EUGÈNE FABRY

Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 367-399

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__367_0>

SUR LES

POINTS SINGULIERS D'UNE FONCTION

DONNÉE

PAR SON DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

ET

L'IMPOSSIBILITÉ DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE DANS DES CAS TRÈS GÉNÉRAUX,

PAR M. EUGÈNE FABRY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

1. Une fonction analytique de la variable imaginaire z étant donnée, si on la développe suivant les puissances de $z - a$, le cercle de convergence passe en général par un seul point singulier, celui qui est le plus près du point a.

Si, au contraire, les coefficients de la série $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ sont choisis arbitrairement, de façon cependant que le rayon de convergence ne soit ni nul ni infini, la fonction définie par cette série a au moins un point singulier sur le cercle de convergence, mais en général elle en a plusieurs. Dans un Mémoire sur les fonctions données par leur développement de Taylor (*Journal de Liouville*, 4^e série, t. VIII), M. Hadamard a donné d'importants résultats sur la recherche de ces points singuliers. Je me propose de généraliser quelques-uns de ces résultats et d'en déduire de nouvelles méthodes particulières pour rechercher si un point du cercle de convergence est singulier. Dans bien des cas ces méthodes montreront même que tous les points du cercle de convergence sont singuliers, ce qui permet de former des séries, beaucoup plus générales que celles actuellement connues, qui ne peuvent pas se prolonger analytiquement au delà du cercle de convergence.

2. Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

une série dont le cercle de convergence a pour rayon 1, c'est-à-dire, comme l'a montré M. Hadamard, telle que la limite supérieure, pour $m = \infty$, de $\sqrt[n]{|a_n|}$ soit égale à 1, ou celle de $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{n}$ égale à 0. Formons

$$\frac{f^n(t)}{1.2\ldots n} = a_n + a_{n+1}\, t\, \frac{n+1}{1} + \ldots + \alpha_{n+p}\, t^p \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{1.2.\ldots p} + \ldots,$$

où t est réel et compris entre 0 et 1.

Si $z = 1$ n'est pas un point singulier de $f(z)$, la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(t)}{1.2\ldots n}}$ est plus petite que $\frac{1}{1-t}$. Si $z = 1$ est singulier, elle est égale à $\frac{1}{1-t}$.

Les coefficients $t^p \frac{(n+1)\ldots(n+p)}{1.2\ldots p}$ augmentent tant que $p < \frac{nt}{1-t}$, puis diminuent constamment. Le plus grand correspond à la valeur de p telle que

$$\frac{nt}{1-t} - 1 \leqq p \leqq \frac{nt}{1-t}.$$

Plus généralement, donnons à p une valeur telle que $\frac{p}{n}$ ait pour limite $\frac{t}{1-t}$, lorsque n augmente indéfiniment.

L'emploi de la valeur asymptotique de la fonction $\Gamma(n)$ montre que la racine $n^{\text{ième}}$ de ce coefficient a pour limite $\frac{1}{1-t}$. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\frac{n+p}{p} + \int_1^p \mathrm{L}\frac{n+x}{x}\,dx &< \mathrm{L}\frac{n+1}{1} \\ + \mathrm{L}\frac{n+2}{2} + \ldots + \mathrm{L}\frac{n+p}{p} &< \mathrm{L}(n+1) + \int_1^p \mathrm{L}\frac{n+x}{x}\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}\frac{n+p}{n+1} + \frac{p}{n}\mathrm{L}\left(\frac{n+p}{p}t\right) + \frac{1}{n}\mathrm{L}\frac{n+p}{p(n+1)} \\ &\quad < \frac{1}{n}\mathrm{L}\left[\frac{(n+1)\ldots(n+p)}{1.2.\ldots p}t^p\right] < \mathrm{L}\frac{n+p}{n+1} + \frac{p}{n}\mathrm{L}\left(\frac{n+p}{p}t\right). \end{aligned}$$

Si p augmente indéfiniment avec n, de façon que $\frac{p}{n}$ ait pour limite $\frac{t}{1-t}$, les deux membres extrêmes ont la même limite L $\frac{1}{1-t}$ et $\sqrt[n]{t^p \frac{(n+1)\ldots(n+p)}{1.2\ldots p}}$ tend vers $\frac{1}{1-t}$.

Divisons par ce coefficient, et posons $p+n=m$. Soit

$$\begin{aligned}\varphi_m(t) = a_m + a_{m+1}\, t\, \frac{m+1}{p+1} + a_{m+2}\, t^2 \frac{(m+1)(m+2)}{(p+1)(p+2)} + \ldots \\ + a_{m+\nu}\, t^\nu \frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)} + \ldots \\ + a_{m-1} \frac{1}{t}\frac{p}{m} + \ldots + a_{m-p} \frac{1}{t^p} \frac{p(p-1)\ldots 1}{m(m-1)\ldots(m-p+1)},\end{aligned}$$

où p augmente avec m, de façon que $\frac{p}{m}$ tende vers t.

Si $z=1$ n'est pas un point singulier de $f(z)$, $\sqrt[n]{|\varphi_m(t)|}$ a une limite supérieure plus petite que 1, et comme $\frac{m}{n}$ a une limite positive, $\frac{1}{1-t}$, il en est de même pour $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$.

Si $z=1$ est singulier, la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\varphi_m(t)|}$, et aussi celle de $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$, est égale à 1 si, lorsque m augmente indéfiniment, $n=m-p$ passe par toutes les valeurs entières; ce qui a lieu, par exemple, si l'on prend le nombre p compris entre mt et $mt-1$.

Mais si $\nu \geqq \lambda m$, λ étant une quantité fixe aussi petite que l'on voudra, il est inutile de tenir compte des termes de $\varphi_m(t)$ qui suivent $a_{m+\nu-1}$. En effet, si n est assez grand,

$$|a_n| < (1+\varepsilon)^n \quad (^1)$$

et le rapport $t\frac{m+\nu}{p+\nu}$ de deux coefficients consécutifs diminue quand ν augmente. La somme des termes de $\varphi_m(t)$ qui suivent $a_{m+\nu-1}$ aura donc un module plus petit que

$$(1+\varepsilon)^{m+\nu} t^\nu \frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)}\left[1 + t(1+\varepsilon)\frac{m+\nu+1}{p+\nu+1} + \left(t(1+\varepsilon)\frac{m+\nu+1}{p+\nu+1}\right)^2 + \ldots\right],$$

(1) ε représente ici, et représentera dans la suite, une quantité positive qui peut être choisie aussi petite que l'on voudra, si n est assez grand.

où $\lambda m \leqq \nu < \lambda m + 1$. Si ε est assez petit et m assez grand, la raison de cette progression géométrique différera aussi peu que l'on voudra de $t\dfrac{1+\lambda}{t+\lambda}$, qui est plus petit que 1. La racine $m^{\text{ième}}$ de la progression tend donc vers 1, si m devient infini. D'autre part

$$\mathrm{L}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)}{(p+1)(p+2)\ldots(p+\nu)} < \int_0^\nu \mathrm{L}\frac{m+x}{p+x}\,dx$$

$$= (m+\nu)\,\mathrm{L}\frac{m+\nu}{m} - (p+\nu)\,\mathrm{L}\frac{p+\nu}{p} + \nu\,\mathrm{L}\frac{m}{p},$$

$$\frac{1}{m}\mathrm{L}\left[(1+\varepsilon)^{m+\nu}t^\nu\frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)}\right]$$

$$< \frac{m+\nu}{m}\mathrm{L}\frac{(1+\varepsilon)(m+\nu)}{m} - \frac{p+\nu}{m}\mathrm{L}\frac{p+\nu}{p} + \frac{\nu}{m}\mathrm{L}\frac{mt}{p},$$

dont la limite est

$$(1+\lambda)\,\mathrm{L}(1+\varepsilon) + (1+\lambda)\,\mathrm{L}(1+\lambda) - (t+\lambda)\,\mathrm{L}\left(1+\frac{\lambda}{t}\right).$$

Cette expression augmente avec t, et pour $t = 1$ se réduit au premier terme, qui est aussi petit que l'on voudra. Donc, si $t < 1$, et si ε est assez petit, elle sera négative, et la racine $m^{\text{ième}}$ du module de la somme des termes qui suivent $a_{m+\nu-1}$ a une limite supérieure, pour $m = \infty$, plus petite que 1.

De même, si $\lambda < t$, la somme des termes compris entre a_{m-p} et $a_{m-\nu}$ a un module plus petit que

$$(1+\varepsilon)^{m-\nu}\frac{1}{t^\nu}\cdot\frac{p(p-1)\ldots(p-\nu+1)}{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}$$

$$\times\left[1+\frac{p-\nu}{t(1+\varepsilon)(m-\nu)}+\left(\frac{p-\nu}{t(1+\varepsilon)(m-\nu)}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p-\nu}{t(1+\varepsilon)(m-\nu)}\right)^{p-\nu}\right];$$

la raison de cette progression différera aussi peu que l'on voudra de

$\frac{t-\lambda}{t(1-\lambda)}$, qui est plus petit que 1, et

$$\mathrm{L}\frac{p(p-1)\dots(p-\nu+1)}{m(m-1)\dots(m-\nu+1)} < \mathrm{L}\frac{p}{m} + \int_0^{\nu-1}\mathrm{L}\frac{p-x}{m-x}\,dx$$
$$= (m-\nu+1)\,\mathrm{L}\frac{m-\nu+1}{m} - (p-\nu+1)\,\mathrm{L}\frac{p-\nu+1}{p} + \nu\,\mathrm{L}\frac{p}{m},$$

$$\frac{1}{m}\mathrm{L}\left[(1+\varepsilon)^{m-\nu}\frac{1}{t^\nu}\frac{p(p-1)\dots(p-\nu+1)}{m(m-1)\dots(m-\nu+1)}\right] < \frac{m-\nu}{m}\mathrm{L}(1+\varepsilon)$$
$$+\frac{m-\nu+1}{m}\mathrm{L}\frac{m-\nu+1}{m} - \frac{p-\nu+1}{m}\mathrm{L}\frac{p-\nu+1}{p} + \frac{\nu}{m}\mathrm{L}\frac{p}{mt},$$

dont la limite

$$(1-\lambda)\,\mathrm{L}(1+\varepsilon) + (1-\lambda)\,\mathrm{L}(1-\lambda) - (t-\lambda)\,\mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda}{t}\right)$$

est négative, si $t < 1$, et si ε est assez petit.

