dans l'autre, une surface* (x) *se transforme en une surface* (y). *Inversement, une surface* (y) *se transforme en une surface* (x); *par conséquent, dans l'un et l'autre cas, les lignes de courbure se transforment en lignes de courbure;*

2° *Dans les mêmes conditions, une surface* (ξ) *se transforme en une surface* (η) *et inversement;*

3° *Après quatre transformations de Laplace, dans un sens ou dans l'autre, les surfaces* (x), (y), (ξ), (η) *se transforment en surfaces analogues.*

Il est facile de suivre analytiquement ces diverses transformations.

La normale à la surface C est parallèle à la droite qui va du centre de la sphère au point D; ses cosinus directeurs sont proportionnels à η_1, η_2, η_3; si donc r dirige une solution quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} = -e^{-2\varphi} r, \tag{6}$$

une surface (ξ) sera enveloppée par le plan

$$\eta_1 x + \eta_2 y + \eta_2 z + r = 0.$$

Si l'on prend pour r la valeur η_4, on obtient la surface C elle-même.

De même, si ρ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} = -e^{2\varphi} \rho, \tag{4}$$

une surface (η) sera l'enveloppe du plan

$$\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z + \rho = 0.$$

La surface D s'obtient en faisant $\rho = \xi_4$.

Partons alors d'une surface (ξ) avec les coordonnées tangentielles

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad r.$$

En appliquant la méthode de Laplace quand v varie, on tombe sur une surface (x) ayant pour coordonnées

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad -e^{\varphi}\frac{\partial r}{\partial u},$$

puis, en continuant, sur une surface (η), ayant pour coordonnées

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad -\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} - 2\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Si l'on applique la méthode de Laplace en sens inverse, on déduit de la surface (ξ), les surfaces (y), $(\eta)_2$ ayant pour coordonnées tangentielles

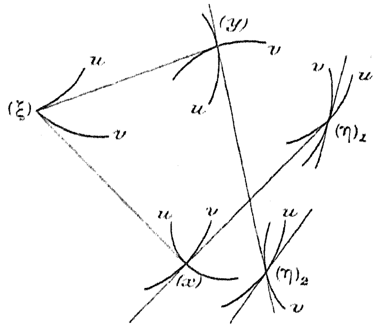
(ξ) $\qquad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad r,$

(y) $\qquad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad -e^{\varphi}\dfrac{\partial r}{\partial v},$

$(\eta)_2$ $\qquad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad -\dfrac{\partial^2 r}{\partial v^2} - 2\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{\partial r}{\partial v}.$

Ces diverses transformations sont indiquées dans la *fig.* 2.

Fig. 2.



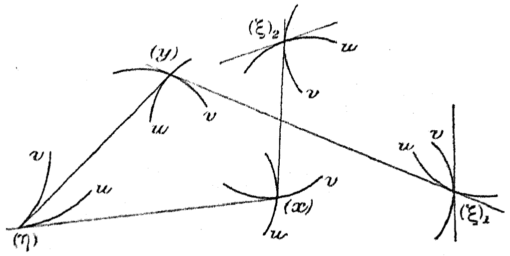
Ainsi, de toute solution r de l'équation (6) on déduit deux solutions ρ_1 et ρ_2 de l'équation (4) :

$$\rho_1 = -\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u} = \mathrm{S}\,r,$$

$$\rho_2 = -\frac{\partial^2 r}{\partial v^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial v} = \mathrm{T}\,r.$$

Si r n'est pas une combinaison linéaire de $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$, ρ_1 est distinct

Fig. 3.



de ρ_2; ce qui revient à dire que, si la surface (ξ) n'est pas égale à une homothétique de C, les surfaces $(\eta)_1$ et $(\eta)_2$ sont distinctes.

De même, d'une surface (η) on déduit deux surfaces $(\xi)_1$ et $(\xi)_2$ comme l'indique la *fig.* 3.