Donc, si dans $\varphi_m(t)$ on ne conserve que les termes compris entre $a_{m-\nu}$ et $a_{m+\nu}$, le module de la somme des termes supprimés aura une racine $m^{\text{ième}}$ inférieure à une quantité plus petite que 1, pourvu que m soit assez grand; et ces termes n'ont aucune influence sur le résultat énoncé, ce qui conduit au théorème suivant :

Soit

$$\varphi_m(t) = a_m + a_{m+1}t\frac{m+1}{p+1} + \dots + a_{m+\nu}t^\nu\frac{(m+1)\dots(m+\nu)}{(p+1)\dots(p+\nu)}$$
$$+ a_{m-1}\frac{1}{t}\frac{p}{m} + \dots + a_{m-\nu}\frac{1}{t^\nu}\frac{p(p-1)\dots(p-\nu+1)}{m(m-1)\dots(m-\nu+1)},$$

où p est un nombre entier variant avec m de façon que $\frac{p}{mt}$ tende vers 1, *et $\nu \geqq \lambda m$, $0 < \lambda < t < 1$. Si $z = 1$ n'est pas un point singulier de $f(z)$, la limite supérieure, pour $m = \infty$, de $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ est plus petite que* 1; *et si cette limite supérieure est* 1, *le point $z = 1$ est singulier.*

t est ici une quantité arbitraire, qui peut varier avec m, pourvu qu'elle reste comprise entre deux limites comprises entre 0 et 1, et que $\frac{p}{mt}$ tende vers 1. On peut, par exemple, supposer $t = \frac{p}{m}$.

Réciproquement *si, t restant fixe, p varie de façon que $m - p$ prenne toutes les valeurs entières, par exemple si p est compris entre $mt - 1$ et* *mt, et si $z = 1$ est un point singulier, $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ a pour limite supérieure 1 ; si cette limite supérieure est plus petite que 1, le point $z = 1$ n'est pas singulier.*

Si l'on pose $a_n = e^{\alpha i}(a'_n + i a''_n)$, a' et a'' étant réels, $\varphi_m(t)$ prend la forme $e^{\alpha i}(\varphi'_m + i\varphi''_m)$, et la limite supérieure de $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ est égale à la plus grande des limites supérieures de $\sqrt[m]{|\varphi'_m|}$ et $\sqrt[m]{|\varphi''_m|}$. Si, dans $\varphi_m(t)$, on remplace les termes a_n par la partie réelle de $a_n e^{-\alpha i}$, on voit que, si le point $z = 1$ n'est pas singulier, $\sqrt[m]{|\varphi'_m|}$ aura encore une limite supérieure plus petite que 1, quel que soit α, qui peut ainsi varier avec m. Si $\sqrt[m]{|\varphi'_m|}$ a pour limite supérieure 1, le point $z = 1$ est singulier.

3. Posons $z = te^{\omega i}$; si $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{\omega i})|}$ a pour limite supérieure 1, le point $z = e^{\omega i}$ est singulier. Si, sur un arc compris entre $-\Omega$ et $+\Omega$, il n'y a aucun point singulier, cette racine $m^{\text{ième}}$ a une limite supérieure plus petite que 1, pourvu que $-\Omega < \omega < +\Omega$, et la racine $m^{\text{ième}}$ de

$$\frac{1}{n}\left| e^{\alpha_1 i}\varphi_m(te^{\omega_1 i}) + e^{\alpha_2 i}\varphi_m(te^{\omega_2 i}) + \ldots + e^{\alpha_n i}\varphi_m(te^{\omega_n i})\right|$$

aura également une limite supérieure plus petite que 1, quels que soient les arcs α. Si cette limite supérieure est 1, il y aura au moins un point singulier sur l'arc $\pm\Omega$.

Si les arcs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ varient avec m, de façon que $|\omega|$ ait, pour $m = \infty$, une limite supérieure Ω, et si $\sqrt[m]{\left|\frac{1}{n}\Sigma e^{\alpha i}\varphi(te^{\omega i})\right|}$ a pour limite supérieure 1, il y aura un point singulier sur l'arc $\pm(\Omega + \varepsilon)$. Et si tous les ω tendent vers zéro, il y aura un point singulier sur l'arc $\pm\varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on voudra; le point $z = 1$ sera donc singulier.

Soient n arcs positifs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, Ω leur somme, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des arcs quelconques. On a

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha_1 + \nu\omega_1)\cos(\alpha_2 + \nu\omega_2)\ldots\cos(\alpha_n + \nu\omega_n)\\
&= \frac{1}{2^n}\left(e^{(\alpha_1+\nu\omega_1)i} + e^{-(\alpha_1+\nu\omega_1)i}\right)\ldots\left(e^{(\alpha_n+\nu\omega_n)i} + e^{-(\alpha_n+\nu\omega_n)i}\right)\\
&= \frac{1}{2^n}\Sigma e^{i[\pm(\alpha_1+\nu\omega_1)\pm(\alpha_2+\nu\omega_2)\pm\ldots\pm(\alpha_n+\nu\omega_n)]},
\end{aligned}$$

le signe Σ comprenant les 2^n termes obtenus par la permutation des n signes $\pm$. Chacun de ces termes est de la forme

$$e^{(\alpha+\nu\omega)i}$$

où

$$|\omega| \leqq \Omega.$$

Dans $\varphi_m(te^{\omega i})$, prenons pour ω les 2^n valeurs $\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \ldots \pm \omega_n$, et pour α les valeurs correspondantes. Posons alors

$$\begin{aligned}
\psi_m(t) &= \frac{1}{2^n}\Sigma e^{\alpha i}\varphi_m(te^{\omega i}) \\
&= a_m \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n + \ldots \\
&\quad + a_{m+\nu}t^\nu \frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)}\cos(\alpha_1+\nu\omega_1)\ldots\cos(\alpha_n+\nu\omega_n) \\
&\quad + a_{m-1}\frac{1}{t}\frac{p}{m}\cos(\alpha_1-\omega_1)\ldots\cos(\alpha_n-\omega_n)\ldots \\
&\quad + a_{m-\nu}\frac{1}{t^\nu}\frac{p(p-1)\ldots(p-\nu+1)}{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}\cos(\alpha_1-\nu\omega_1)\ldots\cos(\alpha_n-\nu\omega_n).
\end{aligned}$$

Si $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n$ tend vers o, et si $\sqrt[m]{|\psi_m(t)|}$ a pour limite supérieure 1, le point $z=1$ sera singulier.

Supposons les termes a_n remplacés par la partie réelle a'_n de $a_n e^{-\beta_m i}$, β_m pouvant varier avec m, et cherchons à déterminer les arcs α et ω de façon que les termes de $\psi_m(t)$ soient tous de même signe. Si cela peut avoir lieu pour une suite illimitée de valeurs de m telles que $\sqrt[m]{|a'_m|}$ tende vers 1, $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n$ et $\frac{1}{m}\mathrm{L}|\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n|$ tendant vers o, le point $z=1$ sera singulier, car $\sqrt[m]{|a'_m \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n|}$ tendra vers 1 pour ces valeurs de m, et les autres termes de $\psi_m(t)$ s'ajoutent au premier.

Soit

$$= \frac{\pi}{2} - \mu\omega_1,$$

μ étant un nombre entier positif ou négatif; puis

$$\omega_n = \frac{\omega_1}{2^{n-1}}, \qquad \alpha_n = -\mu\omega_n, \qquad \text{où } n = 2, 3, \ldots.$$

$\cos(\alpha_1 + \nu\omega_1)$ change de signe pour les valeurs

$$\nu = \mu + k' \frac{\pi}{\omega_1}$$

et $\cos(\alpha_n + \nu\omega_n)$ pour

$$\nu = \mu + (2k+1)\, 2^{n-2} \frac{\pi}{\omega_1} = \mu + k' \frac{\pi}{\omega_1}.$$

Si $k' = 0$, $\cos(\alpha_1 + \nu\omega_1)$ est seul nul. Si k' est divisible par 2^{n-2}, le quotient étant impair, $\cos(\alpha_n + \nu\omega_n)$ s'annule aussi et le produit $\cos(\alpha_1 + \nu\omega_1)\cos(\alpha_2 + \nu\omega_2)\ldots\cos(\alpha_n + \nu\omega_n)$ change de signe pour $\nu = \mu$, et n'a pas d'autre changement de signe entre les valeurs $\nu = \mu \pm \frac{\pi}{\omega_1} 2^{n-1}$. Comme dans $\varphi_m(t)$ on peut supposer $|\nu| \leqq \lambda m$, il suffit de choisir n de façon que $\frac{\pi}{\omega_1} 2^{n-1}$ soit plus grand que $\lambda m + |\mu|$. On a alors

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n < 2\omega_1$$

et

$$\begin{aligned}\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n &= \sin\mu\omega_1 \cos\frac{\mu\omega_1}{2} \cos\frac{\mu\omega_1}{2^2} \ldots \cos\frac{\mu\omega_1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\sin\mu\omega_1}{2^{n-1}} \sum_{k=-2^{n-2}}^{2^{n-2}-1} e^{-\frac{\mu\omega_1}{2^{n-1}}(2k+1)i} = \frac{\sin^2\mu\omega_1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\mu\omega_1}{2^{n-1}}\right)},\end{aligned}$$

et, si l'on suppose

$$0 < |\mu\omega_1| < \frac{\pi}{2},$$

on en déduit

$$|\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n| > \frac{\sin^2\mu\omega_1}{|\mu\omega_1|} > \frac{4}{\pi^2}|\mu\omega_1|.$$

a'_m étant supposé positif, soient $a'_{m+\nu_1}$, $a'_{m-\nu'_1}$ les premiers termes négatifs, puis $a'_{m+\nu_2}$, $a'_{m-\nu'_2}$ les premiers termes suivants qui sont encore positifs, et ainsi de suite, $a'_{m+\nu_1}$, $a_{m+\nu_2}$, $\ldots$, $a'_{m+\nu_q}$ et $a'_{m-\nu'_1}$, $a'_{m-\nu'_2}$, $\ldots$, $a'_{m-\nu'_{q'}}$ étant les termes qui changent de signe entre $a'_{m\pm\lambda m}$. Prenons successivement pour μ les valeurs $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$, puis $-\nu'_1, -\nu'_2, \ldots, -\nu'_{q'}$, ω_1 conservant la même valeur $\omega_1 = \frac{\pi}{2\lambda m}$. Alors $|\mu\omega|$ reste plus petit que $\frac{\pi}{2}$; et si $\frac{q+q'}{m}$ tend vers o, $\Sigma\omega < \pi\frac{q+q'}{\lambda m}$ tendra aussi vers o.

D'autre part, on a

$$0 > \frac{1}{m}\Sigma L|\cos\alpha| > \frac{1}{m}\Sigma L\left|\frac{4}{\pi^2}\mu\omega_1\right| = \frac{q+q'}{m} L\frac{2}{\pi\lambda m} + \frac{1}{m}\Sigma L|\mu|$$

et

$$\begin{aligned}\Sigma L|\mu| \geqq L(1.2\ldots q) + L(1.2\ldots q') > \int_1^q Lx\,dx + \int_1^{q'} Lx\,dx \\ = qLq + q'Lq' - q - q' + 2.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{m}\Sigma L|\cos\alpha| > \frac{q+q'}{m}\left(L\frac{2}{\pi\lambda} - 1\right) - \frac{q}{m}L\frac{m}{q} - \frac{q'}{m}L\frac{m}{q'},$$

expression qui tend vers 0 en même temps que $\frac{q+q'}{m}$. On arrive donc au théorème suivant :

β_m étant un arc variable, soit q le nombre des changements de signe de la partie réelle a'_n de $a_n e^{-\beta_m i}$, lorsque n varie de $m - \lambda m$ à $m + \lambda m$. Si, pour une suite illimitée de valeurs de m, $\frac{1}{m}L|a'_m|$ et $\frac{q}{m}$ tendent vers 0, le point $z = 1$ est singulier.

Supposons qu'entre a'_m et $a'_{m+\lambda m}$ le nombre des changements de signe soit infiniment petit par rapport à m; ce théorème s'appliquera si $\frac{1}{n}L|a'_n|$ tend vers 0 pour une suite de valeurs de n comprises chacune entre $m(1+\lambda')$ et $m(1+\lambda-\lambda')$ où $0 < \lambda' < \lambda$; c'est-à-dire si, pour toutes ces valeurs de n, $\frac{1}{n}L|a'_n|$ a pour limite supérieure 0. Si, au contraire, cette limite supérieure est plus petite que 0, on peut supprimer $a'_n z^n$ sans changer les points singuliers du cercle de convergence; de sorte que les termes compris entre $a_{m+\lambda' m}$ et $a_{m+(\lambda-\lambda')m}$ se réduiront à la forme $a''_n i e^{\beta_m i}$.

4. On peut encore généraliser ce résultat en multipliant la série par un polynome $P(z)$; si le point $z = 1$ est singulier pour la fonction $P(z) \times f(z)$, il est singulier pour $f(z)$. Le degré de ce polynome peut même augmenter indéfiniment. Supposons, en effet, que $z = 1$

ne soit pas singulier; on pourra trouver une quantité fixe θ telle que

$$\left|\frac{f^n(t)}{1.2\ldots n}\right| < \left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n,$$

pourvu que n soit assez grand. Soient

$$P(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_\nu z^\nu,$$
$$Q(z) = A(1 + z + z^2 + \ldots + z^\nu),$$

les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ ayant des modules plus petits que A, et ν étant tel que $n - \nu$ augmente indéfiniment avec n. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n P(t) f(t)}{dt^n} \\
&= \frac{f^n(t)}{1.2\ldots n}P(t) + \frac{f^{n-1}(t)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{P'(t)}{1} + \ldots + \frac{f^{(n-\nu)}(t)}{1.2\ldots(n-\nu)}\frac{P^{(\nu)}(t)}{1.2\ldots\nu},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n P(t) f(t)}{dt^n}\right| < \left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n\left[Q(t) + \frac{1-t}{1-\theta}Q'(t) + \ldots + \left(\frac{1-t}{1-\theta}\right)^\nu \frac{Q^{(\nu)}(t)}{1.2\ldots\nu}\right] \\
&= \left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n Q\left(t + \frac{1-t}{1-\theta}\right) < \left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n A\,\frac{1-t\theta}{\theta(1-t)}\left(\frac{1-t\theta}{1-\theta}\right)^\nu < A\,\frac{1-t\theta}{\theta(1-t)}\left(\frac{1-t\theta}{1-t}\right)^n,
\end{aligned}$$

dont la racine $n^{\text{ième}}$ a une limite supérieure, pour $n = \infty$, plus petite que $\frac{1}{1-t}$, si $\sqrt[n]{A}$ a pour limite supérieure 1.

Posons, comme au n° 2, $n + p = m$, $\frac{p}{mt}$ tendant vers 1, et formons la fonction $\varphi_m(t)$, où chaque coefficient a_n est remplacé par

$$b_n = A_0 a_n + A_1 a_{n-1} + \ldots + A_\nu a_{n-\nu},$$

$\frac{L|A|}{m}$ ayant pour limite supérieure 0 pour $m = \infty$, et ν étant tel que $m(1-t) - \nu$ devienne infini avec m. Les A peuvent ainsi varier avec m ainsi que ν. On peut encore négliger les termes non compris entre $b_{m\pm\lambda m}$; et, si $\lambda < 1 - t$, ν peut être supposé égal à λm.

Le même raisonnement s'applique à tous les points du cercle de convergence, ce qui permet d'effectuer les transformations du n° 3. Considérons la suite $b_m b_{m+1} \ldots b_{m+\nu}$, où $\nu = \lambda m$. Si l'on peut trouver des quantités A variables avec m, $\frac{L|A|}{m}$ ayant pour limite supérieure 0

pour $m = \infty$, de façon que, pour une suite illimitée de valeurs de m, les parties réelles $b'_m, b'_{m+1}, \ldots, b'_{m+\nu}$ des b n'aient qu'un nombre de changements de signe infiniment petit par rapport à m, $\frac{L|b'_{m+\mu}|}{m}$ tendant vers o pour des valeurs de μ comprises chacune entre $\lambda' m$ et $m(\lambda - \lambda')$; le point $z = 1$ est singulier.

Supposons que, pour une suite de valeurs de m, les parties réelles de $a_n e^{-\beta_m i}$ n'aient, entre $n = m$ et $m + \lambda m$, qu'un nombre de changements de signe infiniment petit par rapport à m. On a vu que le point $z = 1$ est singulier, sauf dans le cas où, en supprimant des portions de termes telles que $\frac{L|a'_n|}{n}$ ait une limite supérieure plus petite que o, on obtient des intervalles plus petits, mais tels qu'entre $a_{m'}$ et $a_{m'+\lambda' m'}$ tous les termes soient de la forme

$$a''_n i e^{\beta i}.$$

Dans ce cas, supposons les termes suivants mis sous la forme

$$a_n = e^{\beta i}(a'_n + i a''_n),$$

et supprimons le facteur commun $e^{\beta i}$. Les quantités b' se simplifient si les A sont supposés réels. Car les a' sont nuls pour des suites de termes que l'on peut représenter par

$$a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_{m-\lambda m};$$

on a alors

$$b'_m = A_0 a'_m, \qquad b'_{m+1} = A_0 a'_{m+1} + A_1 a'_m, \qquad \ldots, \qquad b'_{m+\nu} = A_0 a'_{m+\nu} + \ldots + A_\nu a'_m,$$

où

$$\nu = \lambda m.$$

On peut en conclure que le point $z = 1$ est singulier lorsque l'on pourra déterminer les quantités A de façon que les b' n'aient qu'un nombre de changements de signe infiniment petit par rapport à m, $\frac{1}{m} L|b'_{m+\mu}|$ ayant pour limite supérieure o lorsque μ prend les valeurs comprises entre $\lambda' m$ et $(\lambda - \lambda')m$.

5. Soit

$$a_n = \rho_n e^{\omega_n i} = e^{\beta i}(a'_n + i a''_n).$$

Pour déterminer les changements de signe de $a'_n = \rho_n \cos(\omega_n - \beta)$, supposons que l'on marque, sur la circonférence de rayon 1, les arguments ω_n des termes compris entre a_m et $a_{m+\lambda m}$, en réunissant les points consécutifs par l'arc le plus court, de façon à former une ligne continue sinueuse. Le signe de a'_n changera chaque fois que cette ligne dépassera l'un des points $e^{\left(\beta \pm \frac{\pi}{2}\right)i}$. Le nombre q des changements de signe de a'_n est égal au nombre des points d'intersection de la ligne précédente avec un diamètre, que l'on pourra choisir de façon à rendre q minimum. Pour chaque valeur de m, soit β_m l'arc qui correspond à cette valeur minimum de q, λ pouvant varier, mais sans tendre vers o. Supposons que $\frac{q}{m}$ ait pour limite inférieure o, pour $m = \infty$, c'est-à-dire tende vers o pour une suite illimitée de valeurs de m. On en conclura que le point $z = 1$ est singulier si, pour les valeurs de n comprises entre $m(1+\lambda')$ et $m(1+\lambda-\lambda')$, $\frac{1}{n} \mathrm{L}\left|\rho_n \cos(\omega_n - \beta_m)\right|$ a pour limite supérieure o; c'est-à-dire si, pour une suite illimitée de ces valeurs de n, $\frac{1}{n}\mathrm{L}\rho_n$ et $\frac{1}{n}\mathrm{L}\left|\cos(\omega_n - \beta_m)\right|$ tendent vers o.

Cette dernière expression tend vers o en même temps que $\frac{1}{n}\mathrm{L}\left|\omega_n - \beta_m - \frac{\pi}{2} \pm k\pi\right|$ $\left(k\right.$ étant choisi de façon que l'arc reste compris entre $\left.-\frac{\pi}{2} \text{ et } +\frac{\pi}{2}\right)$, et en particulier toutes les fois que

$$\omega_n - \beta_m - \frac{\pi}{2} \pm k\pi$$

ne tendra pas vers o.

Par exemple, si, pour chacune de ces valeurs de m, il y a deux arcs β et β' tels que $\frac{q}{m}$ tende vers o, $\frac{1}{m}\mathrm{L}\left|\beta - \beta' \pm k\pi\right|$ tendant vers o, l'une des expressions $\frac{1}{n}\mathrm{L}\left|\omega_n - \beta - \frac{\pi}{2} \pm k'\pi\right|$, $\frac{1}{n}\mathrm{L}\left|\omega_n - \beta' - \frac{\pi}{2} \pm k''\pi\right|$ tendra toujours vers o. Il ne reste plus alors qu'à chercher si, pour les valeurs considérées de n, $\frac{1}{n}\mathrm{L}\rho_n$ a pour limite supérieure o. Mais si cette limite supérieure est plus petite que o, on peut supprimer ces termes sans changer les points singuliers du cercle de convergence.

Soit $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_{m-\lambda m}$ l'une des suites de termes ainsi supprimés, m prenant une suite illimitée de valeurs. Soit $\nu = \lambda m$, et

$$b_m = A_0 a_m, \quad b_{m+1} = A_0 a_{m+1} + A_1 a_m, \quad \ldots, \quad b_{m+\nu} = A_0 a_{m+\nu} + \ldots + A_\nu a_m,$$

les A étant imaginaires, variables avec m, mais tels que $\frac{L|A|}{m}$ ait pour limite supérieure o. Le point $z = 1$ sera encore singulier si l'on peut choisir ces quantités A telles que les b remplissent les conditions obtenues pour les a.