Les coordonnées tangentielles de ces surfaces sont

$$
\begin{array}{ll}
(\eta) & \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \rho, \\[1ex]
(x) & x_1,\ x_2,\ x_3,\ -e^{-\varphi}\dfrac{\partial\rho}{\partial v}, \\[2ex]
(\xi)_2 & \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ -\dfrac{\partial^2\rho}{\partial v^2}+2\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\rho}{\partial v}, \\[2ex]
(y) & y_1,\ y_2,\ y_3,\ -e^{-\varphi}\dfrac{\partial\rho}{\partial u}, \\[2ex]
(\xi)_1 & \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ -\dfrac{\partial^2\rho}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\rho}{\partial u}.
\end{array}
$$

Ainsi, de toute solution ρ de l'équation (4) on déduit deux solutions r_1, r_2 de l'équation (6)

$$r_1 = -\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}+2\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = S'\rho,$$

$$r_2 = -\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v} = T'\rho.$$

On voit de suite que

$$T'Sr = r, \qquad S'Tr = r,$$
$$TS'\rho = \rho, \qquad ST'\rho = \rho.$$

De plus, les expressions

$$SS'\rho, \quad TT'\rho$$

sont de nouvelles solutions de l'équation (4), distinctes de ρ, si ρ n'est pas une combinaison linéaire de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Nous désignerons ces expressions respectivement par $s\rho$ et $t\rho$.

De même les expressions

$$S'Sr = sr, \qquad T'Tr = tr$$

sont de nouvelles solutions de l'équation (6).

Enfin, on a

$$st\rho = ts\rho = \rho, \qquad str = tsr = r.$$

III. — Sur certaines congruences de normales qui se transforment en congruences de normales après deux transformations de Laplace.

Les droites b, normales à une surface (x), engendrent une congruence qui, si l'on se reporte à la Note citée dans le paragraphe précédent, jouit des propriétés suivantes :

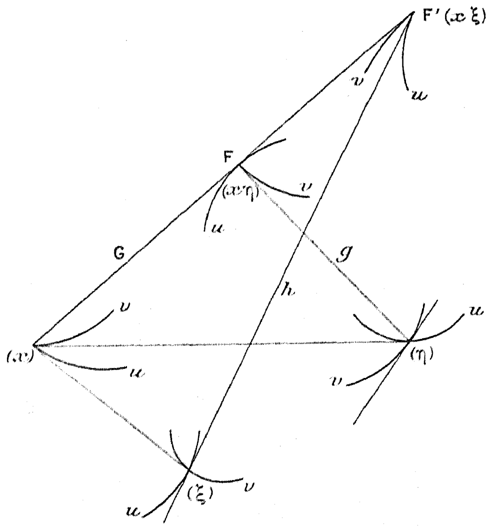
Après deux transformations de Laplace, dans un sens ou dans l'autre, la congruence G *se transforme en une congruence* H *normale à des surfaces* (y).

Donc :

Après quatre transformations de Laplace, dans un sens ou dans l'autre, la congruence G, *normale à une surface* (x), *se transforme en une congruence de normales à d'autres surfaces* (x).

La transformation indiquée ici ne diffère pas sensiblement de celle du paragraphe précédent. Marquons en effet une surface (x) et les deux surfaces (ξ), (η) qui s'en déduisent (*fig.* 4).

Fig. 4.



La normale b de la surface (x) admet deux foyers F et F′. Quand u

varie, le point F, dont nous désignerons les coordonnées par X_1, X_2, X_3, décrit une courbe tangente à b; le point $F'(Y_1, Y_2, Y_3)$ décrit quand v varie une courbe tangente à b.

La tangente conjuguée g de b en F va passer par le point correspondant de la surface (η). C'est là une propriété générale des congruences et des systèmes conjugués découpés par leurs développables. C'est pourquoi nous désignerons la surface décrite par F par $(x\eta)$. Enfin, il résulte de la Note déjà citée que les cosinus directeurs de g sont proportionnels à η_1, η_2, η_3; c'est-à-dire que g est parallèle à la normale de (ξ).