Par exemple, si les A sont tous égaux à $e^{\beta i}$, on est conduit à construire le polygone dont les sommets représentent les quantités a_m, $a_m + a_{m+1}, \ldots, a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+\nu}$. Les parties réelles de b_m, $b_{m+1}, \ldots, b_{m+\nu}$ changent de signe chaque fois que ce polygone traversera le diamètre qui correspond aux directions $e^{-\left(\beta \pm \frac{\pi}{2}\right)i}$. On pourra choisir le diamètre qui donne le nombre de points d'intersection q minimum; et, si $\frac{q}{m}$ tend vers o, on en conclut que le point $z = 1$ est singulier, pourvu que, pour les valeurs de μ comprises entre $\lambda' m$ et $(\lambda - \lambda')m$, $\frac{1}{m} L|b'_{m+\mu}|$ ait pour limite supérieure o.

6. Il est facile d'obtenir des cas assez généraux où ces méthodes montreront que le point $z = 1$ est singulier.

Formons les différences $|\omega_{n+1} - \omega_n|$ comprises entre o et π, pour les valeurs de n comprises entre m et $m + \lambda m$. Parmi les diamètres situés entre deux arcs β et $\beta + \gamma$, il y en aura au moins un coupant la ligne qui joint les arguments en un nombre q de points inférieur ou au plus égal à $\frac{1}{\gamma} \sum_{n=m}^{m+\lambda m} |\omega_{n+1} - \omega_n|$.

Si $\frac{1}{m} \sum_{m}^{m+\lambda m} |\omega_{n+1} - \omega_n|$ tend vers o, $\frac{q}{m}$ tendra vers o pour plusieurs diamètres distincts, et l'on pourra toujours choisir β de façon que $\frac{1}{m} L|\cos(\omega_n - \beta)|$ tende vers o. Donc, si $\frac{1}{n} L|\rho_n|$ a pour limite supérieure o, pour les valeurs de n comprises entre $m(1 + \lambda')$ et $m(1 + \lambda - \lambda')$, le point $z = 1$ est singulier.

Si, lorsque m devient infini, $|\omega_{n+1} - \omega_n|$ tend vers o pour les valeurs de n comprises entre m et $m + \lambda m$, $\frac{1}{m}\sum_m^{m+\lambda m} |\omega_{n+1} - \omega_n|$ tend aussi vers o. Plus généralement, supposons que l'on divise les différences $|\omega_{n+1} - \omega_n|$ en deux groupes, les unes tendant vers o, les autres pouvant être arbitraires. $\frac{1}{m}\sum_m^{m+\lambda m} |\omega_{n+1} - \omega_n|$ tendra vers o si, dans ces intervalles, les différences sont toutes du premier groupe, sauf un nombre q tel que $\frac{q}{m}$ tende vers o.

En particulier, si $|\omega_{n+1} - \omega_n|$ tend régulièrement vers o, pour toutes les valeurs infinies de n, le point $z = 1$ est singulier, car on suppose qu'il existe toujours des termes tels que $\frac{L\rho_m}{m}$ tende vers o.

Le point $z = 1$ est encore singulier quel que soit ρ_m, si $|\omega_{n+1} - \omega_n|$ tend vers o sauf pour des termes tels qu'entre a_m et $a_{m+\lambda m}$ il n'y en ait que q, $\frac{q}{m}$ tendant vers o pour toutes les valeurs infinies de m.

De même, si $\omega_{n+1} - \omega_n$ tend vers une limite α pour une suite infinie de valeurs de n, et si l'on peut former une suite illimitée de valeurs de m telles qu'entre ω_m et $\omega_{m+\lambda m}$ il n'y ait que q différences qui ne tendent pas vers α, $\frac{q}{m}$ tendant vers o, $\frac{L\rho_n}{n}$ ayant pour limite supérieure o, lorsque n prend les valeurs comprises entre $m(1 + \lambda')$ et $m(1 + \lambda - \lambda')$, le point $z = e^{-\alpha i}$ est singulier.

Cela peut avoir lieu pour plusieurs points, et même, dans certains cas, pour tous les points du cercle de convergence. Considérons, par exemple, la série

$$\sum_0^\infty z^n \rho_n e^{in\sqrt{Ln}}$$

qui donne

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \sqrt{Ln} + \frac{n+1}{\sqrt{Ln} + \sqrt{L(n+1)}} L\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Si n est assez grand, $\omega_{n+1} - \omega_n$ diffère aussi peu que l'on voudra de

$\sqrt{\mathrm{L}n}$. D'autre part,

$$\sqrt{\mathrm{L}(n+p)} - \sqrt{\mathrm{L}n} = \frac{\mathrm{L}\left(1+\frac{p}{n}\right)}{\sqrt{\mathrm{L}n}+\sqrt{\mathrm{L}(n+p)}},$$

qui tend vers o si $\frac{p}{n}$ reste fini, ou même si $\frac{\mathrm{L}\frac{p}{n}}{\sqrt{\mathrm{L}n}}$ tend vers o.

Soit α un arc compris entre o et 2π. Considérons la suite des valeurs de n comprises entre $e^{(\alpha+2k\pi)^2-\varepsilon k\pi}$ et $e^{(\alpha+2k\pi)^2+\varepsilon k\pi}$, ε tendant vers o lorsque k devient infini. $\omega_{n+1}-\omega_n$ tend vers α pour toutes les valeurs de n comprises entre n et $n+\lambda n$, et le point $e^{-\alpha i}$ est singulier quel que soit α, pourvu que $\frac{1}{n}\mathrm{L}\rho_n$ ait pour limite supérieure o pour les valeurs de n qui correspondent à chaque arc α. Cela a lieu, en particulier, si $\frac{\mathrm{L}\rho_{n_\nu}}{n_\nu}$ tend régulièrement vers o pour une suite $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ de valeurs de n telles que $\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}$ reste fini, ou même plus généralement telles que $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}n_\nu}}\mathrm{L}\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}$ tende vers o.

On arrive au même résultat pour les séries de la forme

$$\sum z^n \rho_n e^{in\varphi(n)},$$

$\varphi(n)$ étant tel que $n[\varphi(n+1)-\varphi(n)]$ tende vers o, $\varphi(n)-2k\pi$ variant constamment entre o et 2π lorsque n augmente indéfiniment; ce qui a lieu en particulier si $\varphi(n)$ augmente indéfiniment, $n\varphi'(n)$ tendant vers o.

De même dans la série

$$\sum z^n \rho_n e^{i\alpha n \sin\varphi(n)},$$

$\omega_{n+1}-\omega_n$ a pour limite les valeurs comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$; et si $\alpha<\pi$, ce raisonnement ne s'applique qu'à une portion du cercle de convergence.

7. Si la série contient une suite de termes tels que $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{n}$ ait, pour $n=\infty$, une limite supérieure plus petite que o, on peut les supprimer, et il n'y a plus à tenir compte de leurs signes. Supposons que,

pour une suite de valeurs de m telles que $\frac{L|a_m|}{m}$ tende vers o, il ne reste entre $a_{m\pm\lambda m}$ que q termes, $\frac{q}{m}$ tendant vers o. En faisant la substitution $z = z'e^{\omega i}$, les parties réelles des coefficients de la nouvelle série auront au plus q changements de signe dans le même intervalle, et le point $z' = 1$, $z = e^{\omega i}$ sera singulier quel que soit ω.

Si, pour une suite de valeurs de m, il ne reste entre a_m et $a_{m+\lambda m}$ que q termes, $\frac{q}{m}$ tendant vers o, et si $\frac{L|a_n|}{n}$, où n reste compris entre $m(1+\lambda')$ et $m(1+\lambda-\lambda')$, a pour limite supérieure o, tous les points du cercle de convergence sont singuliers.

Cela a lieu, en particulier, pour la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{c_\nu},$$

où $c_{\nu+1} - c_\nu$ augmente indéfiniment avec ν, et même si, p étant un nombre fixe, $c_{\nu+p} - c_\nu$ augmente indéfiniment, et enfin dans le cas plus général où $c_{\nu+1} - c_\nu$ augmente indéfiniment, sauf pour des termes tels que, entre c_ν et $(1+\lambda)c_\nu$, il n'y en ait qu'un nombre infiniment petit par rapport à c_ν, lorsque ν augmente indéfiniment. Tous les points du cercle de convergence sont alors singuliers quels que soient les coefficients a.

On peut encore multiplier la série par un polynome à coefficients variables, et remplacer a_n par

$$b_n = A_0 a_n + A_1 a_{n-1} + \ldots + A_\nu a_{n-\nu},$$

les coefficients A remplissant les conditions indiquées au n° 4.

En particulier, supposons que, pour une suite illimitée de valeurs de m, les termes a_n compris entre a_m et $a_{m-\lambda m}$ soient tels que $\frac{L|a_n|}{n}$ ait une limite supérieure plus petite que o. On peut alors supprimer ces termes et l'on aura

$$\begin{aligned}
b_m &= A_0 a_m,\\
b_{m+1} &= A_0 a_{m+1} + A_1 a_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
b_{m+\nu} &= A_0 a_{m+\nu} + \ldots + A_\nu a_m,
\end{aligned}$$

où $\nu = \lambda m$. On sera encore sûr que tous les points du cercle de convergence sont singuliers si l'on peut choisir les quantités A variables avec m, de façon que $\frac{L|A|}{m}$ ait pour limite supérieure o, les b étant nuls, sauf un nombre infiniment petit par rapport à m, $\frac{L|b_n|}{n}$ ayant pour limite supérieure o lorsque n reste compris entre m et $m(1+\lambda-\lambda')$.

Posons $z = z'e^{\omega i}$ et $A_\nu = A'_\nu e^{\nu\omega i}$. On peut reconnaître que le point $z = e^{\omega i}$ est singulier si dans la suite

$$\begin{aligned} b_m &= A'_0 a_m, \\ b_{m+1} &= e^{\omega i}(A'_0 a_{m+1} + A'_1 a_m), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ b_{m+\nu} &= e^{\nu\omega i}(A'_0 a_{m+\nu} + \ldots + A'_\nu a_m) \end{aligned}$$

les parties réelles des b n'ont qu'un nombre de changements de signe infiniment petit par rapport à m, la racine $m^{\text{ième}}$ de la partie réelle de b_n ayant pour limite supérieure 1, lorsque n reste compris entre m et $m(1+\lambda-\lambda')$. Et tous les points du cercle de convergence seront singuliers si ces conditions peuvent être remplies quel que soit ω, les A pouvant varier avec ω.