De même pour la surface $(x\xi)$ décrite par F', la tangente conjuguée h de b, passe par le point (ξ), et ses cosinus directeurs sont proportionnels à ξ_1, ξ_2, ξ_3.

La normale aux surfaces $(x\xi)$ est parallèle à la droite AC (*fig.* 1). On définirait de même des surfaces $(y\xi)$, $(y\eta)$.

Cherchons à déterminer la surface $(x\eta)$. En remarquant que, d'après les formules (2) (n° I), x_1, x_2, x_3 sont proportionnels à $\frac{\partial\eta_1}{\partial u}$, $\frac{\partial\eta_2}{\partial u}$, $\frac{\partial\eta_3}{\partial u}$, on pourra écrire

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = q\frac{\partial \eta_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X_i}{\partial v} = p\eta_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 X_i}{\partial u\,\partial v}$, on aura

$$p = \frac{\partial q}{\partial v}, \qquad \frac{\partial p}{\partial u} = -qe^{-2\varphi},$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} = -qe^{-2\varphi};$$

q est donc une solution de l'équation (6). On aura alors

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u} = q\dfrac{\partial \eta_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = \dfrac{\partial q}{\partial v}\eta_i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Nous introduirons une quatrième quantité X_4 définie par les équations

$$\frac{\partial X_4}{\partial u} = q\frac{\partial \eta_4}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X_4}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v}\eta_4.$$

Un point quelconque de la droite b a pour coordonnées

$$X_1 + \lambda x_1, \quad X_2 + \lambda x_2, \quad X_3 + \lambda x_3.$$

On vérifie facilement que, pour obtenir les surfaces (x) normales à b, on prend λ tel que

$$X_4 + \lambda x_4 = \text{const.}$$

Cherchons la figure F′, nous aurons, en supprimant les indices 1, 2, 3,

$$Y = X + hx,$$

d'où

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = -qe^{-\varphi}x + x\frac{\partial h}{\partial u} + h\left(-x\frac{\partial \varphi}{\partial u} + e^{\varphi}\xi\right),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v}\eta + x\frac{\partial h}{\partial v} + h\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial v} + e^{-\varphi}\eta\right).$$

On voit qu'il faut faire

$$h = -e^{\varphi}\frac{\partial q}{\partial v}.$$

On aura alors

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u}\xi,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = \theta\frac{\partial \xi}{\partial u},$$

où

$$\theta = \frac{\partial^2 q}{\partial v^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial v} = -Tq;$$

θ sera alors une solution de l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = -e^{2\varphi}\theta.$$

On trouve une transformation analogue à celle du paragraphe précédent.

La droite g engendre une congruence de Ribaucour, dont les surfaces focales sont $(x\eta)$, $(y\eta)$. Un point quelconque de la droite g a pour coordonnées

$$X_1 + \lambda\eta_1, \quad X_2 + \lambda\eta_2, \quad X_3 + \lambda\eta_3.$$

Les points qui décrivent des surfaces (η) sont déterminés par

$$X_4 + \lambda\eta_4 = \text{const.}$$

Remarque. — Si à la solution ρ de l'équation (4), qui définit la surface η, on ajoute un terme de la forme $k\xi_4$, k étant une constante, cela revient à remplacer la surface (x) par une surface parallèle. Si l'on remarque de plus que

$$s\xi_4 = t\xi_4 = \xi_4,$$

on en conclut :

Deux surfaces (x) parallèles se transforment en deux surfaces (y) parallèles et inversement.

Il nous reste à établir la relation qui existe entre la solution q de la surface $(x\eta)$ et la solution r de la surface (ξ).