C'est ce qui a lieu, par exemple, si, pour une suite illimitée de valeurs de m, $a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_{m-\lambda m} = 0$, $a_m a_{m+1} \ldots a_{m+\lambda m}$ étant réels, positifs et décroissants, $\sqrt[m]{a_m}$ tendant vers 1. En effet, si l'on prend $A_0 = A_1 = \ldots = A_\nu = -ie^{\frac{\omega i}{2}}$ et $z = z'e^{\omega i}$, on aura

$$b_{m+\nu} = -ie^{\frac{\omega i}{2}}(a_m + a_{m+1}e^{\omega i} + \ldots + a_{m+\nu}e^{\nu\omega i})$$

et la partie réelle de $b_{m+\nu}$ est égale à

$$\begin{aligned} & a_m \sin\frac{\omega}{2} + a_{m+1}\sin\frac{3\omega}{2} + \ldots + a_{m+\nu}\sin\frac{2\nu+1}{2}\omega \\ &= \frac{1}{\sin\frac{\omega}{2}}\left[(a_m - a_{m+1})\sin^2\frac{\omega}{2} + (a_{m+1} - a_{m+2})\sin^2\frac{2\omega}{2} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + (a_{m+\nu-1} - a_{m+\nu})\sin^2\frac{\nu\omega}{2} + a_{m+\nu}\sin^2\frac{\nu+1}{2}\omega\right], \end{aligned}$$

expression dont tous les termes ont le signe de $\sin\frac{\omega}{2}$, et $\sqrt[m]{\left|a_m \sin\frac{\omega}{2}\right|}$ tendra vers 1, pourvu que $\sin\frac{\omega}{2}$ ne soit pas nul.

On arrive, du reste, au même résultat dans le cas plus général où l'on pourra déterminer les quantités A telles que les b soient réels positifs et décroissants, $\sqrt[m]{b_m}$ tendant vers 1, b_{m-1}, b_{m-2}, ..., $b_{m-\lambda m}$ étant nuls; car on peut multiplier successivement par deux polynomes.

8. Afin d'obtenir de nouvelles applications des théorèmes établis aux § 2 et 3, nous allons calculer l'ordre de grandeur des coefficients de $\varphi_m(t)$ lorsque m devient infini, en supposant $t=\frac{p}{m}$, p étant un nombre entier qui varie avec m, de façon que t reste compris entre deux limites comprises entre 0 et 1. On a alors

$$\mathrm{L}\, t^\nu \frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)} = \sum_{x=1}^{\nu} \mathrm{L}\frac{1+\frac{x}{m}}{1+\frac{x}{p}}$$

$$= -\frac{1-t}{mt}\sum_1^\nu x + \frac{1-t^2}{2m^2t^2}\sum_1^\nu x^2 - \frac{1-t^3}{3m^3t^3}\sum_1^\nu x^3 + \ldots;$$

or

$$\frac{1-t^n}{n} < \frac{1-t^{n-1}}{n-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_1^\nu x^n < \nu\sum_1^\nu x^{n-1}.$$

Par suite, le rapport de deux termes consécutifs

$$\frac{1-t^n}{1-t^{n-1}}\,\frac{n-1}{nmt}\,\frac{\Sigma x^n}{\Sigma x^{n-1}}$$

est plus petit que $\frac{\nu}{mt} \leqq \frac{\lambda}{t} < 1$ si $\lambda < t$. On a donc

$$\mathrm{L}\, t^\nu \frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)} < -\frac{1-t}{2mt}\nu(\nu+1)$$
$$+\frac{1-t^2}{2m^2t^2}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} < -\frac{1-t}{2mt}\nu(\nu+1)(1-\alpha),$$

α pouvant être aussi petit que l'on voudra si λ est assez petit.

De même

$$\mathrm{L}\frac{1}{t^\nu}\frac{p(p-1)\ldots(p-\nu+1)}{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)} = \sum_{x=1}^{\nu-1}\mathrm{L}\frac{1-\frac{x}{p}}{1-\frac{x}{m}} = -\frac{1-t}{mt}\sum_1^{\nu-1}x - \frac{1-t^2}{2m^2t^2}\sum_1^{\nu-1}x^2 - \ldots$$

$$< -\frac{1-t}{2mt}\nu(\nu-1) < -\frac{1-t}{2mt}\nu(\nu+1)(1-\alpha),$$

pourvu que $\nu > \frac{2-\alpha}{\alpha}$.

Posons $\frac{1-t}{2t}(1-\alpha) = k$. Le coefficient de $a_{m+\nu}$ dans $\varphi_m(t)$ est plus petit que $e^{-k\frac{\nu(\nu+1)}{m}}$, et celui de $a_{m-\nu}$ est plus petit que $e^{-\frac{1-t}{2mt}\nu(\nu-1)}$, et plus petit que $e^{-k\frac{\nu(\nu+1)}{m}}$ si $\nu > \frac{2-\alpha}{\alpha}$.

La somme des coefficients qui suivent celui de $a_{m+\nu}$ est plus petite que

$$\sum_{x=\nu+1}^{\lambda m} e^{-k\frac{x(x+1)}{m}} < \int_\nu^\infty e^{-k\frac{x(x+1)}{m}}dx = e^{-\frac{k}{m}\nu(\nu+1)}\int_0^\infty e^{-\frac{k}{m}x(x+2\nu+1)}dx$$

$$< e^{-\frac{k}{m}\nu(\nu+1)}\int_0^\infty e^{-\frac{k}{m}x(2\nu+1)}dx = \frac{m}{k(2\nu+1)}e^{-\frac{k}{m}\nu(\nu+1)}.$$

On a également

$$\int_\nu^\infty e^{-k\frac{x(x+1)}{m}}dx < e^{-\frac{k}{m}\nu(\nu+1)}\int_0^\infty e^{-\frac{k}{m}x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi m}{k}}\,e^{-\frac{k}{m}\nu(\nu+1)};$$

expression qui est plus petite que la précédente si $\nu < \sqrt{\frac{m}{k\pi}} - \frac{1}{2}$.

La somme des coefficients situés au delà de celui de $a_{m-\nu}$ est plus petite que

$$\sum_{x=\nu+1}^{\lambda m} e^{-\frac{1-t}{2mt}x(x-1)} < \int_\nu^\infty e^{-\frac{1-t}{2mt}x(x-1)}dx < \int_\nu^\infty e^{-k\frac{x(x+1)}{m}}dx,$$

si $\nu \geqq \frac{2-\alpha}{\alpha}$. Mais si $0 \leqq \nu < \frac{2-\alpha}{\alpha}$, la différence des deux dernières intégrales est toujours plus petite que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\frac{1-t}{2mt}x(x-1)}\,dx - \int_0^\infty e^{-\frac{1-t}{2mt}(1-\alpha)x(x+1)}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1-t}{2mt}x(x-1)}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1-t}{2mt}(1-\alpha)x(x-1)}\,dx + \int_0^\infty e^{-\frac{1-t}{2mt}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}\,dx \\
&\quad - \int_0^\infty e^{-\frac{1-t}{2mt}(1-\alpha)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}\,dx < e^{\frac{1-t}{8mt}}\left[1 + \sqrt{\frac{\pi m t}{2(1-t)}} - e^{-\frac{1-t}{8mt}\alpha}\sqrt{\frac{\pi m t}{2(1-t)(1-\alpha)}}\right],
\end{aligned}$$

expression qui reste négative si m est assez grand.

Donc la somme des coefficients venant après celui de $a_{m-\nu}$, de même que la somme de ceux qui suivent celui de $a_{m+\nu}$ est plus petite que la plus petite des expressions $\frac{m}{k(2\nu+1)}e^{-\frac{k}{m}\nu(\nu+1)}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi m}{k}}\,e^{-\frac{k}{m}\nu(\nu+1)}$. Et la somme de tous les coefficients est plus petite que $\sqrt{\frac{\pi m}{k}}$.

Dans $\varphi_m(t)$ supposons les quantités a_n remplacées par la partie réelle a'_n de $a_n e^{-\beta i}$. Si l'on considère des termes tels que $|a'| < A$, leur somme sera plus petite que $A\sqrt{\frac{m\pi}{k}}$. Si ces termes ne sont pas compris entre $a'_{m\pm\nu}$, la somme sera plus petite que $A\,\frac{2m}{k(2\nu+1)}\,e^{-\frac{k}{m}\nu(\nu+1)}$.

9. Soit, pour une suite illimitée de valeurs de m, A_m une quantité positive, variable avec m, telle que $\frac{LA_m}{m}$ tende vers o. Supposons qu'il existe dans $\varphi_m(t)$ des termes tels que $|a'_{m\pm\nu}|\frac{\sqrt{m}}{A_m}$ reste plus petit qu'une quantité donnée. Soit ν un nombre variable avec m, que l'on peut supposer plus grand que $\sqrt{m}$; supposons qu'il existe des termes, non compris entre $a'_{m\pm\nu}$, tels que $\frac{m}{\nu^2}\,L\left|\frac{a'}{A_m}\times\frac{m}{\nu}\right|$ reste également fini. Dans le cas où $\frac{\nu}{\sqrt{m\,L\,m}}$ ne tend pas vers o, il suffit même que $\frac{m}{\nu^2}\,L\left|\frac{a'}{A_m}\right|$ reste fini. On pourra toujours choisir k assez grand, ou t assez petit, pour que la somme de tous ces termes dans $\varphi_m(t)$ soit plus petite que A_m multiplié par une quantité fixe θ aussi petite que l'on voudra.