Cherchons à déterminer des quantités a, b, f, g telles que l'on ait

$$X_i = ax_i + by_i + f\xi_i + g\eta_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Différentions en tenant compte des formules (2), (n° 1). On aura

$$\frac{\partial X}{\partial u} = x\left(\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial\varphi}{\partial u} - ge^{-\varphi}\right) + y\left(\frac{\partial b}{\partial u} + b\frac{\partial\varphi}{\partial u} - fe^{\varphi}\right) + \xi\left(ae^{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \eta\left(be^{-\varphi} + \frac{\partial g}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = x\left(\frac{\partial a}{\partial v} + a\frac{\partial\varphi}{\partial v} - fe^{\varphi}\right) + y\left(\frac{\partial b}{\partial v} - b\frac{\partial\varphi}{\partial v} - ge^{-\varphi}\right) + \xi\left(be^{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \eta\left(ae^{-\varphi} + \frac{\partial g}{\partial v}\right).$$

En comparant avec les formules (7), on aura

$$\begin{aligned}
-qe^{-\varphi} &= \frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial\varphi}{\partial u} - ge^{-\varphi}, & 0 &= \frac{\partial a}{\partial v} + a\frac{\partial\varphi}{\partial v} - fe^{\varphi},\\
0 &= \frac{\partial b}{\partial u} + b\frac{\partial\varphi}{\partial u} - fe^{\varphi}, & 0 &= \frac{\partial b}{\partial v} - b\frac{\partial\varphi}{\partial v} - ge^{-\varphi},\\
0 &= ae^{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial u}, & 0 &= be^{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial v},\\
0 &= be^{-\varphi} + \frac{\partial g}{\partial u}, & \frac{\partial q}{\partial v} &= ae^{-\varphi} + \frac{\partial g}{\partial v}.
\end{aligned}$$

On résout toutes ces relations de la façon suivante : g doit être une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = -g e^{-2\varphi}. \tag{6}$$

On prendra ensuite

$$\begin{aligned}
b &= -e^{\varphi} \frac{\partial g}{\partial u},\\
f &= e^{-\varphi}\left(\frac{\partial b}{\partial u} + b\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = -\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} = \mathrm{S}g,\\
a &= -e^{-\varphi}\frac{\partial f}{\partial u},\\
-q &= e^{\varphi}\left(\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) - g = sg - g.
\end{aligned}$$

Or, g est précisément la solution r de la surface ε. On arrive alors à la conclusion suivante :

Étant donnée une solution q de l'équation (6), *on en déduit, à l'aide de quadratures, une nouvelle solution r telle que l'on ait*

$$sr - r = -q.$$

Il suffit pour cela d'effectuer les quadratures (7) et de prendre

$$r = \eta_1 \mathrm{X}_1 + \eta_2 \mathrm{X}_2 + \eta_3 \mathrm{X}_3 + \eta_4 \mathrm{X}_4.$$

Cette solution r est définie à une combinaison linéaire près de η_1, η_2, η_3, η_4. Ce résultat n'est pas surprenant, puisque ces dernières expressions satisfont à l'équation

$$s\theta - \theta = 0.$$

IV. — Cas particuliers.

Prenons pour q la valeur η_4; comme $s\eta_4 = \eta_4$, on reviendra, après quatre transformations de Laplace, à la même surface $(x\eta)$. On a alors un système de quatre surfaces $(x\eta)$, $(x\xi)$, $(y\xi)$, $(y\eta)$ qui se reproduisent indéfiniment par notre méthode.

On a, dans ce cas,

$$sr = r - \eta_4;$$

donc :

Après quatre transformations de Laplace, les surfaces particulières (x) *ainsi obtenues se transforment en une surface parallèle.*

Même conclusion pour les surfaces y.

Après avoir déterminé une solution r_1 telle que

$$sr_1 - r_1 = -\eta_4,$$

on pourra en déduire une nouvelle r_1, telle que

$$sr_2 - r_2 = -r_1,$$

et ainsi de suite; donc :

Quand la surface minima est connue, on peut, à l'aide de quadratures seulement, en déduire une infinité de surfaces (x).

Indiquons la propriété suivante, qu'on vérifie facilement :

La surface moyenne de la congruence (g) *est une surface* (y).