Soit ε_m la plus grande des quantités $\frac{1}{m}\,\mathrm{L}\left|\frac{a'_{m\pm\nu}}{\mathrm{A}_m}\right|$, où $\nu \leqq \lambda m$; lorsque m devient infini, ε_m tend vers o. Si $\varepsilon_m < \frac{\mathrm{L}m}{m}$, supposons $\nu > \sqrt{\mathrm{H}m\mathrm{L}m}$, on a alors

$$\frac{m}{\nu^2}\,\mathrm{L}\left|\frac{a'}{\mathrm{A}_m}\,\frac{m}{\nu}\right| < \frac{3}{2\mathrm{H}}.$$

Si $\varepsilon_m > \frac{\mathrm{L}m}{m}$ et $\nu > m\sqrt{\mathrm{H}\varepsilon_m}$, on aura

$$\frac{m}{\nu^2}\,\mathrm{L}\left|\frac{a'}{\mathrm{A}_m}\,\frac{m}{\nu}\right| < \frac{1}{m\mathrm{H}\varepsilon_m}\left[m\varepsilon_m + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1}{\mathrm{H}\varepsilon_m}\right] < \frac{3}{2\mathrm{H}}.$$

Donc, H étant une quantité fixe, qui peut être très petite, le groupe des termes que nous considérons comprendra tous ceux pour lesquels ν est supérieure à la plus grande des deux quantités $m\sqrt{\mathrm{H}\varepsilon_m}$, $\sqrt{\mathrm{H}m\mathrm{L}m}$. On peut encore, après avoir supprimé des termes tels que $\left|\frac{a'}{\mathrm{A}_m}\sqrt{m}\right|$ ou $\frac{m}{\nu^2}\,\mathrm{L}\left|\frac{a'}{\mathrm{A}_m}\times\frac{m}{\nu}\right|$ reste fini, chercher à rendre les autres de même signe par la méthode du n° 3. Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ les valeurs absolues des nombres $\pm\nu$, qui correspondent à des changements de signe des termes $a'_{m+\nu}$ ou $a'_{m-\nu}$, que l'on a conservé entre $a_{m\pm\lambda m}$. En supposant que $\frac{q}{m}$ tende vers o, nous avons vu que l'on peut former une fonction $\psi_m(t)$ ayant tous ses termes positifs, le premier a'_m étant multiplié par le facteur

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n > \left(\frac{2}{\pi\lambda m}\right)^q \mu_1\mu_2\ldots\mu_q;$$

or

$$\mathrm{L}\mu_1 + \mathrm{L}\mu_2 + \ldots + \mathrm{L}\mu_q > \sum_{x=2}^{q} \mathrm{L}\,\frac{x}{2} > \int_2^q \mathrm{L}\,\frac{x}{2}\,dx = q\,\mathrm{L}\,\frac{q}{2} - q + 2$$

et

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n > \left(\frac{q}{\pi e\lambda m}\right)^q.$$

Mais on peut obtenir une fonction $\psi_m(t)$ pour laquelle ce premier terme aura une plus grande valeur. Soit ε une quantité qui tend vers o, mais aussi lentement que l'on voudra, par exemple $\varepsilon = \frac{1}{Lm}$ ou $\frac{1}{L(Lm)}$. Les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ étant rangés par ordre de grandeur croissante, formons la suite $\frac{q}{\mu_q}, \frac{q-1}{\mu_{q-1}}, \ldots, \frac{1}{\mu_1}$. Soit h le nombre de ces quantités supérieures à ε, et $\frac{\nu}{\mu_\nu}$ la première qui est plus grande que ε, de sorte que $\nu \geqq h$. Aux $q-h$ valeurs de μ telles que $\frac{n}{\mu_n} \leqq \varepsilon$ faisons correspondre l'arc $\omega_1 = \frac{\pi}{2q} \times \frac{n}{\mu_n}$; alors $\mu\omega$ reste plus petit que $\frac{\pi}{2}$, et $\Sigma\omega \leqq (q-h)\frac{\pi}{q}\varepsilon < \pi\varepsilon$. Aux h autres valeurs de μ, faisons correspondre l'arc $\omega_1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{\nu}$, ce qui donne

$$\mu_n\omega_1 = \frac{\pi}{2}\varepsilon\frac{\mu_n}{\nu} < \frac{\pi}{2}\frac{\mu_n}{\mu_\nu} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \Sigma\omega < \frac{h}{\nu}\pi\varepsilon < \pi\varepsilon.$$

Ainsi $\Sigma\omega$ tend vers o, et $\mu\omega_1$ reste plus petit que $\frac{\pi}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{L}\cos\alpha &> \sum{}' \mathrm{L}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{q}\right) + \sum{}'' \mathrm{L}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon\mu_n}{\nu}\right)\\ &= q\mathrm{L}\frac{2}{\pi} - (q-h)\mathrm{L}q + h\mathrm{L}\frac{\varepsilon}{\nu} + \sum{}' \mathrm{L}n + \sum{}'' \mathrm{L}\mu_n.\end{aligned}$$

Le signe $\sum'$ s'appliquant aux $q-h$ valeurs de n telles que $\frac{n}{\mu_n} \leqq \varepsilon$, le signe $\sum''$ aux h valeurs de n telles que $\frac{n}{\mu_n} > \varepsilon$. Mais $\mu_n \geqq \frac{n}{2}$ et

$$\sum{}' \mathrm{L}n + \sum{}'' \mathrm{L}\mu_n > \sum_{x=1}^{q} \mathrm{L}x - h\mathrm{L}2 > q\mathrm{L}q - q - h\mathrm{L}2,$$

$$\sum \mathrm{L}\cos\alpha > -q\left(1 + \mathrm{L}\frac{\pi}{2}\right) + h\mathrm{L}\frac{q\varepsilon}{2\nu}$$

et

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n > \left(\frac{2}{\pi e}\right)^q \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^h > \left(\frac{\varepsilon}{\pi e}\right)^q.$$

a'_m étant supposé positif, $\psi'_m(t)$ sera plus grand que

$$a'_m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^h\left(\frac{2}{\pi e}\right)^q - \theta A_m,$$

et l'on sera sûr que le point $z = 1$ est singulier si l'on peut déterminer ε tendant vers o, de façon que $\frac{a'_m}{A_m}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^h\left(\frac{2}{\pi e}\right)^q$ ne tende pas vers o, c'est-à-dire si $\frac{1}{h}\left(L\frac{a'_m}{A_m} - q\,L\frac{\pi e}{2}\right)$ augmente indéfiniment, par des valeurs positives. Cela a lieu, en particulier, si $\frac{1}{q}L\frac{a'}{A_m}$ augmente indéfiniment.

On peut encore appliquer ici les principes du n° 5. On supprimera d'abord des termes tels que $\left|\frac{a}{A_m}\sqrt{m}\right|$ ou $\frac{m}{\nu^2}L\left|\frac{a}{A_m}\times\frac{m}{\nu}\right|$ reste fini.

Pour chaque valeur de m, on déterminera l'arc β de façon que q soit minimum. Si $\frac{1}{q}L\left|\frac{a_m}{A_m}\cos(\omega_m - \beta)\right|$ augmente indéfiniment, pour une suite illimitée de valeurs de m, le point $z = 1$ est singulier. Dans le cas où $\frac{h}{q}$ tend vers o, le point $z = 1$ est encore singulier si $\frac{1}{q}L\left|\frac{a_m}{A_m}\cos(\omega_m - \beta)\right|$ reste plus grand qu'une quantité supérieure à $L\frac{\pi e}{2}$.

10. Si, après avoir supprimé des termes tels que $\left|\frac{a}{A_m}\sqrt{m}\right|$ ou $\frac{m}{\nu^2}L\left|\frac{a}{A_m}\times\frac{m}{\nu}\right|$ reste fini, il ne reste dans $\varphi_m(t)$ que q termes, $\frac{q}{m}$ tendant vers o, en faisant la substitution $z = z'e^{\omega i}$, les parties réelles des termes conservés dans la nouvelle série auront au plus q changements de signe; et, si $\frac{1}{q}L\left|\frac{a_m}{A_m}\right|$ augmente indéfiniment, le point $z = e^{\omega i}$ sera singulier quel que soit ω.

On arrive même à des résultats plus généraux en remarquant que, pour former ici la fonction $\psi_m(t)$ du n° 3, il suffit de faire correspondre à chaque valeur de μ un seul arc ω, et l'arc $\alpha = \frac{\pi}{2} \mp \mu\omega$, de façon que $\cos(\alpha \pm \mu\omega) = 0$. $a_{m\pm\mu}$ représentant les termes conservés dans $\varphi_m(t)$, supposons les μ divisés en trois groupes : le premier tel que $\sum\frac{1}{\mu}$ tende vers o; à ces valeurs nous ferons correspondre l'arc $\omega = \frac{\pi}{2\mu}$, de sorte que $\cos\alpha = 1$, $\Sigma\omega$ tendant vers o. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{q'}$ étant les autres valeurs rangées par ordre de grandeur, le second groupe comprendra les $q'-h$ valeurs de μ telles que $\frac{n}{\mu_n} \leqq \varepsilon$, et le troisième les h valeurs telles que $\frac{n}{\mu_n} > \varepsilon$. ε est encore une quantité qui tend vers o lorsque m devient infini. Pour les termes du troisième groupe nous prendrons

$$\omega = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{q'}$$

et pour le second

$$\omega = \frac{\pi}{2q'} \times \frac{n}{\mu_n}.$$

Alors $\mu\omega$ reste plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et $\sum \omega < \frac{\pi}{2}\varepsilon$ tend vers o. On a encore

$$\sum \mathrm{L}\cos\alpha = \sum{}' \mathrm{L}\sin\frac{\pi}{2}\frac{n}{q'} + \sum{}'' \mathrm{L}\sin\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon\mu_n}{q'} > \sum{}' \mathrm{L}\frac{n}{q'} + \sum{}'' \mathrm{L}\frac{\varepsilon\mu_n}{q'} > h\mathrm{L}\frac{\varepsilon}{2} - q',$$

$$\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \ldots,\ \cos\alpha_{q'} > e^{-q'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^h > \left(\frac{\varepsilon}{2e}\right)^{q'}.$$

La fonction $\psi_m(t)$ se réduit alors au seul terme $a_m\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_{q'}$ et les termes négligés ont une somme plus petite que $\theta\mathrm{A}_m$.

Si $\frac{1}{h}\left(\mathrm{L}\left|\frac{a_m}{\mathrm{A}_m}\right| - q'\right)$ augmente indéfiniment, on pourra prendre

$$\mathrm{L}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{h}\left(\mathrm{L}\theta' + q' - \mathrm{L}\left|\frac{a_m}{\mathrm{A}_m}\right|\right).$$

Alors ε tend vers o et l'on peut supposer

$$\theta < \theta' = \left|\frac{a_m}{\mathrm{A}_m}\right|\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^h \times e^{-q'} \qquad \text{et} \qquad |\psi_m(t)| > \mathrm{A}_m(\theta' - \theta).$$

Tous les points du cercle de convergence sont alors singuliers. Cela a lieu, en particulier, si $\frac{1}{q'}\mathrm{L}\left|\frac{a_m}{\mathrm{A}_m}\right|$ augmente indéfiniment; ou si, $\frac{h}{q'}$ tendant vers o, $\frac{1}{q'}\mathrm{L}\left|\frac{a_m}{\mathrm{A}_m}\right|$ reste supérieur à une quantité plus grande que 1.

Tous les points du cercle de convergence sont encore singuliers si $h = 0$, $\mathrm{L}\left|\frac{a_m}{\mathrm{A}_m}\right| - q'$ restant supérieur à une quantité donnée qui peut être négative; et enfin, dans le cas où $q' = 0$, $\left|\frac{a_m}{A_m}\right|$ restant supérieur à une quantité donnée plus grande que o.

On peut remarquer que $q' = 0$ dans le cas particulier où les termes que l'on conserve se réduisent à la forme $\sum a_\nu z^{c_\nu}$, $\frac{c_{\nu+1} - c_\nu}{\mathrm{L}c_\nu}$ augmentant indéfiniment avec c_ν. Car si $m = c_\nu$, $a_{c_{\nu'}}$ étant un terme quelconque de $\varphi_m(t)$, $\frac{c_{\nu'+1} - c_{\nu'}}{\mathrm{L}c_\nu}$ augmente aussi indéfiniment, et l'on pourra trouver une quantité A qui augmentera indéfiniment avec ν, telle que, pour ces termes, $|c_{\nu\pm p} - c_\nu| > \mathrm{A}p\mathrm{L}c_\nu$; et comme $|c_{\nu\pm p} - c_\nu| < \lambda c_\nu$ on aura

$$p < \frac{\lambda c_\nu}{\mathrm{A}\mathrm{L}c_\nu},$$

par suite,

$$\sum \frac{1}{\mu} < \frac{2}{\mathrm{A}\mathrm{L}c_\nu}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}\right)$$
$$< \frac{2}{\mathrm{A}\mathrm{L}c_\nu}(1 + \mathrm{L}p) < \frac{2}{\mathrm{A}}\left[1 + \frac{1 + \mathrm{L}\lambda - \mathrm{L}(\mathrm{A}\mathrm{L}c_\nu)}{\mathrm{L}c_\nu}\right],$$

expression qui tend vers o si A augmente indéfiniment en même temps que c_ν.

Cela a lieu, par exemple, si $\frac{c_\nu}{\nu\mathrm{L}\nu}$ augmente constamment et indéfiniment avec ν; ou encore si $\frac{c_\nu}{\mathrm{L}\nu}$ croît constamment, $\frac{c_\nu}{\nu\overline{\mathrm{L}\nu}^2}$ augmentant indéfiniment.

Considérons, par exemple, la série

$$\sum z^n . e^{\omega_n t} . e^{n^\beta \cos(2\pi n^\gamma)},$$

où $0 < \beta < 1$, γ étant un nombre commensurable plus petit que 1 et supérieur aux deux quantités $1 - \frac{\beta}{2}$, $\frac{3 + \beta}{4}$.

Formons $\varphi_m(t)$ pour les valeurs de m telles que m^γ soit un nombre entier, et soit

$$\mathrm{A}_m = |a_m| = e^{m^\beta};$$

$\sqrt[m]{|a_m|}$ tend alors vers 1. N étant un nombre entier quelconque, divisons les termes a en deux groupes, le premier comprenant les termes

a_n tels que

$$N^{\frac{1}{\gamma}} - \tfrac{1}{2} < n < N^{\frac{1}{\gamma}} + \tfrac{1}{2}.$$

Pour les termes du second groupe on aura

$$N^{\frac{1}{\gamma}} + \tfrac{1}{2} \leqq n \leqq (N+1)^{\frac{1}{\gamma}} - \tfrac{1}{2}$$

et si N est assez grand, pourvu que $\gamma' < \gamma$, on aura

$$N + \frac{\gamma'}{2} n^{\gamma-1} < n^\gamma < N + 1 - \frac{\gamma'}{2} n^{\gamma-1},$$

$$\cos(2\pi n^\gamma) < 1 - 2\gamma'^2 n^{-2(1-\gamma)};$$

de sorte que pour ces termes

$$\left|\frac{a_{m\pm\nu}}{A_m}\right| < e^{(m+\nu)^\beta - 2\gamma'^2 (m+\nu)^{\beta-2(1-\gamma)} - m^\beta} < e^{\beta\nu m^{\beta-1} - 2\gamma'^2 m^{\beta-2(1-\gamma)}},$$

et $\left|\frac{a_{m\pm\nu}}{A_m}\sqrt{m}\right|$ tendra vers o si $\frac{\nu}{m^{2\gamma-1}}$ reste plus petit qu'une quantité plus petite que $\frac{2\gamma^2}{\beta}$.

D'autre part, dans $\varphi_m(t)$,

$$|a| < e^{m^\beta (1+\lambda)^\beta} \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{\nu^2} \mathrm{L}\left|\frac{a}{A_m}\cdot\frac{m}{\nu}\right|$$

restera fini si $\frac{m^{1+\beta}}{\nu^2}$ reste fini. Et si $\gamma > \frac{3+\beta}{4}$, on ne devra conserver dans $\varphi_m(t)$ que les termes du premier groupe, qui sont de la forme $a_N z^{c_N}$, où $\frac{c_N}{N L N}$ augmente constamment et indéfiniment avec N.

Par suite, tous les points du cercle de convergence sont singuliers.

11. Pour appliquer les résultats qui précèdent, on est conduit à étudier l'ordre de grandeur des coefficients a_m de la série, lorsque m devient infini. Considérons d'abord les termes de module plus grand que 1; $\frac{L|a_m|}{m}$ tendant vers o, on peut poser $\frac{L|a_m|}{m} = \frac{1}{m^\alpha}$, α restant positif si m est assez grand. $\frac{LL|a_m|}{Lm} = 1 - \alpha$ reste plus petit que 1, mais peut cependant tendre vers 1, dans le cas où α tend vers o, de façon

que m^α devienne infini, par exemple, si $|a_m| = e^{\frac{m}{Lm}}$; de sorte que, pour les termes de module plus grand que 1, $\frac{LL|a_m|}{Lm}$ a une limite supérieure, pour $m = \infty$, comprise entre 1 et $-\infty$.

Soit β cette limite supérieure, que nous supposerons d'abord comprise entre 0 et 1. On pourra trouver une suite illimitée de valeurs de m telles que

$$e^{m^{\beta+\varepsilon}} > |a_m| > e^{m^{\beta-\varepsilon}};$$

$\frac{L|a_m|}{m^\beta}$ a une limite supérieure qui peut être comprise entre 0 et ∞. Soit θ cette limite supérieure, que nous supposerons finie; il existera des termes en nombre infini tels que

$$e^{(\theta+\varepsilon)m^\beta} > |a_m| > e^{(\theta-\varepsilon)m^\beta}.$$

De même, si $|a_m|$ reste plus petit que 1, on pourra poser

$$\frac{L\left|\frac{1}{a_m}\right|}{m} = \frac{1}{m^\alpha},$$

et $\frac{LL\left|\frac{1}{a_m}\right|}{Lm} = 1 - \alpha$ aura une limite inférieure, pour $m = \infty$, comprise entre 1 et $-\infty$. Soit β cette limite inférieure, que nous supposons positive; on aura pour une infinité de termes

$$e^{-m^{\beta-\varepsilon}} > |a_m| > e^{-m^{\beta+\varepsilon}},$$

et $\frac{L|a_m|}{m^\beta}$ aura, pour $m = \infty$, une limite supérieure θ qui peut être comprise entre 0 et $-\infty$.

Dans ces deux cas, nous formerons $\varphi_m(t)$ pour une suite de valeurs de m telles que

$$e^{(\theta+\varepsilon)m^\beta} > |a_m| > e^{(\theta-\varepsilon)m^\beta},$$

θ étant la limite supérieure de $\frac{L|a_m|}{m^\beta}$, qui peut être positive ou négative. Soit $A_m = e^{\theta' m^\beta}$, $\theta' < \theta$. Pour tous les termes de $\varphi_m(t)$, on a

$$\frac{1}{m} L\left|\frac{a_{m\pm\nu}}{A_m}\right| < [(\theta+\varepsilon)(1+\lambda)^\beta - \theta']\, m^{\beta-1},$$

et la quantité ε_m du n° 9 est de l'ordre $m^{\beta-1}$; on peut, par conséquent, dans $\varphi_m(t)$, supposer $\nu < \mathrm{H}m^{\frac{1+\beta}{2}}$. On peut, en outre, supprimer des termes tels que $\mathrm{L}\,|a_{m\pm\nu}| - \theta' m^\beta + \frac{1}{2}\mathrm{L}m$ reste fini, ou négatif. Si $\theta - \theta'$ est choisi assez petit, on peut ainsi supprimer tous les termes tels que $\frac{\mathrm{L}\,|a_n|}{n^\beta}$ ait une limite supérieure $\theta'' < \theta$.

Soit ω un arc variable avec m, et q le nombre des changements de signe de la partie réelle de $a_n e^{-\omega i}$ pour les termes conservés de $\varphi_m(t)$. Si

$$\frac{1}{m^\beta}\mathrm{L}\left|\omega_m - \omega - \frac{\pi}{2} \pm k\pi\right|$$

tend vers o, ainsi que

$$\frac{q}{m^\beta},$$

$\frac{1}{q}\mathrm{L}\left|\frac{a_m}{\mathrm{A}_m}\cos(\omega_m - \omega)\right|$ augmente indéfiniment, et le point $z = 1$ est singulier.

Cela a lieu en particulier si

$$\frac{1}{m^\beta}\sum_{m-\nu}^{m+\nu}|\omega_{n+1} - \omega_n|$$

tend vers o, ω_n correspondant aux seuls termes conservés. Et comme $\nu < \mathrm{H}m^{\frac{1+\beta}{2}}$, on peut être sûr que le point $z = 1$ est singulier si, pour ces termes,

$$|\omega_{n'} - \omega_n|\, n^{\frac{1-\beta}{2}}$$

tend vers o, $a_{n'}$ et a_n étant deux termes consécutifs.

De même, si

$$\frac{1}{m^\beta}\sum_{m-\nu}^{m+\nu}|\omega_{n+1} - \omega_n - \omega|$$

tend vers o, le point $z = e^{-\omega i}$ est singulier, $a_{n'}$ et a_n étant deux termes consécutifs,

$$\sum^{n}|\omega_{n+1} - \omega_n - \omega|$$

est ici remplacé par

$$|\omega_{n'} - \omega_n - (n - n')\omega + 2k\pi|,$$

cet arc étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Ces conditions peuvent être remplies pour plusieurs points et, dans certains cas, pour tout le cercle de convergence. m étant toujours tel que $\frac{L|a_m|}{m^\beta}$ tende vers θ, supposons supprimés des termes tels que $\frac{L|a_n|}{n^\beta}$ ait une limite supérieure $\theta' < \theta$ et ceux tels que

$$\frac{m}{\nu^2}\left[L|a| - \theta' m^\beta + L\frac{m}{\nu}\right]$$

reste fini, ce qui permet de supposer $\nu < Hm^{\frac{1+\beta}{2}}$. Divisons les termes qui restent dans $\varphi_m(t)$ en trois groupes comme au n° 10. On sera sûr que tous les points du cercle de convergence sont singuliers si $\frac{q'}{m^\beta}$ reste plus petit qu'une quantité plus petite que $\theta - \theta'$, $\frac{h}{m^\beta}$ tendant vers o, pour une suite illimitée des valeurs de m considérées. Ce qui a lieu, par exemple, si l'on peut choisir $\theta - \theta'$ assez petit pour que $\frac{q'}{m^\beta}$ tende vers o.

Supposons, par exemple, que, après avoir supprimé des termes tels que $\frac{L|a_n|}{n^\beta}$ ait une limite supérieure plus petite que θ, on sépare les autres en deux groupes, dont le premier sera de la forme $\Sigma a_\nu z^{c_\nu}$,

$$\frac{c_{\nu+1} - c_\nu}{Lc_\nu}$$

augmentant indéfiniment. On en conclura que tous les points du cercle de convergence sont singuliers si, pour une suite de valeurs de m telles que $\frac{L|a_m|}{m^\beta}$ tende vers θ, il ne reste entre $a_{m\pm Hm^{\frac{1+\beta}{2}}}$ que q' termes du second groupe, $\frac{q'}{m^\beta}$ tendant vers o. θ peut ici représenter la limite supérieure de $\frac{L|a_n|}{n^\beta}$ pour une suite partielle de valeurs de n comprises entre $m - \lambda m$ et $m + \lambda m$.

Considérons, comme application, la série

$$\sum z^n e^{\omega_n i} e^{n^\beta \cos^{2n}(\pi n^\gamma)},$$

où $0 < \beta < 1$, γ étant un nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, que nous supposerons commensurable pour simplifier les raisonnements. Si n^γ est entier,

$$L|a_n| = n^\beta.$$

Si l'on forme, comme au n° 10, des termes tels que

$$N^{\frac{1}{\gamma}} + \tfrac{1}{2} \leqq n \leqq (N+1)^{\frac{1}{\gamma}} - \tfrac{1}{2},$$

on en déduit

$$\cos^{2n}(\pi n^\gamma) < (1 - \tfrac{1}{2}\gamma'^2 n^{2(\gamma-1)})^{2n} < e^{-\gamma'^2 n^{2\gamma-1}},$$

qui tend vers 0, et pour ces termes $\frac{L|a_n|}{n^\beta}$ a pour limite supérieure 0, pour $n = \infty$; les autres termes sont tels que

$$N^{\frac{1}{\gamma}} - \tfrac{1}{2} < n < N^{\frac{1}{\gamma}} + \tfrac{1}{2};$$

si $n = c_N$, $\frac{c_{N+1} - c_N}{L c_N}$ augmente indéfiniment, et $\frac{L|a_n|}{n^\beta}$ a pour limite supérieure 1. Tous les points du cercle de convergence sont donc singuliers.

Si $\frac{LL|a_m|}{Lm}$ a pour limite supérieure 1, $\theta = 0$. On peut alors supprimer des termes tels que $\frac{LL|a_m|}{Lm}$ ait une limite supérieure plus petite que 1, et si entre a_m et $a_{m+\lambda m}$ il reste q termes, $\frac{q}{m}$ tendant vers 0, tous les points du cercle de convergence sont singuliers.

12. Si $\frac{LL|a_n|}{Ln}$ a pour limite supérieure 0, $\frac{L|a_n|}{Ln}$ aura une limite supérieure qui peut être comprise entre 0 et $+\infty$. De même, si, $|a_n|$

restant plus petit que 1, $\frac{\mathrm{LL}\left|\frac{1}{a_n}\right|}{\mathrm{L}n}$ a pour limite inférieure 0, $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{\mathrm{L}n}$ pourra avoir une limite supérieure comprise entre 0 et $-\infty$.

En général, supposons que $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{\mathrm{L}n}$ ait une limite supérieure β comprise entre $-\infty$ et $+\infty$; de sorte que, pour une suite de valeurs de m, on ait

$$m^{\beta+\varepsilon} > |a_m| > m^{\beta-\varepsilon}.$$

Soit $A_m = m^{\beta'}$, $\beta' < \beta$. En choisissant $\beta - \beta'$ assez petit, on pourra supprimer dans $\varphi_m(t)$ tous les termes tels que $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{\mathrm{L}n}$ ait une limite supérieure $\beta'' < \beta - \frac{1}{2}$. Et $\frac{m}{\nu^2}\mathrm{L}\left|\frac{a}{\mathrm{A}_m}\cdot\frac{m}{\nu}\right|$ restera fini pour $\nu \gtrequal \sqrt{\mathrm{H}m\mathrm{L}m}$, de sorte que, dans $\varphi_m(t)$, on peut supposer $\nu < \sqrt{\mathrm{H}m\mathrm{L}m}$. Si les parties réelles de $a_n e^{-\omega i}$, pour les termes qui restent, ont q changements de signe, et si $\frac{\mathrm{L}\left|\omega_m - \omega - \frac{\pi}{2} \pm k\pi\right|}{\mathrm{L}m}$ et $\frac{q}{\mathrm{L}m}$ tendent vers 0, le point $z = 1$ est singulier. Cela a lieu, en particulier, si $\frac{1}{\mathrm{L}m}\sum|\omega_{n+1} - \omega_n|$ tend vers 0, et, par suite, si $\frac{|\omega_{n'} - \omega_n|}{n' - n}\sqrt{\frac{n}{\mathrm{L}n}}$ tend vers 0, $a_{n'}$ et a_n étant deux termes consécutifs conservés. Si $\frac{1}{\mathrm{L}m}\sum|\omega_{n+1} - \omega_n - \omega|$ tend vers 0, le point $z = e^{-\omega i}$ est singulier.

Soit une suite de valeurs de m telles que $\frac{\mathrm{L}|a_m|}{\mathrm{L}m}$ tende vers β, β étant la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{\mathrm{L}n}$, au moins lorsque n reste compris entre $m - \lambda m$ et $m + \lambda m$. Supposons supprimés des termes tels que $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{\mathrm{L}n}$ ait une limite supérieure $\beta'' < \beta - \frac{1}{2}$ et ceux tels que $\frac{m}{\nu^2}\left(\mathrm{L}|a| - \beta'\mathrm{L}m + \mathrm{L}\frac{m}{\nu}\right)$ reste fini, ce qui permet de supposer $\nu < \sqrt{\mathrm{H}m\mathrm{L}m}$; puis divisons les termes qui restent en trois groupes, comme au n° 10. On sera sûr que tous les points du cercle de convergence sont singuliers si $\frac{q'}{\mathrm{L}m}$ reste plus petit qu'une quantité plus petite que $\beta - \beta'' - \frac{1}{2}$, $\frac{h}{Lm}$ tendant vers o. Ce qui a lieu, en particulier, si $\beta - \beta'' - \frac{1}{2}$ peut être choisi assez petit pour que $\frac{q'}{Lm}$ tende vers o.

C'est le cas, par exemple, de la série

$$\sum z^n e^{\omega_n i} . n^{\beta \cos^{2n}(\pi n^{\gamma})},$$

où

$$\beta > \tfrac{1}{2}, \quad 1 > \gamma > \tfrac{1}{2}.$$

On peut remarquer que le nombre $\beta + 1$ est celui qui, d'après M. Hadamard, donne l'ordre de la fonction sur le cercle de convergence. Et l'application de la méthode précédente revient à chercher les points singuliers d'ordre maximum, et les cas où tous les points du cercle de convergence sont d'ordre $\beta + 1$. On voit également que cet ordre n'est fini que dans le cas où $\frac{\mathrm{LL}|a_m|}{\mathrm{L}m}$ a pour limite supérieure o; ou si $|a_m|$ reste plus petit que 1, lorsque $\frac{\mathrm{LL}\left|\frac{1}{a_m}\right|}{\mathrm{L}m}$ a pour limite inférieure o. Dans les autres cas, qui semblent devoir être considérés comme plus généraux, l'ordre sur le cercle de convergence est égal à $\pm\infty$.

13. Une fonction étant donnée, si on la développe en série suivant les puissances de $z - a$, a étant arbitraire, il n'y aura en général qu'un seul point singulier sur le cercle de convergence, et le prolongement analytique est possible, sauf dans des cas extrêmement particuliers; mais si l'on suppose les coefficients a de la série $\sum a_n z^n$ donnés arbitrairement, avec la seule condition que le rayon de convergence ne soit ni nul ni infini, les cas où le prolongement analytique est impossible sont beaucoup plus généraux, et l'on peut même se demander si les cas où la fonction peut s'étendre au delà du cercle de convergence ne doivent pas être considérés comme une exception. Pour bien préciser la question, il serait nécessaire de faire des conventions déterminées sur la façon d'apprécier l'ordre de généralité de la série et des coefficients a_n lorsque n devient très grand. Les résultats que j'ai

obtenus ne paraissent pas, du reste, de nature à résoudre cette question d'une façon définitive; mais je crois cependant devoir dès à présent la signaler en montrant jusqu'à quel point le résultat paraît probable.

Si le rayon de convergence est 1, il semble naturel de considérer comme les plus générales les séries dans lesquelles $|a_n|$ pourra avoir, lorsque n est très grand, les plus grandes variations possibles. On aura alors des séries pour lesquelles $\frac{\mathrm{LL}|a_n|}{\mathrm{L}n}$ aura une limite supérieure β comprise entre 0 et 1, $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{n^\beta}$ ayant pour limite supérieure θ. Supposons séparés les termes tels que $\frac{\mathrm{L}|a_n|}{n^\beta}$ reste supérieur à $\theta' < \theta$; il semble naturel de considérer comme le plus général le cas où le nombre des termes de ce groupe, compris entre a_n et $a_{n'}$ est infiniment petit par rapport à $n' - n$. On a vu que tous les points du cercle de convergence sont singuliers dans le cas où, entre $a_{n-\mathrm{H}n^{\frac{1+\beta}{2}}}$ et $a_{n+\mathrm{H}n^{\frac{1+\beta}{2}}}$, les termes de ce groupe peuvent se diviser en deux, les uns de la forme $\Sigma a_\nu z^{c_\nu}$, $\frac{c_{\nu+1} - c_\nu}{\mathrm{L}c_\nu}$ augmentant indéfiniment, dont le nombre peut être, dans cet intervalle, $\frac{\varepsilon}{\mathrm{L}n} n^{\frac{1+\beta}{2}}$, les autres en nombre εn^β.

Les séries ainsi obtenues sont déjà très générales, sans que l'on puisse les considérer comme les plus générales. Mais elles ont été formées en comparant la valeur de $\varphi_m(t)$ en un point quelconque du cercle de convergence à $e^{\theta m^\beta}$. On pourrait former des séries telles que $\varphi_m(t)$ ait en chaque point de ce cercle une valeur d'un ordre de grandeur variable, qui doivent être plus générales.

En résumé, nous venons de former des séries beaucoup plus générales que celles déjà connues, qui ne peuvent pas se prolonger analytiquement; et il y a lieu de penser que l'on peut en former d'encore plus générales. Par suite, sans pouvoir rien affirmer d'une façon définitive, il semble probable que les séries les plus générales sont celles dont le prolongement analytique est impossible.